




UKAZUJE SIĘ OD 1945 ROKU

## Problemy dynamiki obiektów infrastruktury transportowej



Badania dynamiczne taboru kolejowego. Współczynniki dynamiczne ugięć pionowych w analizie numerycznej belkowych mostów kolejowych. Oddziaływanie pojazdu na powłokę w obiektach gruntowo-powłokowych. Modelowanie analogowe w analizie jakościowej rozchodzenia się drgań. Akustyczna specyfika stalowych mostów kolejowych. Drgania płyty o średniej grubości spoczywającej na podłożu odkształcalnym pod obciążeniem impulsowym. Ruchomy oscylator na moście składanym o pośrednich podporach pływających.

# Podstawowe informacje dla Autorów artykułów

„Przegląd Komunikacyjny” publikuje artykuły związane z szeroko rozumianym transportem oraz infrastrukturą transportu. Obejmuje to zagadnienia techniczne, ekonomiczne i prawne. Akceptowane są także materiały związane z geografią, historią i socjologią transportu.

**Artykuły publikowane w „Przeglądzie Komunikacyjnym” dzieli się na: „wnoszące wkład naukowy w dziedzinę transportu i infrastruktury transportu” oraz „pozostałe”. Prosimy Autorów o deklarację (w zgłoszeniu), do której grupy zaliczyć ich prace.**

Materiały do publikacji: zgłoszenie, artykuł oraz oświadczenie Autora, należy przesyłać w formie elektronicznej na adres redakcji:

**artykuly@przeglad.komunikacyjny.pwr.wroc.pl**

W zgłoszeniu należy podać: imię i nazwisko autora, adres mailowy oraz adres do tradycyjnej korespondencji, miejsce zatrudnienia, zdjęcie, tytuł artykułu oraz streszczenie (po polsku i po angielsku) i słowa kluczowe (po polsku i po angielsku). Szczegóły przygotowania materiałów oraz wzory załączników dostępne są na stronie:

**www.przeglad.komunikacyjny.pwr.wroc.pl**

**W celu usprawnienia i przyspieszenia procesu publikacji prosimy o zastosowanie się do poniższych wymagań dotyczących nadsyłanego materiału:**

1. Tekst artykułu powinien być napisany w jednym z ogólnodostępnych programów (np. Microsoft Word). Wzory i opisy wzorów powinny być wkomponowane w tekst. Tabele należy zestawić po zakończeniu tekstu. Ilustracje (rysunki, fotografie, wykresy) najlepiej dołączyć jako oddzielne pliki. Można je także wstawić do pliku z tekstem po zakończeniu tekstu. Możliwe jest oznaczenie miejsc w tekście, w których autor sugeruje wstawienie stosownej ilustracji lub tabeli. Obowiązuje odrębna numeracja ilustracji (bez rozróżniania na rysunki, fotografie itp.) oraz tabel.
2. Całość materiału nie powinna przekraczać 12 stron w formacie Word (zalecane jest 8 stron). Do limitu stron wlicza się ilustracje załączane w odrębnych plikach (przy założeniu że 1 ilustracja = ½ strony).
3. Format tekstu powinien być jak najprostszy (nie stosować zróżnicowanych stylów, wcięć, podwójnych i wielokrotnych spacji itp.). Dopuszczalne jest pogrubienie, podkreślenie i oznaczenie kursywą istotnych części tekstu, a także indeksy górne i dolne. **Nie stosować przypisów.**
4. Nawiązania do pozycji zewnętrznych - cytaty (dotyczy również podpisów ilustracji i tabel) oznacza się numeracją w nawiasach kwadratowych [...]. Numerację należy zestawić na końcu artykułu (jako „Materiały źródłowe”). Zestawienie powinno być ułożone alfabetycznie.
5. Jeżeli Autor wykorzystuje materiały objęte nie swoim prawem autorskim, powinien uzyskać pisemną zgodę właściciela tych praw do publikacji (niezależnie od podania źródła). Kopie takiej zgody należy przesłać Redakcji.

Artykuły wnoszące wkład naukowy podlegają procedurom recenzji merytorycznych zgodnie z wytycznymi MNiSW, co pozwala zaliczyć je, po opublikowaniu, do dorobku naukowego (z punktacją przyznawaną w toku oceny czasopism naukowych – aktualnie jest to **8 punktów**).

Do oceny każdej publikacji powołuje się co najmniej dwóch niezależnych recenzentów spoza jednostki. Zasady kwalifikowania lub odrzucenia publikacji i ewentualny formularz recenzentki są podane do publicznej wiadomości na stronie internetowej czasopisma lub w każdym numerze czasopisma. Nazwiska recenzentów poszczególnych publikacji/numerów nie są ujawniane; raz w roku (w ostatnim numerze oraz na stronie internetowej) czasopismo podaje do publicznej wiadomości listę recenzentów współpracujących.

Przygotowany materiał powinien obrazować własny wkład badawczy autora. Redakcja wdrożyła procedurę zapobiegania zjawisku Ghostwriting (z „ghostwriting” mamy do czynienia wówczas, gdy ktoś wniósł istotny wkład w powstanie publikacji, bez ujawnienia swojego udziału jako jeden z autorów lub bez wymienienia jego roli w podziękowaniach zamieszczonych w publikacji). Tekst i ilustracje muszą być oryginalne i niepublikowane w innych miejscach (w tym w internecie). Możliwe jest zamieszczanie artykułów, które ukazały się w materiałach konferencyjnych i podobnych (na prawach rękopisu) z zaznaczeniem tego faktu i po przystosowaniu do wymogów publikacyjnych „Przeglądu Komunikacyjnego”.

Korespondencję inną niż artykuły do recenzji prosimy kierować na adres: **listy@przeglad.komunikacyjny.pwr.wroc.pl**

Redakcja pisma oferuje objęcie patronatem medialnym konferencji, debat, seminariów itp. Szczegóły na: <http://przeglad.komunikacyjny.pwr.wroc.pl/patron.html>  
Ceny są negocjowane indywidualnie w zależności od zakresu zlecenia. Możliwe są atrakcyjne upusty. Patronat obejmuje:

- ogłaszanie przedmiotowych inicjatyw na łamach pisma,
- zamieszczanie wybranych referatów / wystąpień po dostosowaniu ich do wymogów redakcyjnych,
- publikację informacji końcowych (podsumowania, apele, wnioski),
- kolportaż powyższych informacji do wskazanych adresatów.

**www.przeglad.komunikacyjny.pwr.wroc.pl**

## Ramowa oferta dla „Sponsora strategicznego” czasopisma Przegląd Komunikacyjny

Sponsor strategiczny zawiera umowę z wydawcą czasopisma na okres roku kalendarzowego z możliwością przedłużenia na kolejne lata. Uprawnienia wydawcy do zawierania umów posiada SITK O. Wrocław.

Przegląd Komunikacyjny oferuje dla sponsora strategicznego następujące świadczenia:

- zamieszczenie logo sponsora w każdym numerze,
- zamieszczenie reklamy sponsora w jednym, kilku lub we wszystkich numerach,
- publikacja jednego lub kilku artykułów sponsorowanych,
- publikacja innych materiałów dotyczących sponsora,
- zniżki przy zamówieniu prenumeraty czasopisma.

Możliwe jest także zamieszczenie materiałów od sponsora na stronie internetowej czasopisma.

Przegląd Komunikacyjny ukazuje się jako miesięcznik.

Szczegółowy zakres świadczeń oraz detale techniczne (formaty, sposób i terminy przekazania) są uzgadniane indywidualnie z Pełnomocnikiem ZO Wrocław SITK.

Prosimy o kontakt z: dr hab. inż. Maciej Kruszyna na adres mailowy: **redakcja@przeglad.komunikacyjny.pwr.wroc.pl**

Cena za świadczenia na rzecz sponsora uzależniana jest od uzgodnionych szczegółów współpracy. Zapłata może być dokonana jednorazowo lub w kilku ratach (na przykład kwartalnych). Część zapłaty może być w formie zamówienia określonej liczby prenumerat czasopisma.





Na okładce: Train, PEXELS

## Szanowni Czytelnicy!

Wrześniowy numer czasopisma *Przeгляд Komunikacyjny* zawiera siedem artykułów, które łączy wspólny motyw tematyczny. Wszystkie artykuły dotyczą zagadnień dynamiki konstrukcji, które są związane bezpośrednio lub pośrednio z obiektami infrastruktury transportowej, głównie kolejowej.

W pierwszym artykule opisano techniki pomiarowe stosowane w badaniach dynamicznych taboru kolejowego. Uwagę skupiono na pomiarach oddziaływań w strefie kontaktu koła z szyną. Drugi artykuł dotyczy zespolonych mostów kolejowych z torem podsypkowym charakteryzującym się losowymi nierównościami szyn. W publikacji przedstawiono wyniki analiz numerycznych w zakresie współczynników dynamicznych ugięć w środku rozpiętości przeszły pięciu obiektów mostowych. Przedmiotem kolejnego artykułu są badania obiektów gruntowo-powłokowych obciążonych pojazdami drogowymi i kolejowymi. Sformułowano w nim wnioski podkreślające odmienną efektywność oddziaływania taboru kolejowego na obiekty gruntowo-powłokowe i typowe mosty stalowe. W czwartej publikacji podjęto temat zastosowania metody modelowania analogowego do opisu procesu rozprzestrzeniania się drgań w ośrodku ciągłym, na przykład w podłożu gruntowym dróg samochodowych czy kolejowych. Rozważania ogólne zilustrowano przykładem analizy jakościowej drgań swobodnych innego układu transportowego, tj. przewodu jezdni sieci trakcyjnej. W piątym artykule przedstawiono ciekawe wyniki pomiarów hałasu w otoczeniu czterech stalowych mostów kolejowych różniących się zasadniczo rodzajem konstrukcji. Podano ogólne zalecenia dotyczące projektowania cichych mostów.

Ostatnie dwa artykuły mają charakter odmienny od poprzednich. Zawierają analityczno-numeryczne rozwiązania dwóch zagadnień teoretycznych z zakresu dynamiki konstrukcji. Prezentowane rozwiązania mogą być wykorzystane do testowania zaawansowanych obliczeń realnych konstrukcji inżynierskich, modelowanych przy użyciu MES.

Tematyka artykułów zebranych w tym numerze jest stosunkowo rzadko poruszana na łamach *Przeglądu Komunikacyjnego*, co sprawia, że z tym większą przyjemnością zapraszam Państwa do lektury.

**dr hab. inż. Danuta Bryja**  
**prof. nadzw. w Katedrze Mostów i Kolei**

W numerze

<b>Badania dynamiczne taboru kolejowego</b> Andrzej Zbieć, Grzegorz Wysocki	2
<b>Współczynniki dynamiczne ugięć pionowych w analizie numerycznej belkowych mostów kolejowych</b> Monika Podworna	7
<b>Oddziaływanie pojazdu na powłokę w obiektach gruntowo-powłokowych</b> Czesław Machelski	12
<b>Modelowanie analogowe w analizie jakościowej rozchodzenia się drgań</b> Eligiusz Mieloszyk, Sławomir Grulkowski	18
<b>Akustyczna specyfika stalowych mostów kolejowych</b> Lucjan Janas	22
<b>Drgania płyty o średniej grubości spoczywającej na podłożu odkształcalnym pod obciążeniem impulsowym</b> Wacław Szcześniak, Magdalena Ataman	26
<b>Ruchomy oscylator na moście składanym o pośrednich podporach pływających</b> Wacław Szcześniak, Magdalena Ataman	30

### Wydawca:

Stowarzyszenie Inżynierów i Techników  
Komunikacji Rzeczpospolitej Polskiej  
00-043 Warszawa, ul. Czackiego 3/5  
[www.sitk-rp.org.pl](http://www.sitk-rp.org.pl)

### Redaktor Naczelny:

Antoni Sztybel

### Redakcja:

Krzysztof Gasz, Igor Gisterek, Bartłomiej Krawczyk,  
Maciej Kruszyna (Z-ca Redaktora Naczelnego),  
Agnieszka Kuniczuk - Trzciniowicz (Redaktor językowy),  
Piotr Mackiewicz (Sekretarz), Wojciech Puła (Redaktor  
statystyczny), Wiesław Spuziak, Robert Wardęga,  
Czesław Wolek

### Adres redakcji do korespondencji:

Poczta elektroniczna:  
[redakcja@przeгляд.komunikacyjny.pwr.wroc.pl](mailto:redakcja@przeгляд.komunikacyjny.pwr.wroc.pl)

### Poczta „tradycyjna”:

Piotr Mackiewicz, Maciej Kruszyna  
Politechnika Wrocławska,  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław  
Faks: 71 320 45 39

### Rada naukowa:

Marek Ciesielski (Poznań), Antanas Klivavičius (Wilno),  
Jozef Komačka (Žilina), Elżbieta Marciszewska (Warszawa),  
Bohuslav Novotny (Praga), Andrzej S. Nowak (Lincoln,  
Nebraska), Tomasz Nowakowski (Wrocław), Victor V. Rybkin  
(Dniepropietrowsk), Marek Sitarz (Katowice), Wiesław Starowicz  
(Kraków), Hans-Christoph Thiel (Cottbus), Krystyna Wojewódzka-  
Król (Gdańsk), Elżbieta Załoga (Szczecin), Andrea Zuzulova  
(Bratysława)

### Rada programowa:

Mirosław Antonowicz, Dominik Borowski, Leszek Krawczyk,  
Marek Krużyński, Leszek W. Mindur, Andrzej Żurkowski

### Deklaracja o wersji pierwotnej czasopisma

Główną wersją czasopisma jest wersja papierowa. Na stronie internetowej czasopisma dostępne są pełne wersje artykułów oraz streszczenia w języku polskim (od 2010) i angielskim (od 2016).

Czasopismo jest umieszczone na liście Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego (8 pkt. za artykuł recenzowany).

Redakcja zastrzega sobie prawo dokonywania zmian w materiałach nie podlegających recenzji.

Artykuły opublikowane w „Przeglądzie Komunikacyjnym” są dostępne w bazach danych 20 bibliotek technicznych oraz są indeksowane w bazach:  
BAZTECH: <http://baztech.icm.edu.pl>  
Index Copernicus: <http://indexcopernicus.com>

### Prenumerata:

Szczegóły i formularz zamówienia na stronie:

[www.przeгляд.komunikacyjny.pwr.wroc.pl](http://www.przeгляд.komunikacyjny.pwr.wroc.pl)

Obecna Redakcja dysponuje numerami archiwalnymi począwszy od 4/2010.

Numerzy archiwalne z lat 2004-2009 można zamawiać w Oddziale krakowskim SITK,  
ul. Siostrzana 11, 30-804 Kraków,  
tel./faks 12 658 93 74, [mrowinska@sitk.org.pl](mailto:mrowinska@sitk.org.pl)

### Druk:

HARDY Design, 52-131 Wrocław, ul. Buforowa 34a  
Przemysław Wołczuk, [przem@dodo.pl](mailto:przem@dodo.pl)

### Reklama:

Dział Marketingu: [sitk.baza@gmail.com](mailto:sitk.baza@gmail.com)

Nakład: 800 egz.

# Badania dynamiczne taboru kolejowego

## Dynamic research of rolling stock



**Andrzej Zbiec**

Mgr inż.

Instytut Kolejnictwa

azbiec@ikolej.pl



**Grzegorz Wysocki**

Mgr inż.

Instytut Kolejnictwa

qwysocki@ikolej.pl

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono rozwój metod badawczych z zakresu badań dynamicznych taboru kolejowego w ujęciu historycznym oraz genezę dzisiejszych badań dynamiki i bezpieczeństwa jazdy oraz oddziaływania na tor z uwzględnieniem wartości dopuszczalnych dla poszczególnych parametrów. Omówiono rozwijane przez Instytut Kolejnictwa techniki pomiarowe mające sprostać pomiarom podczas jazdy sił  $Q$  (pionowej) i  $Y$  (poprzecznej) w strefie kontaktu koła z szyną. Wymieniono podstawowe założenia badań dynamicznych na sieci kolejowej. Przedstawiono metody obróbki danych pomiarowych i oceny wyników, zaprezentowano przykładowe wyniki w postaci graficznej.

**Słowa kluczowe:** Transport; Pojazdy szynowe; Dynamika

**Abstract:** The paper presents the development of research methods in the field of dynamic research of rolling stock in historical perspective as well as the genesis of today's dynamics and safety studies and impact on the track, taking into account the admissible values for particular parameters. Measuring techniques developed by the Railway Research Institute to measure  $Q$  (vertical) and  $Y$  (transverse) forces in the wheel-rail contact area has been discussed. Basic assumptions of dynamic tests on the railway network were mentioned. The methods of measuring data processing and the evaluation of results as well as examples of graphical results were presented.

**Keywords:** Transport; Rail Vehicles; Dynamics

### Rozwój metod badawczych

Zagadnienia dotyczące badań dynamiki jazdy na przestrzeni lat były już przez autorów poruszane [1]. Jedną z dziedzin, będących już od wielu lat przedmiotem badań w pasażerskich pojazdach szynowych, było badanie oddziaływania drgań wynikających z poruszania się taboru kolejowego na odczucia pasażerów (początkowo bez uwzględniania czasu narażenia na oddziaływanie drgań). Koleje zrzeszone w UIC stosowały w tym celu wyznaczenie współczynnika spokojności biegu  $W_z$  będącego kombinacją częstotliwości i amplitudy drgań dla wszystkich częstotliwości dyskretnych, określonych za pomocą szybkiej transformaty Fouriera (FFT). Obliczoną wartość współczynnika spokojności biegu  $W_z$  oceniano wg tab. 1.

Badanie spokojności biegu za pomocą określania współczynnika  $W_z$  stało się historycznym pierwowzorem dla badań:

- komfortu jazdy pasażerów według Karty UIC 513 [2] i normy EN 12299 [3], a sam współczynnik  $W_z$  został

zastąpiony parametrem  $N_{MV}$  (w metodzie uproszczonej) lub parametrami  $N_{VA}$  i  $N_{VD}$  (w metodzie pełnej); narażenia maszynisty na oddziaływanie drgań (wg normy PN-EN 14253 [4] oraz dwóch rozporządzeń [5] i [6]);

- dynamiki i bezpieczeństwa jazdy oraz oddziaływania na tor (początkowo wg Karty UIC 518 [7], a obecnie wg normy PN-EN 14363 [8]).

Pierwsze dwa badania dotyczą oddziaływania drgań na organizm ludzki (pasażerów i maszynistów) i są bezpośrednią kontynuacją badania spokojności biegu za pomocą współczynnika  $W_z$ , natomiast trzecie badanie – zgodnie z tytułem karty UIC – dotyczy oceny dynamicznego zachowania się taboru kolejowego pod względem bezpieczeństwa, jakości biegu i oddziaływania na tor. W miarę rozwoju metod badawczych powołane przez UIC (Union Internationale des Chemins de Fer – Międzynarodowy Związek Kolejowy; od 1922 r.) ORE (Office des Recherches et d'Essais – Ośrodek Badań i Prób; od 1951 r.), zastąpione później przez ERRI (European

Rail Research Institute – Europejski Kolejowy Instytut Badawczy; od 1992 r.) – jako organy pomocnicze do centralnego prowadzenia badań i doświadczeń, których wiele zarządów kolejowych nie mogło podjąć ze względu na wysokie koszty takich badań lub ze względu na brak odpowiednich laboratoriów badawczych – prowadziły prace nad opracowaniem metod oceny zachowania się nowobudowanego lub modernizowanego taboru kolejowego podczas jazdy po prostej i w łukach o różnych promieniach. Chodziło o wpływ prędkości jazdy, parametrów toru (luzu w torze, nierówności pionowych i poprzecznych, przechyłki itd.) oraz parametrów samego pojaz-

**Tab. 1.** Ocena oddziaływania drgań na podstawie współczynnika spokojności biegu  $W_z$

$W_z$	Ocena
1	ledwo zauważalne
2	wyraźnie odczuwalne
2,5	silne, ale wciąż komfortowe
3	silne, nieprzyjemne, ale wciąż tolerowane
3,25	bardzo nieprzyjemne
3,5	wyjątkowo nieprzyjemne, dokuczliwe, nietolerowane przy dłuższym oddziaływaniu
4	bardzo dokuczliwe, przy dłuższym oddziaływaniu szkodliwe

du (budowa wózka, usprężynowanie, budowa nadwozia itd.) na jego ocenę podczas jazdy. Pierwsza, tymczasowa wersja karty UIC 518 została wydana w lipcu 1995 r. i zawierała tylko niektóre ze stosowanych dzisiaj parametrów oceny. Jednakże od samego początku były one podzielone na trzy grupy:

- parametry związane z bezpieczeństwem jazdy;
- parametry związane z oddziaływaniem na tor;
- parametry związane ze spokojnością biegu pojazdu.

Na podstawie Karty UIC 518 powstała norma PN-EN 14363, której pierwsze wydanie miało miejsce w 2005 roku (jako EN), jako tłumaczenie w języku polskim w 2007 r., a obecnie obowiązujące jest z roku 2016. Należy tutaj wspomnieć, że norma PN-EN 14363 została uzupełniona normą PN-EN 16235 [9] o warunki zwolnienia niektórych wagonów towarowych z badań liniowych zgodnie z EN 14363. Obowiązujące Techniczne Specyfikacje Interoperacyjności powołując się na normy europejskie przyczyniają się do częstszej ich aktualizacji. Ostatnie wydanie karty UIC 518 jest z października 2009 r.

W tabeli 2 zestawiono parametry oceny z pierwszego wydania Karty UIC 518 (lipiec 1995 r.) i ostatniego – 4 wydania (październik 2009 r.).

Symbole użyte w tabeli oznaczają:

Y – poprzeczna siła oddziaływania koła na tor,

Q – pionowa siła oddziaływania koła na tor,

H – poprzeczna siła oddziaływania zestawu kołowego na tor,

$Y_{qst}^*$  – quasi-statyczna poprzeczna siła oddziaływania koła na tor w łukach,

$Q_{qst}^*$  – quasi-statyczna pionowa siła oddziaływania koła na tor w łukach,

$B_{qst}^*$  – quasi-statyczna siła oddziaływania na tor w łukach,

$\ddot{y}^*$  – przyspieszenie poprzeczne na pudle pojazdu,

$\ddot{y}_s^+$  – przyspieszenie poprzeczne na wózku pojazdu,

$\ddot{y}_s^*$  – przyspieszenie poprzeczne na pudle pojazdu,

$\ddot{y}_q^*$  – quasi-statyczne przyspieszenie poprzeczne na pudle pojazdu,

$\ddot{y}_{qst}^*$  – quasi-statyczne przyspieszenie poprzeczne na pudle pojazdu,

$\ddot{z}^*$  – przyspieszenie pionowe na pudle pojazdu,

Tab. 2. Porównanie parametrów z I i IV wydania Karty UIC 518

Parametr	I wydanie	IV wydanie	
		metoda normalna	metoda uproszczona
bezpieczeństwo jazdy	$\Sigma Y, Y/Q$	$\Sigma Y, Y/Q, rms(\Sigma Y), \eta$	$H, \ddot{z}_s^*, rmsH, rms \ddot{y}_s, \ddot{y}_s^+, \ddot{y}_s^*, rms \ddot{y}_s^+$
oddziaływanie na tor	$Q, Y_{qst}, Q_{qst}$	$Q, Y_{qst}, Q_{qst}, B_{qst}$	
dynamiczne zachowanie się pojazdu	$\ddot{y}^*, \ddot{z}^*, rms \ddot{y}^*, rms \ddot{z}^*$		$\ddot{y}_q^*, \ddot{z}_q^*, rms \ddot{y}_q^*, rms \ddot{z}_q^*, \ddot{y}_{qst}^*$

$\ddot{z}_s^*$  – przyspieszenie pionowe na pudle pojazdu,

$\ddot{z}_q^*$  – quasi-statyczne przyspieszenie pionowe na pudle pojazdu,

$\eta$  – współczynnik przewrócenia pojazdu,

rms – wartość średniokwadratowa danej wielkości.

Pierwsze wydanie nie zawierało podziału na normalną i uproszczoną metodę badawczą. Podział taki pojawił się od drugiego wydania (październik 1999 r.).

Normalna metoda pomiarowa (badawcza) polega na pomiarze sił kontaktowych Q i Y w strefie kontaktu koła z szyną oraz przyspieszeń na pozostałych zestawach kołowych/wózkach i na pudle pojazdu.

Uproszczona metoda pomiarowa polega na pomiarze poprzecznych sił H działających pomiędzy zestawem kołowym a maźnicą oraz przyspieszeń na pozostałych zestawach kołowych/wózkach i na pudle pojazdu.

zastosowanie tej metody pokazano na rys. 1. Drugi wariant metody uproszczonej polega na wyłącznym pomiarze przyspieszeń.

O wyborze metody decydują kryteria opisane w karcie UIC czy normie, takie jak: innowacyjność konstrukcji pojazdu, rodzaj układu biegowego, maksymalna prędkość, statyczny nacisk na oś, dopuszczalny niedobór przechyłki.

Zmierzone wielkości przed dalszą obróbką podlegają filtrowaniu odpowiednimi filtrami. Wartości dopuszczalne poszczególnych parametrów, za normą PN-EN 14363, podano w tabeli 3.

Zmierzony niedobór przechyłki. Zmierzone wielkości przed dalszą obróbką podlegają filtrowaniu odpowiednimi filtrami. Wartości dopuszczalne poszczególnych parametrów, za normą PN-EN 14363, podano w tabeli 3.

Zmierzony niedobór przechyłki. Zmierzone wielkości przed dalszą obróbką podlegają filtrowaniu odpowiednimi filtrami. Wartości dopuszczalne poszczególnych parametrów, za normą PN-EN 14363, podano w tabeli 3.

Zmierzony niedobór przechyłki. Zmierzone wielkości przed dalszą obróbką podlegają filtrowaniu odpowiednimi filtrami. Wartości dopuszczalne poszczególnych parametrów, za normą PN-EN 14363, podano w tabeli 3.

Zmierzony niedobór przechyłki. Zmierzone wielkości przed dalszą obróbką podlegają filtrowaniu odpowiednimi filtrami. Wartości dopuszczalne poszczególnych parametrów, za normą PN-EN 14363, podano w tabeli 3.

Zmierzony niedobór przechyłki. Zmierzone wielkości przed dalszą obróbką podlegają filtrowaniu odpowiednimi filtrami. Wartości dopuszczalne poszczególnych parametrów, za normą PN-EN 14363, podano w tabeli 3.

Zmierzony niedobór przechyłki. Zmierzone wielkości przed dalszą obróbką podlegają filtrowaniu odpowiednimi filtrami. Wartości dopuszczalne poszczególnych parametrów, za normą PN-EN 14363, podano w tabeli 3.

Zmierzony niedobór przechyłki. Zmierzone wielkości przed dalszą obróbką podlegają filtrowaniu odpowiednimi filtrami. Wartości dopuszczalne poszczególnych parametrów, za normą PN-EN 14363, podano w tabeli 3.

Zmierzony niedobór przechyłki. Zmierzone wielkości przed dalszą obróbką podlegają filtrowaniu odpowiednimi filtrami. Wartości dopuszczalne poszczególnych parametrów, za normą PN-EN 14363, podano w tabeli 3.

Zmierzony niedobór przechyłki. Zmierzone wielkości przed dalszą obróbką podlegają filtrowaniu odpowiednimi filtrami. Wartości dopuszczalne poszczególnych parametrów, za normą PN-EN 14363, podano w tabeli 3.

Zmierzony niedobór przechyłki. Zmierzone wielkości przed dalszą obróbką podlegają filtrowaniu odpowiednimi filtrami. Wartości dopuszczalne poszczególnych parametrów, za normą PN-EN 14363, podano w tabeli 3.

Zmierzony niedobór przechyłki. Zmierzone wielkości przed dalszą obróbką podlegają filtrowaniu odpowiednimi filtrami. Wartości dopuszczalne poszczególnych parametrów, za normą PN-EN 14363, podano w tabeli 3.

Zmierzony niedobór przechyłki. Zmierzone wielkości przed dalszą obróbką podlegają filtrowaniu odpowiednimi filtrami. Wartości dopuszczalne poszczególnych parametrów, za normą PN-EN 14363, podano w tabeli 3.

Zmierzony niedobór przechyłki. Zmierzone wielkości przed dalszą obróbką podlegają filtrowaniu odpowiednimi filtrami. Wartości dopuszczalne poszczególnych parametrów, za normą PN-EN 14363, podano w tabeli 3.

Zmierzony niedobór przechyłki. Zmierzone wielkości przed dalszą obróbką podlegają filtrowaniu odpowiednimi filtrami. Wartości dopuszczalne poszczególnych parametrów, za normą PN-EN 14363, podano w tabeli 3.

prowadziło prace nad wdrożeniem techniki pomiarowej, polegającej na pomiarze podczas jazdy sił Q (pionowej) i Y (poprzecznej) w strefie kontaktu koła z szyną. Próby wdrożenia pomiarów sił kontaktowych Q i Y na styku koła i szyny rozpoczęto w IK w 1977 r. (wówczas Centralny Ośrodek Badań i Rozwoju Techniki Kolejnictwa). Początkowo pomiar ten opierał się na pomiarze naprężeń na tarczy koła, wywołanych odkształceniami tarczy pod działaniem sił Q i Y. Metoda ta, wdrożona w 1980 r., wówczas okazała się mało dokładna i charakteryzowała się zafalowaniem sygnału wyjściowego, zależnością odczytu wartości siły Q od kąta obrotu zestawu oraz zauważalnego wpływu siły Q na siłę Y.

Kolejnym krokiem wdrożenia pomiarów sił kontaktowych Q i Y była podjęta w 1982 r. próba określenia tych sił na podstawie pomiarów naprężeń na szprychach kół szprychowych. Ze względu na duży wpływ odczytu sił Q na Y i odwrotnie, ta metoda nie znalazła zastosowania.

W 1987 roku IK (wówczas jako Centrum Naukowo-Techniczne Kolejnictwa) nawiązało współpracę z instytutem badawczym Niemieckich Kolei Federalnych w Minden, a następnie wykorzystując opracowaną dokumentację, rozpoczęło wdrażanie metody pomiaru sił kontaktowych Q i Y na podstawie pomiaru momentów gnących na osi zestawu kołowego [10].

W celu umożliwienia odczytu i zapisu mierzonych sił kontaktowych, w Laboratorium Badań Taboru powstało odpowiednie oprzyrządowanie elektroniczne, oparte początkowo na analogowym przetwarzaniu sygnałów pomiarowych, a następnie od 2001

W celu umożliwienia odczytu i zapisu mierzonych sił kontaktowych, w Laboratorium Badań Taboru powstało odpowiednie oprzyrządowanie elektroniczne, oparte początkowo na analogowym przetwarzaniu sygnałów pomiarowych, a następnie od 2001

W celu umożliwienia odczytu i zapisu mierzonych sił kontaktowych, w Laboratorium Badań Taboru powstało odpowiednie oprzyrządowanie elektroniczne, oparte początkowo na analogowym przetwarzaniu sygnałów pomiarowych, a następnie od 2001

W celu umożliwienia odczytu i zapisu mierzonych sił kontaktowych, w Laboratorium Badań Taboru powstało odpowiednie oprzyrządowanie elektroniczne, oparte początkowo na analogowym przetwarzaniu sygnałów pomiarowych, a następnie od 2001

W celu umożliwienia odczytu i zapisu mierzonych sił kontaktowych, w Laboratorium Badań Taboru powstało odpowiednie oprzyrządowanie elektroniczne, oparte początkowo na analogowym przetwarzaniu sygnałów pomiarowych, a następnie od 2001

W celu umożliwienia odczytu i zapisu mierzonych sił kontaktowych, w Laboratorium Badań Taboru powstało odpowiednie oprzyrządowanie elektroniczne, oparte początkowo na analogowym przetwarzaniu sygnałów pomiarowych, a następnie od 2001

W celu umożliwienia odczytu i zapisu mierzonych sił kontaktowych, w Laboratorium Badań Taboru powstało odpowiednie oprzyrządowanie elektroniczne, oparte początkowo na analogowym przetwarzaniu sygnałów pomiarowych, a następnie od 2001

W celu umożliwienia odczytu i zapisu mierzonych sił kontaktowych, w Laboratorium Badań Taboru powstało odpowiednie oprzyrządowanie elektroniczne, oparte początkowo na analogowym przetwarzaniu sygnałów pomiarowych, a następnie od 2001

W celu umożliwienia odczytu i zapisu mierzonych sił kontaktowych, w Laboratorium Badań Taboru powstało odpowiednie oprzyrządowanie elektroniczne, oparte początkowo na analogowym przetwarzaniu sygnałów pomiarowych, a następnie od 2001

W celu umożliwienia odczytu i zapisu mierzonych sił kontaktowych, w Laboratorium Badań Taboru powstało odpowiednie oprzyrządowanie elektroniczne, oparte początkowo na analogowym przetwarzaniu sygnałów pomiarowych, a następnie od 2001

W celu umożliwienia odczytu i zapisu mierzonych sił kontaktowych, w Laboratorium Badań Taboru powstało odpowiednie oprzyrządowanie elektroniczne, oparte początkowo na analogowym przetwarzaniu sygnałów pomiarowych, a następnie od 2001

W celu umożliwienia odczytu i zapisu mierzonych sił kontaktowych, w Laboratorium Badań Taboru powstało odpowiednie oprzyrządowanie elektroniczne, oparte początkowo na analogowym przetwarzaniu sygnałów pomiarowych, a następnie od 2001

W celu umożliwienia odczytu i zapisu mierzonych sił kontaktowych, w Laboratorium Badań Taboru powstało odpowiednie oprzyrządowanie elektroniczne, oparte początkowo na analogowym przetwarzaniu sygnałów pomiarowych, a następnie od 2001



1. Pomiar sił H wg metody uproszczonej (fot. Grzegorz Wysocki)

Tab. 3. Wartości dopuszczalne poszczególnych parametrów wg PN-EN 14363

Parametr	Wartość dopuszczalna
Suma sił prowadzących $\Sigma Y$	$k_1(10+20Q_0/3)^{**1}$
Iloraz siły prowadzącej i pionowej $Y/Q$	$k_1 = 0,85$ – wagony towarowe $k_1 = 1$ – pozostałe pojazdy
Niestabilność (RMS $\Sigma Y$ )	$(\Sigma Y)/2$
Siły poprzeczne $H$	$k_2(10+20Q_0/3)^{**1}$ $k_2 = 0,75$ – wag. tow. próżne $k_2 = 0,8$ – wag. tow. ładowne $k_2 = 0,9$ – pozostałe pojazdy
Niestabilność (RMS $H$ )	$H/2$
Siła pionowa na koło $Q$	
- dla prostych i w łukach o dużych promieniach	
· $V_{lim} \leq 160$ km/h	$\min z (90+Q_0)$ lub $200$ kN <sup>**1</sup>
· $160$ km/h < $V_{lim} \leq 200$ km/h	$\min z (90+Q_0)$ lub $190$ kN <sup>**1</sup>
· $200$ km/h < $V_{lim} \leq 250$ km/h	$\min z (90+Q_0)$ lub $180$ kN <sup>**1</sup>
· $250$ km/h < $V_{lim} \leq 300$ km/h	$\min z (90+Q_0)$ lub $170$ kN <sup>**1</sup>
· $V_{lim} > 300$ km/h	$\min z (90+Q_0)$ lub $160$ kN <sup>**1</sup>
- dla łuków o małych promieniach $250m < R < 600m$	$\min z (90+Q_0)$ lub $200$ kN <sup>**1</sup>
- dla wszystkich odcinków i $V_{lim} \leq 100$ km/h i $225$ kN < $P_0 \leq 250$ kN <sup>**3</sup>	$\min z (90+Q_0)$ lub $210$ kN <sup>**1</sup>
Quasi-statyczna siła prowadząca $Y_{qst}$	$60$ kN
Quasi-statyczna siła pionowa na koło $Q_{qst}$	
· dla $P_0 \leq 225$ kN <sup>**3</sup>	$145$ kN
· dla $225$ kN < $P_0 \leq 250$ kN <sup>**3</sup>	$155$ kN
Współczynnik przewrócenia pojazdu (dla $l_{adm} > 165$ mm) – $\eta$	$1$
Przyspieszenia poprzeczne na ramie wózka $(\ddot{y}_s^+)^{lim}$	$12 - Mb/S^{**2}$
Przyspieszenie poprzeczne na pudle $(\ddot{y}_s^*)^{lim}$	
- dla pojazdów trakcyjnych i taboru pasażerskiego	
· na prostych i w łukach o dużych promieniach	$3$ m/s <sup>2</sup>
· na łukach o małych promieniach $400m < R < 600m$	$2,8$ m/s <sup>2</sup>
· na łukach o małych promieniach $250m < R < 400m$	$2,6$ m/s <sup>2</sup>
- dla wagonów towarowych	
· dla pojazdów wózkowych	$3$ m/s <sup>2</sup>
· dla pojazdów bezwózkowych dla $P_0 \geq 200$ kN <sup>**3</sup>	$3$ m/s <sup>2</sup>
· dla pojazdów bezwózkowych dla $60$ kN < $P_0 < 200$ kN <sup>**3</sup>	$4,43 - P_0/140$
· dla pojazdów bezwózkowych dla $P_0 \leq 60$ kN <sup>**3</sup>	$4$ m/s <sup>2</sup>
Przyspieszenia pionowe na pudle $(\ddot{z}_s^*)^{lim}$	
- dla pojazdów trakcyjnych i taboru pasażerskiego	
· z usprężynowaniem dwustopniowym	$3$ m/s <sup>2</sup>
· z usprężynowaniem jednostopniowym	$5$ m/s <sup>2</sup>
· z usprężynowaniem pneumatycznym bez powietrza	$5$ m/s <sup>2</sup>
- dla wagonów towarowych	$5$ m/s <sup>2</sup>
Stabilność na ramie wózka RMS $(\ddot{y}_s^+)^{lim}$	$(\ddot{y}_s^+)^{lim}/2$
Stabilność na maźnicy dla pojazdów bezwózkowych RMS $(\ddot{y}_s^*)^{lim}$	$5$ m/s <sup>2</sup>
Przyspieszenie poprzeczne na pudle $(\ddot{y}_q^*)^{lim}$	
- lokomotywy (bez manewrowych) i wagony silnikowe	$2,5$ m/s <sup>2</sup>
- lokomotywy manewrowe	-
- zespoły trakcyjne i wagony pasażerskie	$1,5$ m/s <sup>2</sup>
- wózkowe wagony towarowe próżne	$< 3$ m/s <sup>2</sup> (wart. wstępna)
- wózkowe wagony towarowe ładowne	$< 3,5$ m/s <sup>2</sup>
- bezwózkowe wagony towarowe próżne	-
- bezwózkowe wagony towarowe ładowne	-
Przyspieszenie pionowe na pudle $(\ddot{z}_q^*)^{lim}$	
- lokomotywy (bez manewrowych) i wagony silnikowe	$2,5$ m/s <sup>2</sup>
- lokomotywy manewrowe	-
- zespoły trakcyjne i wagony pasażerskie	$2,0$ m/s <sup>2</sup>
- wózkowe wagony towarowe próżne	$< 5$ m/s <sup>2</sup> (wart. wstępna)
- wózkowe wagony towarowe ładowne	$< 5,0$ m/s <sup>2</sup>
- bezwózkowe wagony towarowe próżne	-
- bezwózkowe wagony towarowe ładowne	-

\*\*1)  $Q_0$  – nacisk na koło [kN]; \*\*2) Mb – masa wózka [t]; \*\*3)  $P_0$  – statyczny nacisk na oś [kN]

roku – na przetwarzaniu cyfrowym. Do obróbki mierzonych sygnałów sił i przyspieszeń zakupiono specjalistyczne

oprogramowanie komputerowe, stworzone na podstawie wytycznych opracowanych przez Pracownię Obliczeń

i Rozwoju Techniki Pomiarowych w Laboratorium Badań Taboru. Równolegle w Instytucie Kolejnictwa opracowano i wykonano nowe głowice montowane na osiach pomiarowych zestawów kołowych (rys. 2). W głowicach tych zastosowano nowego typu, bezobsługowe kolektory poprawiające jakość transmisji sygnałów.

## Podstawa i założenia badań dynamicznych

Badanie dynamiki i bezpieczeństwa jazdy oraz oddziaływania na tor pojazdów według Karty UIC 518 i normy PN-EN 14363 jest podstawowym badaniem, informującym o bezpieczeństwie jazdy i wzajemnym oddziaływaniu pojazdu szynowego z torem. Badania przeprowadzane są podstawowo w dwóch stanach ładowności (próżnym i ładownym), a dla pojazdów wyposażonych w usprężynowanie powietrzne – dodatkowo w stanie zdegradowanym (tzn. sprężyny powietrzne bez powietrza). Uzyskane w wyniku obróbki statystycznej wyniki porównywane są z wielkościami kryterialnymi. Zgodnie z wymaganiami ww. karty i normy, dla uzyskania pełnego obrazu nt. zachowania się pojazdu, badania dynamiki jazdy należy prowadzić na następujących odcinkach toru: prosta i łuki o bardzo dużym promieniu, łuki o dużym promieniu, łuki o małym promieniu (400 ÷ 600 m) i łuki o bardzo małym promieniu (250 ÷ 400 m). Badania należy prowadzić na torach o pochyleniu toków szynowych 1:20 oraz 1:40. Pełna procedura pomiarowa zakłada przebadanie pojazdu kolejowego na wszystkich ww. odcinkach i pochyleniach toków szynowych oraz różnych stanach ładowności. W pewnych przypadkach dopuszczalne jest prowadzenie badań na wybranych odcinkach lub pochyleniach toków szynowych albo w jednym stanie ładowności. Ze względu na możliwość porównywalności badań wykonanych na różnych sieciach kolejowych oraz ujednoczenia warunków badań zdefiniowano parametry określające stan utrzymania toru, na którym prowadzone są badania, ponieważ stan toru i jego parametry geometryczne rzutują w zasadniczy sposób na ruch pojazdu szynowego i poziom drgań mechanicznych występujący na badanym obiekcie. Do oceny stanu toru zde-

**Tab. 4.** Maksymalne wartości nierówności pionowych i poprzecznych

Maksymalna wartość nierówności QN3 [mm]		
	pionowych	poprzecznych
$v \leq 120$ km/h	16	13,0
$120 < v \leq 160$ km/h	13	10
$160 < v \leq 200$ km/h	12	9
$200 < v \leq 300$ km/h	10	8

**Tab. 5.** Wartości odchyień standardowych nierówności pionowych i poprzecznych

Odchylenie standardowe nierówności [mm]				
	pionowych		poprzecznych	
	min	max	min	max
$v \leq 120$ km/h	1,80	2,50	1,05	1,45
$120 < v \leq 160$ km/h	1,40	1,85	0,75	1,00
$160 < v \leq 200$ km/h	1,15	1,60	0,70	0,90
$200 < v \leq 230$ km/h	1,05	1,45	0,65	0,80
$230 < v \leq 300$ km/h	0,85	1,15	0,50	0,65

**Tab. 6.** Zestawienie sposobu obróbki sygnałów

Wielkość	Filtr	Obróbka statystyczna dla sekcji		Obróbka statystyczna dla odcinka pomiarowego		
		Metoda obliczeń	Kwantyl	Kwantyl		
				Prosta	łuk o dużym R	łuk o małym R
(ΣY)	20 Hz Średnia ruchoma: - droga 2 m - poskok ≤ 0,5 m	Metoda obliczeń	Kwantyl $F_1 = 0,15\%$ $F_2 = 99,85\%$	Dla każdego zestawu suma $l_x(F_1) \text{ i } x_j(F_2)$	Dla każdego zestawu suma - prawy łuk $x_j(F_2)$ - lewy łuk $l_x(F_1)$	
Y/Q				-	Suma dla zewnętrznych kół - prawy łuk $x_j(F_2)$ - lewy łuk $l_x(F_1)$	
H				-	Suma dla zewnętrznych kół - prawy łuk $x_j(F_2)$ - lewy łuk $l_x(F_1)$	
$\dot{y}_s$	10 Hz			Dla każdego zestawu suma $l_x(F_1) \text{ i } x_j(F_2)$	Dla każdego zestawu suma - prawy łuk $x_j(F_2)$ - lewy łuk $l_x(F_1)$	
$\ddot{y}_s$	6 Hz		$F_1 = 0,15\%$ $F_2 = 99,85\%$	Dla każdego końca suma $l_x(F_1) \text{ i } x_j(F_2)$	Dla każdego końca suma - prawy łuk $x_j(F_2)$ - lewy łuk $l_x(F_1)$	
$\ddot{z}_s$	0,4÷10 Hz			-	Dla każdego końca suma - prawy łuk $x_j(F_2)$ - lewy łuk $l_x(F_1)$	
$Y_{qst}$	>20 Hz		$F_0 = 50\%$	-	Dla każdego zestawu suma - prawy łuk $x_j(F_0)$ - lewy łuk $l_x(F_0)$	
$Q_{qst}$					Dla każdego zestawu suma zewnętrznych kół na łuku $x_j(F_2)$	
Q				$F_2 = 99,85\%$	Dla każdego zestawu $x_j(F_2)$ suma 1 do 4	Dla każdego zestawu suma zewnętrznych kół na łuku $x_j(F_2)$
$\ddot{y}_{q_i}$	0,4÷10 Hz		$F_1 = 0,15\%$ $F_2 = 99,85\%$	Dla każdego końca suma $l_x(F_1) \text{ i } x_j(F_2)$		

finiowano trzy parametry - QN1, QN2 i QN3, charakteryzujące nierówności pionowe i poprzeczne toru:

- QN1 - wartość nierówności, wymagająca obserwacji toru lub podjęcia środków zaradczych w ramach normalnego planu prac utrzymania toru;
- QN2 - wartość nierówności, kwalifikująca tor do szybkiego podjęcia środków zaradczych;
- QN3 - wartość nierówności, odpowiadająca jeszcze dopuszczalnemu stanowi toru, jednakże odmienna od typowej wartości, charakteryzującej stan utrzymania toru.

Pomiary wykonane na odcinkach (sekcjach) o wartości przekraczającej QN3 nie są brane do dalszej obróbki i oceny. Maksymalne wartości nierówności pionowych i poprzecznych podawane są w celach informacyjnych oraz w celu ewentualnego wyeliminowania sekcji o wartościach przekraczających QN3. Natomiast jakość toru określona jest poprzez odchylenia standardowe tych wielkości. Maksymalna wartość nierówności pionowych i poprzecznych QN3 podana jest w tabeli 4, a wartości odchyień standardowych toru, na którym należy wykonywać badania podane są w tabeli 5.



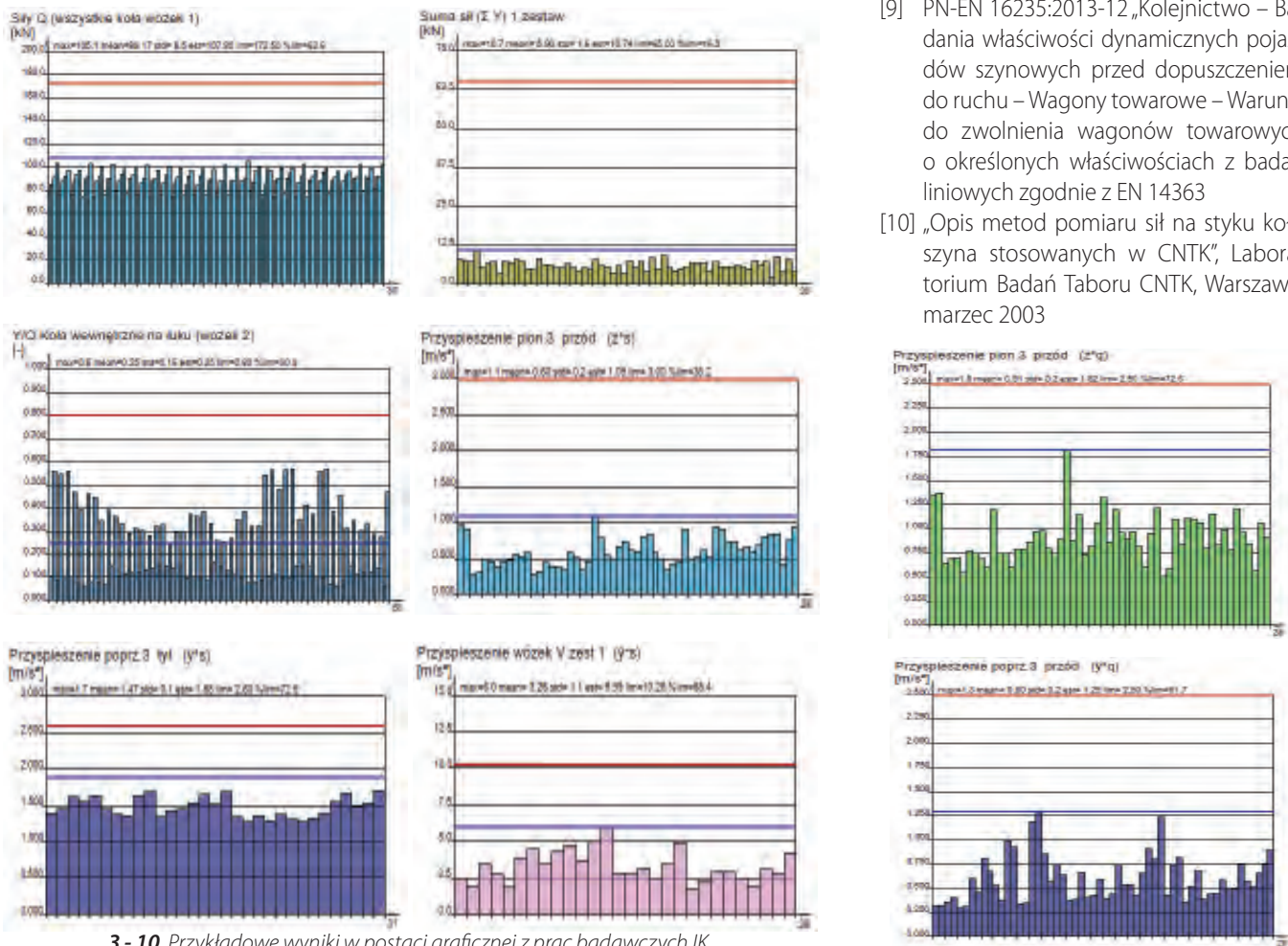
**2.** Nowe głowice do sił QY na zestawach pomiarowych Pendolino (fot. Andrzej Zbieć)

## Obróbka i ocena wyników

Zarejestrowane dane pomiarowe podawane są obróbce statystycznej. Metoda obróbki poszczególnych parametrów dokonywana jest w oparciu o tabelę nr 6. Uzyskane wyniki porównuje się z odpowiednimi wartościami kryterialnymi. Na rysunkach 3 – 10 zaprezentowano przykładowe wyniki w postaci graficznej. ◀

## Materiały źródłowe

- [1] Z. Cichocki i in. „Rozwój metod badawczych własności mechanicznych taboru w sześćdziesięcioletniej historii Instytutu Kolejnictwa”, Problemy Kolejnictwa, Zeszyt 153, s. 93-116, Warszawa 2011
- [2] Karta UIC 513 „Guidelines for evaluating passenger comfort in relation to vibration in railway vehicles”, wydanie I, 1.07.1994
- [3] PN-EN 12299:2009 „Kolejnictwo - Komfort jazdy pasażerów - Pomiary i ocena”
- [4] PN-EN 14253+A1:2011 „Drgania mechaniczne - Pomiar i obliczanie zawodowej ekspozycji na drgania o ogólnym działaniu na organizm człowieka dla potrzeb ochrony zdrowia - Wytyczne praktyczne”
- [5] Załącznik nr 2 do Rozporz. Ministra Pracy i Polityki Społecznej z dnia 29.11.2002 w sprawie najwyższych dopuszczalnych stężeń i natężeń czynników szkodliwych dla zdrowia w środowisku pracy (Dz. U. nr 217, poz. 1833 z późn. zm.)
- [6] Rozporządzenie Ministra Gospodarki i Pracy z dnia 5 sierpnia 2005 w sprawie bezpieczeństwa i higieny pracy przy pracach związanych z narażeniem na hałas lub drgania mechaniczne (Dz. U. nr 157, poz. 1318)
- [7] Karta UIC 518 „Testing and approval of railway vehicles from the point of view of their dynamic behaviour - Safety - Track fatigue - Ride quality”, wydanie IV, wrzesień 2009
- [8] PN-EN 14363:2016-04 „Kolejnictwo – Badania i symulacje modelowe właściwości dynamicznych pojazdów szynowych przed dopuszczeniem do ruchu – Badania właściwości biegowych i próby stacjonarne

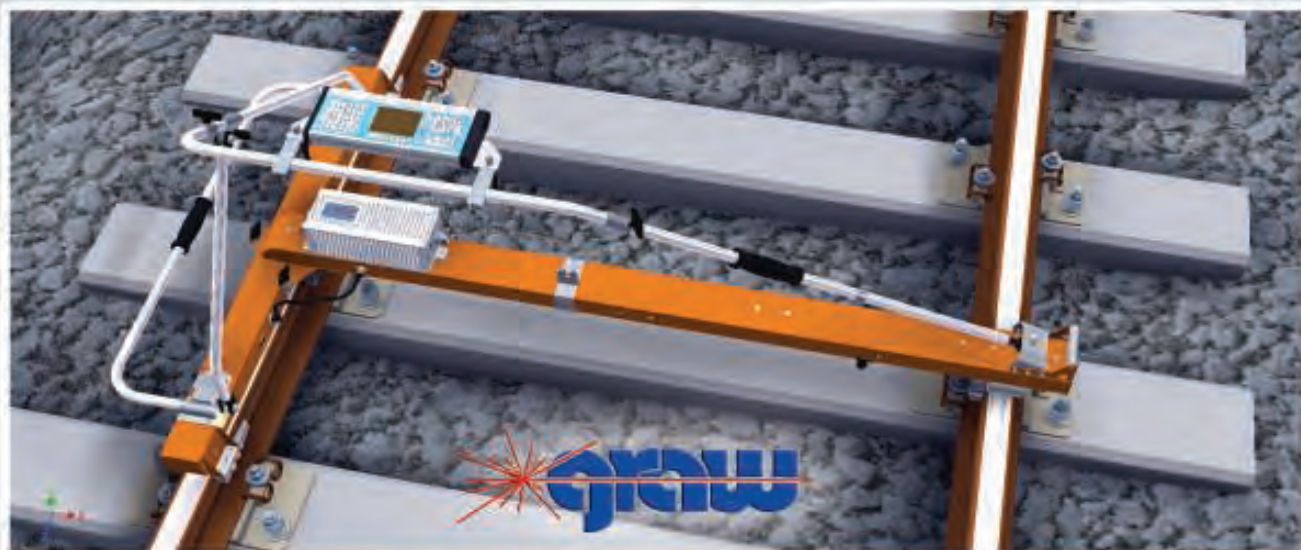


3 - 10. Przykładowe wyniki w postaci graficznej z prac badawczych IK

- [9] PN-EN 16235:2013-12 „Kolejnictwo – Badania właściwości dynamicznych pojazdów szynowych przed dopuszczeniem do ruchu – Wagony towarowe – Warunki do zwolnienia wagonów towarowych o określonych właściwościach z badań liniowych zgodnie z EN 14363
- [10] „Opis metod pomiaru sił na styku koła szyna stosowanych w CNTK”, Laboratorium Badań Taboru CNTK, Warszawa, marzec 2003

REKLAMA

## TOROMIERZ INERCYJNY iTEC Dokładny pomiar strzałek



www.graw.com



# Współczynniki dynamiczne ugięć pionowych w analizie numerycznej belkowych mostów kolejowych

## Numerical analysis of beam rail bridges - impact factors in the vertical deflection



Monika Podworna

Dr inż.

Politechnika Wrocławska, Katedra  
Mechaniki Budowli i Inżynierii  
Miejskiej

monika.podworna@pwr.edu.pl

**Streszczenie:** W pracy omówiono współczynniki ugięcia uzyskane w analizach dynamicznych układów BTT - most zespolony / nawierzchnia kolejowa podsypkowa / pociąg szybkiej (BTT). System BTT jest jednym z 5 mostów o rozpiętości od 15 m do 27 m zamodelowanych jako belki swobodnie podparte, obciążone pociągami ICE-3 poruszającymi się z dużymi prędkościami. Dwuwymiarowy, fizycznie nieliniowy model BTT uwzględnia m.in. lepkosprężyste zawieszenia pojazdów szynowych na dwuosiowych wózkach jezdnych oraz nieliniowy jednostronny kontakt zestawów kołowych z szyną według teorii Hertza, strefy dojazdowe do konstrukcji zespolonej. Układ BTT podzielono na podukłady obciążone pionowymi interakcjami przenoszonymi przez sprężyste lub lepkosprężyste oraz fizycznie liniowe lub nieliniowe więzy. Stosując równania Lagrange'a i agregację wewnętrzną podukładów dyskretyzowanych zgodnie z metodą elementów skończonych, otrzymano macierzowe równania ruchu podukładów, z jawnymi liniowymi stronami lewymi i niejawnymi nieliniowymi stronami prawymi, które scałkowano numerycznie metodą Newmarka z parametrami  $\beta_N=1/4$ ,  $\gamma_N=1/2$ . Analizy skupiają się na wpływie losowych nierówności torów na odpowiedź dynamiczną systemów BTT.

**Słowa kluczowe:** Losowe Nierówności Toru; Kolejowe Mosty Zespolone; Pociąg Dużych Prędkości

**Abstract:** The impact factors in the vertical deflection obtained in dynamic analysis of BTT systems - bridged / track structure / high speed train (BTT) - are discussed. The BTT system is one of 5 bridges spanning from 15 m to 27 m, modelled as simply supported beams loaded by ICE-3 trains traveling at high speeds. The two-dimensional, physically non-linear BTT model includes: viscoelastic suspension of rail vehicles on two independent axle bogies and non-linear one-sided wheel-rail contact springs according to Hertz theory, access zones for composite construction. The BTT system was divided into subsystems loaded with vertical interactions transmitted by elastic or viscoelastic and physically linear or nonlinear constraints. Using Lagrange equations and internal aggregation of subsystems, discretised according to the finite element method, matrix equations of motion of the subsystems were obtained, with explicit linear left sides and nonlinear implicit right sides, which were integrated numerically using the Newmark method with parameters  $\beta_N=1/4$ ,  $\gamma_N=1/2$ . The analysis focus on the effect of random track irregularities on the dynamic response of BTT systems.

**Keywords:** Random Vertical Track Irregularities; Composite Steel-Concrete Railway Bridge; High-Speed Train

W Polsce kolejowe mosty zespolone są projektowane zgodnie z normami [13 – 16] lub [6 - 7] oraz aktami prawnymi [23 - 24], specyfikacjami wymiennymi m.in. przez prof. K. Towpika [26]. Mosty na liniach kolejowych dużych prędkości (KDP) muszą być zaprojektowane (nowe), lub zmodernizowane (istniejące) w celu zapewnienia bezpieczeństwa ruchu pociągów oraz komfortu pasażerów. Przeprowadzone badania literatury potwierdziły, że jeden z głównych czynników wpływających na odpowiedź dynamiczną kolejowych konstrukcji inżynierskich to nieprawidłowości w nawierzchni kolejowej - nierówności torów [8,

27, 29], jak również nierównomierna sztywność podsypki ma wpływ na wyniki badań [1, 4, 5].

### Modelowanie układu BTT

Układ BTT - most / nawierzchnia kolejowa / pociąg szybkiej (Bridge / Track structure / high-speed Train) składa się ze swobodnie podpartego przęsła mostu zespolonego, płyt przejściowych, toru bezstykowego dostosowanego do dużych prędkości eksploatacyjnych i szybkiej pociągu pasażerskiego. Przyjęto płaski model liniowy geometrycznie i nieliniowy fizycznie, składający się z podu-

kładów oddzielnie zamodelowanych. Rozpatruje się skończenie długi odkształcalny tor bezstykowy, obejmujący strefy pozaprzęsłowe, strefy przejściowe i strefę mostową. Tor poza tymi strefami jest nieodkształcalny i prostoliniowy.

Typoszereg mostów SCB (Symmetric Composite Bridge), szczegółowo opisany w pracy [21], został opracowany przez zespół M. Podworna i prof. M. Kłasztorny, a następnie zweryfikowany przez prof. Cz. Machelskiego. Typoszereg, uwzględniający wskazówki projektowe zawarte w pracy Karlikowski, Madaj, Wołowicki [10], składa się z 5 obiektów (SCB-15, SCB-18, SCB-

21, SCB-24, SCB-27) o kodach informujących o rozpiętości teoretycznej przęsła. Każdy z mostów ma w pełni symetryczny przekrój poprzeczny, przęsło jednotorowe, swobodnie podparte o prostoliniowej poziomej osi toru nieobciążonego.

Model pociągu odzwierciedla niemiecki pociąg szybkojezdny trzeciej generacji ICE-3 (Inter City Express) o maksymalnej prędkości eksploatacyjnej 300 km/h. Pociąg zbudowany jest przez Siemens Company, składa się z 8 pojazdów [9]. Pojazd szynowy został zamodelowany jako płaski rozszerzony model Matsuury mający dwa dwuosiowe wózki jezdne z liniowo lepkosprężystymi zawieszzeniami pierwszego i drugiego stopnia. Do mas modelujących zestawy kołowe zostały zamocowane pionowe jednostronne sprężyny o sztywności kontaktowej Hertza – patrz Lei, Noda [11]. Pojedynczy pojazd jest układem dyskretnym o 10 stopniach swobody - patrz Podwórna, Klasztorny [22].

Przyjęto, że płaszczyzna drgań pionowych układu BTT pokrywa się z płaszczyzną symetrii podłużnej układu. Model fizyczny układu most / tor jest symetryczny względem środka rozpiętości konstrukcji mostowej, z wyjątkiem nierówności toru, któ-

re są losowe – patrz rys. 1. Pionowe nierówności toru są opisane funkcją przestrzenną  $r(x)$ , która jest stacjonarnym ergodycznym procesem Gaussa opisanym przez funkcję gęstości widmowej mocy (PSD- Power Spectral Density) – patrz [22]:  $S_{rr}(\Omega)$ , przy czym  $\Omega=2\pi/L_r$  [rad/m] jest częstością przestrzenną, natomiast  $L_r$  jest długością fali.

Funkcja  $S_{rr}(\Omega)$  opracowana przez Federal Railroad Administration (FRA), ma postać [8]

$$S_{rr}(\Omega) = kA \frac{\Omega_c^2}{(\Omega^2 + \Omega_c^2)^2} \quad \left[ \frac{\text{mm}^2\text{m}}{\text{rad}} \right] \quad (1)$$

gdzie:  $k$  i  $\Omega_c$  są stałymi, a współczynnik  $A$  [mm<sup>2</sup>rad/m] jest parametrem pionowych nierówności toru, w zależności od 1 – 6 linii kolejowych. W niniejszej pracy uwzględniono tylko lepsze linie o stopniach: 4 ( $A=53.76$ ), 5 ( $A=20.95$ ). Próby losowe profili pionowych nierówności toru zostały wygenerowane za pomocą metody Monte-Carlo, otrzymując formuły [11, 28]

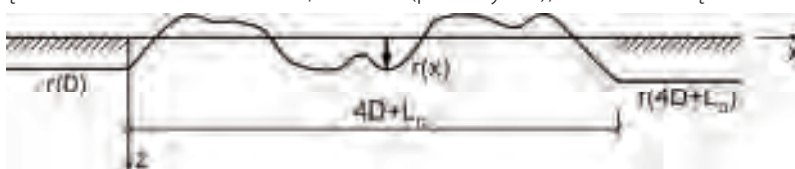
$$r(x) = 2 \sum_{i=1}^{N_r} \sqrt{S_{rr}(\Omega_i) \Delta\Omega} \cos(\Omega_i x + \varphi_i) \quad [\text{mm}]. \quad (2)$$

Aby otrzymać równania równowagi, układ BTT podzielono na podukłady (patrz rys. 2), w celu obciążenia ich od-

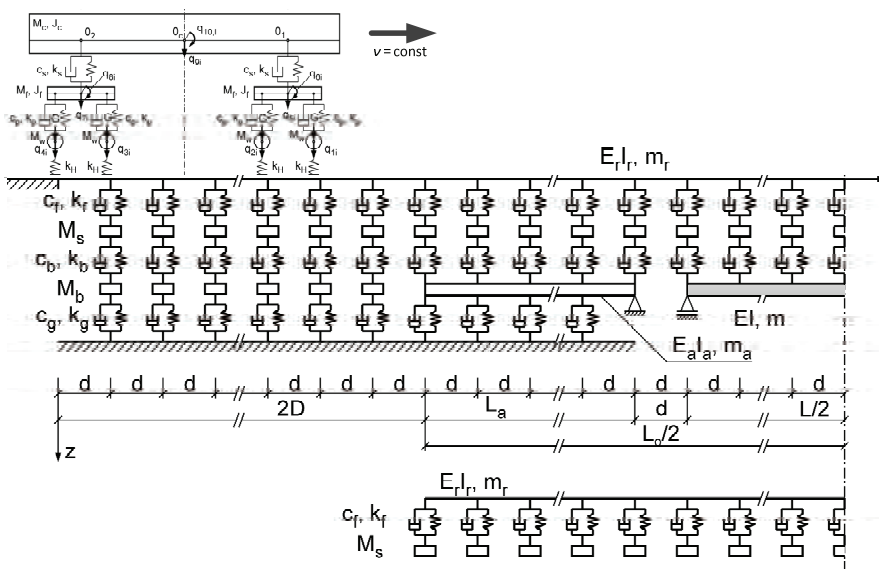
powiednimi siłami interakcji. Przyjęto kody od terminów angielskich:

- BS (**Bridge Superstructure**) – zespolona konstrukcja nośna mostu, która jest odwzorowana przez belkę odcinkowo przyzmatyczną, swobodnie podpartą, odkształcalną giętnie, symetryczną względem środka rozpiętości, z tłumieniem drgań konstrukcji nośnej opisanym modelem Rayleigha [3].
- LAS, RAS (**Left / Right Approach Slab**) – odpowiednio lewa i prawa płyta przejściowa, które są modelowane jako lepkosprężyste belki Eulera, podparte przegubowo odpowiednio na prawym / lewym końcu.
- LB i RB (**Left / Right Ballast – bed**) – lewa i prawa warstwa podsypki, modelowane przez dyskretne więzy nieliniowe sprężysto-tłumiące pod każdym podkładem. Masa podsypki jest granulowana poza mostem i płytami przejściowymi. Zbiór mas jest obciążonych przez siły interakcji przenoszonych przez podsypkę i podłoże gruntowe.
- SL (**Sleepers**) – podkłady, odwzorowane przez masy skupione drgające pionowo, obciążone zbiorem sił interakcji przenoszonych przez łączniki szyn z podkładami oraz przez podsypkę,
- OR (**Operating Rails**) – szyny główne - lepkosprężyste belki Eulera.
- SR (**Side Rails**) – szyny boczne – jak OR.
- $RV_i, i=1,2,\dots,N_v$  (**Railway Vehicle**) – pociąg, który składa się z ośmiu ( $N_v=8$ ) pojazdów czterosiowych, modelowanych za pomocą rozszerzonego modelu Matsuury opisanego powyżej. Przyjęto, że pociąg porusza się ze stałą prędkością.

Wymienione belkowe podukłady, dyskretyzowane przy zastosowaniu elementów skończonych odkształcalnych giętnie (4DOF) o długości równej rozstawie podkładów ( $d$ ), są obciążone odpowiednimi podzbiorami pionowych sił interakcji, przenoszonych przez więzy sprężyste bądź lepkosprężyste, liniowe bądź nieliniowe fizycznie.



1. Losowe nierówności pionowe toru w strefie  $4D+L_o$  [22]



2. Płaski model fizyczny układu BTT (skala skażona)

Stosując równania Lagrange'a i agregację, otrzymuje się macierzowe liniowe równania ruchu poszczególnych podukładów z nieliniowymi fizycznie wektorami obciążeń uogólnionych zapisanymi w niejawniej postaci. Siły interakcji transformowane są na wektory obciążeń uogólnionych. Takie sformułowanie prowadzi do równań ruchu podukładów o stałych współczynnikach, co wielokrotnie skraca czas obliczeń numerycznych w porównaniu z modelem nieuwzględniającym sztywności kontaktowej Hertza [18, 19].

Drgania niestacjonarne układu BTT są opisane przez  $8+N_v$  macierzowych równań ruchu, gdzie  $N_v$  jest liczbą ruchomych pojazdów szynowych. Sprzężenie tych równań jest ukryte w wektorach obciążeń uogólnionych wyrażonych przez siły interakcji. Szczegółowy opis modelowania matematycznego i fizycznego układu został opisany w pracy M. Podwórna, M. Klasztorny [22].

Otrzymane macierzowe równania ruchu podukładów należą do klasy równań różniczkowych zwyczajnych, liniowych, o stałych współczynnikach:

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{R}(t), t] \quad (3)$$

gdzie:

**B, C, K** - macierze bezwładności, tłumienia i sztywności danego podukładu inercyjnego,

**F[R(t), t]** - wektor obciążeń uogólnionych tego podukładu, ogólnie zależny od wektora sił interakcji **R(t)** i zmiennej czasowej  $t$ . W chwili początkowej pociąg ma stałą prędkość poziomą  $v$  i znajduje się na lewym nieodkształcalnym, prostoliniowym odcinku toru. Układ BTT znajduje się w stanie równowagi i został opisany tak, że każdemu podukładowi odpowiadają zerowe warunki początkowe

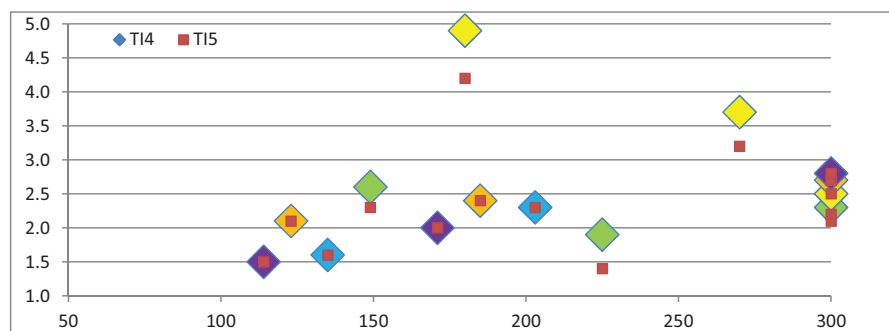
$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Ponadto  $\mathbf{F}[\mathbf{R}(0), 0] = \mathbf{0}$ , a więc z równania (3) w chwili początkowej otrzymuje się

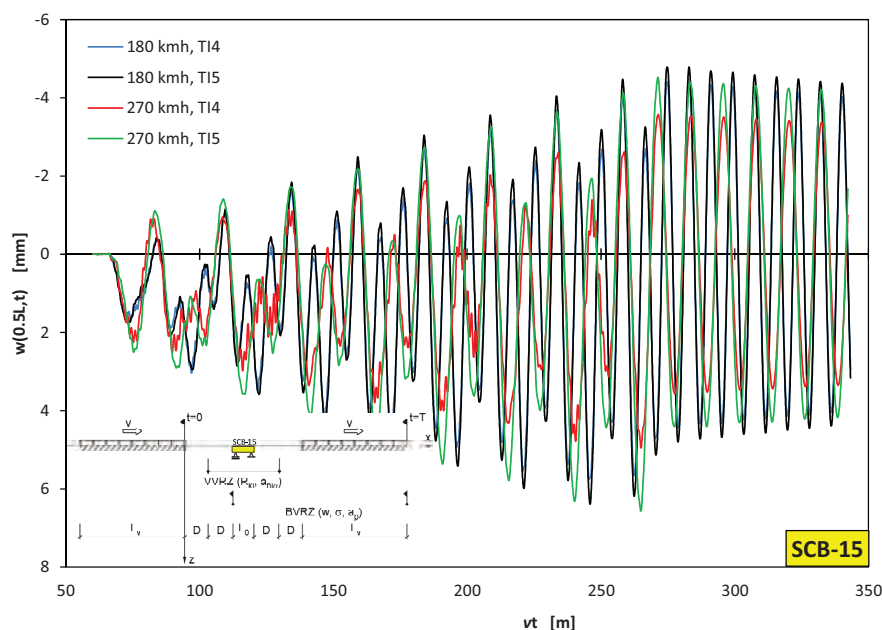
$$\ddot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Tab. 1. Wielkości wynikowe – dynamiczne współczynniki ugięcia

v	[km/h]	$\varphi_w$ (0.5L) dla T14	$\varphi_w$ (0.5L) dla T15
SCB-15			
$v_{11}$	180	4,9	4,2
$v_{21}$	270	3,7	3,2
$v_{max}$	300	2,5	2,2
SCB-18			
$v_{11}$	149	2,6	2,3
$v_{21}$	225	1,9	1,4
$v_{max}$	300	2,3	2,1
SCB-21			
$v_{11}$	135	1,6	1,6
$v_{21}$	203	2,3	2,3
$v_{max}$	300	2,5	2,5
SCB-24			
$v_{11}$	123	2,1	2,1
$v_{21}$	185	2,4	2,4
$v_{max}$	300	2,7	2,7
SCB-27			
$v_{11}$	114	1,5	1,5
$v_{21}$	171	2,0	2,0
$v_{max}$	300	2,8	2,8



3. Wykres współczynników ugięcia dla typoszeregu mostów w zależności od prędkości



4. Przebieg czasowy dynamicznego ugięcia belki w środku rozpiętości mostu SCB-15

Niejawne macierzowe równania ruchu (3) są całkowane numerycznie z warunkami początkowymi (4,5) za pomocą metody średniego przyspieszenia Newmarka z parametrami  $\beta_N=1/4$ ,  $\gamma_N=1/2$ , rozwiniętej do niejawnej postaci przedstawionej w pracy [18]. Należy zauważyć, że w przypadku jawnych równań, metoda ta jest bezwarunkowo stabilna. [20]

W pracy uwaga została skupiona na wielkości wynikowej - dynamicznym współczynniku ugięcia pionowego belki w środku rozpiętości mostu

$$\varphi_w(0.5L) = \frac{\max_t w(0.5L,t)}{\max_t w_s(0.5L,t)}, \quad (6)$$

gdzie:

$w(0.5L,t)$  - przebiegi czasowe dynamicznego ugięcia belki w środku rozpiętości mostu, dla prędkości eksploatacyjnych pociągu  $v=100-300$  km/h, dla toru TI4, TI5, nierówności toru odpowiadające stopniom linii kolejowych  $L_g=4,5$  (ustalone wartości współczynnika  $A$  zgodnie z American Railway Standard [8])

$w_s(0.5L,t)$  - przebiegi czasowe quasi-statycznego ugięcia belki w środku rozpiętości mostu, dla prędkości eksploatacyjnej pociągu  $v=30$  km/h, dla toru gładkiego (NTI).

## Analiza numeryczna

W pracy przeanalizowano wartości dynamicznych współczynników ugięć pionowych belek typoszeregu, w środku rozpiętości przęseł mostów dla 5 obiektów. W tabeli 1 zestawiono wyniki dla typoszeregu SCB dla dwóch rodzajów nierówności toru odpowiadającym stopniom linii kolejowych  $L_g=4,5$ . Na rys. 3 zilustrowano wyniki dla typoszeregu SCB-15, SCB-18, SCB-21, SCB-24, SCB-27, dla  $L_g=4,5$  (TI4) dla przyjętych przewidywanych prędkości rezonansowych – patrz [21]. Na rysunku 4 przedstawiono przykładowy przebieg czasowy dynamicznego ugięcia belki w środku rozpiętości najkrótszego obiektu z typoszeregu dla dwóch prędkości oraz dla dwóch nierówności toru.

## Wnioski

Na podstawie powyższej analizy, sformułowano następujące główne wnioski.

- Dla wszystkich trzech analizowanych prędkości, największe różnice współczynników  $\varphi_w(0.5L)$  zarówno dla nierówności toru TI4, jak i TI5, występują w moście o rozpiętości teoretycznej 15m.
- Największą wartość współczynnika  $\varphi_w(0.5L)$  zauważono w najkrótszym moście SCB-15 przy prędkości  $v_{11}=180$  km/h dla toru o mniejszej równości (TI4).
- Porównując tor o nierówności mniejszej (TI5) - największa wartość współczynnika  $\varphi_w(0.5L)$  jest również w moście SCB-15 przy prędkości  $v_{11}=180$  km/h.
- Najmniejsza wartość współczynnika  $\varphi_w(0.5L)$  występuje w moście SCB-18 przy prędkości  $v_{21}=225$  km/h dla toru o większej równości (TI5).
- W mostach dłuższych nie zauważa się znacznej różnicy we współczynnikach pionowego ugięcia środkowej części przęsła w zależności od nierówności szyn kolejowych.
- W moście najkrótszym (SCB-15) jest wyraźna różnica współczynników pionowego ugięcia w środku rozpiętości mostu w zależności od rodzaju nierówności toru kolejowego.
- Obiekt o najmniejszej rozpiętości (SCB-15) prezentuje się najmniej korzystnie na tle całego typoszeregu z zakresem rozpiętości teoretycznej od 15m do 27m w powyższej analizie oraz w badaniach przeprowadzanych w zakresie innych kryteriów, np. komfortu pasażerów – patrz [17]. ◀

## Materiały źródłowe

- [1] Andersen L., Nielsen S., Vibrations of a track caused by variation of the foundation stiffness, Probabilistic Engineering Mechanics, 2003. 18, 171–184.
- [2] Au F.T.K., Wang J.J., Cheung Y.K., Impact study of cable stayed railway bridges with random rail irregularities, Engineering Structures, 2002, 24, 529 – 541.
- [3] Bachmann H., Vibration problems in structures. Practical guidelines, Basel – Boston – Berlin, Birkhäuser, 1995.

- [4] Bryja D., Hołubowski R.: Wpływ dużych prędkości w analizie stochastycznych drgań mostu kolejowego z losowo zmienną sztywnością podsypki. Journal of Civil Engineering, Environment and Architecture, 2014, 31, 61, 2, 15-32.
- [5] Dahlberg T.: Railway track stiffness variations – consequences and counter-measures, International Journal of Civil Engineering, 2010, 8, 1, 1-12.
- [6] EN 1990. Eurokod: Podstawy projektowania konstrukcji.
- [7] EN 1991. Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje. Część 2: Obciążenia ruchome mostów.
- [8] Fryba L., A rough assessment of railway bridges for high speed trains, Engineering Structures, 2001, 23, 548 – 556.
- [9] [http://www.hochgeschwindigkeitszuege.com/germany/index\\_ice\\_3.htm](http://www.hochgeschwindigkeitszuege.com/germany/index_ice_3.htm) (2010)
- [10] Karlikowski J., Madaj A., Wołowicki W., Mostowe konstrukcje zespolone stalowo-betonowe, WKiŁ, Warszawa, 2007.
- [11] Lei X., Noda N.-A., Analyses of dynamic response of vehicle and track coupling system with random irregularity of track vertical profile, Journal Sound and Vibration, 2002, 258, 1, 147 – 165.
- [12] Ning J., Lin J. Zhang B., Time-frequency processing of track irregularities in high-speed train, Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 66-67, 339–348.
- [13] PN-82/S-10052. Obiekty mostowe. Konstrukcje stalowe. Projektowanie.
- [14] PN-85/S-10030. Obiekty mostowe. Obciążenia.
- [15] PN-91/S-10042. Obiekty mostowe. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Projektowanie.
- [16] PN-EN15528 Kolejnictwo – Klasyfikacja linii.
- [17] Podworna M., Dynamic response of steel-concrete composite bridges loaded by high-speed train, Structural Engineering and Mechanics, 2017, 62, 2, 179-196.
- [18] Podworna M., Dynamics of a bridge beam under a stream of moving elements. Part 1 – Modelling and numerical integration, Structural



Engineering and Mechanics, 2011, 38, 3, 283-300.

[19] Podworna M., Dynamics of a bridge beam under a stream of moving elements. Part 2 – Numerical simulations, Structural Engineering and Mechanics, 2011, 38, 3 301-314.

[20] Podworna M., Modelling of random vertical irregularities of railway tracks, International Journal of Applied Mechanics and Engineering, 2015, 20, 3, 663-671.

[21] Podworna M., Klasztorny M., Vertical vibrations of composite bridge / track structure / high-speed train system. Part 1: Series-of-types of steel-concrete bridges, Bulletin of the Polish Academy of Science Technical Sciences, 2014, 62, 1, 165-179.

[22] Podworna M., Klasztorny M., Vertical vibrations of composite bridge / track structure / high-speed train

system. Part 2: Physical and mathematical modelling, Bulletin of the Polish Academy of Science Technical Sciences, 2014, 62, 1, 181-196.

[23] Rozporządzenie Ministra Infrastruktury i Rozwoju z dnia 5 czerwca 2014 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać budowle kolejowe i ich usytuowanie.

[24] Rozporządzenie Ministra Transportu i Gospodarki Morskiej z dnia 10 września 1998 r. w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać budowle kolejowe i ich usytuowanie.

[25] Song M.-K., Noh H.-C., Choi C.-K., A new three dimensional finite element analysis model of high-speed train – bridge interactions, Engineering Structures, 2003, 25, 1611 – 1626.

[26] Towpik K., Specyfika projektowa-

nia, eksploatacji oraz utrzymania dróg -kolejowych dużych prędkości (KDP), Nowoczesne Budownictwo Inżynieryjne, 2013, 88-91.

[27] Xu L., Zhai W., Gao J., A probabilistic model for track random irregularities in vehicle/track coupled dynamics, Applied Mathematical Modelling, 2017, 51, 145–158.

[28] Zhang Y.-W., Lin J.-H., Zhao Y., Howson D.P., Williams F.W., Symplectic random vibration analysis of a vehicle moving on an infinitely long periodic track, Journal of Sound and Vibration, 2010, 329, 4440 – 4454.

[29] Zhi-wu Y., Jian-feng M., Feng-qi G., Wei G. Non-stationary random vibration analysis of a 3D train-bridge system using the probability density evolution method, 2016, Journal of Sound and Vibration, 366, 173-189.

REKLAMA



## CZAS NA INNOWACYJNE BUDOWNICTWO

Oferujemy profesjonalne usługi z zakresu:

- budowy infrastruktury komunikacyjnej, sieci instalacyjnych i obiektów hydrotechnicznych,
- wykonywania pomiarów geodezyjnych, tworzenia map do celów projektowych, wytyczenia budynku i sieci.



W BUDOWNICTWIE WYBIERZ FIRME,  
KTÓREJ MOŻESZ ZAUFAĆ

Zobacz, co już wybudowaliśmy  
i dla kogo pracowaliśmy:

[www.gm-roads.pl](http://www.gm-roads.pl)

**Biuro:**

ul. Krzemieniecka 47,  
54-613 Wrocław

**Budownictwo inżynieryjne:**

tel.: (71) 300 12 40  
e-mail: [info@gm-roads.pl](mailto:info@gm-roads.pl)

**Geodezja:**

tel.: 697 660 932  
e-mail: [m.wozniak@gm-roads.com](mailto:m.wozniak@gm-roads.com)

**Siedziba firmy:**

ul. Wrocławska 41, Łażany  
58-130 Żarów

# Oddziaływanie pojazdu na powłokę w obiektach gruntowo-powłokowych

## The vehicle impact on the corrugated steel shell in soil-steel structures



Czesław Machelski

Prof. dr hab. inż.

Politechnika Wroclawska, Wydział  
Budownictwa Lądowego i Wod-  
nego; Katedra Mostów i Kolei

czeslaw.machelski@pwr.edu.pl

**Streszczenie:** W pracy omówiono wyniki badań obiektów gruntowo-powłokowych poddanych obciążeniom pojazdami drogowymi i kolejowymi, zmieniającymi swoje położenie wzdłuż toru ruchu. Rozpatrywane są obciążenia quasi statyczne w ujęciu kroczącym i ciągłym (z minimalną prędkością przejazdu). Analizowano wpływy oddziaływań dynamicznych pojazdów w funkcji prędkości przejazdu. Rozpatrywane są ciężkie, przejazdy eksploatacyjne z małymi prędkościami. Odrębną grupą są przejazdy pasażerskich pociągów w przejazdach z dużymi prędkościami. W tym przypadku realizowane są symulacje numeryczne z wykorzystaniem złożonych modeli obiektów gruntowo-powłokowych. W pracy sprecyzowana jest specyfika (odmienność) efektów oddziaływań dynamicznych taboru kolejowego na obiekty gruntowo-powłokowe w odniesieniu do klasycznych mostów stalowych. Z przedstawianych wyników badań obiektów gruntowo-powłokowych widoczne jest korzystne współdziałanie nawierzchni kolejowej i podbudowy z powłoką z blachy falistej zanurzonej w zasypce gruntowej jak w nasypach kolejowych.

**Słowa kluczowe:** Konstrukcje gruntowo-powłokowe; Oddziaływanie pojazdu na powłokę; Dynamika; Badania obiektów

**Abstract:** The paper presents the results of soil-steel structures tests under road and rail vehicles loads, which change their position along the track. Quasi static loads are considered in both stepping and continuous measurement method (with minimum travel speed). The impact of dynamic loads from vehicles as a function of vehicle speed was analyzed. Heavy, low-speed driving rides and as a separate group the passage of passenger trains in high speed journeys were considered. In this cases numerical simulations are performed using complex models of soil-steel structures. The specificity (difference) of dynamic effects from dynamic loads of rolling stock on soil-steel structures in relation to classic steel bridges is specified in the paper. The presented results from tests shows the favorable interaction of the railway tracks and substructures with the corrugated steel shell in the backfilling as in the railway embankments.

**Keywords:** Soil-steel structures; Impact of vehicle on the shell; Dynamic; Investigation of the structures

### Budowa obiektów gruntowo-powłokowych

Konstrukcje gruntowo-powłokowe są budowlami inżynierskimi spełniającymi rolę obiektów mostowych, jak na rys. 1, jak również wiaduktów, kładek dla pieszych, przepustów, tuneli, przejść podziemnych, przejazdów gospodarczych, przejść dla dziko żyjących zwierząt. Duża grupa tych budowli pełni funkcje obiektów komunalnych, zwykle o kształcie przewodów zamkniętych (rurowych). Są one wybudowane w postaci powłoki i otaczającego ją, specjalnie zagęszczonego gruntu. Zaprojektowane są one w taki sposób aby zapewnić długotrwałe, korzystne współdziałanie między zasadniczymi elementami układu

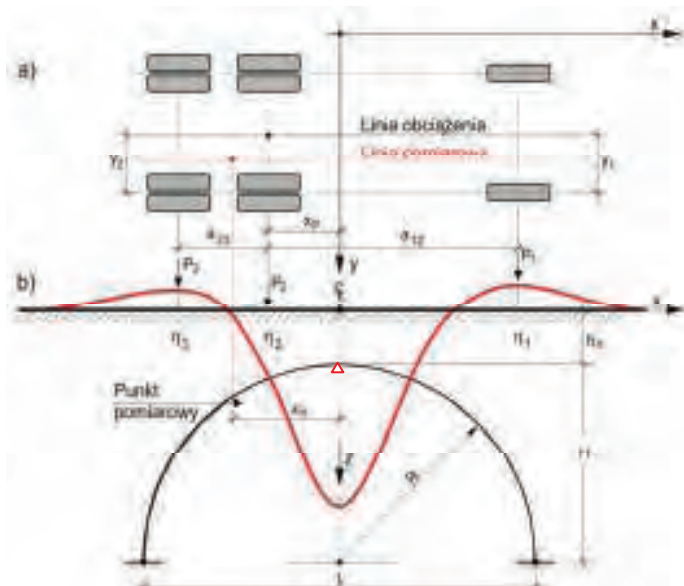
nośnego (w klasycznej konstrukcji), tj. powłoką (podpartą na fundamencie) i zasypką gruntową z udziałem nawierzchni [7].

Efekt współpracy powłoki z gruntem obserwuje się jako pozornie odciążenie podatnej powłoki przez wytworzenie się naturalnego sklepienia w gruncie. Intensywność oddziaływania gruntu na konstrukcję nośną zależy od sztywności powłoki względem otaczającej ją zasypki [8, 11, 12]. W konstrukcji sztywnej pełnią one zupełnie inne role. Z uwagi na kształt powłok konstrukcji gruntowo-powłokowych wyróżnia się ich trzy rodzaje: łukowe o przekroju zamkniętym i otwartym oraz skrzynkowe. Podział ten wynika z różnic w przebiegu deformacji powłok w trakcie budowy

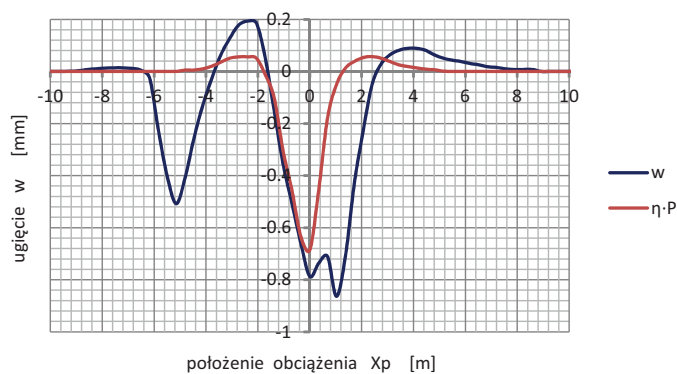
obiekty [7]. Pod obciążeniami zmieniającymi różnice te zanikają i wszystkie powłoki zachowują się podobnie [4, 12, 13, 18]. Z uwagi na zastosowany materiał wyróżnia się powłoki z blachy płaskiej i falistej, stalowe i aluminiowe oraz betonowe. Deformacje tych powłok są podobne a istotne znaczenie ma ich sztywność [12]. Z tego względu konstrukcje gruntowo-powłokowe



1. Przebudowa obiekt belkowego na gruntowo-powłokowy



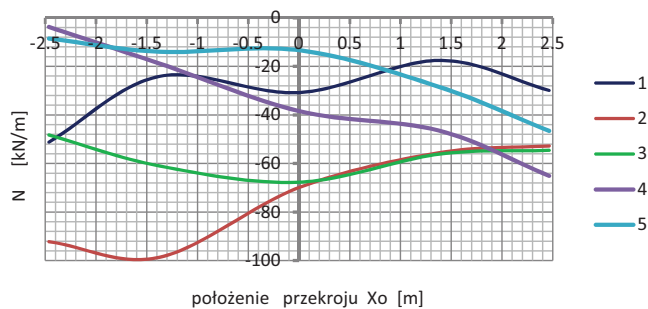
2. Układ kół samochodu oraz linia wpływu ugięcia klucza powłoki



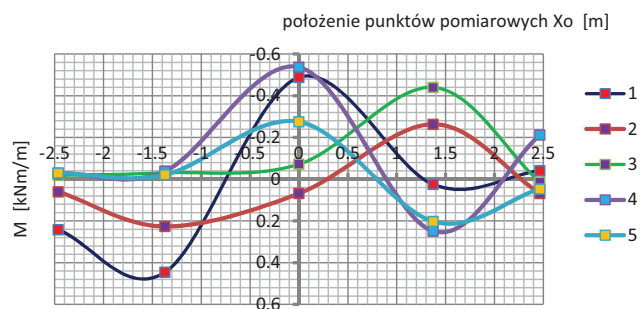
3. Zmiany ugięcia i linii wpływu ugięcia klucza powłoki



4. Położenia samochodu w realizacji koncepcji obciążenia kroczącego

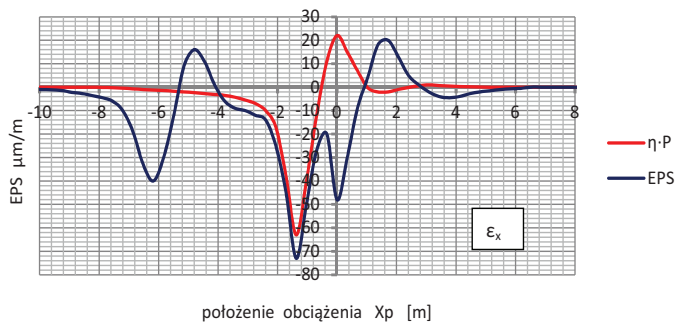


położenie przekroju  $x_0$  [m]

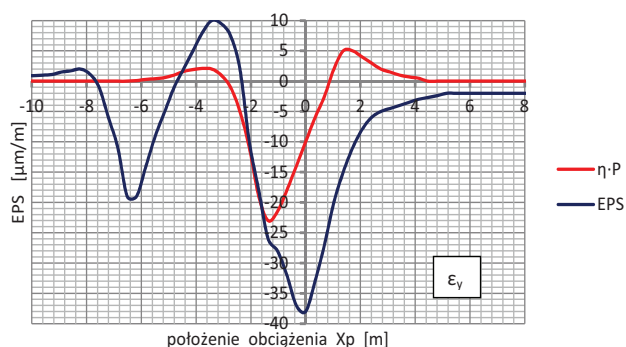


położenie punktów pomiarowych  $x_0$  [m]

5. Rozkład sił osiowych i momentów zginających w paśmie obwodowym powłoki



położenie obciążenia  $x_p$  [m]



położenie obciążenia  $x_p$  [m]

6. Zmiany odkształceń jednostkowych i linie wpływu  $\epsilon$  w punkcie 2 powłoki

dzieli się na dwie, zasadnicze grupy: sztywne i podatne. Szczegółowe uzasadnienie podziału tych obiektów podano w pracy [7].

## Obciążenia zmieniające położenie

W obiektach komunikacyjnych o prostej geometrii (nie położonych na łukach) pojazdy poruszają się wzdłuż osi podłużnej jezdni nad pasmem obwodowym konstrukcji, jak na rysunku 2. Gdy rejestruje się przemieszczenia

analizowanego punktu konstrukcji powstaje wykres, zależny od położenia wyróżnionej osi pojazdu (referencyjnej), czyli współrzędnej  $x_p$ . Gdy pojazd porusza się z małą prędkością jego oddziaływanie dynamiczne jest ograniczone, zwykle przyjmuje się, że jest to obciążenie quasi statyczne, zmieniające swoje położenie [6, 11, 13]. Na rysunkach 3 - 6 omówiono wyniki badań drogowego obiektu gruntowo-powłokowego eksploatowanego od 1962 roku w USA (okręg Waszyngton)

o szerokości  $B = 9$  m [18]. Grubość nawierzchni drogowej z naziemem była wyjątkowo mała i wynosiła  $h_c = 0,406$  m. Przekrój poprzeczny powłoki to kształt połowy koła. Charakterystyczne parametry geometryczne powłoki to: rozpiętość  $L = 5,59$  m; wysokość  $H = 2,72$  m. Analizowany obiekt utworzono z blachy o niskim profilu MP 152'38'8. W tych badaniach jako obciążenia użyto typowy trzyosiowy samochód ciężarowy o rozstawie osi  $a_{12} = 4,877$  m  $a_{23} = 1,372$  m. naciski

na osie tego samochodu były zbliżone i wynosiły:  $P_1 = 80,77$  kN;  $P_2 = 93,89$  kN;  $P_3 = 93,22$  kN. W programie badań obciążenie zmieniało swoje położenie wzdłuż osi jezdni w sposób ciągły i kroczący.

Na rysunku 3 przedstawiono wynik pomiaru ugięcia klucza powłoki  $w(x)$  podczas przejazdu samochodu [18]. Na osi poziomej wykresu podano położenie osi środkowej pojazdu w odniesieniu do klucza powłoki. Gdy  $x_p = 0$ , oś środkowa samochodu znajduje się nad kluczem powłoki. Widoczny na tym rysunku trzy wartości ekstremalne ugięcia są wynikiem obciążenia kolejnymi kołami z zestawu. Powstają one w przypadku dużego rozstawu osi w stosunku do rozpiętości przepustu  $L$ . W rozpatrywanym przypadku ustawienia samochodu może występować ugięcie  $w = 0$  pomimo pełnego obciążenia samochodem. Ważnym wynikiem w tych pomiarach jest uzyskanie  $w = 0$  po przejeździe samochodu zwykle pozostają deformacje residualne [2, 4, 6, 9, 11, 17].

Na rysunku 4 przedstawiono realizację koncepcji obciążenia kroczącego – samochodu zatrzymanego podczas jazdy w pięciu pozycjach. W tym szczególnym przypadku badanego obiektu i układu osi występują zbliżone zależności geometryczne pomiędzy rozstawem tylnych kół samochodu  $a_{23}$  i rozpiętością  $L$  jako  $a_{23} \approx L/4 = 1,4$  m oraz układem punktów pomiarowych 2, 3, 4.

Na rysunku 5 podano wartości sił wewnętrznych w analizowanych punktach pasma obwodowego powłoki jak na rysunku 4 obliczone na podstawie wyników pomiarów tensometrycznych. W legendzie wykresów podano położenia samochodu zmieniającego położenie w ujęciu kroczącym. W badaniu występują podobne układy tylnych osi samochodu w stosunku do klucza powłoki np. schematy 1 i 5 oraz 2 i 4 oraz symetryczny 3. Jednak wpływ przedniej osi pojazdu, czyli  $P_1$  zaburza symetrię tych sił wewnętrznych. Siły osiowe  $N$  (rys. 5a) są zawsze jednego znaku (ściskające). W przypadku momentów zginających  $M$  (rys. 5b) pomiędzy siłami  $P_2$  i  $P_3$  (tylne osie pojazdu) pojawiają się w powłoce momenty zginające odwrotnego znaku niż pod kołami. Z uwagi na inne po-

łożenie sił w odniesieniu do punktów pomiarowych (jak na rysunku 4) wartości  $M$  podane na wykresach nie są ekstremalne a wykresy nie odwzorowują przebiegu momentów zginających w paśmie obwodowym powłoki.

We analizowanym wcześniej obiekcie [18] realizowano również pomiary tensometryczne między innymi w punkcie  $x_0 = -1,372$  m jak na rysunku 4. Na rysunku 6 przedstawiono funkcje odkształceń jednostkowych - w części  $a$  wykresy  $\varepsilon_x$  (w kierunku obwodowym) na dolnej fali powłoki a w części  $b$   $\varepsilon_y$  (prostopadle do kierunku obwodowego) na górnej fali powłoki. Funkcje wpływu  $\eta$  [1/kN] pomnożono przez  $P = P_2$  aby przedstawiać je na wspólnym wykresie z  $\varepsilon$ . Obydwie funkcje  $\varepsilon(x)$  i ich linie wpływu są podobne zarówno co do kształtu jak i wartości. Widoczna jest też ich specyficzna różnica. Z maksymalnych rzędnych  $\varepsilon$  można określić naprężenia normalne jako

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_x^D = 0,205 \cdot 10^6 \cdot (-74 \cdot 10^{-6}) = -15,2 \text{ MPa}$$

Znak naprężenia „-” oznacza ściskanie. Wartość odkształcenia jest wielokrotnie mniejsza niż powstająca w powłoce podczas budowy [12].

Z przebiegów funkcji  $w(x)$ , jak na rys. 3 i  $\varepsilon(x)$ , jak na rys. 6 oraz powstałych na tej podstawie linii wpływu  $\eta(x)$  widoczna jest mniejsza skuteczność określania maksymalnych wartości w koncepcji obciążenia kroczącego, jak na rysunku 4. W ujęciu kroczącym uzyskuje się wyniki w punktach pomiarowych wyłącznie przy ustalonych położeniach obciążenia  $x_p$ . Z uwagi na wielokrotną zmianę znaku linii wpływu analizowanych wielkości oraz przy złożonej geometrii pojazdu i zróżnicowanych naciskach na koła wartości ekstremalne mogą występować w nieoczekiwanych położeniach obciążenia [17, 18].

## Linie wpływu przemieszczeń i sił wewnętrznych

Z ciągłego pomiaru ugięcia tworzy się wykres  $w(x)$  a stąd również linie wpływu ugięcia  $\eta(x)$ . Na rysunku 3 pokazano obydwie linie. Aby uzyskać jednakowe jednostki funkcję  $\eta(x)$  [mm/kN] pomnożono przez  $P = P_2$  [kN]. W układzie tych dwóch wykresów moż-

na wyróżnić trzy sytuacje:

- gdy wyłącznie pierwsza oś położona jest nad linią wpływu, wówczas występuje zależność

$$w(x) = P_1 \cdot \eta_1(x + a_{12}) \quad (1)$$

- gdy druga oś wpływa na ugięcie klucza powłoki, jak we wzorze

$$w(x) = P_1 \cdot \eta_1(x + a_{12}) + P_2 \cdot \eta_2(x) \quad (2)$$

- w przypadku ogólnym, jak na rysunku 2, wówczas występuje zależność

$$w(x) = P_1 \cdot \eta_1(x + a_{12}) + P_2 \cdot \eta_2(x) + P_3 \cdot \eta_3(x - a_{23}) \quad (3)$$

Przy wykorzystaniu równania (1) wyznacza się pierwszą część wykresu  $\eta(x + a_{12})$ . Gdy występuje aktywne oddziaływanie drugiej osi pojazdu  $P_2$  znane są już rzędne wykresu  $\eta_2 = \eta(x)$  a określany zakres wykresu  $\eta(x + a_{12})$  znajdujący się pod siłą  $P_1$  z wykorzystaniem równania (2). Przypadek ujęty w równaniu (3) jest ogólnym gdyż wszystkie trzy osie pojazdu wpływają na ugięcie klucza powłoki. W tym przypadku znane są rzędne wykresu  $\eta_2 = \eta(x + a_{12})$  oraz  $\eta_3 = \eta(x)$  a określana jest składnik  $\eta(x)$  pochodzący od siły  $P_1$ , jak na rysunku 2. Gdy wyznaczona jest postać funkcji wpływu  $\eta(x)$  korzysta się z ogólnej zależności

$$w(x) = \sum_{i=1}^3 P_i \cdot \eta_i(x_i) \quad (4)$$

gdzie:  $x = x_p$ ,  $x_1 = a_{12} - x_p$  i  $x_2 = x_p$  oraz  $x_3 = -a_{23} - x_p$ .

Z wartości rzędnych linii wpływu  $\eta(x)$  widoczny jest obszar aktywnego oddziaływania pojazdu – zbliżony zwykle do  $2L$ . Przedstawiony na rysunku 3 wykres  $w(x)$  jest wynikiem pomiarów zrealizowanych na obiekcie i równocześnie sprawdzeniem poprawności funkcji  $\eta(x)$  wytworzonej na podstawie badań obiektu. Zaletą funkcji wpływu  $\eta(x)$  jest uwzględnienie wszystkich elementów konstrukcji łącznie ze współpracą wyposażenia (np. nawierzchni).

Taką samą metodologią badań zastosowano w przypadku pojazdów o większej liczbie osi – jak w taborze kolejowym. Badany obiekt kolejowy przedstawiono na rysunku 7. Powłokę konstrukcji gruntowo-powłokowej stanowi blacha typu SuperCor o fali SC 380×140×7, z nakładką odcinkową (płaszcze powłoki przesunięte o jedno pole) z blachy SC 380×140×5.5. Geometria pasma obwodowego SC-35B jest oznaczana przez producenta jako







7. Położenie lokomotywy w trakcie obciążenia

skrzynkowa. Charakterystyczne wymiary powłoki to: rozpiętość  $L = 7.945$  m, wysokość  $H = 2.37$  m, górny promień krzywizny  $R = 8.82$  m. Szerokości powłoki są następujące: górna  $B_g = 13.8$  m oraz dolna  $B_d = 21.36$  m. Obiekt charakteryzuje się bardzo małą wysokością konstrukcyjną  $h_k = 1,20$  m, co przy całkowitej grubości nawierzchni kolejowej 60E1 na podsypce i podkładach strunobetonowych daje warstwę grubości 0,95 m.

Obciążenie obiektu stanowiła lokomotywa, sześćosiowa typu ST44 o rozstawie osi:  $2 \cdot 2,10 + 4,20 + 2 \cdot 2,10$  m i obciążeniach na osie  $P = 192,9$  kN. W badaniach obiektu zastosowano metodykę obciążenia zmieniającego położenie w sposób *quasi-statyczny*. Polegała ona na przejeździe lokomotywy w kolejne ustawienia ze stałym krokiem, w tym przypadku co dwa podkłady, czyli co około 1,3 m. W tych położeniach rejestrowano automatycznie (komputerowo) ugięcia klucza powłoki.

Na podstawie uzyskanych wyników utworzono wykres  $w(x)$  podany na rysunku 8. Rzędne wykresów są odniesione do wartości  $x_p$ , która jest odległością środkowej siły w wózku lokomotywy od klucza powłoki. Gdy  $x_p = 0$  środkowa siła w wózku lokomotywy jest nad kluczem. Kolejne przejazdy lokomotywy odbywały się w sposób ciągły z małymi prędkościami tak aby nie powstawały efekty dynamiczne. Z tych pomiarów uzyskano podobne wykresy  $w(x)$ .

Z kształtu wykresu  $w(x)$  widoczny jest udział trzech sił  $P$  w wózku lokomotywy i kolejny najazd nad punkt pomiarowy powłoki. Odległość pomiędzy wierzchołkami wykresu jest zgodna z rozstawem wózków loko-

motywy, czyli  $d = 2 \cdot 2.1 + 4.4 = 8.6$  m. Na podstawie wykresu ugięcia  $w(x)$  utworzono linie wpływu ugięcia  $\eta(x)$  na tych samych zasadach jak w przypadku obciążenia analizowanego na rysunku 2. Sprawdzianem dokładności odwzorowania  $\eta(x)$  jest utworzona na tej podstawie linia ugięcia  $w(x)$  z siłami w rozpatrywanych punktach  $x_i$  wynosi

$$w(x) = P \sum_{i=1}^6 \eta(x_i) \quad (5)$$

gdys

$$x_i = \{x+2,1; x; x-2,1; x-6,5; x-8,6; x-10,7\} \quad (6)$$

## Sztywność obiektu mostowego

W przypadku obiektów mostowych poddanych obciążeniom ruchomym stosuje się jako parametr techniczny sztywność  $k$  zarówno w obiektach gruntowo-powłokowych jak również w klasycznych mostach [6, 9]. Wartości  $k$  zależą od budowy konstrukcji, materiału a szczególnie od rozpiętości obiektu. Do tego celu wyznacza się linię ugięcia powstałą podczas przejazdu pojazdu np. kolejowego a na tej podstawie funkcję wpływu ugięcia, jak w wykresach podanych w pracy.

W pracach [6, 9] zaproponowano definicję sztywności obiektu mostowego jako proporcję wartości siły skupionej  $P$  do wywołanego przez nią przemieszczenia  $w$ , jak we wzorze

$$k = \frac{P}{w} \quad [\text{kN/mm}]. \quad (8)$$

W rozpatrywanym przypadku zakłada się liniowy model konstrukcji, a więc proporcjonalność  $w$  do  $P$ . Siła  $P$  jest zatem dowolna (nie musi być wartością maksymalną dla elementu

konstrukcji), a więc  $k$  nie zależy od intensywności obciążenia. Istotne znaczenie przy tym ma minimalna wartości  $k$ , otrzymana dla danej konstrukcji. W przypadku konstrukcji mostowych poszukuje się więc takiego położenia siły  $P$  na jezdni, przy którym wystąpi maksymalna wartość przemieszczenia  $w$ . W takim ujęciu problemu korzysta się z funkcji wpływu ugięcia  $\eta(x)$  omawianych wcześniej.

Gdy zmiana położenia siły  $P$  odbywa się wzdłuż linii prostej, jak w przypadku mostu kolejowego, zagadnienie sprowadza się do postaci pokazanej na rysunkach 2, 3, 8. Z definicji linii wpływu  $\eta$  przemieszczenie  $w$  oblicza się z zależności

$$w = P \eta \quad (9)$$

gdzie  $\eta$  jest maksymalną rzędną linii wpływu. Po podstawieniu (8) do (8) otrzymuje się

$$k = \frac{1}{\eta} \quad [\text{kN/mm}]. \quad (10)$$

Wobec tego sztywność  $k$  jest odwrotnością maksymalnej rzędnej linii wpływu ugięcia  $\eta$  [10]. Zatem  $\eta$  jest również wskaźnikiem, jednak w  $\eta$  uwzględnia się schemat podparcia powłoki, jej geometrię i nawierzchnię. Wartości  $k$  są użyteczne w odniesieniu do innych rodzajów mostów [6].

W analizowanych wcześniej układach obiektów uzyskano następujące maksymalne wartości:

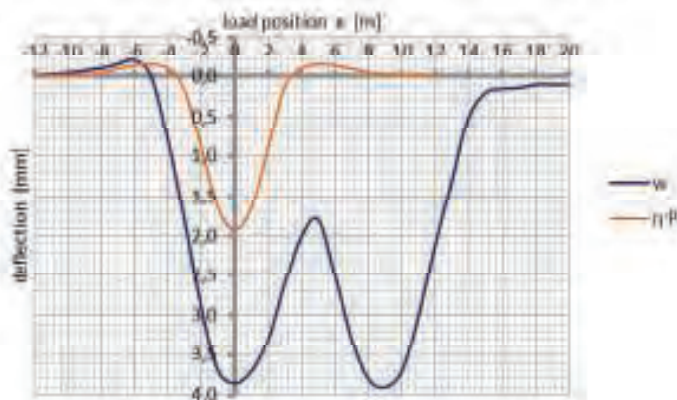
- obiekt drogowy  $\eta \cdot P = 0.686$  mm (rysunek 3), po uwzględnieniu siły  $P = 93.89$  kN otrzymuje się

$$k = \frac{93.89}{0.686} = 137 \quad [\text{kN/mm}]$$

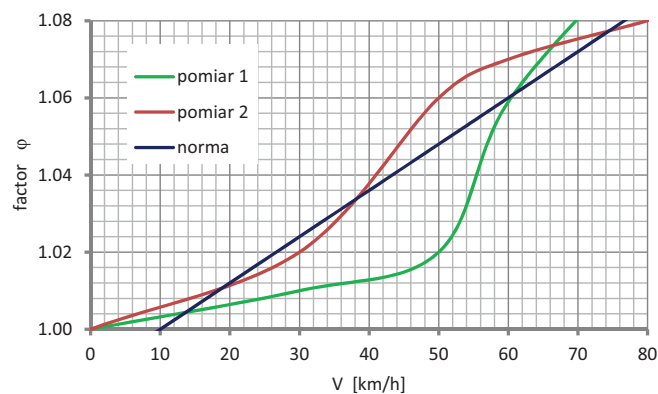
- obiekt kolejowy  $\eta \cdot P = 1.94$  mm (rysunek 8), po uwzględnieniu siły  $P = 192.9$  kN otrzymuje się

$$k = \frac{192.9}{1.94} = 100 \quad [\text{kN/mm}].$$

Obliczone wyżej sztywności są miarami ogólnymi i są stosowane do określenia mostów o różnych schematach (belkowych, ramowych, łukowych, podwieszonych itp.). Wartości  $k$  zależą od rozpiętości  $L$  (w mostach małych są one największe, rzędu  $k = 300$  kN/mm). Zależą także od rodzaju konstrukcji - najmniejsze wartości występują w kładkach dla pieszych nawet  $k = 15$  kN/mm.



8. Zmiana ugięcia i linia wpływu ugięcia klucza powłoki



9. Wartości współczynnika dynamicznego wyznaczonego z badania

## Efekty dynamiczne

W badaniu efektów dynamicznych przejazdów szynowych wyróżnia się prędkości eksploatacyjne ciężkich transportów kolejowych (towarowych) i lżejszych składów pasażerskich. Odrębne analizy prowadzi się w przypadku pojazdów kolejowych przystosowanych do dużych prędkości [1, 3, 5, 14, 15]. Z uwagi na zakres prowadzonych w pracy analiz dotyczących największych oddziaływań pojazdów skupiono się na lokomotywach wykorzystywanych w badaniach odbiorczych, jak na rysunku 7. Przykład analizy rozpatrywany w pracy to typowy obiekt kolejowy [17] o skrzynkowej konstrukcji gruntowo-powłokowej z blachy falistej SuperCor o fali SC 380×140×7. W takich powłokach często stosuje się nakładki w części środkowej i narożnej. Geometria pasma obwodowego SC-48B o charakterystycznych wymiarach powłoki: rozpiętość  $L = 11.04$  m, wysokość  $H = 2.37$  m, górny promień krzywizny  $R = 8.82$  m. Obiekt charakteryzuje się małą wysokością naziomu  $h_n = 0,85$  m.

Obciążenie odbiorcze stanowiła lokomotywa, sześćosiowa typu S1000 o rozstawie osi:  $2 \cdot 2.00 + 4.66 + 2 \cdot 2.00$  m i obciążeniu na oś  $P = 193.7$  kN. W badaniach obiektu zastosowano metodykę obciążenia zmieniającego położenie w sposób krokowy. Polegała ona na przejeździe lokomotywy w kolejne ustawienia ze stałym krokiem. W tych położeniach rejestrowano automatycznie (komputerowo) ugięcia klucza powłoki. Podstawowe badania dotyczyły cech dynamicznych obiektu. W tym przypadku zrealizowano ciągłe przejazdy z prędkościami ok. 5, 30, 50, 60 km/h. Pozwoliły one na określenie współczynnika dynamicznego

(naddatku dynamicznego) uzyskiwanego z pomiaru ugięcia klucza powłoki. Wyniki te zestawiono na rysunku 9.

Z pomiarów na obiekcie wynikają niewielkie wartości współczynnika dynamicznego  $\phi$ . W przypadku klasycznego mostu o schemacie belkowym jego wartość jest znacznie większa bo dla analizowanej wartości  $L$ , obliczona ze wzoru normowego wynosi

$$\phi = \frac{1,44}{\sqrt{L} - 0,2} + 0,82 = 1,281. \quad (11)$$

W przypadku mostów z warstwą nawierzchni o grubości  $h_n = 0,85$  m (jak w obiekcie) obliczona z (11) wartość podlega redukcji jak we wzorze

$$\phi_h = 1 + 2(1 - h_n)(\phi - 1) = \frac{7 + 3\phi}{10} = 1,084. \quad (12)$$

Wpływ prędkości przejazdu pojazdu określa się według zależności

$$\phi_v = 1 + (\phi_h - 1) \frac{V - 10}{70} = 1 + \frac{3(V - 10)}{2500}, \quad (13)$$

gdzie  $V$  [km/h]. Na podstawie wzoru (13) utworzono wykres podany na rysunku 9. Jest on zgodny z wynikami pomiarów na obiekcie [17].

Z przykładów badań podanych w wielu pracach wynika niewielki wpływ oddziaływań dynamicznych transportów towarowych przejeżdżających przez obiekty gruntowo-powłokowe. Odrębnym problemem jest zachowanie się tych obiektów w przypadku pojazdów kolejowych poruszających się z dużymi prędkościami [1, 3, 5, 15]. W przypadku obiektów gruntowo-powłokowych problem przejazdów pociągów pasażerskich przystosowanych do dużych prędkości ( $V > 160$  km/h) dotyczy głównie zachowania się ośrodka gruntowego w takiej konstrukcji. Wynika to z większych rozstawów osi w pojazdach

kolejowych i ich mniejszej liczby biorących udział w oddziaływaniu na powłokę [13]. Zatem skuteczność oddziaływania dwóch osi pojazdu o znacznie większym rozstawie niż trzech osi ciężkiej lokomotywy jest mniejsza nawet ze znacznie większej wartości współczynnika dynamicznego. Przejazd przez obiekt o rozpiętości  $L = 10$  m z prędkością 180 km/h wynosi zaledwie  $\frac{1}{4}$  sekundy (gdy przyjmie się długość linii wpływu jako  $2L$ ).

## Podsumowanie

Szczególną cechą obiektów gruntowo-powłokowych jest brak elementów występujących w klasycznych mostach: łożysk, dylatacji, przyczółków. Z powodu układania zasyпки gruntowej na powłoce nawierzchnia i podbudowa jezdni w obiektach drogowych i kolejowych ma takie same podłoże jak w całym ciągu komunikacyjnym (na nasypach). Stąd też nie ma powodów aby stosować w tych obiektach dodatkowych elementów służących do poprawy płynności ruchu występujących w klasycznych mostach (np. płyt przejściowych). Z rezultatów badań oddziaływania pojazdów na obiekty gruntowo-powłokowe widoczna jest znaczna redukcja efektów dynamicznych. Wynika to z dużej sztywności blachy falistej zanurzonej w ośrodku gruntowym oraz dużej bezwładności obiektu w tym masy zasyпки gruntowej stanowiącej konstrukcję. ◀

## Materiały źródłowe

- [1] Aktualne zagadnienia budownictwa komunikacyjnego (praca zbiorowa) Seria Monografie Zakładu Mechaniki Teoretycznej i Mechaniki Nawierzchni Komunikacyjnych, Warszawa 2015.

- [2] Andersson A., Karoumi R.: A soil-steel bridge under high-speed railways. Archives of Institute of Civil Engineering 23/2017 p. 45-52.
- [3] Asp O., Laaksonen A.: Instrumentation and FE-analysis of a large span culvert built under a railway. Structural Engineering International, Vol. 26 No. 4/2016 pp. 357-364.
- [4] BayogluFlener E., Karoumi R.: Evaluation of the dynamic response of a soil-steel composite railway bridge. Archives of Institute of Civil Engineering, 12, 2012, 55-64.
- [5] Klasztorny M.: Dynamika mostów belkowych obciążonych pociągami szybkojeżdżącymi. Wydawnictwa naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.
- [6] Machelski C.: Ruchome obciążenia obiektów mostowych. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2015.
- [7] Machelski C.: Klasyfikacja obiektów gruntowo-powłokowych z uwagi na zmiany deformacji powłoki podczas budowy. Przegląd Komunikacyjny 9/2016 s. 5-10.
- [8] Machelski C.: Szacowanie oddziaływania zasyпки na powłokę obiektów gruntowo-powłokowych na podstawie deformacji powłoki. Przegląd Komunikacyjny 11/2016 s. .
- [9] Machelski C.: Stiffness of railway soil-steel structures. Studia Geotechnika et Mechanica. No. 4/2015 p. 29-36.
- [10] Machelski C.: Kinematic method for the determination of influence function of internal forces in the steel shell of soil-steel Bridges. Studia Geotechnika et Mechanica. No. 3/2010 pp. 27- 40.
- [11] Machelski C., Janusz L.: Application of Results of Test in Developing 2D Model for Soil-Steel Railway Bridges. Journal of Transportation Research Board, Vol. 2656:53-6, January 2017.
- [12] Machelski C., Janusz L., Czerepak A.: Estimation of Stress level in the Corrugated Soil-Steel Structure Based on Deformations in the Crown. Journal of Traffic and Transportation Engineering 4(2016) p. 186-193.
- [13] Machelski C., Mumot M.: Corrugated shell displacements during the passage of a vehicle along a soil-steel structure. Studia Geotechnika et Mechanica. No. 4/2016 p. 29-36
- [14] Madaj A., Surzbecher K., Porębski R., Janusz L.: Testing of Multiplate type structure under dynamic railway loads. Archives of Institute of Civil Engineering, 12, 2012, 185-195
- [15] Mellak P., Anderson A., Pettersson L., Karomi R., Dynamic behaviour of short span soil-steel composite bridge for high-speed railways-field measurements and FE-analysis, Engineering Structures, Vol. 69, 15 June 2014, pp. 49-61.
- [16] Surowiecki A., Machelski C., Saska P.: Numerical modeling of engineering soil shell structure. Journal of Science of the Military Academy of Land Force. Vol. 48 No 4(182) 2016 pp. 160-169.
- [17] Szcześniak W., Hypki M., Skulski B., Śledziewski K.: Badanie statyczne i dynamiczne mostu kolejowego o konstrukcji gruntowo-powłokowej. Logistyka 6/2014 s. 10252-10268.
- [18] White K., Sargand S., Masada T.: Evaluation of load rating procedure for metal culverts under shallow oil covers. Archives of Institute of Civil Engineering 23/2017 p. 311-323.

## REKLAMA



- Rury stalowe spiralnie karbowane
- Konstrukcje ze stalowych blach falistych
- Rury przepustowe z PP i HDPE
- System kanalizacji deszczowej i sanitarnej
- Ściany oporowe z gruntu zbrojonego
- Zbiorniki retencyjne
- Geosyntetyki
- Mosty kratowe
- Gabiony
- Konstrukcje inżynierskie z żelbetowych elementów prefabrykowanych
- Płatki ochronno-naprowadzające dla pólaków

**ViaCon Polska Sp. z o.o.**  
 ul. Przemysłowa 6  
 64-130 Rydzyna  
 tel.: +48 65 525 45 45  
 fax: +48 65 525 45 55  
 office@viacon.pl  
**www.viacon.pl**

Pobrano z mostwiedzy.pl

**MOST WIEDZY**

# Modelowanie analogowe w analizie jakościowej rozchodzenia się drgań

## Analog modelling in qualitative analysis of vibration propagation



**Eligiusz Mieloszyk**

Prof. dr hab. inż.

Politechnika Gdańska, Wydział  
Inżynierii Lądowej i Środowiska

emieloszyk@mif.pg.gda.pl



**Sławomir Grulkowski**

Dr inż.

Politechnika Gdańska, Wydział  
Inżynierii Lądowej i Środowiska

slawi@pg.edu.pl

**Streszczenie:** Proces rozprzestrzeniania się drgań zachowuje się analogicznie jak inne znane zjawiska podobne do niego, np. zjawisko drgań układów elektrycznych, mechanicznych, hydraulicznych, zjawisko dyfuzji, zjawisko rozchodzenia się ciepła, zjawisko falowe, czy zjawisko adwekcji. Do analizy problemu zostaną wykorzystane zjawiska podobne i uogólnione układy dynamiczne. Da to możliwość wyciągania wniosków co do zachowania się jednego procesu na podstawie innego, podobnego do niego. Taka koncepcja zostanie wykorzystana przy analizie jakościowej rozchodzenia się drgań, w szczególności w gruncie, czy podłożu gruntowym inżynierskich obiektów transportowych.

**Słowa kluczowe:** Modelowanie analogowe; Drgania; Przenoszenie drgań; Stateczność obiektu

**Abstract:** The theory of dynamic systems is usually used to model the real systems. The models are based on solving ordinary differential equations, partial or difference, which enable obtaining the relation between input signal and the system response (output signal). The analogy between those models and generalized dynamic systems or control systems can be practically used. Vibration propagation can be described in a similar way as the phenomena of vibrations of the electrical, mechanical, or hydraulic systems, diffusion, heat propagation, wave propagation or advection. The physical problem will be solved based on generalized dynamic systems, which enables drawing corresponding conclusions. This concept will be applied to qualitative analysis of vibration propagation in the foundations of transportation constructions".

**Keywords:** Analog modeling; Vibrations; Vibration propagation; Construction stability

Ogólnie drgania możemy podzielić na generowane:

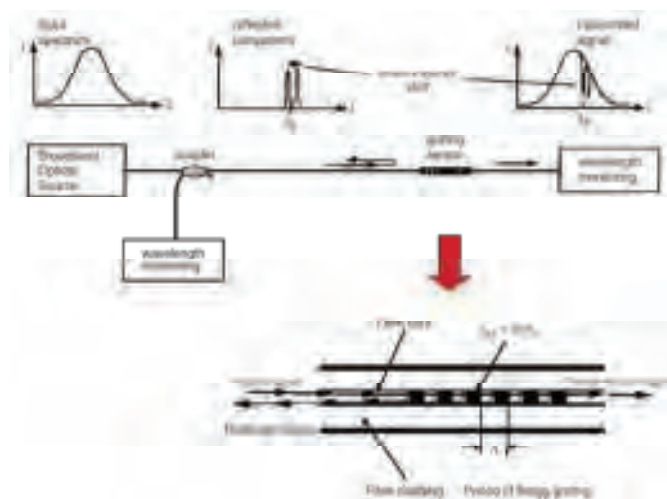
- celowo (o stosunkowo krótkim czasie trwania),
- niecelowo (o dłuższych, bądź o długich czasach trwania).

Te pierwsze o charakterystycznych parametrach są generowane w ramach eksperymentów czynnych. Mogą to być generowane z wykorzystaniem wzbudnika pobudzanego impulsem o wysokiej częstotliwości drgania sprężyste (fale sprężyste) rejestrowane z wykorzystaniem np. czujników światłowodowych, które są, co istotne niewrażliwe na wpływ pola elektromagnetycznego. Można wykorzystać je również do pomiaru innych parametrów fizycznych takich jak odkształcenia, temperatura, ciśnienie, itp., a tym samym do badania różnego rodzaju konstrukcji: budynków, mostów, rurociągów, a także pojazdów (lokomoty-

tyw, wagonów, statków, samolotów) lub ich elementów [7].

Najczęściej stosowane są czujniki typu FBG, których zasada działania jest przedstawiona na rys. 1. Są one w rzeczywistości filtrami widmowymi wykorzystującymi zasadę odbicia Bragg'a i służą do wykrywania i lokalizacji uszkodzeń. Zmiany długości fali po propagacji przez obszar z uszkodzeniem lub po odbiciu jej od uszkodzenia mogą być wykrywane przez dekodery, który wykorzystuje filtry zaporowe (odcinające), nastawialne filtry wąsko-

g'a i służą do wykrywania i lokalizacji uszkodzeń. Zmiany długości fali po propagacji przez obszar z uszkodzeniem lub po odbiciu jej od uszkodzenia mogą być wykrywane przez dekodery, który wykorzystuje filtry zaporowe (odcinające), nastawialne filtry wąsko-



1. Zasada działania czujnika FBG [2]

pasmowe. Według podobnej zasady bada się podłoże gruntowe pod inwestycje transportowe (drogi, tunele) w celu ustalenia układu warstw geologicznych. W tym przypadku drgania wzbudzone są za pomocą specjalnych pojazdów wibrujących (z płytami wibrującymi) wytwarzających drgania o częstotliwości 8 – 90 Hz przez 10 – 16 s powtarzane w danym punkcie przez około 5 min. (drgania okresowe). Odbite fale drganiowe od poszczególnych warstw są rejestrowane przez geofony, według analogicznej zasady jak na rys. 1.

Te drugie na ogół są niepożądane, są efektem ubocznym innych działań (procesów) i mają negatywny wpływ na człowieka oraz środowisko. Są mierzone i wykorzystywane w eksperymencie biernym w celu ich rejestrowania, a dalej eliminowania z wykorzystaniem eliminatorów drgań (rys. 2), mechanicznych filtrów drgań oraz zmniejszenia ich negatywnych skutków oddziaływania na człowieka i środowisko. Wykorzystywane są też do monitorowania stanu technicznego konstrukcji w czasie jej bieżącej pracy (w czasie ruchu pociągu, ruchu transportowych jednostek pływających narażonych na długookresowe cykliczne obciążenia o dużych wartościach spowodowanych ciągłym działaniem fal, w czasie ruchu samolotów itp.).

## Analityczne uwarunkowania problemu

W praktyce inżynierskiej duże znaczenie mają zjawiska podobne prowadzące do modelowania analogowego. Bez pojęcia zjawisk podobnych, każde zjawisko należałoby badać oddzielnie, natomiast znając podobieństwo zjawisk można wykorzystać poszczególne wyniki badań do wyznaczania charakterystyk nowych urządzeń, czy procesów. Daje to możliwość wyciągnięcia wniosków na podstawie działania jednego urządzenia co do zachowania się drugiego urządzenia, czy zachowania się danego procesu. Tak też postępuje się tworząc uogólnione układy dynamiczne [9], które ze względu na swoją ogólność obejmują swym zakresem układy ciągłe i dyskretne, o

parametrach skupionych i rozłożonych, stacjonarne i niestacjonarne, i które często modeluje się z wykorzystaniem równań różniczkowych zwyczajnych, cząstkowych, równań różnicowych, bądź ich układów. Jednym z celów tych działań jest poszukiwanie związku między sygnałem wejściowym i wyjściowym, tzn. odpowiedzią układu. Dopiero przyjęcie konkretnej reprezentacji układu prowadzi do szczegółowej analizy konkretnego problemu i zjawiska, pozwala ustalić pewne związki między elementami danego systemu, a także wskazać kierunki postępowania prowadzące do jego ulepszenia (poprawienia), sprawniejszego jego działania w celu uzyskania oczekiwanych rezultatów, czy poprawienia niezawodności systemu jako całości, bądź jego części.

Doskonale wiemy, że zamiast analizy układów elektrycznych  $R, L, C$  (opór, samoindukcja, pojemność) znajdujących się pod działaniem siły elektromotorycznej  $E$ , możemy rozważyć układy mechaniczne złożone z masy  $m$ , sprężyny o współczynniku sztywności (sprężystości)  $k$  i oporze tarcia  $r$  (tłumieniu) znajdujące się pod działaniem siły zewnętrznej  $F$ . Jest to możliwe, bo przy następującej zależności

$$k \leftrightarrow \frac{1}{C} \quad r \leftrightarrow R \quad m \leftrightarrow L \quad (1)$$

modele mechaniczny i elektryczny są opisywane takimi samymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, czyli takimi samymi z formalnego punktu widzenia układami dynamicznymi [12]. Są to znane równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego [14]. Podobnie odnosi się to także do odpowiednich układów hydraulicznych. Są to tzw. modele analogowe. Takie podejście pozwala np. modelować drgania mechaniczne lub przepływ wody przez przebiegi prądu  $I$  w odpowiednim układzie elektrycznym i odwrotnie. Są to typowe układy drgające i są też wykorzystywane do modelowania (konstruowania) wibroizolacji (rys. 2), np. w celu eliminowania drgań przekazywanych z silnika na lokomotywę, z lokomotywy na wagony – zapewnią to, w przypadku pasażerów lepszy komfort ich jazdy, a także poprawia



2. Eliminowanie drgań z wykorzystaniem warstwy izolującej drgania [10]

żywołność poszczególnych elementów systemu podtorze – tor – pojazd. Stan techniczny tego układu ma wpływ na dynamiczne zachowanie się pojazdu na torze, jego stateczność, a tym samym bezpieczeństwo i poziom drgań przekazywanych z pojazdu w tor i dalej, poprzez grunt w otaczające środowisko.

Wykorzystując uogólniony operator Heaviside'a [9] postaci

$$p_q = \frac{id}{\int_0^t} \quad (2)$$

oraz zależność

$$\frac{d^n}{dt^n} = p_q^n, \quad (3)$$

w przypadku jednorodnych warunków początkowych modelowi różniczkowemu obwodu  $R, L, C$  można zgodnie z [9] przyporządkować związek między odpowiedzią układu i jego wymuszeniem (sterowaniem) z wykorzystaniem uogólnionej transmitancji operatorowej  $G(p_q)$ , która w tym przypadku określona jest wzorem

$$G(p_q) = \frac{p_q}{Lp_q^2 + Rp_q + \frac{1}{C}} = \frac{1}{Lp_q + R + \frac{1}{Cp_q}}$$

ponieważ

$$(Lp_q^2 + Rp_q + \frac{1}{C})I = p_q E.$$

Funkcja operatorowa określona tutaj wzorem

$$Z(p_q) = \frac{1}{G(p_q)} = Lp_q + R + \frac{1}{Cp_q}$$

jest impedancją układu  $R, L, C$ . Ze względu na zależność (1) przez analogię pojęcie to przenosi się na drgające układy mechaniczne  $m, k, r$  i jest impedancją mechaniczną postaci

$$Z(p_q) = mp_q + r + \frac{k}{p_q}$$

w odniesieniu do prędkości przemieszczenia albo postaci

$$Z(p_q) = mp_q^2 + rp_q + k$$

w odniesieniu do przemieszczenia, i

jest uogólnieniem współczynnika siły sprężystości.

Te podstawowe modele mają bardzo istotne znaczenie praktyczne, ponieważ wiele złożonych modeli opisujących drgania w rzeczywistych układach transportowych powstaje z tych podstawowych analogowych (jak w (1)) poprzez ich łączenie równoległe bądź szeregowo.

Istotnym czynnikiem wpływającym na minimalizację poziomu drgań mechanicznych przenoszonych z lokomotywy na wagony jest odpowiednie ich ograniczanie lub eliminowanie w określonych zakresach częstotliwości poprzez urządzenia ciąglowo – zderzne, które grają rolę eliminatorów drgań (rys. 2) lub filtrów mechanicznych. Urządzenia te są modelowane przez analogiczne filtry elektryczne: dolnoprzepustowe, górnoprzepustowe, środkowoprzepustowe, środkowozaporowe, czyli układy  $R, L, C$ .

Zlinearyzowany układ ruchu pojazdu, traktowany jako uogólniony układ dynamiczny [9], w którym jako sygnał wejściowy przyjęto przyspieszenia środków kół zestawów kołowych, jako efekt wymuszeń kinematycznych kół od nierówności toru jest postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}'$$

gdzie:  $\mathbf{x}$  oznacza wektor stanu,  $\mathbf{A}$  jest macierzą procesu albo inaczej stanu układu zawierającą bezwładności, tłumienia i sztywności,  $\mathbf{u}$  jest wektorem wymuszeń,  $\mathbf{B}$  jest macierzą wymuszenia.

Na podstawie (2) i (3) oraz na podstawie definicji uogólnionej transmitancji operatorowej [3] mamy

$$\mathbf{G}(\mathbf{p}_q) = (\mathbf{p}_q\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B},$$

czyli macierz transmitancji operatorowych, z której otrzymujemy macierz transmitancji widmowych postaci

$$\mathbf{G}(i\omega) = (i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, i^2 = -1,$$

która jest tu charakterystyką filtracji drgań. Częstotliwości wymuszeń od układu przenoszenia napędu i od nierówności toru przy odpowiednich prędkościach jazdy mogą powodować wzmacnianie amplitud drgań dla częstotliwości bliskich częstotliwościom własnym układu i w

konsekwencji transmitować drgania poprzez mechanizm ciąglowy np. z lokomotywy na wagony. Z podobną sytuacją mamy do czynienia w przypadku hamowania pociągu, z wykorzystaniem wybranego trybu hamowania [11] uzależnionego od rodzaju pociągu prowadzonego przez lokomotywę. Chodzi o wybór takiego trybu hamowania, aby zostały zmniejszone powstające w procesie hamowania drgania podłużne i poprzeczne całego składu pociągu prowadzące w skrajnych przypadkach do rozerwania składu. W przypadku lokomotyw elektrycznych zasilanych z sieci trakcyjnej istotne znaczenie ma współpraca tzw. odbieraka (rys. 3) z siecią trakcyjną (z siecią jezdnią). Jednym z takich modeli (bez tarcia suchego) jest model złożony z połączonych dwóch mas: zastępczej masy  $m_1$  sieci jezdnej oraz zastępczej masy  $m_2$  odbieraka, tłumienia  $r$  odbieraka, sztywności  $k$  sieci jezdnej poddanych działaniom sił: siły mechanicznej  $F_1$  unoszenia oraz siły aerodynamicznej  $F_2$  [8]. W związku z tym, że mamy tu do czynienia z układem drgającym typu  $R, L, C$ , więc na podstawie analogii (1) otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu postaci

$$(m_1 + m_2)\ddot{y} + r\dot{y} + ky = F_1 + F_2$$

opisujące drgania układu mas odbieraka – sieć trakcyjna. Układowi temu można, jak wcześniej wspomniano przyporządkować transmitancję operatorową i impedancje mechaniczne [5].

Drgania generowane przez urządzenia transportowe lądowe (pojazdy, rurociągi, tunele, mosty, płyty lotnisk itp.) przenoszone są na inne obiekty bezpośrednio lub pośrednio przez grunt, nawet na bardzo duże odległości, wywołując negatywne skutki. Najlepszym przykładem przenoszenia przez grunt drgań na duże odległości jest następujący przypadek. W końcu maja 2017 roku w Koszalinie na jednym z osiedli mieszkańcy kilku wieżowców odczuwali drgania w swoich mieszkaniach. Ewakuowano około tysiąc osób. Badania z wykorzystaniem sejsmografów i przeprowadzone eksperymenty (seria testowych mikro-wybuchów) potwierdziły przypuszczenie, że przyczyną tej sytuacji była stosowana na budowie drogi ekspresowej S6 metoda wybuchów wzmacniania podłoża gruntowego w okolicy miejscowości Sianów. Warto dodać, że wspomniana metoda była realizowana w miejscu odległym o około trzy kilometry od budynków, w których obserwowano jej negatywne skutki. Z tego wynika jak istotny jest z praktycznego punktu widzenia problem rozchodzenia się drgań w gruncie i ich ograniczanie lub eliminowanie. Analizując równania konstytutywne bazujące na równaniach Naviera uzupełnionych o człony odpowiadające za siły bezwładności dla półprzestrzeni sprężystej gruntu [6, 13] otrzymujemy równania różniczkowe falowe dla fal podłużnych i poprzecznych  $u$ . W każdym z tych przypadków są to równania różniczkowe cząstkowe [1] o tej samej strukturze i w przypadku jednowymiarowym można je przedstawić w postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4)$$

gdzie dodatni parametr  $a$  charakteryzuje półprzestrzeń w odniesieniu do analizowanego rodzaju fali drganiowej (podłużna, poprzeczna).

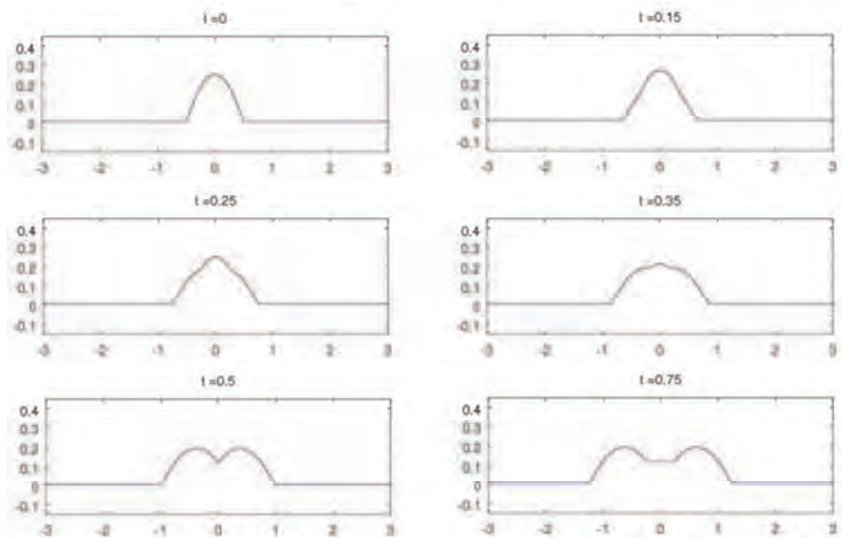
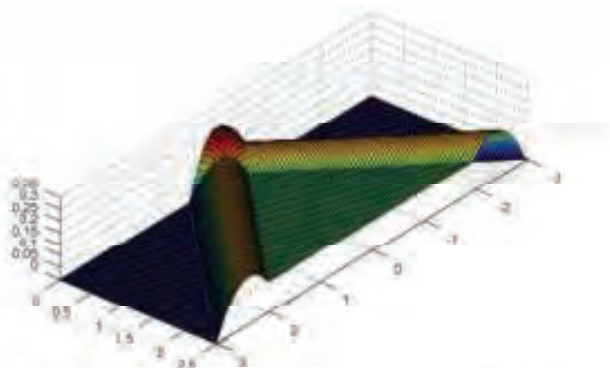
Szukamy odpowiedzi układu dynamicznego o parametrach rozłożonych (4) w zbiorze  $D = \{(x, t) : x \in R, t > 0\}$  przy warunkach początkowych:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \phi(x) \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}$$

gdzie funkcje  $\phi(x)$ ,  $\psi(x)$  są funkcjami o ciągłych pochodnych odpowiednio rzędu drugiego i pierwszego na prostej  $R$  [4]. Do układu dynamicznego (4) możemy dołączyć funkcję  $f(x, t)$  charakteryzującą źródło generowania drgań tworząc równanie różniczkowe niejednorodne. Korzystając z [9] jego rozwiązanie łatwo przedstawić w na-



3. Odbierak prądu z sieci trakcyjnej (fot. Mario Schürholz [www.bahnbilder.de](http://www.bahnbilder.de))



4. Rozchodzenie się drgań przy zadanym  $\varphi(x)$  i  $\psi(x)$  dla  $a=1$  oraz ich kształt dla ustalonych chwil  $t$

stępującej postaci operatorowej

$$u(x, t) = \frac{p_q^2 \varphi + p_q \psi}{p_q^2 - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}} + \frac{f}{p_q^2 - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \quad (5)$$

Analiza wzoru (5) pokazuje, że dla modelu jednowymiarowego drgania rozchodzą się w kierunku prostych  $x+at=0$  i  $x-at=0$  z prędkością  $a$  w „prawo” i w „lewo”. Widać to wyraźnie na rys. 4, gdzie dla uproszczenia przyjęto  $a=1$  i  $\varphi(x)=1/4-x^2$  dla  $|x|<1/2$  dla oraz 0 dla pozostałych  $x$ ,  $\psi(x)$  jest sygnałem impulsowym prostokątnym o wysokości  $1/4$  określonym w przedziale  $\langle -1/2, 1/2 \rangle$ ,  $f(x,t)=0$ .

Do modelowania zachowania się (rozchodzenia się) drgań przewodu jezdnego [8] przez analogię, podobnie jak poprzednio wykorzystuje się układ dynamiczny (4), w którym  $a^2=F_\sigma/\rho$ , gdzie  $F_\sigma$  jest siłą naciągu sieci (około 10 kN), natomiast  $\rho$  jest gęstością liniową sieci zależną od materiału przewodu jezdnego. Są to drgania  $u(x,t)$  w przewodzie jezdnym w jednowymiarowym modelu rozchodzącej się z prędkością  $a=\sqrt{(F_\sigma/\rho)}$  (rys. 4).

Wspomniane równanie (4) może być rozszerzone o oddziaływanie odbieraka i wtedy, jak poprzednio pojawi się człon  $f(x,t)$  prowadzący do układu nieswobodnego.

## Podsumowanie

Wiele istotnych modeli wykorzystywanych w praktyce warto tworzyć bazując na analogii między opisywanymi zjawiskami. Modele układów złożonych tworzy się przez łańcuchowe lub równoległe połączenie podstawowych układów. Dzięki analogiom pojęcia funkcjonujące w jednej dziedzinie wiedzy mogą być przenoszone do innej z dobrym skutkiem. Modelowanie analogowe dobrze sprawdza się w praktyce, szczególnie do analizy jakościowej drgań badanych problemów inżynierskich. Modele analogowe pozwalają na podstawie jednego, rozstrzygać przykładowo o stateczności technicznej drugiego i odwrotnie. Poprzez identyfikację modelu można przejść do analizy ilościowej badanych problemów. ◀

## Materiały źródłowe

- [1] Bicadze A. W., Równania fizyki matematycznej, PWN, 1984
- [2] Chan T.H.T., Yu L., Tam H.Y., Ni Y.Q., Liu S.Y., Chung W.H., Cheng L.K., Fiber Bragg grating sensors for structural health monitoring of Tsing Ma bridge, Background and experimental observation, Engineering Structures, 28, 2006
- [3] Edwards R., Functional analysis. Theory and applications, New York, 1965
- [4] Evans L. C., Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M., Feynmana wykłady z fizyki, PWN, 2001
- [6] Gryczmański M., Wprowadzenie do opisu sprężysto – plastycznych modeli gruntów, Wydawnictwo PAN, Studia z zakresu inżynierii nr 40, Warszawa 1995
- [7] Hong-Nan Li, Dong-Sheng Li, Gang-Bing Song, Recent applications of fiber optic sensors to health monitoring in civil engineering, Engineering Structures, 26, 2004
- [8] Judek S., Karwowski K., Mizan M., Wilk A., Modelowanie współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną, Przegląd Elektrotechniczny, 11, 2015, 248 – 253
- [9] Mieloszyk E., Nieliniowy rachunek operatorów w zastosowaniu do uogólnionych układów dynamicznych. Wydawnictwo PAN, Gdańsk 2008
- [10] Milewska A., A certain solution of non-linear differential problem with application to selected geotechnical problems, Archives of Civil Engineering, LVIII, 2.
- [11] Simens A. G., Instrukcja obsługi czterosystemowej lokomotywy wysokiej mocy serii 189.
- [12] Tihonow A. N., Samarski A. A., Równania fizyki matematycznej, PWN, 1963
- [13] Verruijt A., An Introduction to Soil Dynamics, Springer, 2010
- [14] Zwillinger D., Handbook of Differential Equations, Academic Press, 1984

# Akustyczna specyfika stalowych mostów kolejowych

## The acoustic specificity of steel railway bridges



**Lucjan Janas**

Dr inż.

Politechnika Rzeszowska,  
Wydział Budownictwa, Inżynierii  
Środowiska i Architektury

ljanas@prz.edu.pl

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono wyniki badań hałasu w otoczeniu czterech stalowych mostów kolejowych. Jeden z obiektów ma tor mocowany bezpośrednio do stalowej płyty pomostu, kolejny posiada pomost w postaci rusztu otwartego. Pozostałe dwa obiekty mają tor ułożony na podsypce i różny rodzaj konstrukcji dźwigarów. Przeanalizowano wpływ badanych mostów na klimat akustyczny wokół linii kolejowych. Podano ogólne zalecenia do projektowania cichych mostów.

**Słowa kluczowe:** Hałas; Mosty stalowe; Kolej

**Abstract:** In the paper, the acoustic effects in the vicinity of four railway bridges have been studied. One of the objects has a track fastened directly to the steel deck plate, another has a deck in the form of an open grillage. The other two objects have a track situated on the ballast and various types of girders. The influence of the bridge on the level of acoustic pressure in the neighborhood of railway roads has been analyzed. General recommendations for the design of silent bridges were discussed.

**Keywords:** Noise; Steel bridges; Railway

Pojazdy szynowe przejeżdżające przez mosty, wiadukty lub estakady mogą oddziaływać na środowisko w znacznie większym stopniu niż pojazdy przejeżdżając po torze bez tego typu obiektów. Obiekty inżynierskie mogą przyczynić się do zwiększenia poziomu hałasu a stopień zwiększenia zależy przede wszystkim od rodzaju konstrukcji.

Zagrożenie dla środowiska mogą stanowić obiekty stalowe zbudowane kilkanaście czy kilkadziesiąt lat temu ale również współczesne, zaprojektowane w ostatnich latach [6, 8, 10]. Mosty z betonu sprężonego czy zespolone stalowo-betonowe na ogół powodują zdecydowanie mniej problemów akustycznych ale problemów takich nie można wykluczyć [5, 7]. Problem hałasu mostów występuje również na liniach dużej prędkości [8].

Na problem hałasu mostów kolejowych zwraca uwagę Eurokod 3 [9]. W normie tej, w rozdziale dotyczącym stanów granicznych użyteczności,

w postanowieniach ogólnych zapisano, że należy ograniczać częstotliwości drgań własnych konstrukcji m.in. po to, aby ograniczyć uszkodzenia zmęczeniowe i nadmierną emisję hałasu. W pkt. 7.7 dotyczącym kryteriów użytkowania mostów kolejowych zapisano, że wszelkie wymagania dotyczące emisji hałasu można podać w ustaleniach projektowych.

Problem hałasu mostów kolejowych został także poruszony w dokumencie Międzynarodowego Związku Kolei *UIC 717 Recommendations for the design of bridges to satisfy track requirements and reduce noise emissions* [11], gdzie przedstawiono ogólne zalecenia do projektowania konstrukcji, które charakteryzują się małą emisją hałasu.

W niniejszym artykule omówiono wyniki badań własnych w otoczeniu czterech stalowych mostów kolejowych o różnych rodzajach konstrukcji dźwigarów i pomostu. Jeden z obiektów ma tor mocowany bezpośrednio do stalowej płyty pomostu, kolejny po-

siada pomost w postaci rusztu otwartego. Pozostałe dwa obiekty mają tor ułożony na podsypce i różny rodzaj konstrukcji dźwigarów.

### Sposób prowadzenia badań

W celu ustalenia wpływu obiektów mostowych na hałas prowadzono jednoczesne pomiary w odległości 7.5 m od osi toru na moście i w takiej samej odległości od toru na odcinku linii poza mostem (zwykle 50 do 75 m przed lub za mostem). W obu przypadkach mikrofony znajdowały się 1.5 m nad poziomem główki szyny. Dodatkowo, w tym samym czasie mierzono hałas pod mostem, 1.5 m nad poziomem terenu.

W artykule porównano poziomy dźwięku  $A$ , czyli poziomy ciśnienia akustycznego skorygowanego wg charakterystyki częstotliwościowej zgodnej z krzywą korekcyjną  $A$ :

$$L_A = 10 \log(p_A^2/p_0^2)$$





1. Wiadukt blachownicowy z pomostem stalowym bez podsypki



2. Wiadukt blachownicowy z pomostem otwartym - rusztem podłużnicowo -poprzecznicyowym

gdzie:  $p_A$  - wartość skuteczna ciśnienia akustycznego [Pa],  $p_o$  - ciśnienie progowe odniesienia, równe 2·10<sup>-5</sup> [Pa]

Do badań stosowano zestaw mikrofonów firmy Bruel&Kjaer, oraz oprogramowanie Pulse Reflex. Zjawiska akustyczne rejestrowano w czasie przejazdów pociągów osobowych, w tym dalekobieżnych, regionalnych i szynobusów oraz pociągów towarowych. Pomiary prowadzono w temperaturze 15 – 25 °C, przy wilgotności powietrza 50 – 70 % i prędkości wiatru nie przekraczającej 5 m/s. Na mikrofonach znajdowały się osłony przeciwwietrzne. Przed rozpoczęciem badań sprawdzano tory pomiarowe wzorcowym źródłem dźwięku.

## Rodzaj konstrukcji mostu a poziom dźwięku

### Wiadukt z pomostem w postaci płyty stalowej bez podsypki

Jednym z analizowanych obiektów był 4-przęsłowy stalowy wiadukt o długości 84.4 m i schemacie statycznym belki ciągłej (rys. 1). Dźwigary główne wiaduktu to dwie blachownice o wysokości środka 1.38 m w rozstawie 4.4 m. Pomost wiaduktu został wykonany z blachy stalowej wzmocnionej

poprzecznicyami i podłużnicami. Szyny były mocowane bezpośrednio do konstrukcji stalowej. Na zewnątrz dźwigarów zaprojektowano chodniki służbowe, również z blach stalowych. Obiekt został usytuowany w łuku poziomym o małym promieniu równym 250 m. Tor na obiekcie i poza nim był bezстыkowy. Oględziny obiektu wykazały jego niezadowolający stan. Głównym problemem był brak wibroizolacji między szynami a pomostem (uległa całkowitemu uszkodzeniu) oraz nieprawidłowa krzywizna toru. Obok wiaduktu, w odległości ok. 25 m znajdował się wielorodzinny budynek mieszkalny, którego mieszkańcy skarżyli się nadmierny hałas.

Obiekt był przeznaczony tylko dla ruchu pociągów towarowych i niepożądane dźwięki powstawały mimo niewielkiej, dopuszczalnej prędkości przejazdu tj. 30 km/h. Poziomy dźwięku zarejestrowane w czasie trzech przejazdów przedstawiono w tab. 1.

Hałas obok wiaduktu sięgał niemal 89 dB(A) i był większy o ponad 15 dB od hałasu występującego obok toru poza wiaduktem. Hałas pod wiaduktem był większy nawet o ok. 18 dB od hałasu obok toru.

Przyczyną dużego wzrostu hałasu obok wiaduktu były nadmierne drgania blach konstrukcji (płyty pomostu,

chodników, dźwigarów) powodujące emisję dźwięków głównie w zakresie niskich częstotliwości - szczegółowo zagadnienie to omówiono w pracy [3]. Duży wpływ na poziom hałasu obok toru miały dźwięki powstające na styku kół z szynami i głośna praca złącz wagonów wynikająca z ruchu po łuku o małym promieniu.

### Most blachownicowy z pomostem otwartym

Kolejnym analizowanym obiektem jest jednoprzęsłowy most blachownicowy, swobodnie podparty, z rusztem poprzecznicyowo-podłużnicowym, czyli tzw. pomostem otwartym (rys. 2). Rozpiętość przęsła wynosi 24.15 m. Szyny zostały zamocowane do drewnianych mostownic przez podkładki PM-60 i przekładki podszynowe typu PKW. Mostownice oparto na podłużnicach. Obiekt w czasie badań był w dobrym stanie technicznym.

Zjawiska akustyczne rejestrowano w czasie przejazdów pociągów osobowych i towarowych – wybrane wyniki wykonanych pomiarów zamieszczono w tab. 2.

Hałas obok mostu był większy o 3.3 do 10.1 dB od hałasu obok toru poza mostem. Hałas pod mostem był więk-



3. Most blachownicowy z pomostem stalowym i torem ułożonym na podsypce



4. Most kratownicowy z pomostem stalowym i torem ułożonym na podsypce

szy nawet o ponad 20 dB od hałasu obok toru. W kilku przypadkach hałas pod mostem przekraczał 100 dB. Główną przyczyną tak dużego hałasu jest rodzaj konstrukcji. Pomost otwarty nie stanowi bariery dla dźwięków powstających na styku kół z szynami. Dodatkowo drgania środników dźwigarów blachownicowych emitują dźwięki w zakresie niskich i średnich częstotliwości. Szczegółowo zagadnienia te omówiono w pracy [1].

Ze względu na prace modernizacyjne prowadzone w czasie badań na linii kolejowej w ciągu której znajdował się obiekt, nie było możliwości zarejestrowania emisji akustycznej w czasie przejazdów z prędkościami większymi niż 70 km/h. Należy się spodziewać, że tego typu konstrukcje, przy większych prędkościach, będą w jeszcze większym stopniu niekorzystnie oddziaływać na środowisko.

## Most blachownicowy z torem ułożonym na podsypce

Przykładem często obecnie projektowanych obiektów jest most blachownicowy z pomostem stalowym ortotropowym i torem ułożonym na podsypce (rys. 3). Rozpiętość przęsła badanego mostu wynosi 31.68 m, wysokość dźwigarów 2.47 m. Podsypka została ułożona w korycie balastowym wykonanym z uźebrowanej blachy. Obiekt był w bardzo dobrym stanie technicznym, został oddany do użytkowania kilka miesięcy przed wykonaniem badań.

W tab. 3 zestawiono wyniki pomiarów poziomu dźwięku, wykonanych w czasie przejazdów pociągów osobowych i towarowych. Hałas obok mostu nie różni się znacznie od hałasu obu toru poza mostem. W większości przypadków jest nawet nieco mniejszy, co wynika z tłumienia dźwięków powstałych na styku kół z szynami przez dźwigary blachownicowe.

Hałas pod mostem był większy o 4 do 7.8 dB od hałasu obok toru - przyczyną zwiększenia hałasu pod mostem były nadmierne drgania stalowej płyty pomostu.

Ponieważ analizowany obiekt znajdował się stosunkowo nisko nad terenem, dźwięki były tłumione przez

Tab. 1. Wyniki pomiarów poziomu dźwięku w otoczeniu wiaduktu z pomostem stalowym bez podsypki

Lp.	Rodzaj pociągu	Prędkość [km/h]	Poziom dźwięku A w [dB]:			Różnica poziomów dźwięku w [dB]	
			obok toru (1)	obok wiaduktu (2)	pod wiaduktem (3)	(2) – (1)	(3) – (1)
1	towarowy	30	69.1	84.7	85.7	15.6	16.6
2	towarowy	20	72.7	88.4	88.9	15.7	16.2
3	towarowy	20	65.5	82.2	83.6	16.7	18.1

Tab. 2. Wyniki pomiarów poziomu dźwięku w otoczeniu mostu blachownicowego z pomostem otwartym

Lp.	Rodzaj pociągu	Prędkość [km/h]	Poziom dźwięku A w [dB]:			Różnica poziomów dźwięku w [dB]	
			obok toru (1)	obok wiaduktu (2)	pod wiaduktem (3)	(2) – (1)	(3) – (1)
1	osobowy - zespół trakcyjny	50	80,3	83,8	96,2	3.5	15.9
2	osobowy - dalekobieżny	60	83,8	87,4	99,9	3.6	16.1
3	osobowy - szynobus	50	74,8	78,1	90,5	3.3	15.7
4	osobowy - dalekobieżny	70	84,7	89,2	102,0	4.5	17.3
5	osobowy - dalekobieżny	50	77,3	87,4	100,5	10.1	23.2
6	towarowy	50	84,3	88,9	100,7	4.6	16.4
7	towarowy	40	79,6	88,6	101,3	9.0	21.7

Tab. 3. Wyniki pomiarów poziomu dźwięku w otoczeniu mostu blachownicowego z torem ułożonym na podsypce

Lp.	Rodzaj pociągu	Prędkość [km/h]	Poziom dźwięku A w [dB]:			Różnica poziomów dźwięku w [dB]	
			obok toru (1)	obok wiaduktu (2)	pod wiaduktem (3)	(2) – (1)	(3) – (1)
1	osobowy - regionalny	80	76,9	75,9	84,7	-1.0	7.8
2	osobowy - dalekobieżny	60	80.8	76,7	85,6	-4.1	4.8
3	osobowy - szynobus	80	76,8	75,5	80,8	-1.3	4.0
4	towarowy	35	74,1	73,0	79,8	-1.1	5.7
5	towarowy	50	81,7	81,3	87,4	-0.4	5.7
6	towarowy	40	73,6	74,3	80,9	0.7	7.3

Tab. 4. Wyniki pomiarów poziomu dźwięku w otoczeniu mostu kratownicowego z torem ułożonym na podsypce

Lp.	Rodzaj pociągu	Prędkość [km/h]	Poziom dźwięku A w [dB]:			Różnica poziomów dźwięku w [dB]	
			obok toru (1)	obok wiaduktu (2)	pod wiaduktem (3)	(2) – (1)	(3) – (1)
1	osobowy - regionalny	60	78.0	77.8	82.3	-0.2	4.3
2	osobowy - dalekobieżny	45	80.8	81.2	84.3	0.4	3.5
3	osobowy - szynobus	60	73.4	73.7	81.0	0.3	7.6
4	towarowy	30	79.1	82.2	89.1	3.1	10
5	towarowy	30	78,2	79,0	84,1	0.8	5.9
6	towarowy	40	78.1	81.1	87.4	3.0	9.3

podłoże i nie rozprzestrzeniały się. Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że tego typu konstrukcja zastosowana na terenie zurbanizowanym, np. w estakadzie na wysokich podporach, może być uciążliwa dla otoczenia.

## Most kratownicowy z torem ułożonym na podsypce

Ostatnim z analizowanych obiektów jest most kratownicowy typu „W” o rozpiętości przęsła równej 49 m, z



pomostem w postaci płyty ortotropowej wzmocnionej poprzecznicami i z torem ułożonym na podsypce (rys. 4). Kratownice mają elementy przekroju skrzynkowym i zostały stężone wiatrownicami. W czasie badań obiekt był w dobrym stanie technicznym.

Wyniki pomiarów poziomu dźwięku zestawiono w tab. 4.

Poziom hałasu obok mostu niewiele różni się od hałasu obok toru poza mostem – maksymalny zarejestrowany wzrost poziomu dźwięku to 3 dB. Pod obiektem hałas był większy o 3.5 do 10 dB od hałasu obok toru. Wzrost wystąpił głównie w zakresie niskich częstotliwości (do 500 Hz) i był spowodowany drganiami stalowej płyty pomostu [2]. Podobnie jak w przypadku mostów blachownicowych z podsypką, obiekty kratownicowe mogą stanowić zagrożenie dla środowiska wówczas, gdy będą usytuowane wysoko nad terenem, na obszarach zurbanizowanych. W tego typu konstrukcjach duże znaczenie ma zastosowanie odpowiedniej wibroizolacji [4].

## Podsumowanie i wnioski

Mosty stalowe wykonane wiele lat temu oraz te projektowane i budowane obecnie mogą stanowić zagrożenie dla środowiska. Mogą ułatwiać rozprzestrzenianie hałasu powstającego na styku kół i szyn albo samodzielnie emitować niepożądane dźwięki.

Chcąc projektować ciche mosty należy przede wszystkim stosować tor na podsypce, przy czym warto pamiętać, że nawet tego typu konstrukcje mogą emitować hałas. Jeśli częstotliwość wzbudzenia drgań będzie pokrywać się z częstotliwością drgań własnych elementów wielkopowierzchniowych konstrukcji mostu, może pojawić się niepożądana emisja dźwięków powietrznych. Ponieważ te dźwięki pojawiają się najczęściej pod konstrukcją, obiekty z torem ułożonym na podsypce mogą stanowić uciążliwość, jeśli będą usytuowane wysoko nad terenem, na obszarach zurbanizowanych. Poprawę właściwości akustycznych można uzyskać stosując podkładki lub maty wibroizolacyjne.

Obiekty z pomostami otwartymi należą do konstrukcji wokół których

hałas pojawia się głównie na skutek swobodnego rozprzestrzeniania się dźwięków powstających na styku kół z szynami oraz w wyniku drgań elementów wielkopowierzchniowych, np. środków blachownic. Tego typu obiekty nie powinny być stosowane na terenach zurbanizowanych. Jeśli występują, powinny być w miarę możliwości zastępowane innymi, o lepszych parametrach akustycznych. Częściową redukcję hałasu wokół tego typu mostów można uzyskać przez odizolowanie toru od konstrukcji nośnej wibroizolacją i zastosowanie poziomych ekranów pochłaniających dźwięki.

Jeżeli jest konieczne zastosowanie toru bezpośrednio zamocowanego do pomostu, emisję hałasu można ograniczyć odpowiednio zaprojektowaną wibroizolacją. Można też rozważyć wprowadzenie dodatkowych usztywnień w celu zmiany częstotliwości drgań własnych elementów wielkopowierzchniowych. W niektórych przypadkach warto przeanalizować możliwość zwiększenia masy pomostu lub pokrycia elementów emitujących hałas warstwą materiału, zapewniającą dodatkowe tłumienie.

Analiza mostów kolejowych pod kątem emisji hałasu powinna być elementem procesu przygotowania i projektowania inwestycji. Zalecenie dotyczy nie tylko nowo budowanych obiektów ale także obiektów przebudowywanych i modernizowanych. Wymagania dotyczące emisji hałasu powinny być określone przez inwestora. Jeżeli takich wymagań inwestor nie zdefiniuje, to mając na uwadze m.in. zwiększenie liczby i prędkości przejazdów, przebudowa lub modernizacja linii kolejowej nie poprawi klimatu akustycznego ale może nawet zwiększyć jej uciążliwość dla środowiska. ◀

## Materiały źródłowe

- [1] Janas L. Badania wibroakustyczne mostu blachownicowego. Zeszyty Naukowo-Techniczne Stowarzyszenia Inżynierów i Techników Komunikacji w Krakowie. Seria: Materiały Konferencyjne, 2015, nr 2(106), s. 47-60.
- [2] Janas L. Mosty kolejowe jako źródła hałasu – wybrane przykłady, Ze-

szyty Naukowo-Techniczne Stowarzyszenia Inżynierów i Techników Komunikacji w Krakowie. Seria: Materiały Konferencyjne, 2016, nr 2(109), s. 69-77.

- [3] Janas L., Łakota W.: Analiza możliwości ograniczenia hałasu w otoczeniu wiaduktu i linii kolejowej. Drogi i Mosty, nr 2/2005, s. 71-90.
- [4] Kraśkiewicz C., Lipko C., Oleksiewicz W., Zbiciak A.: Parametry charakteryzujące wibroizolacyjne maty podtłuczniowe stosowane w konstrukcji dróg szynowych i metody ich badania, Przegląd komunikacyjny, nr 9/2015, s. 76-82.
- [5] Li X., Liu Q., Pei S., Song L., Zhang X.: Structure-borne noise of railway composite bridge: Numerical simulation and experimental validation. Journal of Sound and Vibration 353 (2015), pp. 378-394.
- [6] Li X., Yang D., Chen G., Li Y., Zhang X.: Review of recent progress in studies on noise emanating from rail transit bridges. Journal of Modern Transportation, 2016, Volume 24, Issue 4, pp. 237-250.
- [7] Li Z. G., Wu T. X.: Estimation of vibration power flow to and sound radiation from railway concrete viaduct due to vehicle/track interaction. Noise and Vibration Mitigation for Transport Systems. NFM 118, 2012, pp. 175-183.
- [8] Liu Q., Li X., Zhang X., Zhang Z.: Structure-borne noise study of composite steel bridge on high-speed railway. Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamic, Eurodyn, Porto, Portugal, 2014, pp. 1189-1194.
- [9] PN-EN 1993-2:2010. Eurokod 3. Projektowanie konstrukcji stalowych, Część 2: Mosty stalowe. Warszawa PKN.
- [10] Stiebel D., Lölgen T., Gerbig C.: Innovative Measures for Reducing Noise Radiation from Steel Railway Bridges. Proceedings of the 11th International Workshop on Railway Noise, Uddevalla, Sweden, 9-13 September 2013, pp. 579-586.
- [11] UIC 717R. Recommendations for the design of bridges to satisfy track requirements and reduce noise emissions. 2nd edition, 2010.

# Drgania płyty o średniej grubości spoczywającej na podłożu odkształcalnym pod obciążeniem impulsowym

## Vibrations of thick plate resting on a deformable foundation under impulse load



Waclaw Szczesniak

Prof. dr inż.

Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Lubelska

w.szczesniak@il.pw.edu.pl



Magdalena Ataman

dr inż.

Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska

m.ataman@il.pw.edu.pl

**Streszczenie:** Przedmiotem rozważań w pracy jest analiza prostokątnej płyty sprężystej o średniej grubości obciążonej impulsem siły typu Diraca. Płyta spoczywa na uogólnionym, dwuparametrowym i trójkierunkowym podłożu sprężystym typu Winklera. Ugięcia dynamiczne płyty wyznaczono analitycznie w postaci podwójnego szeregu. Wyniki rozwiązań zilustrowano wykresami stosując pakiet „MATHEMATICA”.

**Słowa kluczowe:** Płyta średniej grubości; Impuls siły; Uogólnione podłoże Winklera

**Abstract:** The paper deals with vibrations of thick plate resting on generalized Winkler's foundation. The plate is subjected to the impulse of force. Governing equations of the problem, analytical solution as well as numerical example are presented. Results of calculations are shown in the figures. Solution and diagrams are obtained by means of "Mathematica" code

**Keywords:** Thick plate; Impulse of force; Generalized Winkler's foundation

Tematem pracy jest analiza prostokątnej płyty sprężystej o średniej grubości obciążonej impulsem siły typu Diraca. Płyta spoczywa na uogólnionym, dwuparametrowym i trójkierunkowym podłożu sprężystym typu Winklera uwzględniającym poziome składowe jego reakcji. Przyjęta do rozważań teoria jest wariantem znanej teorii Ambarcumiana [1], gdzie wprowadza się ugięcie  $w$  oraz dwie funkcje naprężeń  $\chi_x$  i  $\chi_y$  [4-9]. W ogólnym przypadku wraz z efektem

tarczowym, mamy do czynienia z pięcioma równaniami ruchu określającymi trzy przemieszczenia  $u$ ,  $v$ , i  $w$  oraz dwie funkcje naprężeń  $\chi_x$  i  $\chi_y$ . Przy pominięciu efektu drgań tarczowych w płaszczyźnie środkowej płyty, i tak skomplikowany układ pięciu równań dziesiątego rzędu, ograniczono do jednego równania czwartego rzędu, opisującego ugięcie  $w = w(x, y, t)$ , oraz do układu dwóch sprzężonych równań opisujących naprężenia  $\chi_x$  i

$\chi_y$ . Obciążeniem płyty jest impuls siły  $S$  typu Diraca przyłożony w dowolnym punkcie na górnej powierzchni. Płyta spełnia warunki brzegowe przegubowego podparcia na obwodzie, które też zależą od pionowych i poziomych składowych reakcji podłoża opisanych współczynnikami  $k_z$  i  $k_t$ .

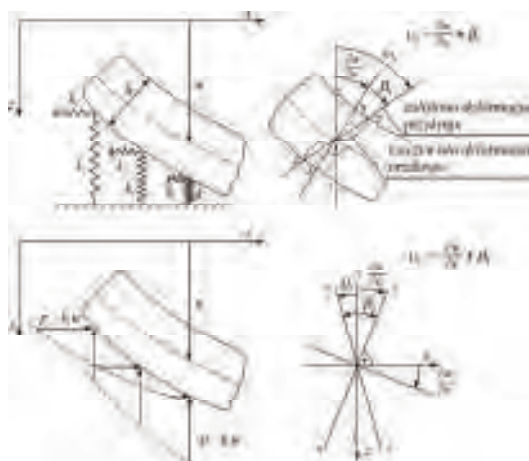
### Równania ruchu płyty

Równania ruchu płyty o średniej grubości można wyprowadzić na wiele sposobów, lokalnie na przykład z równań kinetostatyki lub globalnie z całkowitej zasady Hamiltona.

Zakładając model podłoża sprężystego Winklera opisany dwoma współczynnikami  $k_z$  oraz  $k_t$ , zależnymi od własności mechanicznych i od grubości warstwy podłoża [6]

$$p_z = k_z w, \quad p_t = k_t u_i, \quad i = x, y \quad (1)$$

poziome i pionowe siły na dolnej płaszczyźnie określone są wyrażeniami:



1. Płyta o średniej grubości na uogólnionym trójkierunkowym podłożu Winklera

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \frac{k_t h}{4} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} w + \frac{k_t h^3}{24(1-\nu)} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix},$$

$$Z_2 = p - k_z w, \quad (2)$$

gdzie  $w$  jest ugięciem powierzchni środkowej płyty, zaś  $\chi_x$  i  $\chi_y$  są pewnymi funkcjami związanymi naprężeniami stycznymi  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$ . Na rysunku 1 pokazano podłoże dwuparametrowe, trójkierunkowe oraz hipotezę kinematyczną odnoszącą się do przemieszczeń płyty. Więcej szczegółów na temat założeń dotyczących płyt o średniej grubości podano w pracach [4-6]. Funkcje  $\chi_x$  i  $\chi_y$  są powiązane z kątami  $\beta_x$  i  $\beta_y$ , tak jak na rysunku 1. Jak łatwo zauważyć na rysunku 1 reakcje uogólnionego podłoża Winklera są zarówno pionowe jak i poziome, dzie-

ki czemu można uwzględnić tarcie pomiędzy spodem płyty a sprężystym podłożem odkształcalnym. Równanie różniczkowe ruchu, wyprowadzone m.in. w pracach [4, 5], opisujące dynamiczne ugięcie  $w$  prostokątnej płyty sprężystej zapisujemy w następujący sposób: wg zależności 3,

$$\text{gdzie } \mu = \frac{k_t h^4}{24D(1-\nu)}$$

jest bezwymiarowym współczynnikiem opisującym wpływ nieznanych funkcji  $\chi_x$  i  $\chi_y$  na siły pionowe występujące na dolnej płaszczyźnie płyty,

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

jest sztywnością giętną płyty,  $w$  jest ugięciem płyty,  $\rho$  jest gęstością materiału płyty,  $h$  jest grubością płyty, zaś  $p$  jest obciążeniem normalnym do poziomej płaszczyzny środkowej płyty. Należy

zauważyć, że współczynnik podłoża  $k_t$ , w równaniu ruchu płyty zawarty jest we współczynniku  $\mu$ , który jest bardzo mały w porównaniu z jedynką i może być wobec tego pominięty, co jest w pełni technicznie uzasadnione. Jeśli zatem przyjmiemy  $\mu = 0$ , to podstawowe równanie ruchu płyty (3) upraszcza się i wraz z równaniem opisującym drgania skrętne jest następujące: wg zależności 4.

Przy założeniu, że  $p = 0$ ,  $k_z = 0$  i  $k_t = 0$  równania (4) określają drgania własne płyty bez uwzględnienia podłoża. Zakładając ruch harmoniczny nietłumiony, funkcje  $w$  i  $\psi$  zapiszemy następującymi wzorami: wg zależności 5. W równaniach (5)  $\omega_{m,n}^{kl}$  oznacza częstość kołową płyty prostokątnej wyznaczoną według teorii klasycznej Kirchhoffa, natomiast  $c_p$  i  $c_s$  oznaczają odpowiednio prędkość podłużną i poprzeczną fali w płycie [6-8]:

$$c_p^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}, \quad c_s^2 = \frac{G}{\rho},$$

$$c_p = c_s \sqrt{\frac{2}{1-\nu}}. \quad (6)$$

Podstawiając wzory (5) do równania (4) otrzymamy trzy częstości drgań własnych płyty o średniej grubości zapisane w następujący sposób:

$$\omega_{m,n}^{(1,3)} = \frac{c_p}{h\sqrt{12}} \left\{ \frac{1}{2} \left[ P_{m,n} \pm (P_{m,n}^2 - Q_{m,n}^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_{m,n}^{(2)} = \frac{c_p}{h\sqrt{12}} \left[ 6(1-\nu)(10 + \gamma_{m,n}^2) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

gdzie:

$$P_{m,n} = 60(1-\nu) + (17-5\nu)\gamma_{m,n}^2,$$

$$Q_{m,n} = 4\gamma_{m,n}^2 [15(1-\nu)]^{\frac{1}{2}}.$$

W przypadku podłoża dwuparametrowego wzory (7) ulegają komplikacji i są następujące: wg zależności 8.

W przypadku ugięcia i obciążenia rozwiązania zadania poszukujemy w postaci podwójnych szeregów funkcji własnych:

$$\begin{aligned} & \nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{17-6\nu}{60D(1-\nu)} \rho h^3 \nabla^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\rho^2 h^6}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \\ & + k_z \left[ \frac{w}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 w + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] + \\ & - \frac{1}{1-\mu} \left\{ \left[ \frac{k_t h^2}{4} \nabla^2 - \mu \left( \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k_z \right) \right] \left[ \frac{w}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{60D(1-\nu)} \nabla^2 w + \frac{\rho h^5}{360D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \right\} = \quad (3) \\ & = \frac{p}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 p + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \\ & + \frac{\mu}{1+\mu} \left[ \frac{p}{D} + \frac{(2-\nu)h^2}{60D(1-\nu)} \nabla^2 p + \frac{\rho h^5}{360D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{17-6\nu}{60D(1-\nu)} \rho h^3 \nabla^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\rho^2 h^6}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \\ & + k_z \left[ \frac{w}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 w + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] + \\ & - \left\{ \left[ \frac{k_t h^2}{4} \nabla^2 \right] \left[ \frac{w}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{60D(1-\nu)} \nabla^2 w + \frac{\rho h^5}{360D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \right\} = \quad (4) \\ & = \frac{p}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 p + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{10}{h^2} \psi - \frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)} \ddot{\psi} = 0, \quad \psi = \frac{\partial \chi_x}{\partial y} - \frac{\partial \chi_y}{\partial x}.$$

$$w = w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}(t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \cos \omega_{m,n} t, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b},$$

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}(t) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \cos \omega_{m,n} t, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{h}{a}, \quad (5)$$

$$\gamma_{m,n}^2 = h^2 (\alpha_m^2 + \alpha_n^2) = \pi^2 \beta^2 (m^2 + \lambda^2 n^2), \quad \gamma_{m,n}^2 = \gamma_m^2 + \gamma_n^2, \quad \gamma_m^2 = h^2 \alpha_m^2, \quad \gamma_n^2 = h^2 \alpha_n^2,$$

$$\omega_{m,n}^{kl} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{\pi^2 \beta}{a} (m^2 + \lambda^2 n^2) \frac{c_p}{\sqrt{12}} = \frac{\gamma_{m,n}^2 c_p}{h\sqrt{12}}, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots$$

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{m,n}(t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$p(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{m,n}(t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y. \quad (9)$$

Obciążenie impulsem siły zapisujemy w następujący sposób, a delty Diraca rozkładamy w podwójny szereg: wg zależności 10.

Ostatecznie do rozwiązania otrzymamy równanie czwartego rzędu na nieznaną funkcję  $q_{m,n} = q_{m,n}(t)$ . Celem uproszczenia dalszych zapisów pominiemy we wzorach 11 wskaźniki  $m$  i  $n$  pisząc np.  $q = q(t)$ : wg zależności 11.

gdzie:  $\theta = \frac{k_z}{k_t}, \quad \mu = \frac{k_t h^4}{24D(1-\nu)},$

$$\mu_z = \frac{k_z h^4}{D}, \quad \tilde{\gamma}_{m,n}^2 = h^2 (\alpha_m + \beta_n),$$

$$\lambda = \frac{a}{b}, \quad \xi = \frac{h}{a}, \quad \gamma = \pi \xi^2 (1 + \lambda^2),$$

$$c_p^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)},$$

$$A = \left[ 60(1-\nu) + (17-6\nu)\tilde{\gamma}^2 + \mu_z \left( 1 + \frac{\theta \tilde{\gamma}^2}{24} \right) \right],$$

$$\hat{\gamma}^4 = \left\langle \tilde{\gamma}^4 + \mu_z \left\{ 1 + \left[ \frac{2-\nu}{10(1-\nu)} \right] + \frac{\theta \left( 1 + \frac{2-\nu}{60(1-\nu)} \tilde{\gamma}^2 \right) \right\} \tilde{\gamma}^2 \right\rangle,$$

$$Q = 4\hat{\gamma}^2 [15(1-\nu)]$$

$$\tilde{\omega}_{m,n}^4 - \frac{1}{12} \left( \frac{c_p}{h} \right) \tilde{P}_{m,n} \tilde{\omega}_{m,n}^2 + \frac{1}{576} \left( \frac{c_p}{h} \right)^4 \tilde{Q}_{m,n}^2 = 0,$$

$$\tilde{P}_{m,n} = P_{m,n} + K_{m,n}, \quad K_{m,n} = \frac{k_z h^4}{D} \left( 1 + \frac{\theta \gamma_{m,n}^2}{24} \right),$$

$$\tilde{Q}_{m,n}^2 = 4 \tilde{\gamma}_{m,n}^2 [15(1-\nu)]^2,$$

$$\tilde{\gamma}_{m,n}^4 = \gamma_{m,n}^4 + \frac{k_z h^4}{D} \left\{ 1 + \left[ \frac{2-\nu}{10(1-\nu)} + \frac{\theta}{4} \left( 1 + \frac{2-\nu}{60(1-\nu)} \gamma_{m,n}^2 \right) \right] \gamma_{m,n}^2 \right\},$$

$$\theta = \frac{k_z}{k_t}, \quad \mu = \frac{k_t h^4}{24D(1-\nu)}, \quad \mu_z = \frac{k_z h^4}{D}, \quad \tilde{\gamma}_{m,n}^2 = h^2 (\alpha_m + \beta_n), \quad \lambda = \frac{a}{b},$$

$$\tilde{\omega}_{m,n}^{(1,3)} = \frac{c_p}{h\sqrt{12}} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \tilde{P}_{m,n} \pm (\tilde{P}_{m,n}^2 - \tilde{Q}_{m,n}^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{\omega}_{m,n}^{(2)} = \omega_{m,n}^{(2)} = \frac{c_p}{h\sqrt{12}} [6(1-\nu)(10 + \gamma_{m,n}^2)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{\omega}_{m,n}^{(1)} < \tilde{\omega}_{m,n}^{(2)} < \tilde{\omega}_{m,n}^{(1,3)}.$$

$$p = p(x, y, t) = S \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(t-t_0),$$

$$\delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(t-t_0) = \frac{4}{ab} \delta(t-t_0) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0,$$

$$p(x, y, t) = S \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(t-t_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,m}(t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$f_{n,m}(t) = \frac{4S}{ab} \delta(t-t_0) \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad (10)$$

$$\nabla^2 p(x, y, t) = -\frac{4S}{ab} \sum_n \sum_m (\alpha_m^2 + \beta_n^2) f_{n,m}(t) \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$\frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial t^2} = \frac{4S}{ab} \sum_n \sum_m \ddot{f}_{n,m}(t) \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

$$q^{IV} + A\ddot{q} + \frac{1}{576} \left( \frac{c_p}{h} \right)^4 Q^2 q = \left\{ \frac{2S c_p^2}{\rho h^3 ab} [(1-\nu) + \tilde{\gamma}^2 (2-\nu) - \frac{\rho h^5 \alpha^2 \nu^2}{12D}] \right\} \delta(t-t_0) \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}, \quad (11)$$

Niejednorodne równanie czwartego rzędu (11) rozwiązano komputerowo przy czterech zerowych warunkach początkowych.

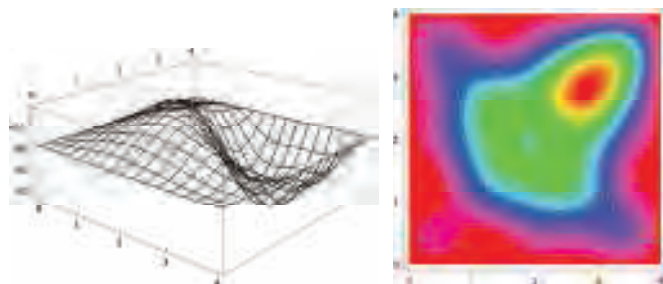
## Przykład obliczeniowy

Równanie (11) rozwiązano analitycznie przy wykorzystaniu pakietu Wolframa „MATHEMATICA 10”, również szereg (9) zaprogramowano w tym kodzie.

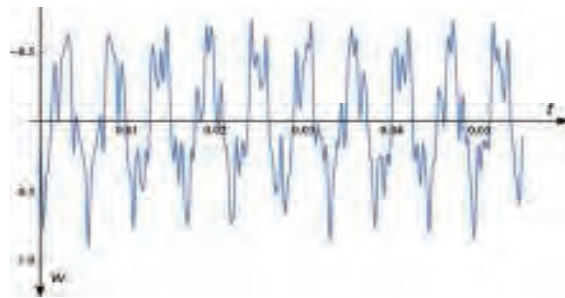
W przykładzie przyjęto następujące dane liczbowe geometryczne i fizyczne płyty:  $a = b = 4 \text{ m}$ ,  $h = 0,45 \text{ m}$ ,  $E = 34 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 0,17$ . Zadanie przeanalizowano przy różnych wartościach współczynników sprężystości podłoża  $k_z$  i  $k_t$ . Obliczenia przeprowadzono w dwóch przypadkach przyłożenia impulsu do górnej powierzchni płyty: w jej środku tj. przy  $x_0 = \frac{1}{2}a$ ,  $y_0 = \frac{1}{2}b$  oraz w pobliżu naroża płyty przy  $x_0 = \frac{3}{4}a$ ,  $y_0 = \frac{3}{4}b$ . Ponieważ rozwiązanie zależy od podwójnego szeregu, który jest wolno zbieżny, to w obliczeniach należy uwzględnić możliwie dużą liczbę jego wyrazów.

Wyniki obliczeń zilustrowano przykładowymi rysunkami. Rysunki 2 i 4 przedstawiają odkształcenie powierzchni środkowej płyty o średniej grubości oraz odpowiadające im plany warstwiczne w chwili  $t = \frac{1}{4}T_1$ , gdzie  $T_1$  jest pierwszym, najmniejszym okresem drgań własnych płyty. Na rysunku 3 pokazano wykres drgań środka płyty o średniej grubości na podłożu trójkielinkowym ( $k_z = k_t = 150 \text{ MN/m}^3$ ) przy obciążeniu impulsem  $S$  w punkcie o współrzędnych  $x_0 = \frac{3}{4}a$ ,  $y_0 = \frac{3}{4}b$ . Wykres sporządzono dla przedziału czasu  $t \in \langle 0; 10T_1 \rangle$ .

Dodatkowo, dla porównania, na rysunku 5 pokazano wykresy dotyczące cienkiej płyty Kirchhoffa bez uwzględnienia podłoża, obciążonej pojedynczym impulsem w pobliżu naroża płyty [2]. Ugięcia płyty na wszystkich wykresach podane są w formie bezwymiarowej i są funkcją Greena. Ze względu na rozbudowany współczynnik skalujący nie przytaczamy go tutaj. Znacznie prostszą formę ma



2. Odształcenie powierzchni środkowej płyty o średniej grubości przy uderzeniu impulsem  $S$  w pobliżu narożnika płyty ( $x_0 = \frac{3}{4}a$ ,  $y_0 = \frac{3}{4}b$ ) przy  $k_z = k_t = 150 \text{ MN/m}^3$ , chwila  $t = \frac{1}{4}T_1$ , oraz odpowiadający mu układ warstwic na płycie



3. Drgania środka płyty o średniej grubości przy uderzeniu impulsem  $S$  w pobliżu narożnika płyty ( $x_0 = \frac{3}{4}a$ ,  $y_0 = \frac{3}{4}b$ ) przy  $k_z = k_t = 150 \text{ MN/m}^3$ , w czasie  $t \in \langle 0; 10T_1 \rangle$

analogiczny współczynnik w przypadku płyty cienkiej na podłożu Własowa, otrzymany przez autorów w pracach [2, 3]:

$$\hat{w} = w \frac{b \pi^2 \sqrt{D(\bar{m} + m_0)}}{4Sa},$$

$$w(x, y, t) = \frac{4S}{(\bar{m} + m_0)\bar{m}ab} H(t - t_0) \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\omega_{m,n}} \sin \alpha_m x_0 \sin \alpha_n y_0 \sin \alpha_m x \right.$$

$$\left. \sin \alpha_n y \sin \omega_{m,n} t \right). \quad (12)$$

## Podsumowanie

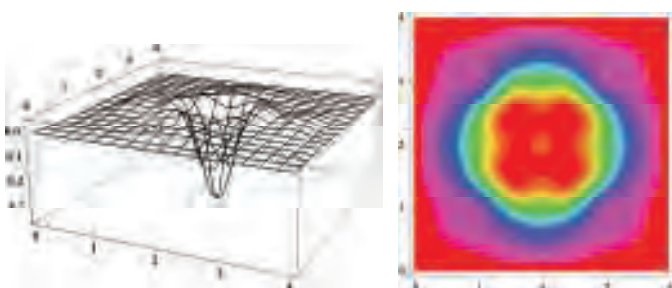
Przedmiotem rozważań w niniejszym referacie jest prostokątna, sprężysta płyta o średniej grubości spoczywająca na uogólnionym trójkierunkowym podłożu sprężystym Winklera uwzględniającym poziome składowe jego reakcji. Obciążenie w postaci impulsu typu delta funkcja Diraca działa dowolnym punkcie na górnej powierzchni płyty. Ugięcia dynamiczne płyty wyznaczono analitycznie w postaci podwójnego szeregu. Ponieważ szereg ten jest wolno zbieżny, to w obliczeniach należy uwzględnić możliwie dużą liczbę jego wyrazów. W pracy analizowano dynamiczne

ugięcia płyty. Korzystając ze wzoru na ugięcie można wyznaczyć również siły wewnętrzne oraz naprężenia w płycie. Analizowany schemat obciążenia określa tzw. funkcję Greena, wykorzystywaną w innych, bardziej złożonych przypadkach rzeczywistych uderzeń na płytach. Wyniki opracowania mogą posłużyć do weryfikacji modelu uderzenia z funkcją kary w MES. Mogą również zostać wykorzystane przez drogowców wykonujących badania wytrzymałościowe nawierzchni aparatem FWD [10, 11]. ◀

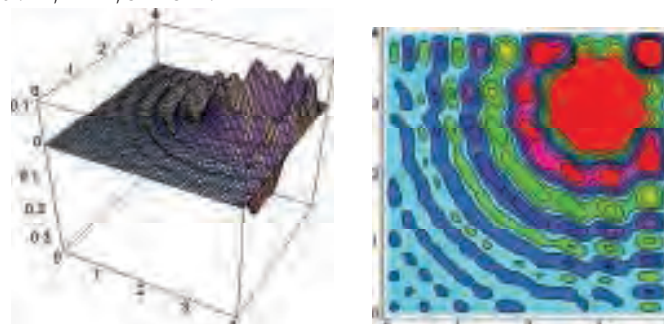
## Materiały źródłowe

- [1] Ambarcumian S.A. Teoria anizotropnych płyt. Nauka, Moskwa 1987.
- [2] Ataman M., Szcześniak W. Analiza ugięć płyty sprężystej Kirchhoffa spoczywającej na inercyjnym podłożu Własowa pod impulsem siły. Autobusy. Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe, Instytut Naukowo-Wydawniczy "Spatium", 2016, vol. 17, nr 12, 537-540.
- [3] Ataman M., Szcześniak W. Drgania płyty sprężystej Kirchhoffa spoczywającej na inercyjnym podłożu Własowa wymuszone impulsem siły. Autobusy. Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe, Instytut Naukowo-Wydawniczy "Spatium", 2016, vol. 17, nr 12, 541-544.

- [4] Wang Y.H., Tham L.G. and Cheung Y.K. Beams and plates on elastic foundations: a review. Structural Analysis and CAD. Prog. Struct. Engeng. Mater., 2005, 7, 174-183.
- [5] Szcześniak W. Wybrane zagadnienia z dynamiki płyt. OW PW, Warszawa 2000.
- [6] Szcześniak W. Analiza dynamiczna płyty o średniej grubości. Prace Naukowe PW, Budownictwo 1988, z.101, 1-236.
- [7] Szcześniak W. Drgania płyty o średniej grubości pod obciążeniem ruchomym. Rozprawy Inżynierskie IPPT PAN, 1985, 3, 1-2, 37-53.
- [8] Szcześniak W. Wpływ dwuparametrowego podłoża sprężystego na drgania własne płyty o średniej grubości. Rozprawy Inżynierskie IPPT PAN, 1989, 37, 1, 87-115.
- [9] Szcześniak W. Drgania płyt. Dynamiczne obliczenia nawierzchni drogowej. IBDiM, Warszawa 2000.
- [10] Krawczyk B., Mackiewicz P. Diagnostyka nawierzchni drogowych i lotniskowych z wykorzystaniem zaawansowanych badań dynamicznych. Przegląd Komunikacyjny, 2015, LXX, 10, 14-16.
- [11] Machelski Cz., Mackiewicz P., Szydło A. Wykorzystanie stalowych płyt do uprawnień przejazdu nad wykopami. Przegląd Komunikacyjny, 2015, LXX, 10, 20-21.



4. Odształcenie powierzchni środkowej płyty o średniej grubości przy uderzeniu impulsem  $S$  w środku płyty przy  $k_z = 150 \text{ MN/m}^3$  i  $k_t = 0$ , chwila  $t = \frac{1}{4}T_1$ , oraz odpowiadający mu układ warstwic



5. Odształcona płyta cienka Kirchhoffa podparta przegubowo na obwodzie, bez interakcji podłoża, obciążona pojedynczym impulsem w punkcie  $x_0 = \frac{3}{4}a$ ,  $y_0 = \frac{3}{4}b$  i odpowiadający jej układ warstwic [2]

# Ruchomy oscylator na moście składanym o pośrednich podporach pływających

## Moving oscillator on the floating bridge



Waclaw Szczesniak

Prof. dr inż.

Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Lubelska

w.szczesniak@il.pw.edu.pl



Magdalena Ataman

dr inż.

Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska

m.ataman@il.pw.edu.pl

**Streszczenie:** W artykule omówiono drgania trzyprzęsłowego mostu pontonowego wymuszone przejazdem ze stałą prędkością oscylatora jednomasowego. Przeanalizowano zarówno drgania wymuszone jak i swobodne, kiedy oscylator jest już poza mostem. Rozważano przypadki drgań tłumionych oraz drgania bez uwzględnienia tłumienia. Układ trzech równań opisujących ruch układu most pontonowy-oscylator jednomasowy rozwiązano numerycznie. Wybrane wyniki rozwiązania przedstawiono graficznie na rysunkach

**Słowa kluczowe:** Most pontonowy; Lepko-sprężysty oscylator ruchomy; Drgania wymuszone i swobodne

**Abstract:** The paper deals with vibration analysis of three span floating bridge under moving oscillator. Velocity of the oscillator is constant. Forced and free vibrations of pontoon bridge are discussed. Three equations of motion of the system for each span are solved numerically. Solution of damped vibrations and solution for undamped vibrations are presented. Some results are shown in the Figures.

**Keywords:** Floating bridge; Viscoelastic moving oscillator; Forced and free vibrations

Zagadnienia związane ze statyką i dynamiką mostów pontonowych nie są nowe w bogatej literaturze przedmiotu [1-16]. Mosty pontonowe zaliczane są do konstrukcji prowizorycznych, budowane w określonych celach do zadań specjalnych i mają ograniczony czas eksploatacji. Prędkość pojazdów przemieszczających się po takich obiektach jest na ogół ograniczona do najwyżej kilkunastu km/h.

W niniejszym opracowaniu przeanalizowane zostaną drgania takich konstrukcji wymuszone ruchomym jednomasowym oscylatorem lepko-sprężystym poruszającym się ze stałą prędkością. Trójprzęsłowy most modelujemy układem o dwóch stopniach swobody, oscylator ma dodatkowy sto-

pień swobody. Matematycznie zadanie stanowi układ trzech sprzężonych, różniczkowych równań ruchu, ze względu na zmienną czasową, opisujących drgania dwóch pontonów będących ruchomymi podporami mostu i ruch drgający oscylatora.

### Zagadnienie własne mostu pontonowego

Trójprzęsłowy most pontonowy zamodelowany w uproszczony sposób składa się z trzech sztywnych płyt, każda o masie całkowitej  $m$  i długości  $l$ . Masa każdego z dwóch pontonów, wraz ze współdrzającą wodą, jest równa  $M$ , a pole poziomego przekroju poprzecznego pontonu wynosi  $F$ . W położeniu

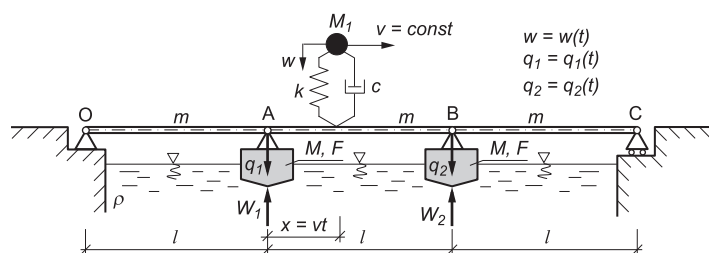
równowagi statycznej płyty jezdne mostu są poziome jak na rysunku 1. Gęstość wody oznaczamy przez  $\rho$ . Zadanie ma dwa stopnie swobody, zgodnie z rysunkiem 1 jako współrzędne uogólnione Lagrange'a przyjmujemy dwa przemieszczenia pionowe pontonów  $A$  i  $B$ , oznaczając je odpowiednio  $q_1$  oraz  $q_2$ . W pierwszej kolejności wyznaczmy częstotliwości kołowe drgań własnych mostu oraz określimy postacie jego drgań własnych. Równania ruchu analizowanego mostu można wyprowadzić np. stosując równania ruchu Lagrange'a drugiego rodzaju [12]. Przy założeniu, że siły oporu wody są proporcjonalne do współrzędnych uogólnionych  $q_1$  i  $q_2$ :

$$W_1 = F\rho g q_1, \quad W_2 = F\rho g q_2, \quad (1)$$

otrzymujemy następujące równania

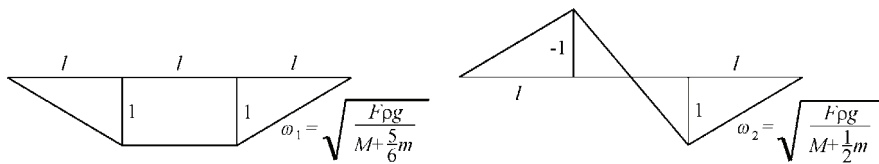
$$\frac{1}{6}(4m + 6M)\ddot{q}_1 + \frac{1}{6}m\ddot{q}_2 + F\rho g q_1 = 0,$$
$$\frac{1}{6}m\ddot{q}_1 + \frac{1}{6}(4m + 6M)\ddot{q}_2 + F\rho g q_2 = 0.$$

(2)



1. Schemat dynamiczny zadania





2. Postacie drgań własnych mostu

Dwie częstości kołowe drgań własnych, wartości własne i wektory własne (postacie drgań - mody) znajdujemy wykorzystując instrukcję programu MATHEMATICA „EigenSystem”, skąd otrzymujemy zależności 3:

Na rysunku 2 pokazano dwie postacie drgań własnych mostu i odpowiadające im częstości kołowe.

### Drgania nietłumione mostu pod ruchomym oscylatorem

W tym punkcie wyznaczmy nietłumione drgania mostu wymuszone przejazdem ruchomego, lepko-sprężystego oscylatora jednomasowego. Przedyskutujemy również drgania swobodne po

zjeździe oscylatora z mostu pontonowego. Prędkość ruchomego oscylatora jest stała i wynosi  $v$ . Mamy do czynienia z układem materialnym o trzech stopniach swobody  $w$ ,  $q_1$  i  $q_2$  (rysunek 1).

Nacisk dynamiczny oscylatora  $N(t)$  na płytę przęsła określamy z równania ruchu oscylatora:

$$N(t) = M_1 g - M_1 \frac{d^2 w}{dt^2}. \quad (4)$$

Jeśli przez  $\tilde{w}$  oznaczymy ugięcie płyty jezdni mostu bezpośrednio w punkcie styku oscylatora z płytą, to równanie ruchu oscylatora jest następujące: wg zależności 5.

Ostatecznie równanie ruchu oscylatora w pierwszym przęśle mostu ponto-

nowego ma postać:

$$M_1 \frac{d^2 w}{dt^2} + c \frac{dw}{dt} + kw = c \left( \frac{vt}{l} \frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{l} v \right) + k \frac{q_1}{l} vt. \quad (6)$$

Równania ruchu swobodnych drgań tłumionych (5) będą zawierały teraz dodatkowo wyrazy od wymuszenia siłą  $N(t)$ . Zatem układ trzech różniczkowych zwyczajnych równań ruchu możemy zapisać w następujący sposób: wg zależności 7.

Układ sprzężonych równań ruchu jest łącznie szóstego rzędu względem czasu. W celu jednoznaczności opisu ruchu należy sformułować sześć warunków początkowych, które w tym przypadku są zerowe:

$$\begin{aligned} w(0) = 0, \quad q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 0, \\ \dot{w}(0) = 0, \quad \dot{q}_1(0) = 0, \quad \dot{q}_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Jeśli oscylator znajduje się w drugim przęśle **AB**, to równania ruchu są bardziej skomplikowane: wg zależności 9, przy czym ugięcie belki w punkcie styku z oscylatorem jest teraz równe

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= q_1 \frac{l-vt}{l} + q_2 \frac{vt}{l}, \\ \dot{\tilde{w}} &= \dot{q}_1 \frac{l-vt}{l} - q_1 \frac{v}{l} + \dot{q}_2 \frac{vt}{l} + q_2 \frac{v}{l} \end{aligned} \quad (10)$$

Warunki początkowe nie są już zerowe dla układu równań ruchu (9), są one określone przez rozwiązanie układu równań (7) w chwili  $t = \frac{l}{v}$ .

Jeśli oscylator znajduje się na trzecim przęśle **BC**, to ugięcie pod oscylatorem oraz układ równań ruchu są następujące: wg zależności 11.

Również w trzecim przęśle warunki początkowe nie są zerowe, lecz określone z rozwiązania układu równań (9) w chwili  $t = \frac{l}{v}$ .

Jeśli oscylator zjeździe z mostu i będzie poruszał się po nieskończonej sztywnym, poziomym podłożu, to równania ruchu mostu są jednorodnymi i opisują drgania swobodne: wg zależności 12.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{F\rho g}{M + \frac{5}{6}m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{F\rho g}{M + \frac{1}{2}m}}, \\ \{1, 1\}, \quad \{-1, 1\}, \\ \left\{ \left( M + \frac{5}{6}m \right) + F\rho g \right\}, \quad \left\{ \left( M + \frac{5}{6}m \right) + F\rho g \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$M_1 \frac{d^2 w}{dt^2} + c \left( \frac{dw}{dt} - \frac{d\tilde{w}}{dt} \right) + k(w - \tilde{w}) = 0,$$

$$\frac{d\tilde{w}(vt, t)}{dt} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} \Big|_{x=vt} + v \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \Big|_{x=vt}, \quad (5)$$

$$x = vt, \quad \frac{\tilde{w}}{vt} = \frac{q_1}{l} \rightarrow \tilde{w} = \frac{q_1}{l} vt = \frac{q_1}{l} x, \quad \dot{\tilde{w}} = \frac{\dot{q}_1}{l} vt + \frac{q_1}{l} v.$$

$$\frac{1}{6} (4m + 6M) \ddot{q}_1 + \frac{1}{6} m \ddot{q}_2 + F\rho g q_1 = \left( M_1 g - M_1 \frac{d^2 w}{dt^2} \right) \frac{vt}{l},$$

$$\frac{1}{6} m \ddot{q}_1 + \frac{1}{6} (4m + 6M) \ddot{q}_2 + F\rho g q_2 = 0, \quad (7)$$

$$M_1 \ddot{w} + c \dot{w} + kw = c \left( \frac{\dot{q}_1}{l} vt + \frac{q_1}{l} v \right) + k \frac{q_1}{l} vt.$$

$$\frac{1}{6} (4m + 6M) \ddot{q}_1 + \frac{1}{6} m \ddot{q}_2 + F\rho g q_1 = \left( M_1 g - M_1 \frac{d^2 w}{dt^2} \right) \frac{l-vt}{l},$$

$$\frac{1}{6} m \ddot{q}_1 + \frac{1}{6} (4m + 6M) \ddot{q}_2 + F\rho g q_2 = \left( M_1 g - M_1 \frac{d^2 w}{dt^2} \right) \frac{vt}{l}, \quad (9)$$

$$M_1 \ddot{w} + c \dot{w} + kw = c \left( \dot{q}_1 \frac{l-vt}{l} - q_1 \frac{v}{l} + \dot{q}_2 \frac{vt}{l} + q_2 \frac{v}{l} \right) + k \left( q_1 \frac{l-vt}{l} + q_2 \frac{vt}{l} \right),$$

Warunki początkowe w tym przypadku określa rozwiązanie układu równań (11) w chwili  $t = \frac{l}{v}$ .

Mamy zatem komplet równań ruchu mostu, które należy rozwiązać celem określenia ruchu oscylatora  $w$  oraz przemieszczeń pionowych pontonów  $q_1$  i  $q_2$ .

Równania ruchu (7), (9), (10) i (11) rozwiązujemy numerycznie przyjmując następujące dane liczbowe:

$$\begin{aligned} m &= 5000 \text{ kg}, & M &= 2000 \text{ kg}, \\ M_1 &= 1500 \text{ kg}, & k &= 150000 \text{ N/m}, \\ c &= 0,05 c_{kr}, & c_{kr} &= 2\sqrt{M_1 k}, \\ \rho &= 1000 \text{ kg/m}^3, & l &= 30 \text{ m}, \\ F &= 5 \text{ m}^2, & v &= 10 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Przy zadanych wartościach liczbowych zasadnicze wielkości dynamiczne są równe: wg zależności 13.

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \frac{l-vt}{l} q_2, & \dot{\tilde{w}} &= -q_2 \frac{v}{l} + \frac{l-vt}{l} \dot{q}_2, \\ \frac{1}{6}(4m+6M)\ddot{q}_1 + \frac{1}{6}m\ddot{q}_2 + F\rho g q_1 &= 0, \\ \frac{1}{6}m\ddot{q}_1 + \frac{1}{6}(4m+6M)\ddot{q}_2 + F\rho g q_2 &= \left(M_1 g - M_1 \frac{d^2 w}{dt^2}\right) \frac{l-vt}{l}, \\ M_1 \ddot{w} + c\dot{w} + kw &= c\left(-\frac{v}{l} q_2 + \frac{l-vt}{l} \dot{q}_2\right) + k \frac{l-vt}{l} q_2. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(4m+6M)\ddot{q}_1 + \frac{1}{6}m\ddot{q}_2 + F\rho g q_1 &= 0, \\ \frac{1}{6}m\ddot{q}_1 + \frac{1}{6}(4m+6M)\ddot{q}_2 + F\rho g q_2 &= 0, & M_1 \ddot{w} + c\dot{w} + kw &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{F\rho g}{M + \frac{5}{6}m}} = 2,82 \text{ s}^{-1}, & \omega_2 &= \sqrt{\frac{F\rho g}{M + \frac{1}{2}g}} = 3,3 \text{ s}^{-1}, \\ q_{st} &= \frac{(m+M+M_1)g}{F\rho g} = 1,7 \text{ m}, & q_{osc} &= \frac{M_1 g}{k} = 0,098 \text{ m}, \\ v_{kr1} &= \frac{\omega_1 l}{\pi} = 26,93 \text{ m/s}, & v_{kr2} &= \frac{\omega_2 l}{\pi} = 31,53 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(4m+6M)\ddot{q}_1 + \frac{1}{6}m\ddot{q}_2 + F\rho g q_1 + \beta\dot{q}_1 &= \left(M_1 g - M_1 \frac{d^2 w}{dt^2}\right) \frac{vt}{l}, \\ \frac{1}{6}m\ddot{q}_1 + \frac{1}{6}(4m+6M)\ddot{q}_2 + F\rho g q_2 + \beta\dot{q}_2 &= 0, \\ M_1 \ddot{w} + c\dot{w} + kw &= c\left(\frac{\dot{q}_1}{l} vt + \frac{q_1}{l} v\right) + k \frac{q_1}{l} vt. \end{aligned} \quad (16)$$

Na rysunkach 3-9 pokazano niektóre rezultaty rozwiązania czterech układów równań ruchu mostu (7), (9), (11) i (12). Na wszystkich rysunkach przemieszczenia podano w metrach, prędkości przemieszczeń w metrach na sekundę, a czas w sekundach. Aby otrzymać rzeczywiste wartości przemieszczeń wielkości  $q$  należy podzielić przez ugięcia statyczne pontonów  $q_{st}$ . Należy zwrócić uwagę na efekt zjazdu ruchomego oscylatora z mostu, wywołujący bardzo duże amplitudy drgań swobodnych z uwagi na stosunkowo małą różnicę pomiędzy prędkością  $v$  a pierwszą prędkością krytyczną.

## Drgania tłumione mostu pod ruchomym oscylatorem

W przypadku drgań tłumionych w równaniach ruchu mostu należy uwzględnić dodatkowe siły tłumienia, proporcjonalne do prędkości pontonów  $\dot{q}_1$  i  $\dot{q}_2$ :

$$R_1 = \beta\dot{q}_1, \quad R_2 = \beta\dot{q}_2, \quad (14)$$

$\beta$  jest ułamkiem współczynnika tłumienia krytycznego, który przyjmujemy za stały, czyli tak jak w przypadku układu o jednym stopniu swobody

$$\beta_{kr} = 2\sqrt{\frac{1}{3}Fg(3M+2m)}. \quad (15)$$

Po uwzględnieniu tłumienia równania ruchu układu most-oscylator, gdy oscylator znajduje się w pierwszym przęśle, mają postać: wg zależności 16.

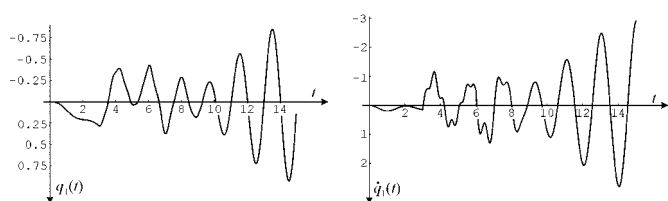
Podobnie należy uwzględnić tłumienie w układach równań (9) i (11), opisujących drgania mostu w przypadku, gdy oscylator znajduje się odpowiednio na drugim i trzecim przęśle. Otrzymane w taki sposób układy równań rozwiązujemy analogicznie do wcześniejszego zadania bez uwzględnienia tłumienia, wykorzystując w każdym przypadku sześć warunków początkowych. Tak jak poprzednio warunki początkowe są zerowe tylko w przypadku, gdy oscylator

znajduje się na pierwszym przęśle, kolejne warunki początkowe wynikają z rozwiązania dla poprzedniego przęsła w chwili  $t = \frac{l}{v}$ .

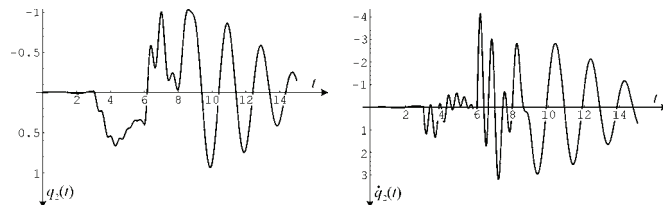
Na podstawie otrzymanych w ten sposób rozwiązań, przyjmując dane jak w poprzednim przykładzie oraz zakładając dodatkowo  $\beta = 0,1\beta_{kr}$ , sporządzono wykresy pokazane na rysunkach 7-9.

## Wnioski i uogólnienia

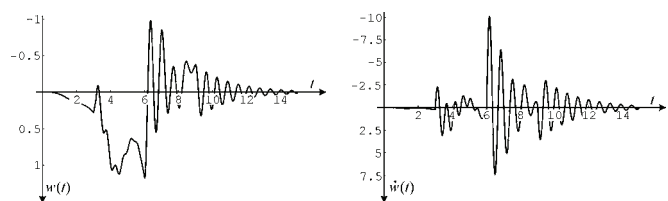
W referacie omówiono rozwiązanie dynamiczne trójprzęsłowego mostu pontonowego obciążonego ruchomym, jednomasowym oscylatorem lepko-sprężystym. Prędkość oscylatora jest stała i stosunkowo niska, przyjęto ją równą 10 m/s. Rozważano drgania wymuszone i swobodne, po zjeździe oscylatora z mostu. Liniowy układ trzech równań ruchu rozwiązano numerycznie z zastosowaniem kodu Mathematica. Wyniki rozwiązań równań ruchu pokazano graficznie na rysunkach 4-9. Dalszym etapem studiów dotyczącym zagadnienia dynamiki mostów pontonowych będzie uwzględnienie efektu giętnego przęseł mostowych o skończonej sztywności na zginanie. Będziemy mieli wtedy do czynienia z układem dyskretno ciągłym. Wyniki opracowania



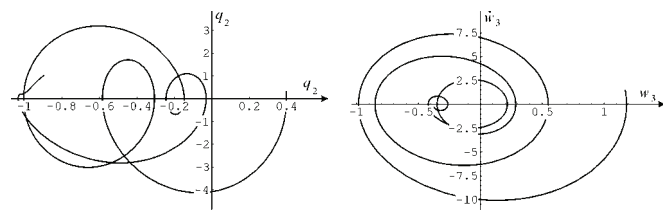
3. Wykresy przemieszczenia pionowego  $q_1(t)$  w [m] i prędkości  $\dot{q}_1(t)$  pontonu **A** w przypadku braku tłumienia drgań wymuszonych pontonów



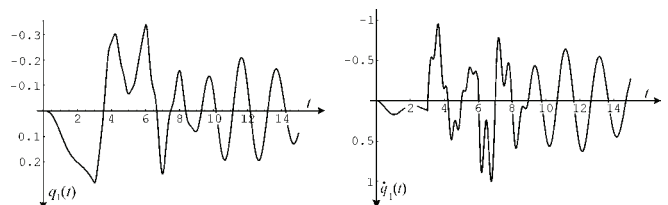
4. Wykresy przemieszczenia pionowego  $q_2(t)$  i prędkości  $\dot{q}_2(t)$  pontonu **B** w przypadku braku tłumienia drgań wymuszonych pontonów



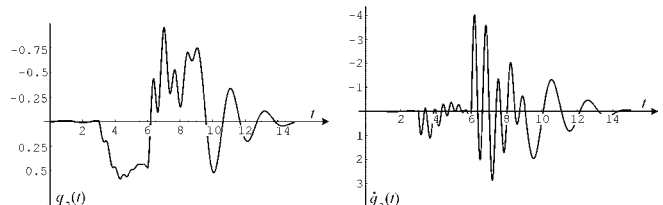
5. Wykres ugięcia  $w(t)$  ruchomego oscylatora oraz wykres pochodnej ugięcia  $\dot{w}(t)$



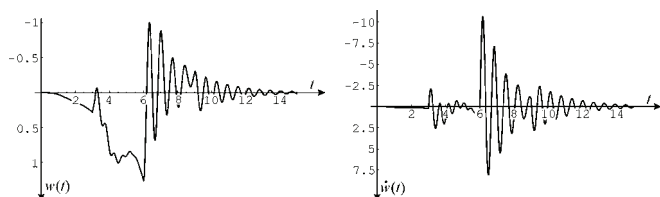
6. Portrety fazowe współrzędnych  $q_2(t)$  i  $w(t)$ , oscylator znajduje się w trzecim przęśle



7. Wykresy przemieszczenia pionowego  $q_1(t)$  i prędkości  $\dot{q}_1(t)$  pontonu **A** z uwzględnieniem tłumienia drgań pontonów,  $\beta = 0,1\beta_{kr}$



8. Wykresy przemieszczenia pionowego  $q_2(t)$  i prędkości  $\dot{q}_2(t)$  pontonu **B** z uwzględnieniem tłumienia drgań pontonów,  $\beta = 0,1\beta_{kr}$



9. Wykres ugięcia  $w(t)$  ruchomego oscylatora oraz wykres pochodnej ugięcia  $\dot{w}(t)$  z uwzględnieniem tłumienia drgań pontonów,  $\beta = 0,1\beta_{kr}$

mogą być wykorzystane do testowania obliczeń komputerowych w MES realnych konstrukcji mostów składanych o pośrednich podporach pływających. ◀

## Materiały źródłowe

[1] Białobrzeski T. Mosty składane. WKiŁ, Warszawa 1978.  
 [2] Bursztynowski Z. Mosty składane. Podstawy obliczeń. PWN, Warszawa 1985.  
 [3] Bursztynowski Z. Mosty pływające na oddzielnych podporach. WAT, Warszawa 1988.  
 [4] Osama El-Desouky. I. M. Dynamic Behaviour of Short-Term Floating Bridge. Carleton Institute, Ottawa Canada 2011.

[5] Krasoń W., Derewońko A., Chłus K., Kozłowski R. Analiza wytrzymałościowa odcinka prototypowego mostu pontonowego. Modelowanie Inżynierskie 44, Gliwice 2012, 151-158.  
 [6] Marszałek J. Mosty składane. Projektowanie, badania i eksploatacja. Podręcznik GDDKiA i WAT, Warszawa 2005.  
 [7] Marszałek J., Piechota M. Analiza statyczna wieloprzęsłowych mostów składanych przy różnych warunkach podparcia. Biuletyn WAT, 2013, Vol. LXII, Nr 2, 167-180.  
 [8] Seif M.S., Inoue Y. Dynamic analysis of floating bridges. Marine Structures, 1998, Vol. 11, 29-46.  
 [9] Sterner W. Mosty Warszawy. PWT, Warszawa 1960.  
 [10] Szcześniak W. Dynamika teoretyczna dla zaawansowanych. OW PW, Warszawa 2007.

[11] Szcześniak W., Ataman M., Zbiciak A. Drgania belki sprężystej wywołane ruchomym, liniowym oscylatorem jednomasowym. Drogi i Mosty 2/2002, str. 53-83.  
 [12] Szcześniak W., Ataman M. Analiza dynamiczna mostu pontonowego. Theoretical Foundations of Civil Engineering, 2007, Vol. 15, OWPW, 635-644.  
 [13] Wieczorek M., Krasoń W. Obliczanie mostów pływających modelowanych elementami sztywnymi. Theoretical Foundations of Civil Engineering, Ed. W. Szcześniak, 1999, Vol. 6, OWPW, 357-364.  
 [14] Wu J.S., Lee M.S., Lai T.S. The dynamic analysis of a float plate under a moving load by the finite element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, 24, 743-762.  
 [15] Wu J.S., Shih P.Y. Moving-load-induced vibration of a moored floating bridge. Computer and Structures, 1998, Vol. 66, No. 4, 435-461.  
 [16] Zhang J., Miao G.P., Liu J.X., Sun W.J. Analytical Models of floating bridges subjected by moving load for different water depths. Journal of Hydrodynamics, 2008, Vol. 20, No. 5, 537-546.



**REKMA Sp. z o.o.**

ul. Szlachecka 7

32-080 Brzezie

tel. +48 12/633 59 22

fax +48 12/397 52 20

[www.rekma.pl](http://www.rekma.pl)

- Dylatacje bitumiczne EMD typ Rekma
- Dylatacje mechaniczno-asfaltowe SILENT-JOINT<sup>RESA</sup>
- Szczeliny dylatacyjne w nawierzchniach betonowych i asfaltowych
- Naprawa spękań nawierzchni
- Specjalistyczne cięcie nawierzchni betonowych i asfaltowych
- Wypełnianie szczelin dylatacyjnych w torowiskach tramwajowych
- Natrysk środkami hydrofobowymi i hydrofilowymi
- Rowkowanie (grooving) nawierzchni
- Specjalistyczne wiercenie otworów pod kotwy i dyble
- Kruszenie nawierzchni betonowych metodą ultradźwiękową – RMI

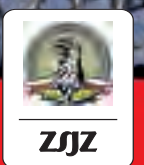


Pobrano z mostwiedzy.pl

**MOST WIEDZY**



**SPECJALISTYCZNE PRACE DROGOWE**



PN-EN ISO 9001:2009