



**POLITECHNIKA
GDAŃSKA**

WYDZIAŁ ELEKTRONIKI,
TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI



Imię i nazwisko autora rozprawy: Damian Chojnacki

Dyscyplina naukowa: Automatyka i Robotyka

ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Parametryczna estymacja widma lokalnie stacjonarnych procesów losowych

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Parametric estimation of power spectral density function of locally stationary random processes

Promotor <i>podpis</i>	Drugi promotor <i>podpis</i>
prof. dr hab. inż. Maciej Niedźwiecki	
Promotor pomocniczy <i>podpis</i>	Kopromotor <i>podpis</i>
dr inż. Marcin Ciołek	

Gdańsk, rok 2019

Dziękuję mojemu Promotorowi
prof. dr hab. inż. Maciejowi Niedźwieckiemu
za wyjątkową cierpliwość, wyrozumiałość oraz życzliwość
okazywane mi w trakcie pisania niniejszej pracy.

Dziękuję również za postawę,
która jest dla mnie wzorem do naśladowania
zarówno w życiu zawodowym, jak i prywatnym.

Dziękuję wszystkim pracownikom
Katedry Systemów Automatyki
za okazaną pomoc, życzliwość
oraz serdeczną atmosferę pracy.

Dziękuję mojej Żonie,
która wspierała mnie w chwilach zwątpienia
i która w sobie tylko znany sposób
potrafiła wytrzymać okres powstawania niniejszej pracy.

Dziękuję całej mojej Rodzinie i Przyjaciołom.
W szczególności dziękuję moim Rodzicom,
którzy zawsze mnie wspierali i byli ze mną
w najtrudniejszych chwilach.

Badania zrealizowane w ramach niniejszej pracy były częściowo finansowane z projektu Narodowego Centrum Nauki nr 2015/17/B/ST7/03772 pt. „Estymacja charakterystyk korelacyjnych i widmowych lokalnie stacjonarnych procesów stochastycznych”.

Streszczenie

W niniejszej pracy doktorskiej opisano nowe metody estymacji widmowej gęstości mocy niestacjonarnych procesów stochastycznych. Przedstawione w rozprawie rozwiązania, takie jak dwukierunkowy algorytm drabinkowy z zapominaniem wykładniczym oraz metoda uśredniania modeli umożliwiają precyzyjną estymację charakterystyk widmowych. Przeprowadzone symulacje potwierdziły, że opracowane algorytmy dają zadowalające rezultaty zarówno w przypadku łagodnych jak i gwałtownych zmian wartości parametrów analizowanego sygnału.

W opisanych algorytmach zastosowano metody jednoczesnego wyboru rzędu estymowanego modelu oraz pasma estymacji. Obydwie wielkości mają bezpośredni wpływ na skuteczność estymacji zarówno pod względem jakościowym (adekwatność) jak i ilościowym (dokładność).

Wyniki eksperymentów potwierdzają jednoznacznie tezę pracy, iż zastosowanie metod adaptacyjnego wyboru rzędu modelu oraz pasma estymacji stosowanego w procesie jego identyfikacji umożliwia zwiększenie dokładności parametrycznej oceny widma chwilowego modelowanego procesu niestacjonarnego.

Abstract

This dissertation describes new methods for estimation of the spectral power density of non-stationary stochastic processes. The solutions presented in the thesis, such as the bidirectional ladder algorithm with exponential forgetting and the model averaging method, enable precise estimation of spectral characteristics. The conducted simulations confirmed that the developed algorithms give satisfactory results both in the case of smooth and abrupt changes of the parameters of the analyzed signal.

In the described algorithms, the methods of joint selection of the model order and the estimation bandwidth were used. Both quantities have a direct impact on the efficiency of estimation in terms of both quality (adequacy) and quantitative (accuracy).

The results of the experiments confirm unambiguously the thesis that application of the methods of adaptive choice of the model order and the estimation bandwidth used in the identification process allows one to increase the accuracy of parametric estimation of the instantaneous spectra of the modeled non-stationary process.

Spis treści

1	Wstęp	1
2	Procesy stochastyczne	5
2.1	Definicja	5
2.2	Podstawowe parametry i charakterystyki	6
2.3	Stacjonarność, ergodyczność, korelacja	7
2.3.1	Stacjonarność	7
2.3.2	Korelacja i zależność	9
2.3.3	Ergodyczność	9
2.4	Widmowa gęstość mocy	10
2.5	Wielowymiarowe procesy stochastyczne	11
2.5.1	Podstawowe parametry i charakterystyki	11
2.5.2	Widmowa gęstość mocy	13
2.6	Modelowanie procesów stochastycznych	14
3	Procesy autoregresyjne	17
3.1	Model autoregresyjny procesu stacjonarnego	17
3.1.1	Postać modelu autoregresyjnego	17
3.1.2	Funkcja autokorelacji procesu autoregresyjnego	18
3.1.3	Widmowa gęstość mocy procesu autoregresyjnego	19
3.1.4	Równoważne reprezentacje procesu autoregresyjnego	21
3.2	Wielowymiarowe procesy autoregresyjne	23
3.2.1	Wielowymiarowy model autoregresyjny	23
3.2.2	Funkcja autokorelacji i widmowa gęstość mocy wielowymiarowego procesu autoregresyjnego	25
3.2.3	Równoważne reprezentacje wielowymiarowego procesu autoregresyjnego	25
3.3	Związek pomiędzy modelem autoregresyjnym a metodą maksymalnej entropii	28
4	Metody estymacji widmowej gęstości mocy stacjonarnych procesów stochastycznych	29
4.1	Estymatory widmowej gęstości mocy - podstawowe informacje	30
4.1.1	Miary oceny dokładności oszacowania widma	31
4.2	Estymacja współczynników autokorelacji	32



4.3	Okna czasowe i ich wpływ na wyniki estymacji	34
4.4	Metody nieparametryczne	38
4.5	Metody parametryczne	41
4.5.1	Proces średniej ruchomej (MA)	41
4.5.2	Proces mieszany autoregresji-średniej ruchomej (ARMA)	44
4.5.3	Wielowymiarowe procesy MA i ARMA	46
4.5.4	Metody parametryczne dla sygnału sinusoidalnego	47
4.5.5	Estymator minimalnowariancyjny	49
5	Lokalnie stacjonarne procesy stochastyczne i estymacja ich widmowej gęstości mocy	51
5.1	Chwilowa widmowa gęstość mocy	51
5.2	Widmo Wignera-Ville'a	52
5.3	Lokalna stacjonarność	53
6	Metody identyfikacji procesów autoregresyjnych	55
6.1	Metoda Yule-Walkera	55
6.2	Estymatory najmniejszych kwadratów	57
6.2.1	Ważone estymatory najmniejszych kwadratów	59
6.3	Algorytmy drabinkowe	64
6.4	Wielowymiarowe metody identyfikacji procesów autoregresyjnych	67
6.4.1	Metoda Yule-Walkera	67
6.4.2	Estymatory najmniejszych kwadratów	67
6.4.3	Algorytmy drabinkowe	71
6.5	Metody wyboru rzędu modelu oraz pasma estymacji	72
6.5.1	Metody wyboru rzędu modelu	73
6.5.2	Metody wyboru pasma estymacji	75
7	Dwukierunkowy algorytm drabinkowy z zapominaniem wykładniczym	77
7.1	Wariant jednowymiarowy	77
7.1.1	Analiza dwukierunkowa	77
7.1.2	Dwukierunkowy algorytm najmniejszych kwadratów z zapominaniem wykładniczym	78
7.1.3	Dwukierunkowy algorytm drabinkowy z zapominaniem wykładniczym	79
7.1.4	Wariant uwzględniający próbkę „centralną”	85
7.2	Wariant wielowymiarowy	85
7.2.1	Analiza dwukierunkowa	85
7.2.2	Dwukierunkowy algorytm najmniejszych kwadratów z zapominaniem wykładniczym	86
7.2.3	Dwukierunkowy algorytm drabinkowy z zapominaniem wykładniczym	87
7.2.4	Wariant uwzględniający próbkę „centralną”	92
8	Metoda uśredniania modeli	93

Spis treści	xi
8.1 Wariant jednowymiarowy	93
8.2 Wariant wielowymiarowy	97
9 Wyniki eksperymentów	101
9.1 Metodologia	101
9.1.1 Kwestie implementacyjne	101
9.1.2 Scenariusze testowe wariantu jednowymiarowego	102
9.1.3 Scenariusze testowe wariantu wielowymiarowego	104
9.2 Dwukierunkowy algorytm drabinkowy z zapominaniem wykładniczym - wyniki badań	107
9.2.1 Wariant jednowymiarowy	107
9.2.2 Wariant wielowymiarowy	122
9.3 Metoda uśredniania modeli - wyniki badań	132
9.3.1 Wariant jednowymiarowy	132
9.3.2 Wariant wielowymiarowy	136
10 Zakończenie	143
A Rekurencyjne algorytmy estymacji	145
A.1 Wyprowadzenie algorytmu RLS (6.11)-(6.13)	145
A.2 Wyprowadzenie wielowymiarowej wersji algorytmu RLS (6.34)	147
B Zawartość dołączonej płyty CD	149

Notacja i skróty

Notacja

t	unormowany (bezwymiarowy) czas dyskretny
\mathbb{Z}	zbiór liczb całkowitych
\mathbb{R}	zbiór liczb rzeczywistych
$*$	operator splotu
$(\cdot)^T$	transpozycja macierzy lub wektora
$(\cdot)^*$	sprzężenie macierzy lub wektora
$(\cdot)^H$	sprzężenie hermitowskie macierzy lub wektora
$[\cdot]_{jk}$	wartość pojedynczej komórki w j -tym wierszu i k -tej kolumnie macierzy
$\hat{x}, \hat{\theta}(t)$	estymaty
$\bar{\theta}$	uśrednianie
$\underset{x}{\operatorname{argmin}} f(x)$	wartość x , która minimalizuje funkcję $f(x)$
$\underset{x}{\operatorname{argmax}} f(x)$	wartość x , która maksymalizuje funkcję $f(x)$
$ \cdot $	wartość bezwzględna
$\operatorname{diag}\{\mathbf{x}\}$	macierz diagonalna, w której wartości na głównej przekątnej są elementami wektora \mathbf{x}
$\operatorname{tr}\{\mathbf{A}\}$	ślad macierzy \mathbf{A}
$\det\{\mathbf{A}\}$	wyznacznik macierzy \mathbf{A}
$\operatorname{var}\{\cdot\}$	wariancja
$\delta(\omega)$	funkcja delty Kroneckera
$E(\cdot)$	wartość oczekiwana
f	częstotliwość
ω	unormowana pulsacja
$S(\omega)$	widmowa gęstość mocy
$\operatorname{Re}\{x\}$	część rzeczywista liczby x
$\operatorname{Im}\{x\}$	część urojona liczby x
$\mathcal{O}(x)$	wartość rzędu x
$P(x)$	prawdopodobieństwo zdarzenia x
$p(x)$	funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa



$F(x)$	dystrybuanta
q^{-1}	operator jednokrokowego opóźnienia w dziedzinie czasu
\mathcal{P}, \mathcal{Q}	zbiory danych
$y(t)$	spróbkowany sygnał jednowymiarowy
$\mathbf{y}(t)$	spróbkowany sygnał wielowymiarowy
a_1, \dots, a_n	współczynniki autoregresji
$r(0), \dots, r(n)$	współczynniki autokorelacji
k_1, \dots, k_n	współczynniki odbicia
$\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$	macierze współczynników autoregresji
$\mathbf{R}(0), \dots, \mathbf{R}(n)$	macierze współczynników autokorelacji
$\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_n$	macierze współczynników odbicia
$\lambda, y(t), x(t)$	wartości bądź sygnały skalarne
$\mathbf{z}, \boldsymbol{\varepsilon}(t)$	wektory
$\mathbf{B}, \mathbf{P}(t)$	macierze
\mathbf{I}_m	macierz jednostkowa o wymiarach $m \times m$
$\mathbf{0}_m$	wektor zerowy o długości m
\mathbf{O}_m	macierz zerowa o wymiarach $m \times m$
$A \cap B$	iloczyn zbiorów
\emptyset	zbiór pusty
\otimes	iloczyn Kroneckera
\approx	operator przybliżonej równości
\propto	operator proporcjonalności
$\mathcal{F}(\cdot)$	transformata Fouriera
$\nabla(\cdot)$	gradient funkcji

Skróty

AR	model autoregresyjny
AR(n)	model autoregresyjny rzędu n
MA	model średniej ruchomej
MA(r)	model średniej ruchomej rzędu r
ARMA	model autoregresji-średniej ruchomej
ARMA(n, r)	model autoregresji-średniej ruchomej o rzędach n, r
RLS	rekurencyjny algorytm najmniejszych kwadratów (ang. <i>Recursive Least Squares</i>)
WLS	metoda ważonych najmniejszych kwadratów (ang. <i>Weighted Least Squares</i>)
SWLS	metoda najmniejszych kwadratów z przesuwnym oknem (ang. <i>Sliding Window Least Squares</i>)
EWLS	metoda najmniejszych kwadratów z zapominaniem wykładniczym (ang. <i>Exponentially Weighted Least Squares</i>)



WWR	algorytm Whittle'a-Wigginsa-Robinsona
MSC	widmo amplitudowe koherencji (ang. <i>Coherence Magnitude Spectrum</i>)
CPS	widmo fazowe koherencji (ang. <i>Coherence Phase Spectrum</i>)
MEM	metoda maksymalnej entropii (ang. <i>Maximum Entropy Method</i>)
SNR	stosunek sygnału do szumu (ang. <i>Signal-to-Noise Ratio</i>)
MSL	średniokwadratowa miara logarytmiczna (ang. <i>Mean-Squared Log measure</i>)
IS	miara Itakury-Saito (ang. <i>Itakura-Saito distortion</i>)
RER	miara względnej entropii (ang. <i>Relative Entropy Rate</i>)
MUSIC	metoda estymacji częstotliwości (ang. <i>MULTiple SIGNAL Classification</i>)
MV	estymator minimalnowariancyjny (ang. <i>Minimum Variance estimator</i>)
LPC	kodowanie predykcyjne (ang. <i>Linear Predictive Coding</i>)
AIC	kryterium informacyjne Akaikego (ang. <i>Akaike Information Criterion</i>)
MAIC	wielowymiarowa wersja kryterium informacyjnego Akaikego (ang. <i>Multivariate Akaike Information Criterion</i>)
FPE	kryterium końcowego błędu predykcji (ang. <i>Final Prediction Error</i>)
MFPE	wielowymiarowa wersja kryterium końcowego błędu predykcji (ang. <i>Multivariate Final Prediction Error</i>)
BIC	Bayesowskie kryterium informacyjne Schwarza (ang. <i>Bayesian Information Criterion</i>)
MBIC	wielowymiarowa wersja Bayesowskiego kryterium informacyjnego Schwarza (ang. <i>Multivariate Bayesian Information Criterion</i>)
ICI	metoda oparta na analizie przedziałów ufności (ang. <i>Intersection of the Confidence Intervals</i>)
MDL	kryterium minimalnej długości opisu (ang. <i>Minimum Description Length</i>)
PLS	kryterium predykcyjne najmniejszych kwadratów (ang. <i>Predictive Least Squares</i>)
FIR	filtr o skończonej odpowiedzi impulsowej (ang. <i>Finite Impulse Response filter</i>)
PE	kryterium oparte na błędach jednokrokowej predykcji
MPE	wielowymiarowa wersja kryterium opartego na błędach jednokrokowej predykcji
CE	miara oparta na kwadratach błędów oszacowań parametrów
MCE	wielowymiarowa wersja miary opartej na kwadratach błędów oszacowań parametrów
FFT	szybka transformacja Fouriera (ang. <i>Fast Fourier Transform</i>)



Rozdział 1

Wstęp

Estymacja struktury korelacyjnej szeregów czasowych jest jedną z podstawowych metod umożliwiających „zrozumienie” danych doświadczalnych. Jest ona stosowana w wielu dziedzinach nauki takich jak telekomunikacja, ekonometria, biologia, medycyna, geofizyka itd. Większość badanych sygnałów można potraktować jako realizacje niestacjonarnych procesów stochastycznych. Oceny ich charakterystyk korelacyjnych dokonuje się zazwyczaj w oparciu o metody estymacji lokalnej, tj. na drodze analizy krótkich fragmentów danych wyodrębnionych z badanego sygnału przy użyciu przesuwne okna o określonej szerokości. W przypadku, gdy badany sygnał spełnia warunki tzw. lokalnej stacjonarności, własności procesu mogą być również analizowane w dziedzinie częstotliwości, w oparciu o charakterystykę znaną jako chwilowa widmowa gęstość mocy. Obydwa wymienione wyżej cele można osiągnąć budując lokalny autoregresyjny model sygnału.

Identyfikacja modelu autoregresyjnego wymaga podjęcia dwóch ważnych decyzji. Po pierwsze, należy dokonać wyboru efektywnej szerokości lokalnego okna analizy, czyli tzw. pasma estymacji. Optymalizacja pasma estymacji potrzebna jest aby „zrównoważyć” dwie, zachowujące się w sposób przeciwstawny, składowe średniokwadratowego błędu estymacji – szerokie pasmo gwarantuje bowiem małą wariancję oszacowań, lecz może prowadzić do dużych systematycznych błędów estymacji, zaś wąskie pasmo powoduje efekt odwrotny. Dlatego w przypadku gdy stopień niestacjonarności procesu zmienia się w czasie, pasmo estymacji powinno być dobierane w sposób adaptacyjny. Drugim istotnym parametrem jest rząd modelu. Jeśli rząd modelu autoregresyjnego jest zbyt niski, oparta na tym modelu ocena widmowej gęstości mocy może nie uwzględniać pewnych składowych częstotliwościowych sygnału, natomiast przyjęcie zbyt wysokiego rzędu może spowodować wykrycie nieistniejących składowych. Z jakościowego punktu widzenia obydwie sytuacje są niezadowalające. Dlatego, podobnie jak pasmo, rząd modelu powinien być wybierany w sposób adaptacyjny.

Do chwili obecnej problemy wyboru pasma estymacji oraz rzędu modelu rozpatrywane były oddzielnie i rozwiązywane przy użyciu różnych metod opartych na różnych przesłankach statystycznych. W niniejszej pracy doktorskiej skoncentrowano się na opracowaniu algorytmów estymacji chwilowej widmowej gęstości mocy z wykorzystaniem metod łącznego wyboru pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu.

Cel i teza rozprawy

Celem niniejszej rozprawy było opracowanie metod estymacji widmowej gęstości mocy niestacjonarnych procesów stochastycznych z wykorzystaniem podejść umożliwiających łączny adaptacyjny wybór pasma estymacji oraz rzędu modelu autoregresyjnego. Takie metody powinny umożliwiać dokładną estymację charakterystyk widmowych procesów stochastycznych zarówno w przypadku gdy zmieniają się one w sposób łagodny jak i gwałtowny. W przypadku wielowymiarowych (wie-



lokanałowych) procesów stochastycznych, np. stereofonicznych sygnałów fonicznych, opracowane metody powinny być oparte na łącznej analizie wszystkich kanałów.

Otrzymane wyniki badań pozwoliły na postawienie następującej tezy rozprawy:

Zastosowanie metod adaptacyjnego wyboru rzędu modelu autoregresyjnego oraz pasma estymacji stosowanego w procesie jego identyfikacji umożliwia zwiększenie dokładności parametrycznej oceny widma chwilowego modelowanego procesu niestacjonarnego.

Do najważniejszych celów pracy należało:

- Zastosowanie nieprzyczynowych algorytmów drabinkowych do estymacji widmowej gęstości mocy.
- Opracowanie metod łącznego wyboru rzędu modelu i pasma estymacji.
- Porównanie wyników otrzymanych dla różnych estymatorów i różnych metod wyboru rzędu i pasma.
- Symulacyjna i eksperymentalna weryfikacja opracowanych podejść.

Innowacyjny wkład autora

Do najważniejszych elementów składających się na oryginalny dorobek autora należą:

- Wkład w opracowanie metody estymacji widmowej gęstości mocy opartej na dwukierunkowym przetwarzaniu sygnału niestacjonarnego (patrz rozdział 7). W ramach tego podejścia zastosowano metodę jednoczesnego wyboru pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu opartą na zmodyfikowanym kryterium końcowego błędu predykcji Akaikego (patrz podrozdział 7.1.3) oraz metodę opartą na błędach jednokrokowej predykcji (patrz podrozdział 7.1.4)*. Uzyskane wyniki opublikowano w referatach konferencyjnych [32] oraz [34].
- Wkład w opracowanie metody estymacji widmowej gęstości mocy opartej na uśrednianiu modeli autoregresyjnych (patrz rozdział 8). W ramach tego podejścia zastosowano metodę jednoczesnego wyboru pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu opartą na współczynnikach wiarygodności oraz zmodyfikowanym kryterium końcowego błędu predykcji Akaikego*. Uzyskane wyniki opublikowano w referacie konferencyjnym [24].
- Opracowanie i weryfikacja mieszanych strategii wyboru rzędu i pasma estymacji (patrz podrozdział 9.2).
- Rozszerzenie techniki dwukierunkowej analizy sygnału za pomocą algorytmów drabinkowych (patrz podrozdział 7.2) na przypadek wektorowy. Otrzymane wyniki opublikowano w czasopiśmie z listy JCR [35].
- Wkład w rozszerzenie metody uśredniania modeli autoregresyjnych (patrz podrozdział 8.2) na przypadek wektorowy. Otrzymane wyniki opublikowano w raporcie naukowym [23].

* Opracowanie efektywnych procedur obliczeniowych, symulacyjne badania porównawcze.



Przegląd treści rozprawy

Niniejsza praca została podzielona na dziesięć rozdziałów.

W drugim rozdziale omówiono podstawowe pojęcia teorii procesów stochastycznych. Opisano najważniejsze parametry i charakterystyki zarówno jednowymiarowych jak i wielowymiarowych procesów losowych. Rozdział zamyka opis koncepcji matematycznego modelowania takich procesów.

W trzecim rozdziale skupiono się na opisie modelu autoregresyjnego. Przedstawiono najważniejsze charakterystyki procesów autoregresyjnych oraz wskazano różnice pomiędzy jednowymiarowymi, a wielowymiarowymi procesami autoregresyjnymi. Opisano również równoważne reprezentacje modeli autoregresyjnych. Rozdział kończy się przedstawieniem metody maksymalnej entropii.

Czwarty rozdział zawiera opis metod estymacji widmowej gęstości mocy procesów stochastycznych. Na początku rozdziału przedstawiono podstawowe informacje dotyczące estymatorów widmowej gęstości mocy. Przedstawiono popularne miary dokładności oceny widma oraz opisano okna czasowe i ich wpływ na jakość estymacji. Następnie dokonano przeglądu popularnych nieparametrycznych oraz parametrycznych metod estymacji widma, a także wskazano ich główne własności. Na koniec w skrócony sposób opisano wybrane metody parametryczne dla sygnału sinusoidalnego.

W najkrótszym, ale nie mniej ważnym, piątym rozdziale przedstawiono koncepcję lokalnej stacjonarności procesów stochastycznych. Teoria ta, opracowana przez Dahlhausa, stanowi bazę dla opracowanych w niniejszej pracy metod estymacji widmowej gęstości mocy niestacjonarnych procesów losowych.

Szósty rozdział zawiera opis popularnych metod identyfikacji procesów autoregresyjnych. Szczegółowo opisane zostały estymatory Yule-Walkera, rodzina estymatorów najmniejszych kwadratów oraz algorytm drabinkowy. Przedstawiono najważniejsze własności opisanych algorytmów oraz dokonano porównania niektórych z nich. W rozdziale przedstawiono także wielowymiarowe odpowiedniki opisanych metod. Rozdział zamyka opis popularnych metod wyboru rzędu estymowanego modelu i pasma estymacji.

Główną część pracy stanowią trzy kolejne rozdziały. W siódmym rozdziale przedstawiono nowe podejście do estymacji widmowej gęstości mocy oparte na dwukierunkowej analizie sygnału za pomocą algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym. Popularne metody identyfikacji niestacjonarnych procesów stochastycznych wykorzystują zwykle tylko informacje o przeszłych wartościach analizowanego sygnału. Takie podejście działa zadowalająco w przypadku łagodnych zmian wartości parametrów sygnału, natomiast może zawodzić w przypadku ich gwałtownych zmian. Istotną obserwacją jest fakt, iż zmiany wartości, których nie można przewidzieć stosując lewostronną analizę sygnału, są zwykle przewidywalne w przypadku analizy prawostronnej. W zaproponowanej metodzie wykorzystano dwa podejścia do łączenia wyników otrzymanych na drodze analizy dwukierunkowej. W pierwszym z nich uśredniano oszacowania współczynników autokorelacji, natomiast w drugim uśredniano oszacowania współczynników odbicia. Optymalny wybór wartości rzędu estymowanego modelu i pasma estymacji był dokonywany na podstawie kryterium końcowego błędu predykcji oraz kryterium opartego na błędach jednokrokowej predykcji. Wariant metody wykorzystujący kryterium końcowego błędu predykcji został rozszerzony na przypadek wielowymiarowy.

W rozdziale ósmym opisano metodę estymacji widmowej gęstości mocy opartą na uśrednianiu parametrów modeli autoregresyjnych. Kluczową obserwacją jest fakt, iż uśrednianie estymowanych parametrów dla modeli o różnych rzędach daje lepsze rezultaty, niż wybór pojedynczego modelu o konkretnym rzędzie. Uśrednianie parametrów modeli może być przeprowadzane tylko w przypadku estymatorów o takiej samej pamięci. Wybór optymalnej wartości pasma estymacji może zostać dokonany w oparciu o zmodyfikowane kryterium końcowego błędu predykcji. Oprócz tego, możliwe jest także zastosowanie techniki łączenia parametrów uśrednionych modeli, otrzymanych dla różnych pasm estymacji. Metoda została rozszerzona na przypadek wielowymiarowy.

Rozdział dziewiąty zawiera opis scenariuszy symulacyjnych i wyników eksperymentów z użyciem



opracowanych metod estymacji widmowej gęstości mocy. Obok otrzymanych wyników opisano również kwestie implementacyjne opracowanych metod.

Rozprawę kończy podsumowanie przedstawionych metod oraz uzyskanych wyników.

Rozprawa zawiera dwa dodatki. W dodatku A zamieszczono wyprowadzenia rekurencyjnych algorytmów estymacji, a w dodatku B zamieszczono opis zawartości płyty CD załączonej do niniejszej rozprawy doktorskiej.

Rozdział 2

Procesy stochastyczne

W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną podstawowe pojęcia teorii procesów stochastycznych, będących użytecznym narzędziem matematycznym do opisu sygnałów o charakterze niedeterministycznym. Opisane zostaną wielkości i parametry charakteryzujące procesy losowe. Omówione zostaną główne własności i cechy procesów stochastycznych, do których należą stacjonarność, ergodyczność, zależność oraz korelacja. Szerzej niż pozostałe wielkości opisana zostanie widmowa gęstość mocy procesu losowego, która jest głównym przedmiotem badań związanych z niniejszą pracą. Przedstawione zostaną także wielowymiarowe procesy stochastyczne, które stanowią rozszerzenie jednowymiarowych procesów losowych. Modele wielowymiarowe znajdują zastosowanie w systemach jednoczesnego, wielokanałowego przetwarzania sygnałów zawierających składowe losowe. Do tego typu rozwiązań można zaliczyć np. sonary, radary czy urządzenia do pomiarów wstrząsów sejsmicznych [18]. Rozdział zamyka opis koncepcji matematycznego modelowania stacjonarnych procesów stochastycznych z wykorzystaniem filtru formującego.

2.1 Definicja

Procesy stochastyczne (losowe) stanowią rozszerzenie koncepcji zmiennych losowych. Dyskretnym rzeczywistym procesem losowym nazywana jest funkcja $X(t, \xi)$, która w każdej chwili czasu t , każdemu zdarzeniu elementarnemu ξ przypisuje pewną rzeczywistą wartość [25]:

$$\begin{aligned} &\{X(t, \xi), t \in \mathcal{T}, \xi \in \Xi\}, \\ &X : \mathcal{T}, \Xi \rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gdzie $t \in \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ jest unormowanym (bezwymiarowym) czasem dyskretnym, natomiast Ξ jest zbiorem zdarzeń elementarnych. Każdemu zdarzeniu elementarnemu przyporządkowane jest prawdopodobieństwo jego wystąpienia. Każdy dyskretny proces losowy może być traktowany jako sekwencja zmiennych losowych odpowiadająca konkretnemu zdarzeniu elementarnemu ξ bądź, równoważnie, jako zbiór wszystkich możliwych realizacji. Realizacją procesu stochastycznego nazywany jest szereg czasowy:

$$x(t) = X(t, \xi).$$

Mimo, iż proces stochastyczny jest funkcją dwóch zmiennych, $X(t, \xi)$, dla uproszczenia notacji zależność od zdarzenia elementarnego ξ będzie dalej pomijana. Symbol $X(t)$ oznaczać będzie dalej proces losowy, natomiast symbol $x(t)$ - jego realizację.



2.2 Podstawowe parametry i charakterystyki

Jak wspomniano w poprzednim rozdziale, dyskretny proces stochastyczny może być traktowany jako sekwencja zmiennych losowych, tj. w danej chwili czasu t_k określona jest zmienna losowa $X(t_k)$.

Funkcja opisująca prawdopodobieństwo tego, że zmienne losowe $X(t_1), \dots, X(t_n)$ przyjmują wartości mniejsze niż określone wartości x_1, \dots, x_n , nazywana jest n -wymiarową dystrybuantą $F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$:

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P(X(t_1) < x_1, \dots, X(t_n) < x_n). \quad (2.1)$$

Funkcja $p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ postaci:

$$p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}, \quad (2.2)$$

przy założeniu, że wszystkie pochodne istnieją, nazywana jest n -wymiarową funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa (2.2) przyjmuje zawsze wartości nieujemne, tj.

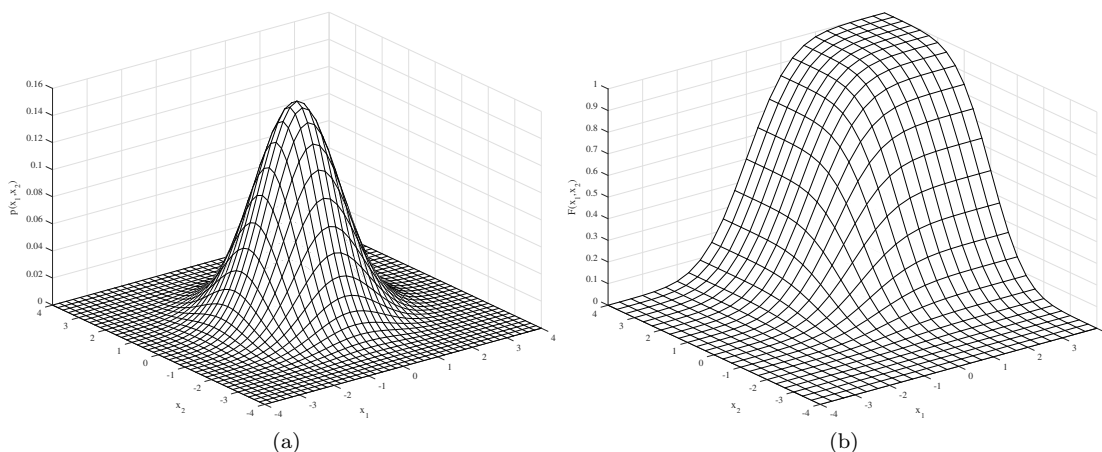
$$p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \geq 0,$$

a dodatkowo spełnia warunek:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n = 1.$$

Całka wielokrotna z funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa (2.2), obliczona w granicach od x_i do $x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$ opisuje łączne prawdopodobieństwo tego, że wartość procesu losowego $X(t)$ w chwili czasu t_1 mieści się w przedziale $(x_1, x_1 + \varepsilon_1]$, wartość $X(t)$ w chwili czasu t_2 mieści się w przedziale $(x_2, x_2 + \varepsilon_2]$ itd.

Interesującym przykładem procesu stochastycznego jest tzw. proces gaussowski. Procesem gaussowskim nazywany jest proces $X(t)$, dla którego w każdej chwili czasu t_k , $k = 1, 2, \dots$ zmienna losowa $X(t_k)$ ma rozkład normalny. Na rysunku 2.1 przedstawiono przykładowe kształty funkcji $p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ oraz $F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ dla przypadku dwuwymiarowego ($n = 2$), gdy zmienne losowe mają łączny rozkład normalny.



Rysunek 2.1: Przykładowy kształt (a) funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa oraz (b) dystrybuanty dwóch zmiennych losowych o łącznym rozkładzie normalnym, zerowych wartościach oczekiwanych i jednostkowej macierzy kowariancji.

Wartość oczekiwana jest parametrem określającym wartość procesu $X(t)$ w danej chwili czasu t uśrednioną po jego wszystkich realizacjach. W ogólności wartość oczekiwana procesu stochastycznego zmienia się w czasie. Dla danej chwili czasu t wielkość ta jest zdefiniowana jako:

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, t) dx. \quad (2.3)$$

Wartość oczekiwana, inaczej nazywana wartością średnią, jest charakterystyką pierwszego rzędu lub pierwszym momentem zwykłym.

Parametrem, który charakteryzuje zmienność procesu stochastycznego $X(t)$ jest wariancja (moment centralny drugiego rzędu). W ogólności, podobnie jak w przypadku wartości oczekiwanej, wielkość ta jest funkcją czasu t . Wariancja jest zdefiniowana jako średni kwadrat odchylenia wartości procesu losowego $X(t)$ od jego wartości oczekiwanej:

$$\sigma_X^2(t) = E\{[X(t) - \mu_X(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) - \mu_X(t)]^2 p(x, t) dx. \quad (2.4)$$

Funkcja autokorelacji jest wielkością opisującą wewnętrzną zależność procesu losowego obserwowanego w dwóch chwilach czasu t oraz $t - \tau$:

$$r_X(t, \tau) = E[X(t)X(t - \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; t, t - \tau) dx_1 dx_2. \quad (2.5)$$

Obok funkcji autokorelacji, do charakterystyk drugiego rzędu zaliczana jest także funkcja autokowariancji:

$$\begin{aligned} c_X(t, \tau) &= E\{[X(t) - \mu_X(t)][X(t - \tau) - \mu_X(t - \tau)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1 - \mu_X(t)][x_2 - \mu_X(t - \tau)]p(x_1, x_2; t, t - \tau) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Pomiędzy funkcją autokorelacji (2.5) i funkcją autokowariancji (2.6) zachodzi związek:

$$c_X(t, \tau) = r_X(t, \tau) - \mu_X(t)\mu_X(t - \tau).$$

Gdy wartość oczekiwana procesu jest równa zero, funkcja autokorelacji jest identyczna z funkcją autokowariancji:

$$r_X(t, \tau) = c_X(t, \tau).$$

Dla $\tau = 0$, funkcja autokowariancji jest równa wariancji procesu:

$$c_X(t, 0) = \sigma_X^2(t).$$

Aby w pełni scharakteryzować proces losowy, należy podać jego momenty wszystkich rzędów. Wyjątkiem są procesy gaussowskie, w przypadku których wystarczy znajomość wartości oczekiwanej oraz funkcji autokorelacji [36].

W praktycznych rozwiązaniach, jednym z pierwszych etapów analizy sygnałów o charakterze losowym jest usunięcie trendów, czyli składowych systematycznych. Z tego powodu, w niniejszej pracy skupiono się na opisie wycentrowanych procesów stochastycznych, czyli takich, których wartość oczekiwana jest równa zero.

2.3 Stacjonarność, ergodyczność, korelacja

2.3.1 Stacjonarność

Ważną klasą procesów stochastycznych, odgrywających istotną rolę w analizie i przetwarzaniu sygnałów o charakterze losowym, są procesy stacjonarne. Stacjonarność może być definiowana w szerszym bądź węższym sensie.

Proces losowy $X(t)$ jest stacjonarny w węższym sensie (silna stacjonarność), jeżeli jego n -wymiarowa dystrybuanta (2.1) nie zmienia się w czasie:

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau), \quad (2.7)$$

dla każdego $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$, każdego $n \geq 1$ oraz każdego $\tau \in \mathbb{Z}$. Bezpośrednio z (2.7) wynika fakt, iż n -wymiarowa funkcja rozkładu gęstości prawdopodobieństwa stacjonarnego w węższym sensie procesu losowego również nie zmienia się w czasie:

$$p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = p(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau).$$

Proces losowy $X(t)$ jest stacjonarny w szerszym sensie (słaba stacjonarność), jeżeli jego wartość oczekiwana (2.3) oraz funkcja autokorelacji (2.5) nie zmieniają się w czasie:

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= \mu_X, \\ r_X(t, \tau) &= r_X(\tau). \end{aligned}$$

W ogólności odwrotna implikacja nie jest prawdziwa.

Dla procesów stacjonarnych w szerszym sensie, funkcja autokorelacji (2.5) jest funkcją parzystą, której wartość zależy tylko przesunięcia w czasie τ :

$$r_X(\tau) = r_X(-\tau).$$

Co więcej, funkcja autokorelacji (2.5) przyjmuje wartości największe dla zerowego przesunięcia τ :

$$|r_X(\tau)| \leq r_X(0).$$

Z własności (2.7) wynika również, że funkcja autokowariancji zależy wyłącznie od przesunięcia w czasie τ :

$$c_X(t, \tau) = c_X(\tau),$$

a dodatkowo, wariancja nie jest funkcją czasu i jest równa co do wartości funkcji autokowariancji dla przesunięcia $\tau = 0$:

$$\sigma_X^2(t) = \sigma_X^2 = c_X(0).$$

Ponadto, jeżeli proces $X(t)$ jest stacjonarny w szerszym sensie, to jego funkcja autokorelacji jest funkcją nieujemnie określoną, tj. dla dowolnej wartości m , macierz zbudowana z jego m współczynników autokorelacji spełnia warunek:

$$\mathbf{R}_m = \begin{bmatrix} r_X(0) & r_X(1) & \dots & r_X(m-1) \\ r_X(1) & r_X(0) & \dots & r_X(m-2) \\ r_X(2) & r_X(1) & \dots & r_X(m-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_X(m-1) & r_X(m-2) & \dots & r_X(0) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.8)$$

lub równoważnie, transformata Fouriera funkcji autokorelacji jest funkcją nieujemną:

$$\mathcal{F}[r_X(\tau)] \geq 0.$$

Każdy proces stochastyczny stacjonarny w węższym sensie, jest również stacjonarny w szerszym sensie. Odwrotna implikacja nie jest jednak prawdziwa. Proces losowy, którego charakterystyki zmieniają się w czasie, jest nazywany procesem niestacjonarnym.

2.3.2 Korelacja i zależność

Proces stochastyczny $X(t)$, dla którego spełniona jest zależność:

$$c_X(t, t + \tau) = 0,$$

dla każdego $\tau \neq 0$, nazywa się wewnątrznie nieskorelowanym. Jeżeli dla sekwencji zmiennych losowych $X(t_1), \dots, X(t_n)$ zachodzi warunek:

$$p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i, t_i), \quad (2.9)$$

to zmienne $X(t_1), \dots, X(t_n)$ są niezależne. Każdy proces stochastyczny, dla którego zachodzi warunek niezależności (2.9) jest również wewnątrznie nieskorelowany. W ogólnym przypadku odwrotna implikacja nie jest prawdziwa. Jest ona jednak prawdziwa, gdy proces $X(t)$ jest procesem gaussowskim. Jeżeli proces $X(t)$ jest sekwencją nieskorelowanych zmiennych losowych, to nazywany jest szumem białym.

2.3.3 Ergodyczność

Aby ustalić charakterystyki danego procesu losowego $X(t)$, takie jak wartość oczekiwana, czy funkcja autokorelacji, należałoby dysponować wszystkimi realizacjami procesu $X(t)$. W praktyce najczęściej dysponuje się tylko jedną realizacją, stąd charakterystyki procesu stochastycznego muszą zostać określone na podstawie znajomości pojedynczej realizacji. Własnością, która to umożliwia jest ergodyczność. Stacjonarny w szerszym sensie proces $X(t)$ jest ergodyczny, jeżeli jego charakterystyki (np. wartość oczekiwana, funkcja autokorelacji, wariancja, itd.) mogą być wyznaczone na podstawie znajomości jego pojedynczej realizacji, poprzez zastosowanie uśredniania po czasie, np.

$$\mu_X = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t), \quad (2.10)$$

gdzie $x(t)$ jest realizacją procesu $X(t)$. Jeżeli zależność (2.10) zachodzi z prawdopodobieństwem równym 1, to proces jest ergodyczny względem wartości oczekiwanej prawie na pewno. W analogiczny sposób można zdefiniować ergodyczność w sensie średniokwadratowym. Jeżeli dla procesu stacjonarnego w szerszym sensie zachodzi zależność:

$$r_X(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t)x(t-\tau) \quad (2.11)$$

z prawdopodobieństwem równym 1 lub średnio z kwadratem, to proces jest ergodyczny prawie na pewno lub w sensie średniokwadratowym, względem momentów drugiego rzędu.

Warunek konieczny i wystarczający ergodyczności względem wartości oczekiwanej stacjonarnego w szerszym sensie procesu $X(t)$, o funkcji autokowariancji $c_X(\tau)$, ma postać [25]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{2N} \left(1 - \frac{\tau}{2N}\right) c_X(\tau) = 0. \quad (2.12)$$

Można zauważyć, że funkcja autokorelacji $c_X(\tau)$ w formule (2.12) dąży do wartości 0 wraz ze wzrostem wartości N . Należy pamiętać, że warunek (2.12) jest w rzeczywistości postulatem, gdyż aby go sprawdzić, należałoby dysponować informacją o wartościach funkcji autokowariancji dla wszystkich wartości przesunięć $\tau = 0, 1, \dots$

2.4 Widmowa gęstość mocy

Jeżeli sygnał $x(t)$ jest sygnałem deterministycznym o skończonej energii, tj. sygnałem spełniającym warunek:

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} x^2(t) < \infty, \quad (2.13)$$

jego widmowa gęstość energii określona jest wzorem:

$$E_X(\omega) = |X(\omega)|^2, \quad (2.14)$$

gdzie $X(\omega)$ jest transformatą Fouriera analizowanego sygnału:

$$X(\omega) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}.$$

Widmowa gęstość energii (2.14) określa rozkład energii sygnału na poszczególne pasma częstotliwości.

Stacjonarne procesy stochastyczne są sygnałami o nieskończonej energii, stąd nie spełniają warunku (2.13), a co za tym idzie nie można dla nich zdefiniować widmowej gęstości energii. Procesy te są za to sygnałami o skończonej mocy. Moc stacjonarnego w szerszym sensie ergodycznego procesu stochastycznego $X(t)$ o zerowej wartości oczekiwanej zdefiniowana jest jako:

$$\sigma_X^2 = E[X^2(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x^2(t).$$

Dla procesów stochastycznych, wielkością alternatywną do widmowej gęstości energii (2.14) jest widmowa gęstość mocy. Opisuje ona rozkład mocy sygnału losowego na poszczególne pasma częstotliwości. Widmowa gęstość mocy procesu stochastycznego $X(t)$ wyraża się wzorem:

$$S_X(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N X(t)e^{-j\omega t} \right|^2 \right], \quad (2.15)$$

gdzie ω oznacza unormowaną pulsację wyrażoną w radianach na próbkę (rad/sa):

$$-\pi < \omega \leq \pi. \quad (2.16)$$

Gdy realizacja procesu losowego jest sygnałem powstałym w wyniku próbkowania sygnału ciągłego o ograniczonym pasmie, wtedy

$$\omega = 2\pi \frac{f}{f_s},$$

gdzie f oznacza częstotliwość (wyrażoną w Hz) a f_s jest częstotliwością próbkowania, która musi być przynajmniej dwa razy większa niż maksymalna częstotliwość składowych widmowych sygnału poddanego procesowi próbkowania.

Formuła (2.15) nie jest jedyną definicją $S(\omega)$. Zgodnie z twierdzeniem Wienera-Chinczyna [25] widmowa gęstość mocy stacjonarnego w szerszym sensie procesu stochastycznego $X(t)$, może być zdefiniowana jako transformata Fouriera jego funkcji autokorelacji:

$$S_X(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r_X(\tau)e^{-j\omega\tau}. \quad (2.17)$$



Definicje (2.15) oraz (2.17) są równoważne, wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja autokorelacji procesu $X(t)$ maleje odpowiednio szybko wraz ze wzrostem przesunięcia τ [25], tj.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=-N}^N |\tau| r_X(\tau) = 0.$$

Moc procesu $X(t)$, równą jego wariancji, można wyznaczyć z zależności:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_X(\omega) d\omega = \sigma_X^2. \quad (2.18)$$

W celu obliczenia funkcji autokorelacji na podstawie znajomości widmowej gęstości mocy, należy zastosować odwrotną transformatę Fouriera:

$$r_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.19)$$

Widmowa gęstość mocy $S_X(\omega)$ stacjonarnego w szerszym sensie procesu stochastycznego $X(t)$ jest funkcją:

- nieujemną:

$$S_X(\omega) \geq 0,$$

- parzystą:

$$S_X(\omega) = S_X(-\omega),$$

- okresową, o okresie równym 2π :

$$S_X(\omega + 2k\pi) = S_X(\omega), \quad k = 1, 2, \dots$$

2.5 Wielowymiarowe procesy stochastyczne

2.5.1 Podstawowe parametry i charakterystyki

Wielowymiarowe (wielokanałowe) procesy stochastyczne są rozszerzeniem koncepcji jednowymiarowych procesów losowych. m -wymiarowym procesem stochastycznym $\mathbf{X}(t)$ nazywana jest funkcja postaci:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_m(t) \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

gdzie składowe $X_1(t), \dots, X_m(t)$ są procesami stochastycznymi. Proces $X_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ nazywany jest często i -tym kanałem procesu $\mathbf{X}(t)$. Pojedynczą realizacją procesu losowego $\mathbf{X}(t)$ jest funkcja:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t, \xi) = \begin{bmatrix} X_1(t, \xi) \\ \vdots \\ X_m(t, \xi) \end{bmatrix}.$$

Wartość oczekiwana m -wymiarowego procesu stochastycznego $\mathbf{X}(t)$ jest wektorem wartości oczekiwanych poszczególnych kanałów:

$$\boldsymbol{\mu}_X(t) = \mathbb{E}[\mathbf{X}(t)] = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X_1(t)] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_m(t)] \end{bmatrix}.$$

W ogólności poszczególne kanały procesu $\mathbf{X}(t)$ mogą być od siebie zależne. Wzajemną zależność kanałów $X_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ opisuje macierz kowariancji:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_X^2(t) &= \mathbb{E} \left[[\mathbf{X}(t) - \boldsymbol{\mu}(t)] [\mathbf{X}(t) - \boldsymbol{\mu}(t)]^T \right] \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2(t) & \sigma_{X_1 X_2}^2(t) & \dots & \sigma_{X_1 X_m}^2(t) \\ \sigma_{X_2 X_1}^2(t) & \sigma_{X_2}^2(t) & \dots & \sigma_{X_2 X_m}^2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_m X_1}^2(t) & \sigma_{X_m X_2}^2(t) & \dots & \sigma_{X_m}^2(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

gdzie $\sigma_{X_i X_j}^2(t)$ ($i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$) jest współczynnikiem kowariancji skrośnej kanałów i -tego i j -tego. Na głównej przekątnej macierzy (2.21) znajdują się wariancje poszczególnych kanałów $X_1(t), \dots, X_m(t)$ procesu $\mathbf{X}(t)$.

Analogicznie do przypadku jednowymiarowego, wielkościami, które opisują relację kanałów wielowymiarowego procesu stochastycznego $\mathbf{X}(t)$ w dwóch chwilach czasu t_1 oraz t_2 są macierze współczynników autokorelacji oraz autokowariancji.

Macierz autokorelacji m -wymiarowego procesu stochastycznego $\mathbf{X}(t)$ jest zdefiniowana w postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_X(t, \tau) &= \mathbb{E} \left[\mathbf{X}(t) \mathbf{X}^T(t - \tau) \right] \\ &= \begin{bmatrix} r_{X_1}(t, \tau) & r_{X_1 X_2}(t, \tau) & \dots & r_{X_1 X_m}(t, \tau) \\ r_{X_2 X_1}(t, \tau) & r_{X_2}(t, \tau) & \dots & r_{X_2 X_m}(t, \tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{X_m X_1}(t, \tau) & r_{X_m X_2}(t, \tau) & \dots & r_{X_m}(t, \tau) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

gdzie $r_{X_i X_j}(t, \tau)$ ($i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$) jest współczynnikiem korelacji skrośnej kanałów i -tego i j -tego. Na głównej przekątnej macierzy (2.22) znajdują się współczynniki autokorelacji poszczególnych kanałów $X_1(t), \dots, X_m(t)$ procesu $\mathbf{X}(t)$.

Macierz autokowariancji m -wymiarowego procesu stochastycznego $\mathbf{X}(t)$ jest zdefiniowana w postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_X(t, \tau) &= \mathbb{E} \left[[\mathbf{X}(t) - \boldsymbol{\mu}(t)] [\mathbf{X}(t - \tau) - \boldsymbol{\mu}(t - \tau)]^T \right] \\ &= \begin{bmatrix} c_{X_1}(t, \tau) & c_{X_1 X_2}(t, \tau) & \dots & c_{X_1 X_m}(t, \tau) \\ c_{X_2 X_1}(t, \tau) & c_{X_2}(t, \tau) & \dots & c_{X_2 X_m}(t, \tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{X_m X_1}(t, \tau) & c_{X_m X_2}(t, \tau) & \dots & c_{X_m}(t, \tau) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

gdzie $c_{X_i X_j}(t, \tau)$ ($i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$) jest współczynnikiem kowariancji skrośnej kanałów i -tego i j -tego. Na głównej przekątnej macierzy (2.23) znajdują się wariancje poszczególnych kanałów $X_1(t), \dots, X_m(t)$ procesu $\mathbf{X}(t)$.

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowych procesów losowych, jeżeli proces $\mathbf{X}(t)$ jest wycentrowany, tj.

$$\boldsymbol{\mu}_X(t) = \mathbf{0}_m,$$

gdzie $\mathbf{0}_m$ jest m -wymiarowym wektorem zerowym, to zachodzi związek:

$$\mathbf{C}_X(t, \tau) = \mathbf{R}_X(t, \tau).$$

Dodatkowo, jeżeli m -wymiarowy proces $\mathbf{X}(t)$ jest stacjonarny, tj. jego wszystkie kanały $X_1(t), \dots, X_m(t)$ są procesami łącznie stacjonarnymi, to zarówno sekwencja macierzy autokorelacji jak i sekwencja macierzy autokowariancji są funkcjami przesunięcia czasowego τ :

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_X(t, \tau) &= \mathbf{C}_X(\tau), \\ \mathbf{R}_X(t, \tau) &= \mathbf{R}_X(\tau), \\ \tau &= 0, 1, \dots,\end{aligned}$$

a oprócz tego zachodzą zależności:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_X(\tau) &= \mathbf{C}_X^T(-\tau), \\ \mathbf{R}_X(\tau) &= \mathbf{R}_X^T(-\tau).\end{aligned}$$

Jeżeli proces $\mathbf{X}(t)$ jest m -wymiarowym stacjonarnym szumem białym, to jego macierze autokowariancji $\mathbf{C}_X(\tau)$ dla przesunięcia czasowego $\tau \neq 0$ są macierzami zerowymi o wymiarach $m \times m$.

2.5.2 Widmowa gęstość mocy

Analogicznie do definicji (2.17), widmowa gęstość mocy m -wymiarowego, dyskretnego, stacjonarnego w szerszym sensie procesu stochastycznego $\mathbf{X}(t)$ jest definiowana jako transformata Fouriera jego (macierzowej) funkcji autokorelacji:

$$\mathbf{S}_X(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_X(\tau) e^{-j\omega\tau}. \quad (2.24)$$

W celu obliczenia funkcji autokorelacji na podstawie znajomości widmowej gęstości mocy, należy zastosować odwrotną transformatę Fouriera:

$$\mathbf{R}_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{S}_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Wielkość $\mathbf{S}_X(\omega)$ może być przedstawiona w postaci:

$$\mathbf{S}_X(\omega) = \begin{bmatrix} S_{X_1}(\omega) & S_{X_1X_2}(\omega) & \dots & S_{X_1X_m}(\omega) \\ S_{X_2X_1}(\omega) & S_{X_2}(\omega) & \dots & S_{X_2X_m}(\omega) \\ S_{X_3X_1}(\omega) & S_{X_3X_2}(\omega) & \dots & S_{X_3X_m}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{X_mX_1}(\omega) & S_{X_mX_2}(\omega) & \dots & S_{X_m}(\omega) \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Macierz (2.25) nazywana jest macierzą wielowymiarowej widmowej gęstości mocy. Na jej głównej przekątnej znajdują się widma własne kanałów $X_1(t), \dots, X_m(t)$ procesu $\mathbf{X}(t)$. Pozostałe komórki macierzy zawierają widma wzajemne, tj. $S_{X_iX_j}(\omega)$ ($i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$) oznacza widmo wzajemne kanałów i -tego i j -tego. Widma wzajemne kanałów wielowymiarowego procesu stochastycznego mogą przyjmować wartości zespolone. Widmowa gęstość mocy $\mathbf{S}_X(\omega)$ wielowymiarowego procesu stacjonarnego $\mathbf{X}(t)$ jest nieujemnie określoną macierzą hermitowską [18], co oznacza, że jest ona równa swojemu hermitowskiemu sprzężeniu (sprzężeniu połączonemu z transpozycją):

$$\mathbf{S}_X(\omega) = \mathbf{S}_X^H(\omega).$$

Dla każdej pary kanałów X_i, X_j ($i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$) z macierzy $\mathbf{S}_X(\omega)$ można wyodrębnić macierz postaci:

$$\begin{bmatrix} S_{X_i}(\omega) & S_{X_i X_j}(\omega) \\ S_{X_j X_i}(\omega) & S_{X_j}(\omega) \end{bmatrix},$$

która jest nazywana macierzą koherencji (ang. *coherence matrix* [18]). Na macierz tę składają się: widmo własne kanału i -tego $S_{X_i}(\omega)$, widmo własne kanału j -tego $S_{X_j}(\omega)$ oraz widma wzajemne $S_{X_i X_j}(\omega)$ i $S_{X_j X_i}(\omega)$, przy czym

$$S_{X_j X_i}(\omega) = S_{X_i X_j}^*(\omega).$$

Wielkość

$$\phi_{X_i X_j}(\omega) = \frac{S_{X_i X_j}(\omega)}{\sqrt{S_{X_i X_i}(\omega)} \sqrt{S_{X_j X_j}(\omega)}}$$

nosi nazwę funkcji koherencji. Wielkościami powiązаныmi z widmową gęstością mocy dwuwymiarowego procesu stochastycznego są dodatkowo widmo amplitudowe koherencji (ang. *Coherence Magnitude Spectrum*):

$$\text{MSC}_X(\omega) = |\phi_{X_i X_j}(\omega)|$$

oraz widmo fazowe koherencji (ang. *Coherence Phase Spectrum*):

$$\text{CPS}_X(\omega) = \text{arctg} \left[\frac{\text{Im}\{\phi_{X_i X_j}\}}{\text{Re}\{\phi_{X_i X_j}\}} \right].$$

Wartości $\text{MSC}_X(\omega)$ leżą pomiędzy 0 (dla pulsacji, dla których nie występuje koherencja pomiędzy kanałami) i 1 (dla pulsacji, dla których kanały są koherentne). Z tego powodu, funkcja $\text{MSC}_X(\omega)$ może być wykorzystywana jako miara spójności określonej pary sygnałów dla określonej pulsacji ω . Pierwotnie, funkcja ta służyła do detekcji zależnych składowych sygnałów występujących w różnych kanałach. Wielkość $\text{CPS}_X(\omega)$ określa przesunięcie fazowe sygnału pochodzącego z jednego kanału, względem sygnału pochodzącego z kanału drugiego [18].

2.6 Modelowanie procesów stochastycznych

Zgodnie z twierdzeniem Wolda [28], każdy dyskretny proces stochastyczny stacjonarny w szerszym sensie może być wyrażony w postaci:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i v(t-i) + \zeta(t), \quad t = \dots, -1, 0, 1, \dots, \quad (2.26)$$

gdzie $\zeta(t)$ jest liniowo przewidywalnym procesem deterministycznym, którego przyszłe wartości mogą zostać oszacowane z zerowym błędem, na podstawie znajomości jego przeszłego przebiegu. Drugi składnik formuły (2.26) jest procesem niedeterministycznym, którego współczynniki h_i spełniają warunki:

$$h_0 = 1, \quad \sum_{i=0}^{\infty} h_i^2 < \infty,$$

zaś $v(t)$ jest szumem białym, o zerowej wartości oczekiwanej i stałej wariancji:

$$\text{E}[v(t)] = 0,$$



$$E[v(t)v(t-i)] = \begin{cases} \sigma_v^2 & \text{jeżeli } i = 0 \\ 0 & \text{jeżeli } i \neq 0 \end{cases} .$$

Zgodnie z formułą (2.26) każdy niedeterministyczny proces stochastyczny stacjonarny w szerszym sensie może być potraktowany jako wynik filtracji szumu białego za pomocą przyczynowego filtru formującego postaci:

$$H(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i q^{-i}, \quad (2.27)$$

gdzie symbol q^{-1} jest operatorem jednokrokowego opóźnienia w dziedzinie czasu:

$$q^{-1}y(t) = y(t-1).$$

Filtr (2.27) jest opisany za pomocą nieskończonej liczby współczynników, co jest niepraktyczne z punktu widzenia identyfikacji. Gdy zamiast tego filtru zdefiniowany zostanie filtr o skończonym rzędzie, wówczas, w zależności od struktury $H(q^{-1})$, można uzyskać różne modele procesu stacjonarnego. Jednym z modeli, który zyskał dużą popularność w dziedzinie identyfikacji jest tzw. model autoregresyjny.

Rozdział 3

Procesy autoregresyjne

W rozdziale przedstawiona zostanie idea szeroko stosowanego modelu autoregresyjnego. Opisane zostaną najważniejsze charakterystyki procesów autoregresyjnych, takie jak funkcja autokorelacji czy widmowa gęstość mocy. Zestawione zostaną także równoważne reprezentacje modeli autoregresyjnych wraz z algorytmami konwersji pomiędzy nimi. W rozdziale przedstawiona zostanie także koncepcja wielowymiarowych autoregresyjnych procesów stochastycznych, która stanowi rozszerzenie idei jednowymiarowych procesów autoregresyjnych. Opisane zostaną wielkości charakteryzujące wielowymiarowe procesy AR, a także wskazane zostaną różnice pomiędzy jednowymiarowymi, a wielowymiarowymi procesami autoregresyjnymi. Rozdział zamyka omówienie metody maksymalnej entropii, opisującej rozwiązanie problemu ekstrapolacji nieskończonej sekwencji współczynników autokorelacji na podstawie znajomości skończonego zestawu danych.

3.1 Model autoregresyjny procesu stacjonarnego

3.1.1 Postać modelu autoregresyjnego

Modelem autoregresyjnym rzędu n nazywa się taki model, w którym wartość sygnału $y(t)$ w danej chwili czasu t jest wyrażona jako ważona suma n przeszłych próbek sygnału oraz pewnego składnika losowego:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n a_{i,n} y(t-i) + v_n(t), \quad (3.1)$$

gdzie wagi $a_{1,n}, \dots, a_{n,n}$ nazywane są współczynnikami autoregresji, a $v(t)$ jest szumem białym o zerowej wartości oczekiwanej i określonej wariancji:

$$E[v(t)] = 0, \quad E[v^2(t)] = \rho_n.$$

Sygnał $v(t)$ nazywany jest często szumem tworzącym.

Proces autoregresyjny jest obserwowany na wyjściu liniowego filtra formującego (2.27) o transmutancji:

$$H(q^{-1}) = \frac{1}{A(q^{-1})} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n a_{i,n} q^{-i}}, \quad (3.2)$$

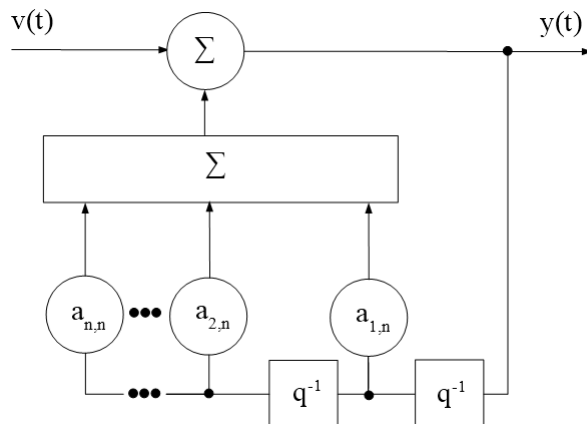
przy pobudzeniu szumem białym. Filtr $H(q^{-1})$ jest filtrem wielobiegunowym (ang. *all-pole filter*). Wielomian $A(q^{-1})$ nazywany jest wielomianem charakterystycznym, a równanie

$$A(q^{-1}) = 1 - \sum_{i=1}^n a_{i,n} q^{-i} = 0, \quad (3.3)$$

nosi nazwę równania charakterystycznego. Warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności procesu autoregresyjnego rzędu n jest umiejscowienie wszystkich zer wielomianu charakterystycznego $A(q^{-1})$, tj. wszystkich biegunów filtru formującego $H(q^{-1})$ wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej:

$$|q_k| < 1, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.4)$$

gdzie zmienne q_1, \dots, q_n , oznaczają pierwiastki wielomianu charakterystycznego $A(q^{-1})$. Na rysunku 3.1 przedstawiono schemat blokowy filtru (3.2) [18].



Rysunek 3.1: Schemat blokowy filtru (3.2) [18].

3.1.2 Funkcja autokorelacji procesu autoregresyjnego

Charakterystyki drugiego rzędu stacjonarnego procesu autoregresyjnego zależą jedynie od wartości współczynników autoregresji $a_{1,n}, \dots, a_{n,n}$ oraz wariancji szumu tworzącego ρ_n . Wartość oczekiwana sygnału $y(t)$ jest równa 0, stąd funkcja autokorelacji i funkcja autokowariancji są identyczne.

Kiedy warunek stabilności (3.4) jest spełniony, funkcja autokorelacji procesu AR(n) w stanie ustalonym przyjmuje postać:

$$E[y(t)y(t-\tau)] = r(\tau). \quad (3.5)$$

Po przemnożeniu obu stron równania (3.1) przez $y(t-\tau)$ i wyznaczeniu wartości oczekiwanych otrzymuje się:

$$E[y(t)y(t-\tau)] = \sum_{i=1}^n a_{i,n} E[y(t-i)y(t-\tau)] + E[v(t)y(t-\tau)].$$

Ponieważ zmienna losowa $v(t)$ jest nieskorelowana z przeszłymi wartościami sygnału $y(t-i)$, $i > 0$, drugi składnik po prawej stronie równania jest równy zero dla $\tau > 0$, co daje:

$$r(\tau) = \sum_{i=1}^n a_{i,n} r(\tau-i). \quad (3.6)$$

Dla $\tau = 0$ otrzymuje się

$$E[v(t)y(t)] = \rho_n.$$

Ponadto, z uwagi na to, że $r(\tau) = r(-\tau)$,

$$r(0) = \sum_{i=1}^n a_{i,n} r(-i) + \rho_n = \sum_{i=1}^n a_{i,n} r(i) + \rho_n. \quad (3.7)$$

Dla każdego $\tau > n$ równanie (3.6) stanowi rekurencyjną formułę pozwalającą na obliczenie $r(\tau)$ na podstawie znajomości n poprzednich wartości $r(\tau-1), \dots, r(\tau-n)$. Warunki początkowe mogą być zdefiniowane jako funkcje współczynników autoregresji $a_{1,n}, \dots, a_{n,n}$. Zarówno wartości współczynników $r(0), \dots, r(n)$ jak i wartość wariancji szumu tworzącego ρ_n może być obliczona poprzez rozwiązywanie układu równań liniowych odpowiadających $\tau = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \\ \vdots \\ r(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(1) & r_y(2) & \dots & r(n) \\ r(0) & r_y(1) & \dots & r(n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(n-1) & r(n-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Równania (3.8) stanowią zmodyfikowaną wersję równań Yule-Walkera [28]. Mogą one zostać użyte do rozwiązania problemu odwrotnego: obliczenia współczynników autoregresji na podstawie znanych współczynników autokorelacji i znanej wariancji szumu tworzącego. Zgodnie z (3.8) istnieje jednoznaczny związek pomiędzy tymi dwoma zestawami współczynników.

3.1.3 Widmowa gęstość mocy procesu autoregresyjnego

Zgodnie z definicją (2.17) widmowa gęstość mocy dyskretnego, stacjonarnego procesu autoregresyjnego rzędu n może być obliczona jako transformata Fouriera jego funkcji autokorelacji. Teoria procesów stochastycznych pokazuje jednak, że podobnie jak funkcja autokorelacji, widmowa gęstość mocy procesu AR(n) może zostać wyznaczona na podstawie znajomości współczynników autoregresji $a_{1,n}, \dots, a_{n,n}$ oraz wariancji szumu tworzącego ρ_n .

Jeżeli filtr formujący (2.27) zostanie pobudzony szumem białym o widmowej gęstości mocy $S_v(\omega)$, wtedy widmowa gęstość mocy sygnału $y(t)$ obserwowanego na jego wyjściu może być wyrażona wzorem:

$$S(\omega) = |H(e^{-j\omega})|^2 S_v(\omega),$$

gdzie ω jest unormowaną pulsacją. Jako, iż widmowa gęstość mocy szumu białego ma postać:

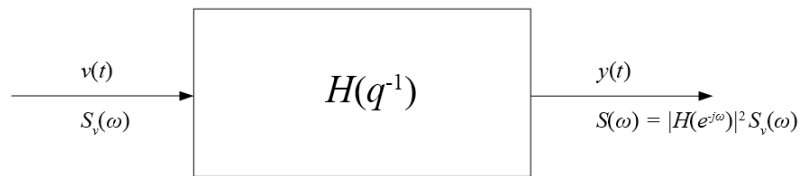
$$S_v(\omega) = \rho_n,$$

widmowa gęstość mocy procesu autoregresyjnego rzędu n wyraża się wzorem:

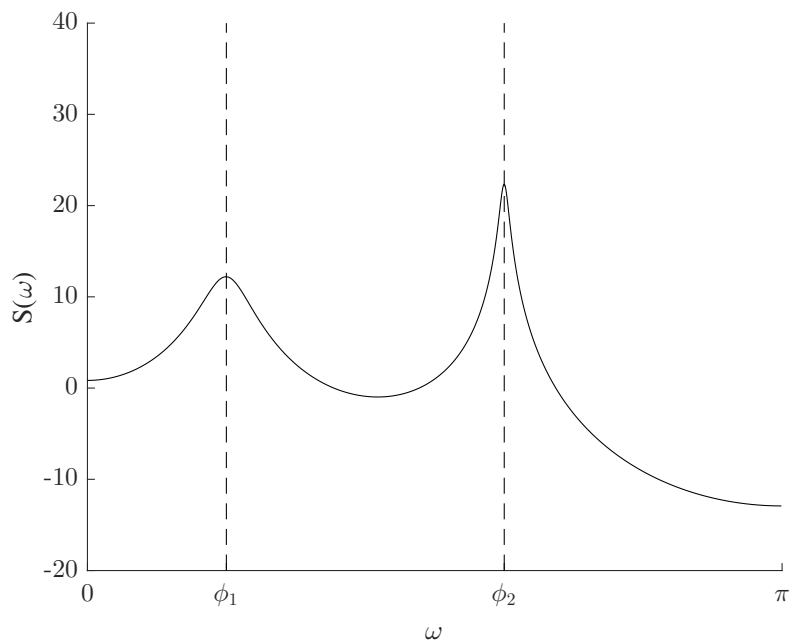
$$S(\omega) = \frac{\rho_n}{|A(e^{-j\omega})|^2} = \frac{\rho_n}{|1 - \sum_{i=1}^n a_{i,n} e^{-j\omega i}|^2}. \quad (3.9)$$

Rysunek 3.3 (a) przedstawia przykładową postać widmowej gęstości mocy procesu AR(4). Cechą charakterystyczną struktury $S(\omega)$ procesów autoregresyjnych jest obecność szczytów rezonansowych. Z tego powodu modele autoregresyjne stosowane są często do analizy procesów o widmie bogatym w takie składowe.

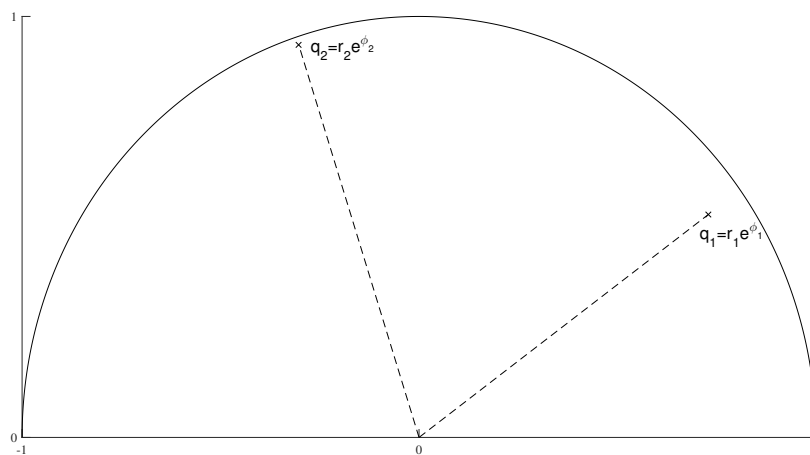




Rysunek 3.2: Związek pomiędzy widmowymi gęstościami mocy sygnałów na wejściu i wyjściu filtra formującego [42].



(a)



(b)

Rysunek 3.3: Przybliżony związek pomiędzy (b) położeniem biegunów filtra formującego (3.2) na płaszczyźnie zespolonej oraz (a) kształtem widmowej gęstości mocy procesu autoregresyjnego.

Istnieje bezpośredni związek pomiędzy liczbą i położeniem szczytów rezonansowych występujących w widmie procesu $AR(n)$, a liczbą i położeniem biegunów filtru formującego (3.2):

- Każda para biegunów zespolonych sprzężonych $q_i = r_i e^{j\phi_i}$, $q_i^* = r_i e^{-j\phi_i}$ może generować jeden szczyt rezonansowy.
- Pulsacja, dla której występuje szczyt rezonansowy jest w przybliżeniu równa argumentowi danego bieguna.
- Wysokość względna szczytu rezonansowego jest odwrotnie proporcjonalna do odległości bieguna od okręgu jednostkowego.

Wymienione zasady mogą zostać wykorzystane do jakościowej oceny kształtu widmowej gęstości mocy procesu $AR(n)$. Należy jednak stosować je z należytą ostrożnością, gdyż np. kilka pierwiastków zespolonych, położonych w niewielkich odległościach od siebie, może generować pojedynczy szczyt rezonansowy. Niezależnie jednak od rozkładu biegunów, liczba szczytów rezonansowych nie może przekraczać liczby równej połowie rzędu modelu.

3.1.4 Równoważne reprezentacje procesu autoregresyjnego

Współczynniki autoregresji oraz wariancja szumu tworzącego:

$$\mathcal{P}_n = \{a_{1,n}, \dots, a_{n,n}, \rho_n\}$$

nie stanowią jedynej możliwej reprezentacji procesu autoregresyjnego rzędu n . Obok nich, każdy stacjonarny proces $AR(n)$ może być zdefiniowany za pomocą sekwencji współczynników autokorelacji:

$$\mathcal{R}_n = \{r(0), r(1), \dots, r(n)\}.$$

Trzecią reprezentację stanowi wariancja sygnału $y(t)$ i zestaw współczynników odbicia:

$$\mathcal{Q}_n = \{r(0), k_1, \dots, k_n\},$$

gdzie

$$r(0) = E[y^2(t)].$$

Współczynniki odbicia nazywane są także cząstkowymi współczynnikami autokorelacji. Reprezentują one unormowaną korelację pomiędzy wartościami sygnału $AR(n)$ dla przesunięcia czasowego równego τ , po usunięciu korelacji dla przesunięć równych $1, \dots, \tau - 1$. Chcąc obliczyć cząstkowy współczynnik korelacji pomiędzy próbkami sygnału $y(t)$ oraz $y(t - \tau)$ należy wyznaczyć wielkości:

$$\hat{y}_f(t) = \sum_{i=1}^{\tau-1} \alpha_{i,\tau-1} y(t-i),$$

$$\hat{y}_b(t-\tau) = \sum_{i=1}^{\tau-1} \alpha_{i,\tau-1} y(t-\tau+i),$$

gdzie $\hat{y}_f(t)$ jest predyktorem „w przód”, a $\hat{y}_b(t-\tau)$ jest predyktorem „tył”. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równań Yule-Walkera:

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(\tau-2) \\ r(1) & r(0) & \dots & r(\tau-3) \\ r(2) & r(1) & \dots & r(\tau-4) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(\tau-2) & r(\tau-1) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1,\tau-1} \\ \alpha_{2,\tau-1} \\ \alpha_{3,\tau-1} \\ \vdots \\ \alpha_{\tau-1,\tau-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \\ r(3) \\ \vdots \\ r(\tau-1) \end{bmatrix}.$$



Dysponując wyznaczonymi parametrami $\alpha_{1,\tau-1}, \dots, \alpha_{\tau-1,\tau-1}$, szukany współczynnik odbicia możemy obliczyć za pomocą wzoru:

$$k_\tau = \frac{E[(y(t) - \hat{y}_f(t))(y(t-\tau) - \hat{y}_b(t-\tau))]}{\sqrt{\text{var}[y(t) - \hat{y}_f(t)]} \sqrt{\text{var}[y(t-\tau) - \hat{y}_b(t-\tau)]}}.$$

Model autoregresyjny, opisany za pomocą współczynników k_1, \dots, k_n jest stabilny wtedy i tylko wtedy gdy współczynniki odbicia spełniają warunek:

$$|k_i| < 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

Reprezentacje \mathcal{P}_n , \mathcal{Q}_n oraz \mathcal{R}_n są równoważne w tym sensie, że mając jeden zestaw parametrów, można obliczyć pozostałe dwa stosując przekształcenia:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n &= U[\mathcal{R}_n], & \mathcal{R}_n &= U^{-1}[\mathcal{P}_n], \\ \mathcal{R}_n &= V[\mathcal{Q}_n], & \mathcal{Q}_n &= V^{-1}[\mathcal{R}_n], \\ \mathcal{Q}_n &= W[\mathcal{P}_n], & \mathcal{P}_n &= W^{-1}[\mathcal{Q}_n]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Przekształcenia $U[\mathcal{R}_n]$ oraz $V^{-1}[\mathcal{R}_n]$ mogą zostać zrealizowane poprzez rozwiązanie równań Yule-Walkera [40]:

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(n-1) \\ r(1) & r(0) & \dots & r(n-2) \\ r(2) & r(1) & \dots & r(n-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(n-1) & r(n-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ a_{3,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \\ r(3) \\ \vdots \\ r(n) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\rho_n = r(0) - \sum_{i=1}^n a_{i,n} r(i).$$

Rozwiązanie równań (3.12) może zostać wyznaczone przy użyciu algorytmu Levinsona-Durbina [40]. Metoda ta jest rekursywna względem rzędu, co oznacza, że pozwala na otrzymanie rozwiązań dla kolejnych rzędów modeli równych odpowiednio $1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} &\text{for } i = 1, \dots, n \text{ do} \\ &\quad \rho_0 = r(0) \\ &\quad k_i = \frac{r(i) - \sum_{j=1}^{i-1} a_{j,i-1} r(i-j)}{\rho_{i-1}} \\ &\quad a_{i,i} = k_i \\ &\quad \text{for } j = 1, \dots, i-1 \text{ do} \\ &\quad\quad a_{j,i} = a_{j,i-1} - k_i a_{i-j,i-1} \\ &\quad \text{end} \\ &\quad \rho_i = [1 - k_i^2] \rho_{i-1} \\ &\text{end} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Przekształcenia $V[\mathcal{Q}_n]$ oraz $W^{-1}[\mathcal{Q}_n]$ mogą zostać zrealizowane za pomocą następującego al-

gorytmu [12]:

$$\begin{aligned}
 & \text{for } i = 1, \dots, n \text{ do} \\
 & \quad \rho_i = (1 - k_0^2)\rho_{i-1} \\
 & \quad a_{i,i} = k_i \\
 & \quad \text{for } j = 1, \dots, i - 1 \text{ do} \\
 & \quad \quad a_{j,i} = a_{j,i-1} - k_i a_{i-j,i-1} \\
 & \quad \text{end} \\
 & \quad r(i) = \sum_{l=1}^i a_{l,i} r(i-l) \\
 & \text{end}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

z warunkiem początkowym $\rho_0 = r(0)$.

Aby stacjonarny proces autoregresyjny rzędu n mógł zostać scharakteryzowany za pomocą reprezentacji \mathcal{P}_n , \mathcal{Q}_n oraz \mathcal{R}_n , muszą być spełnione następujące wzajemnie równoważne warunki [18]:

- Wielomian charakterystyczny $A(q^{-1})$ spełnia warunek stabilności (3.4).
- Współczynniki odbicia k_1, \dots, k_n spełniają warunek stabilności (3.10).
- Dla każdego $n > 0$ macierz

$$\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} r_X(0) & r_X(1) & \dots & r_X(n) \\ r_X(1) & r_X(0) & \dots & r_X(n-1) \\ r_X(2) & r_X(1) & \dots & r_X(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_X(n) & r_X(n-1) & \dots & r_X(0) \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

jest dodatnio określona.

3.2 Wielowymiarowe procesy autoregresyjne

3.2.1 Wielowymiarowy model autoregresyjny

Wielowymiarowym stacjonarnym sygnałem autoregresyjnym rzędu n jest sygnał postaci [18]:

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t)]^T,$$

który spełnia równanie:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{i,n} \mathbf{y}(t-i) + \mathbf{v}_n(t). \tag{3.16}$$

Składowe $y_1(t), \dots, y_m(t)$ nazywane są często kanałami sygnału $\mathbf{y}(t)$, natomiast wielkości:

$$\mathbf{A}_{i,n} = \begin{bmatrix} a_{11}^{i,n} & \dots & a_{1m}^{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^{i,n} & \dots & a_{mm}^{i,n} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

są macierzami współczynników autoregresji o wymiarach $m \times m$, a $\mathbf{v}_n(t)$ jest m -wymiarowym szumem białym o macierzy kowariancji równej:

$$E[\mathbf{v}_n(t)\mathbf{v}_n^T(t)] = \boldsymbol{\rho}_n.$$

Każdy model wielowymiarowego procesu stochastycznego z czasem biegnącym „w przód” posiada równoważny model z czasem biegnącym „w tył” [20]:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{i,n} \mathbf{y}(t+i) + \boldsymbol{\eta}_n(t), \quad (3.17)$$

gdzie wielkości:

$$\mathbf{B}_{i,n} = \begin{bmatrix} b_{11}^{i,n} & \dots & b_{1m}^{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}^{i,n} & \dots & b_{mm}^{i,n} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

są macierzami współczynników autoregresji o wymiarach $m \times m$, a $\boldsymbol{\eta}_n(t)$ jest m -wymiarowym szumem białym o macierzy kowariancji równej:

$$E[\boldsymbol{\eta}_n(t)\boldsymbol{\eta}_n^T(t)] = \boldsymbol{\sigma}_n.$$

W przeciwieństwie do jednowymiarowych procesów AR ($m = 1$), model z czasem „w przód” różni się od modelu z czasem „w tył”, tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i,n} &\neq \mathbf{B}_{i,n}, & i = 1, \dots, n, \\ \boldsymbol{\rho}_n &\neq \boldsymbol{\sigma}_n, \end{aligned}$$

ale zachodzi związek:

$$\det[\boldsymbol{\rho}_n] = \det[\boldsymbol{\sigma}_n].$$

Wielomian charakterystyczny wielowymiarowego modelu autoregresyjnego (3.16) ma postać:

$$\det\{\mathcal{A}[q^{-1}]\}, \quad (3.18)$$

gdzie

$$\mathcal{A}[q^{-1}] = \mathbf{I}_m - \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{i,n} q^{-i}. \quad (3.19)$$

Wielomian charakterystyczny (3.18) może również zostać wyrażony za pomocą macierzy współczynników autoregresji $\mathbf{B}_{1,n}, \dots, \mathbf{B}_{n,n}$:

$$\det\{\mathcal{A}[q^{-1}]\} = \det\{\mathcal{B}[q^{-1}]\},$$

gdzie

$$\mathcal{B}[q^{-1}] = \mathbf{I}_m - \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{i,n} q^i.$$

Model (3.16) jest stabilny gdy wszystkie zera wielomianu charakterystycznego leżą wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej, tj.

$$|q_k| < 1, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.20)$$

gdzie zmienne q_1, \dots, q_n , oznaczają pierwiastki wielomianu charakterystycznego.

3.2.2 Funkcja autokorelacji i widmowa gęstość mocy wielowymiarowego procesu autoregresyjnego

Analogicznie do przypadku jednowymiarowego, funkcja autokorelacji stacjonarnego wielowymiarowego procesu AR(n) jest zależna tylko od wartości macierzy współczynników autoregresji $\mathbf{A}_{1,n}, \dots, \mathbf{A}_{n,n}$ oraz macierzy kowariancji szumu tworzącego $\boldsymbol{\rho}_n$. Kiedy warunek stabilności (3.20) jest spełniony, funkcja autokorelacji wielowymiarowego stacjonarnego procesu autoregresyjnego przyjmuje postać:

$$E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t-\tau)] = \mathbf{R}(\tau) = \mathbf{R}^T(-\tau).$$

$\mathbf{R}(\tau)$ można przedstawić w postaci macierzowej (2.22).

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, funkcja autokorelacji wielowymiarowego procesu AR(n) spełnia zależność:

$$\mathbf{R}(\tau) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{i,n} \mathbf{R}(\tau - i). \quad (3.21)$$

Rekurencyjna zależność (3.21) pozwala obliczyć $\mathbf{R}(\tau)$ dla $\tau > n$, przy warunkach początkowych $\mathbf{R}(0), \dots, \mathbf{R}(n)$ [40].

Macierze współczynników autoregresji $\mathbf{A}_{1,n}, \dots, \mathbf{A}_{n,n}$ oraz macierz kowariancji szumu tworzącego $\boldsymbol{\rho}_n$ są ze sobą powiązane za pomocą wielowymiarowych równań Yule-Walkera:

$$[\mathbf{I}_m \quad -\mathbf{A}_{1,n} \quad \dots \quad -\mathbf{A}_{n,n}] \begin{bmatrix} \mathbf{R}(0) & \mathbf{R}(1) & \dots & \mathbf{R}(n) \\ \mathbf{R}^T(1) & \mathbf{R}(0) & \dots & \mathbf{R}(n-1) \\ \mathbf{R}^T(2) & \mathbf{R}^T(1) & \dots & \mathbf{R}(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}^T(n) & \mathbf{R}^T(n-1) & \dots & \mathbf{R}(0) \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\rho}_n \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}], \quad (3.22)$$

gdzie $\mathbf{R}(0), \mathbf{R}(1), \dots, \mathbf{R}(n-1), \mathbf{R}(n)$ są macierzami współczynników autokorelacji. Równanie (3.22) dla współczynników $\mathbf{B}_{1,n}, \dots, \mathbf{B}_{n,n}$ przyjmuje postać:

$$[-\mathbf{B}_{n,n} \quad \dots \quad -\mathbf{B}_{1,n} \quad \mathbf{I}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{R}(0) & \mathbf{R}(1) & \dots & \mathbf{R}(n) \\ \mathbf{R}^T(1) & \mathbf{R}(0) & \dots & \mathbf{R}(n-1) \\ \mathbf{R}^T(2) & \mathbf{R}^T(1) & \dots & \mathbf{R}(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}^T(n) & \mathbf{R}^T(n-1) & \dots & \mathbf{R}(0) \end{bmatrix} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \boldsymbol{\sigma}_n].$$

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, widmowa gęstość mocy wielowymiarowego procesu autoregresyjnego rzędu n może być zapisana w postaci macierzowej (2.25)

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{A}^{-1}[e^{-j\omega}] \boldsymbol{\rho}_n \mathbf{A}^{-T}[e^{j\omega}], \quad (3.23)$$

gdzie $\mathbf{A}[e^{-j\omega}]$ jest reprezentacją wielkości (3.19) w dziedzinie częstotliwości. Wielkość (3.23) może zostać również przedstawiona przy użyciu macierzy współczynników autoregresji $\mathbf{B}_{1,n}, \dots, \mathbf{B}_{n,n}$:

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{B}^{-1}[e^{-j\omega}] \boldsymbol{\sigma}_n \mathbf{B}^{-T}[e^{j\omega}].$$

3.2.3 Równoważne reprezentacje wielowymiarowego procesu autoregresyjnego

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowych procesów AR, każdy wielowymiarowy proces autoregresyjny rzędu n może być zdefiniowany za pomocą trzech alternatywnych reprezentacji.

Pierwszą z nich stanowi zestaw macierzy współczynników autoregresji oraz macierz kowariancji szumu tworzącego:

$$\mathcal{P}_n = \{\boldsymbol{\rho}_n, \mathbf{A}_{1,n}, \dots, \mathbf{A}_{n,n}\}$$

lub równoważnie:

$$\mathcal{P}_n^* = \{\boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{B}_{1,n}, \dots, \mathbf{B}_{n,n}\}.$$

Druga to sekwencja macierzy współczynników autokorelacji:

$$\mathcal{R}_n = \{\mathbf{R}(0), \mathbf{R}(1), \dots, \mathbf{R}(n)\}.$$

Obok reprezentacji \mathcal{P}_n , \mathcal{P}_n^* oraz \mathcal{R}_n wielowymiarowy stacjonarny proces $\text{AR}(n)$ może być scharakteryzowany za pomocą zestawu macierzy współczynników:

$$\mathcal{Q}_n = \{\mathbf{R}(0), \mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_n\},$$

gdzie $\mathbf{R}(0)$ jest macierzą kowariancji sygnału $\mathbf{y}(t)$:

$$\mathbf{R}(0) = \text{E}[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t)],$$

a wielkości $\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_n$, mające sens unormowanych cząstkowych macierzy współczynników autokorelacji sygnału $\mathbf{y}(t)$, nazywane są macierzami unormowanych współczynników odbicia. Wielowymiarowy model autoregresyjny jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy macierze współczynników odbicia spełniają warunek:

$$s_{\max}[\mathbf{K}_i] < 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.24)$$

gdzie $s_{\max}(\mathbf{X})$ oznacza maksymalną wartość osobiwą macierzy \mathbf{X} , tj. maksymalną wartość własną macierzy $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$. Reprezentacje \mathcal{P}_n , \mathcal{P}_n^* , \mathcal{Q}_n oraz \mathcal{R}_n są równoznaczne w tym sensie, że mając dany jeden zestaw parametrów, można obliczyć pozostałe dwa stosując przekształcenia (3.11).

Przekształcenia $U[\mathcal{R}_n]$ oraz $V^{-1}[\mathcal{R}_n]$ mogą zostać zrealizowane poprzez rozwiązanie równań Yule-Walkera dla sygnału wielowymiarowego. Równania (3.22) mogą zostać rozwiązane za pomocą algorytmu Whittle'a-Wigginsa-Robinsona (WWR), który stanowi wielowymiarowe rozszerzenie algorytmu Levinsona-Durbina [40]:

$$\begin{aligned} & \text{for } i = 1, \dots, n \text{ do} \\ & \quad \mathbf{K}_i = \boldsymbol{\rho}_{i-1}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}_{i-1} \boldsymbol{\sigma}_{i-1}^{-\frac{T}{2}} \\ & \quad \mathbf{U}_i = \mathbf{R}(i) - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{A}_{j,i-1} \mathbf{R}(i-j) \\ & \quad \mathbf{V}_i = \mathbf{U}_i \boldsymbol{\sigma}_{i-1}^{-1} \\ & \quad \mathbf{W}_i = \mathbf{U}_i^T \boldsymbol{\rho}_{i-1}^{-1} \\ & \quad \mathbf{A}_{i,i} = \mathbf{V}_i \\ & \quad \mathbf{B}_{i,i} = \mathbf{W}_i \\ & \quad \text{for } j = 1, \dots, i-1 \text{ do} \\ & \quad \quad \mathbf{A}_{j,i} = \mathbf{A}_{j,i-1} - \mathbf{V}_i \mathbf{B}_{i-j,i-1} \\ & \quad \quad \mathbf{B}_{j,i} = \mathbf{B}_{j,i-1} - \mathbf{W}_i \mathbf{A}_{i-j,i-1} \\ & \quad \text{end} \\ & \quad \boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{\rho}_{i-1} - \mathbf{V}_i \mathbf{U}_i^T \\ & \quad \boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_{i-1} - \mathbf{W}_i \mathbf{U}_i \\ & \text{end} \end{aligned} \quad (3.25)$$



z warunkami początkowymi $\boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{R}(0)$ oraz $\mathbf{V}_0 = \mathbf{R}(1)$. Pierwiastek kwadratowy z macierzy \mathbf{X} zdefiniowany jest jako dowolna macierz kwadratowa spełniająca warunek:

$$\mathbf{X}^{\frac{1}{2}} \left[\mathbf{X}^{\frac{1}{2}} \right]^T = \mathbf{X}.$$

Dodatkowo, stosowana jest notacja:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{\frac{T}{2}} &= (\mathbf{X}^{\frac{1}{2}})^T, \\ \mathbf{X}^{-\frac{1}{2}} &= (\mathbf{X}^{\frac{1}{2}})^{-1}, \\ \mathbf{X}^{-\frac{T}{2}} &= (\mathbf{X}^{\frac{T}{2}})^{-1}. \end{aligned}$$

Przekształcenia $V[\mathcal{Q}_n]$ oraz $W^{-1}[\mathcal{Q}_n]$ mogą zostać zrealizowane za pomocą wielowymiarowego rozszerzenia algorytmu (3.14):

$$\begin{aligned} &\text{for } i = 1, \dots, n \text{ do} \\ &\quad \mathbf{V}_i = \boldsymbol{\rho}_{i-1}^{\frac{1}{2}} \mathbf{K}_i \boldsymbol{\sigma}_{i-1}^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \mathbf{W}_i = \boldsymbol{\sigma}_{i-1}^{\frac{1}{2}} \mathbf{K}_i^T \boldsymbol{\rho}_{i-1}^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \mathbf{A}_{i,i} = \mathbf{V}_i \\ &\quad \mathbf{B}_{i,i} = \mathbf{W}_i \\ &\quad \text{for } j = 1, \dots, i-1 \text{ do} \\ &\quad\quad \mathbf{A}_{j,i} = \mathbf{A}_{j,i-1} - \mathbf{V}_i \mathbf{B}_{i-j,i-1} \\ &\quad\quad \mathbf{B}_{j,i} = \mathbf{B}_{j,i-1} - \mathbf{W}_i \mathbf{A}_{i-j,i-1} \\ &\quad \text{end} \\ &\quad \boldsymbol{\rho}_i^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\rho}_{i-1}^{\frac{1}{2}} \{ \mathbf{I}_m - \mathbf{K}_i \mathbf{K}_i^T \}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \boldsymbol{\sigma}_i^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\sigma}_{i-1}^{\frac{1}{2}} \{ \mathbf{I}_m - \mathbf{K}_i^T \mathbf{K}_i \}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \mathbf{R}(i) = \sum_{j=1}^i \mathbf{A}_{j,i} \mathbf{R}(i-j) \\ &\text{end} \end{aligned} \tag{3.26}$$

z warunkami początkowymi $\boldsymbol{\rho}_0^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\sigma}_0^{\frac{1}{2}} = \mathbf{R}^{\frac{1}{2}}(0)$.

Aby wielowymiarowy stacjonarny proces autoregresyjny rzędu n mógł zostać scharakteryzowany za pomocą reprezentacji \mathcal{P}_n , \mathcal{P}_n^* , \mathcal{Q}_n oraz \mathcal{R}_n , muszą być spełnione poniższe, równoważne warunki [18]:

- Wielomian charakterystyczny (3.18) spełnia warunek stabilności (3.20).
- Macierze współczynników odbicia $\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_n$ spełniają warunek stabilności (3.24).
- Dla każdego $n > 0$ macierz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}(0) & \mathbf{R}(1) & \dots & \mathbf{R}(n) \\ \mathbf{R}^T(1) & \mathbf{R}(0) & \dots & \mathbf{R}(n-1) \\ \mathbf{R}^T(2) & \mathbf{R}^T(1) & \dots & \mathbf{R}(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}^T(n) & \mathbf{R}^T(n-1) & \dots & \mathbf{R}(0) \end{bmatrix}$$

jest dodatnio określona.

3.3 Związek pomiędzy modelem autoregresyjnym a metodą maksymalnej entropii

Metoda obliczania widmowej gęstości mocy na podstawie znajomości współczynników autokorelacji (2.17) zakłada, że znane są wszystkie elementy nieskończonej sekwencji $r(0), r(1) \dots$. Z oczywistych powodów taka sytuacja nie ma miejsca w praktyce. Jeżeli skończona liczba współczynników autokorelacji $r(0), \dots, r(n)$ jest znana, istnieje nieskończenie wiele możliwych ekstrapolacji współczynników $r(n+1), r(n+2) \dots$, czemu odpowiada nieskończenie wiele możliwych charakterystyk widmowych $S(\omega)$.

Problem określenia kształtu widmowej gęstości mocy sprowadza się więc do odpowiedniego wyboru ekstrapolowanych współczynników tak, aby zagwarantować dodatnią określoność funkcji autokorelacji. W pracy [6] postulowano, że współczynniki $r(n+1), r(n+2), \dots$ powinny zostać dobrane są w taki sposób, aby zmaksymalizować entropię szeregu czasowego scharakteryzowanego przez otrzymaną w wyniku takiego rozszerzenia sekwencję współczynników autokorelacji. W takich okolicznościach, wartości szeregu czasowego będą maksymalnie nieprzewidywalne spośród wszystkich szeregów czasowych określonych przez znane wartości współczynników autokorelacji dla przesunięć od 0 do n [18].

Wskaźnik entropii dla procesów losowych o rozkładzie normalnym jest proporcjonalny do

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln S_{\text{MEM}}(\omega) d\omega, \quad (3.27)$$

gdzie $S_{\text{MEM}}(\omega)$ jest widmową gęstością mocy. Wielkość $S_{\text{MEM}}(\omega)$ może zostać obliczona jako argument, dla którego formuła (3.27) przyjmuje wartość maksymalną, przy czym spełniony jest warunek:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_{\text{MEM}}(\omega) e^{j\omega k} d\omega = r(k), \quad (3.28)$$

dla $0 \leq k \leq n$. Rozwiązanie problemu można znaleźć stosując np. metodę mnożników Lagrange'a. Wtedy widmowa gęstość mocy przyjmuje taką samą postać jak (3.9), tj.

$$S(\omega) = \frac{\rho_n}{|1 - \sum_{i=1}^n a_{i,n} e^{-j\omega i}|^2}. \quad (3.29)$$

W pracy [6] pokazano, że procesem, który maksymalizuje entropię jest proces autoregresyjny, tzn. ekstrapolowane współczynniki autokorelacji dla przesunięć większych od n są ze sobą powiązane zależnościami opisanymi przez równania Yule-Walkera (3.12).

Dla wielowymiarowych procesów losowych formuła (3.27) oraz warunek (3.28) przyjmują postaci odpowiednio:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{ln det} [\mathbf{S}_{\text{MEM}}(\omega)] d\omega$$

oraz

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{S}_{\text{MEM}}(\omega) e^{j\omega k} d\omega = \mathbf{R}(k),$$

gdzie $\mathbf{S}_{\text{MEM}}(\omega)$ jest widmową gęstością mocy, a macierze $\mathbf{R}(k)$, $0 \leq k \leq n$, są macierzami współczynników autokorelacji wielowymiarowego procesu stochastycznego [6].

Największą zaletą metody maksymalnej entropii jest możliwość wyznaczenia widmowej gęstości mocy na podstawie znajomości skończonej liczby współczynników autokorelacji, dzięki czemu może być ona stosowana w praktycznych rozwiązaniach.



Rozdział 4

Metody estymacji widmowej gęstości mocy stacjonarnych procesów stochastycznych

Wprowadzenie

Zgodnie z twierdzeniem Wienera-Chinczyna (2.17) widmowa gęstość mocy stacjonarnego w szerszym sensie procesu stochastycznego jest zdefiniowana jako transformata Fouriera jego funkcji autokorelacji. Wynika stąd, iż teoretycznie, problem estymacji widmowej gęstości mocy sprowadza się do estymacji nieskończonej sekwencji współczynników autokorelacji, do czego z kolei niezbędna jest znajomość wszystkich wartości sygnału o nieskończonym czasie trwania. W praktyce nie dysponujemy taką informacją. Zwykle dokonuje się oszacowania widmowej gęstości mocy na podstawie znajomości segmentu danych pomiarowych o skończonej długości.

Zasadniczo, metody estymacji widmowej gęstości mocy dzielą się na dwie grupy: metody nieparametryczne (klasyczne) oraz metody parametryczne. Metody klasyczne polegają na oszacowaniu widmowej gęstości mocy bazując bezpośrednio na dostępnych wartościach sygnału. Opierają się one na obliczaniu transformaty Fouriera. W przeciwieństwie do estymacji parametrycznej, podejście klasyczne nie zakłada z góry struktury modelowanego procesu.

W metodach parametrycznych, na podstawie danych pomiarowych budowany jest model, który dostarcza informacji o charakterystyce badanego sygnału. Oznacza to, że problem estymacji widmowej gęstości mocy sprowadza się do wyznaczenia oszacowań parametrów charakteryzujących założony model. Jeżeli model jest adekwatny, to metody parametryczne pozwalają uzyskać wysokiej jakości oszacowania. Jeżeli natomiast założona struktura procesu jest nieprawidłowa, to stosowanie metod parametrycznych może prowadzić do otrzymania błędnych oszacowań. Przykładowo, jeżeli rzeczywista widmowa gęstość mocy danego procesu zawiera określoną liczbę szczytów rezonansowych, a założony model pozwala na występowanie ich dwukrotnie mniejszej liczby, to uzyskane oszacowanie widmowej gęstości mocy będzie niekompletne, tzn. oszacowanie będzie zawierało maksymalnie taką liczbę szczytów rezonansowych, na jaką pozwala model. Metody parametryczne cechuje większa dokładność estymacji oraz większa rozdzielczość w porównaniu do metod nieparametrycznych zwłaszcza w przypadku, gdy liczba analizowanych danych jest mała. Poza tym, liczba parametrów potrzebnych do wyznaczenia widma jest zdecydowanie mniejsza niż w ujęciu klasycznym [42].



4.1 Estymatory widmowej gęstości mocy - podstawowe informacje

Jedną z miar efektywności estymatora jest błąd średniokwadratowy (ang. *Mean Squared Error*). Niech $\hat{S}(\omega)$ oznacza oszacowanie wartości $S(\omega)$. Z definicji błąd średniokwadratowy estymatora $\hat{S}(\omega)$ wyraża się wzorem:

$$\text{MSE} [\hat{S}(\omega)] = \text{E} [(\hat{S}(\omega) - S(\omega))^2]. \quad (4.1)$$

Im mniejsza jest wartość błędu średniokwadratowego, tym estymator daje dokładniejsze oszacowania rzeczywistych parametrów. Jeżeli wraz ze wzrostem liczby dostępnych danych błąd średniokwadratowy estymatora dąży do zera w określonym sensie probabilistycznym (z prawdopodobieństwem 1 lub średnio z kwadratem):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{MSE} [\hat{S}(\omega)] = 0,$$

to estymator jest nazywany zgodnym. Stosując oznaczenie:

$$\bar{S}(\omega) = \text{E} [\hat{S}(\omega)]$$

oraz dokonując prostych przekształceń formuły (4.1) można otrzymać:

$$\begin{aligned} \text{MSE} [\hat{S}(\omega)] &= \text{E} \left[[\hat{S}(\omega) - \bar{S}(\omega) + \bar{S}(\omega) - S(\omega)]^2 \right] \\ &= \text{E} \left[[\hat{S}(\omega) - \bar{S}(\omega)]^2 + 2 [\hat{S}(\omega) - \bar{S}(\omega)] [\bar{S}(\omega) - S(\omega)] + [\bar{S}(\omega) - S(\omega)]^2 \right] \\ &= \text{E} \left[[\hat{S}(\omega) - \bar{S}(\omega)]^2 \right] + \text{E} \left[2 [\hat{S}(\omega) - \bar{S}(\omega)] [\bar{S}(\omega) - S(\omega)] \right] + [\bar{S}(\omega) - S(\omega)]^2, \end{aligned}$$

jako, że wielkość $\bar{S}(\omega) - S(\omega)$ nie ma charakteru losowego otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \text{MSE} [\hat{S}(\omega)] &= \text{E} \left[[\hat{S}(\omega) - \bar{S}(\omega)]^2 \right] + 2\text{E} [\hat{S}(\omega) - \bar{S}(\omega)] [\bar{S}(\omega) - S(\omega)] + [\bar{S}(\omega) - S(\omega)]^2 \\ &= \text{E} \left[[\hat{S}(\omega) - \bar{S}(\omega)]^2 \right] + 2 [\bar{S}(\omega) - S(\omega)] [\bar{S}(\omega) - S(\omega)] + [\bar{S}(\omega) - S(\omega)]^2, \end{aligned}$$

co w rezultacie daje:

$$\text{MSE} [\hat{S}(\omega)] = \text{E} \left[[\hat{S}(\omega) - \bar{S}(\omega)]^2 \right] + [\bar{S}(\omega) - S(\omega)]^2, \quad (4.2)$$

gdzie wielkość:

$$\text{var} [\hat{S}(\omega)] = \text{E} \left[[\hat{S}(\omega) - \bar{S}(\omega)]^2 \right] \quad (4.3)$$

jest wariancją estymatora $\hat{S}(\omega)$, natomiast wielkość:

$$\text{B} [\hat{S}(\omega)] = \bar{S}(\omega) - S(\omega) = \text{E} [\hat{S}(\omega) - S(\omega)] \quad (4.4)$$

nazywana jest jego obciążeniem. Estymator jest nieobciążony, jeżeli wartość obciążenia jest równa zero. Jeżeli obciążenie przyjmuje wartości różne od zera, wtedy estymator jest nazywany obciążonym. Formuła (4.2) pokazuje, że dokładność estymatora zależy tylko i wyłącznie od jego wariancji oraz obciążenia.



Wskaźnik jakości $Q[\hat{S}(\omega)]$ estymatora $\hat{S}(\omega)$ jest definiowany jako [18]:

$$Q[\hat{S}(\omega)] = \frac{\text{var}[\hat{S}(\omega)]}{\left[E[\hat{S}(\omega)]\right]^2}.$$

Wskaźnik jakości $Q[\hat{S}(\omega)]$ opisuje w rzeczywistości odwrotność stosunku sygnału do szumu SNR (ang. *Signal-to-Noise Ratio*), który odnosi się bezpośrednio do jakości oszacowania kształtu widmowej gęstości mocy. Jeżeli $Q[\hat{S}(\omega)]$ przyjmuje wartości dużo mniejsze niż 1, wtedy oszacowania widma cechują się gładkim kształtem o niewielkich fluktuacjach (małej wariancji). Z kolei wartości wskaźnika jakości dużo większe od jedności świadczą o niskiej jakości estymaty, o dużej wariancji.

Obok wariancji, obciążenia i wskaźnika jakości, istotnym parametrem estymatorów widmowej gęstości mocy jest rozdzielczość. Rozdzielczość estymatora to wielkość mówiąca o tym, jaka jest najmniejsza wartość różnicy częstotliwości, dla której cechy widma mogą być wiarygodnie odtworzone przez estymator. Przykładowo, jeżeli rozdzielczość danego estymatora $\hat{S}(\omega)$ wynosi $\Delta\omega[\hat{S}(\omega)] = 0.1$ rad/sa, a widmo rzeczywiste zawiera dwa szczyty rezonansowe na częstotliwościach odpowiednio $\omega = 1.5$ rad/sa oraz $\omega = 1.55$ rad/sa, to estymator nie będzie w stanie dobrze estymować ich kształtu - w miejsce dwóch szczytów rezonansowych pojawi się jeden.

Stosowanie metod parametrycznych nie zwalnia z konieczności znajdowania kompromisów. O ile rozdzielczość estymatorów w podejściu parametrycznym jest zwykle bardzo duża, a wariancja widma estymowanego niewielka, należy znaleźć kompromis pomiędzy złożonością modelu (liczbą parametrów), a precyzją odwzorowania estymowanej charakterystyki. Przykładowo, jeżeli widmo rzeczywiste zawiera szczyty rezonansowe o małej wysokości, rozszerzenie modelu o dodatkowe parametry może spowodować znaczny wzrost złożoności obliczeniowej procesu estymacji, przy niewielkim zysku dokładności oszacowania.

4.1.1 Miary oceny dokładności oszacowania widma

Miarą oceny dokładności oszacowania widmowej gęstości mocy jest wielkość, która reprezentuje stopień podobieństwa pomiędzy rzeczywistą, a estymowaną widmową gęstością mocy. Miara ta przyjmuje nieujemne wartości, które są adekwatne do stopnia zniekształcenia, tj. dla oszacowań wysokiej jakości miara przyjmuje niewielkie, a dla dużych zniekształceń - duże wartości [17]. Do często stosowanych miar zalicza się średniokwadratową miarę logarytmiczną oraz miarę Itakury-Saito.

Średniokwadratowa miara logarytmiczna

Średniokwadratowa miara logarytmiczna (ang. *Mean-Squared Log measure*) dana jest wzorem:

$$\begin{aligned} d_{\text{MSL}} &= E \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\ln S(\omega) - \ln \hat{S}(\omega) \right]^2 d\omega \right\} \\ &= E \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\ln \frac{S(\omega)}{\hat{S}(\omega)} \right]^2 d\omega \right\}. \end{aligned}$$

Można dostrzec podobieństwo pomiędzy postacią średniokwadratowej miary logarytmicznej, a zależnością opisującą mechanizm reakcji ludzkich zmysłów (np. słuchu) na bodźce zewnętrzne. Zgodnie z prawem Webera-Fechnera [44] intensywność wrażenia (reakcji na bodziec) jest propor-

cyjonalna do względnej zmiany wielkości bodźca. Zależność ta może być zapisana w postaci:

$$p = c \ln \frac{b}{b_0},$$

gdzie p jest miarą intensywności bodźca, b jest wielkością bodźca, b_0 jest wielkością referencyjną bodźca, a c pewną stałą wartością.

Wersja d_{MSL} dla sygnałów wielowymiarowych jest zdefiniowana jako:

$$\begin{aligned} d_{\text{MSL}} &= \text{E} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\ln(\det \mathbf{S}(\omega)) - \ln(\det \widehat{\mathbf{S}}(\omega)) \right]^2 d\omega \right\} \\ &= \text{E} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\ln \frac{\det \mathbf{S}(\omega)}{\det \widehat{\mathbf{S}}(\omega)} \right]^2 d\omega \right\}. \end{aligned}$$

Miara Itakury-Saito

Miara Itakury-Saito (ang. *Itakura-Saito distortion*) wyraża się wzorem [17]:

$$d_{\text{IS}} = \text{E} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{S(\omega)}{\widehat{S}(\omega)} - \ln \frac{S(\omega)}{\widehat{S}(\omega)} - 1 \right] d\omega \right\}. \quad (4.5)$$

Rozszerzona wersja d_{IS} dla sygnałów wielowymiarowych nazywana jest miarą względnej entropii (ang. *Relative Entropy Rate*) [15] i wyrażona jest za pomocą formuły:

$$d_{\text{RER}} = \text{E} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\text{tr} \left[(\mathbf{S}(\omega) - \widehat{\mathbf{S}}(\omega)) \widehat{\mathbf{S}}^{-1}(\omega) \right] - \ln \left[\det(\mathbf{S}(\omega) \widehat{\mathbf{S}}^{-1}(\omega)) \right] \right] d\omega \right\}. \quad (4.6)$$

W pracy [17] pokazano, stosując rozwinięcie w szereg:

$$u = e^{\ln u} \approx 1 + \ln u + \frac{1}{2}(\ln u)^2 + \dots,$$

że w przypadku jednowymiarowym miara Itakury-Saito jest proporcjonalna do średniokwadratowej miary logarytmicznej:

$$d_{\text{IS}} \approx \frac{1}{2} d_{\text{MSL}}.$$

4.2 Estymacja współczynników autokorelacji

Oszacowanie współczynników autokorelacji stanowi podstawę estymacji widmowej gęstości mocy procesów stochastycznych, zarówno przy wykorzystaniu podejścia klasycznego jak i niektórych metod parametrycznych.

Niech sygnał $y(t)$ będzie realizacją ergodycznego, stacjonarnego w szerszym sensie procesu stochastycznego. Zakładając, że wartości $y(t)$ znane są dla chwil czasu $t = 1, \dots, N$, współczynniki autokorelacji sygnału $y(t)$ mogą być oszacowane za pomocą estymatora:

$$\widehat{r}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t)y(t-\tau). \quad (4.7)$$

Oszacowanie funkcji autokorelacji (4.7) może być przedstawione w postaci:

$$\widehat{r}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=-\infty}^{\infty} y(t)w(t)y(t-\tau)w(t-\tau), \quad (4.8)$$

gdzie $w(t)$ są współczynnikami okna prostokątnego:

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } 1 \leq t \leq N \\ 0 & \text{jeżeli } t < 1 \text{ lub } t > N \end{cases} \quad (4.9)$$

Po obliczeniu wartości oczekiwanej wyrażenia (4.8) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} E[\hat{r}(\tau)] &= \frac{1}{N} \sum_{t=-\infty}^{\infty} E[y(t)y(t-\tau)] w(t)w(t-\tau) \\ &= \frac{1}{N} r(\tau) \sum_{t=-\infty}^{\infty} w(t)w(t-\tau) \\ &= \frac{1}{N} r(\tau) r_w(\tau), \end{aligned} \quad (4.10)$$

gdzie wielkość

$$r_w(\tau) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} w(t)w(t-\tau)$$

jest funkcją autokorelacji okna (4.9) i przyjmuje wartości:

$$r_w(\tau) = \begin{cases} N - |\tau| & \text{jeżeli } |\tau| \leq N - 1 \\ 0 & \text{jeżeli } |\tau| > N - 1 \end{cases} \quad (4.11)$$

Funkcja (4.11) jest nazywana oknem Bartletta. Podstawiając wielkość (4.11) do formuły (4.10) otrzymuje się:

$$E[\hat{r}(\tau)] = \begin{cases} \frac{N-|\tau|}{N} r(\tau) & \text{jeżeli } |\tau| \leq N - 1 \\ 0 & \text{jeżeli } |\tau| > N - 1 \end{cases} \quad (4.12)$$

Wyrażenie (4.12) pokazuje, że estymator (4.7) jest estymatorem obciążonym. Niemniej jednak, jest on asymptotycznie nieobciążony, gdyż:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\hat{r}(\tau)] = r(\tau).$$

Wartość funkcji autokorelacji sygnału może być również oszacowana za pomocą estymatora:

$$\hat{r}(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{t=\tau+1}^N y(t)y(t-\tau). \quad (4.13)$$

Postępując analogicznie jak w przypadku estymatora obciążonego można pokazać, że estymator (4.13) jest estymatorem nieobciążonym. Dla małych wartości τ oba estymatory dają zbliżone wartości. Niemniej jednak, dla dużych wartości przesunięcia τ , w przypadku zastosowania estymatora nieobciążonego średniokwadratowy błąd estymacji współczynników autokorelacji $\hat{r}(\tau)$ może przyjmować duże wartości, co nie ma miejsca przy zastosowaniu estymatora obciążonego. Wynika z tego, że wraz ze wzrostem przesunięcia τ , estymator obciążony daje dokładniejsze oszacowania $\hat{r}(\tau)$ niż estymator nieobciążony. Kolejną istotną zaletą estymatora obciążonego jest fakt, iż gwarantuje on dodatnią określoność macierzy złożonej z oszacowań współczynników autokorelacji (3.15). Takiej gwarancji nie daje estymator nieobciążony. Właściwość ta ma szczególne znaczenie w zastosowaniach, w których brak dodatniej określoności funkcji autokorelacji może prowadzić do otrzymania ujemnych oszacowań widmowej gęstości mocy. Wymienione cechy estymatora obciążonego sprawiają, że jest on znacznie częściej stosowany w praktycznych aplikacjach, niż estymator nieobciążony.



Wariant wielowymiarowy

Postać estymatorów (4.7) i (4.13) może zostać rozszerzona dla sygnałów wielowymiarowych. Jeżeli sygnał $\mathbf{y}(t)$ o długości N jest realizacją ergodycznego, stacjonarnego w szerszym sensie wielowymiarowego procesu stochastycznego, to oszacowania macierzy współczynników autokorelacji mogą zostać wyznaczone za pomocą estymatora obciążonego:

$$\hat{\mathbf{R}}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t-\tau), \quad (4.14)$$

lub estymatora nieobciążonego:

$$\hat{\mathbf{R}}(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \sum_{t=\tau+1}^N \mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t-\tau). \quad (4.15)$$

4.3 Okna czasowe i ich wpływ na wyniki estymacji

Istotnym elementem metod estymacji widmowej gęstości mocy są okna czasowe. Oknem czasowym nazywana jest sekwencja współczynników (funkcja) o skończonej długości. Zwykle okna czasowe są symetryczne, a ich współczynniki przyjmują wartości w przedziale od 0 do 1. Dla okien, których długość jest liczbą nieparzystą, oś symetrii wyznacza środkowy współczynnik okna. Dla okien, których długość jest liczbą parzystą, oś symetrii znajduje się pomiędzy dwoma centralnymi współczynnikami okna.

Okienkowaniem określane jest zwykle mnożenie wartości sygnału przez współczynniki okna. Jeżeli dany jest sygnał $y(t)$, $t = 1, \dots, N$ oraz funkcja okna $w(t)$, to sygnał poddany okienkowaniu dany jest wzorem:

$$y_w(t) = w(t)y(t).$$

Ponieważ mnożeniu w dziedzinie czasu odpowiada splot w dziedzinie częstotliwości, to:

$$Y_w(\omega) = W(\omega) * Y(\omega),$$

gdzie $Y(\omega)$, $Y_w(\omega)$ są transformatami Fouriera sygnałów $y(t)$ oraz $y_w(t)$, a $W(\omega)$ jest transformacją Fouriera funkcji okna $w(t)$. Operator „*” oznacza operację splotu. Splot dwóch funkcji $f(t)$ oraz $g(t)$ jest zdefiniowany jako:

$$f(t) * g(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)g(t-i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(t-i)g(i).$$

Okienkowaniu mogą być również poddane współczynniki autokorelacji. Efektem ważenia próbek sygnału jest redukcja obciążenia estymatora. Gdy współczynniki okna są mnożone przez współczynniki autokorelacji redukowana jest wariancja estymatora.

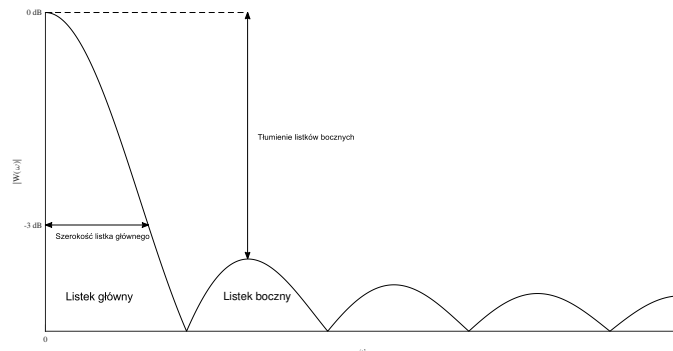
Funkcja okna w dziedzinie częstotliwości $W(\omega)$ jest zazwyczaj charakteryzowana przez dwa parametry:

- szerokość listka głównego,
- maksymalną wysokość listków bocznych.

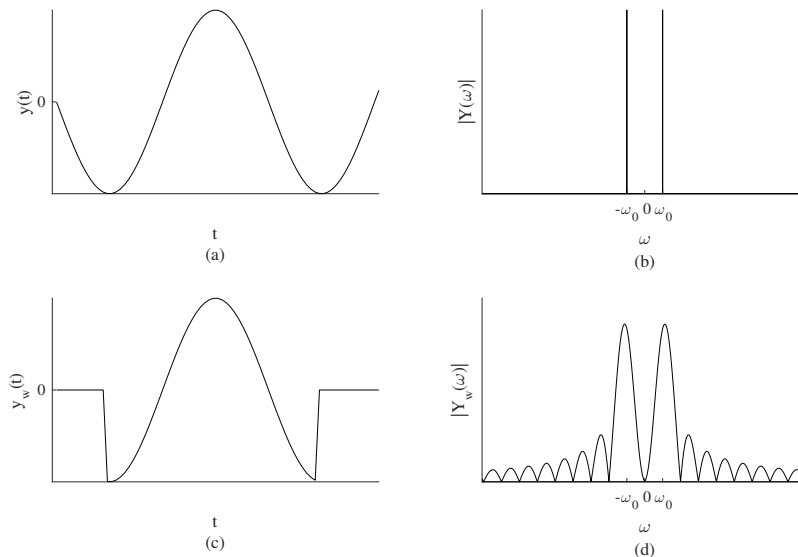
Szerokość listka głównego jest to taka wartość częstotliwości, dla której wysokość listka głównego maleje o 3 dB w stosunku do jego wysokości maksymalnej. Wielkość ta ma bezpośredni wpływ na rozdzielczość estymatora widmowej gęstości mocy. Im mniejsza szerokość listka głównego, tym



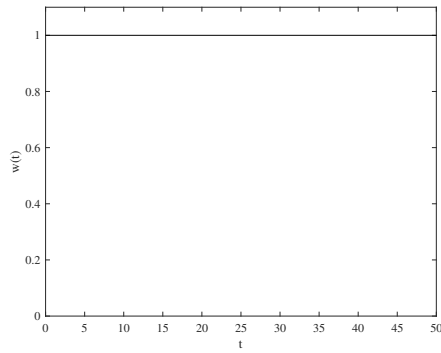
większa rozdzielczość w dziedzinie częstotliwości. Niezależnie jednak od kształtu okna, zwiększenie liczby danych pomiarowych zawsze powoduje poprawę rozdzielczości. Maksymalna wysokość listków bocznych związana jest z tzw. przeciekiem widma. Przeciekiem widma jest efektem objawiającym się przenikaniem mocy sygnału z pasm częstotliwości o większej mocy do pasm, gdzie moc sygnału jest niewielka bądź zerowa. Efekt przecieku widma został przedstawiony na rysunku 4.2, gdzie jako przykład wykorzystano okno prostokątne. Im mniejsza wartość maksymalnej wysokości listków bocznych, tym mniejszy stopień przecieku widma. Nie jest możliwe zmniejszenie szerokości listka głównego przy jednoczesnej redukcji maksymalnej wysokości listków bocznych. Poprawa jednego parametru zawsze wiąże się z pogorszeniem drugiego. Dokonując wyboru kształtu okna, należy zatem znaleźć kompromis pomiędzy rozdzielczością, a poziomem tłumienia przecieku widma. Na rysunku 4.3 przedstawiono kształty typowych okien czasowych stosowanych w praktyce wraz z ich charakterystykami częstotliwościowymi. W tabeli 4.1 zestawiono wartości ich parametrów.



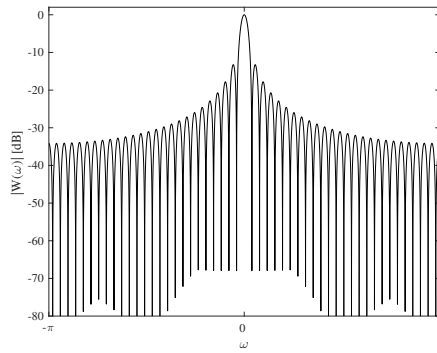
Rysunek 4.1: Charakterystyka częstotliwościowa przykładowego okna z zaznaczonymi parametrami charakteryzującymi okno.



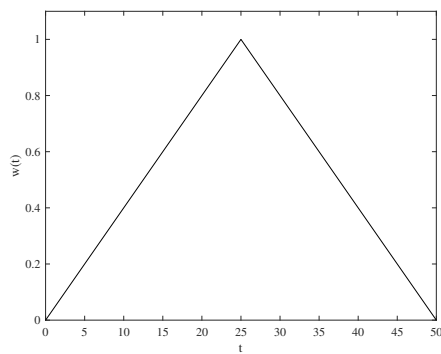
Rysunek 4.2: Ilustracja efektu przecieku widma na przykładzie okna prostokątnego na przykładzie sygnału sinusoidalnego o pulsacji ω_0 . (a) Oryginalny sygnał sinusoidalny. (b) Charakterystyka amplitudowa sygnału oryginalnego. (c) Sygnał okienkowany za pomocą okna prostokątnego. (d) Charakterystyka amplitudowa po zastosowaniu okna prostokątnego.



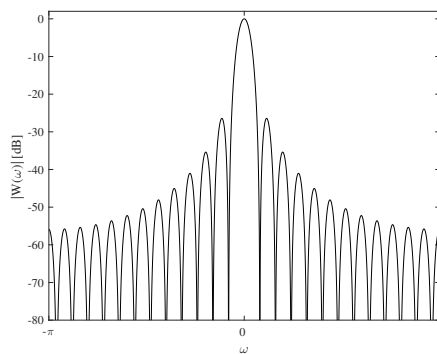
(a)



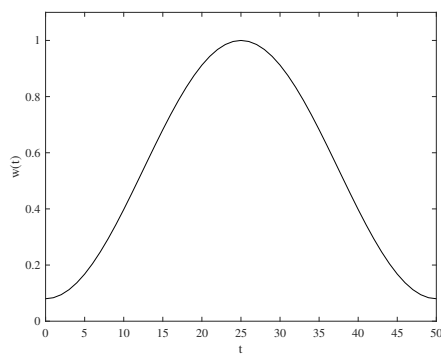
(b)



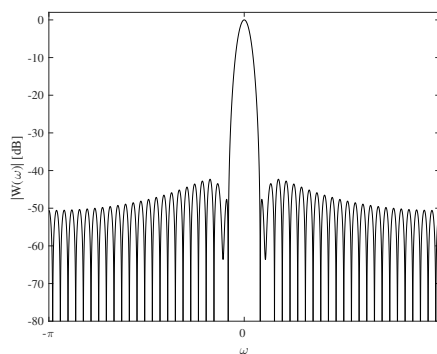
(c)



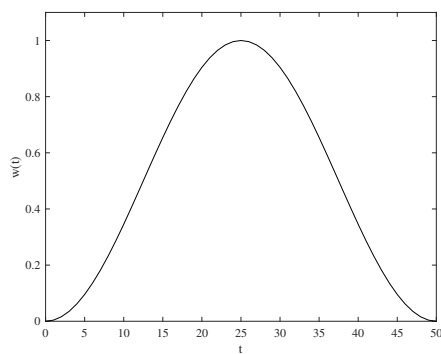
(d)



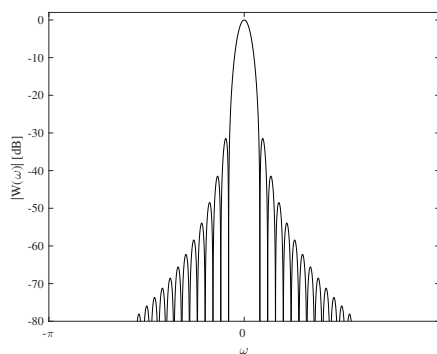
(e)



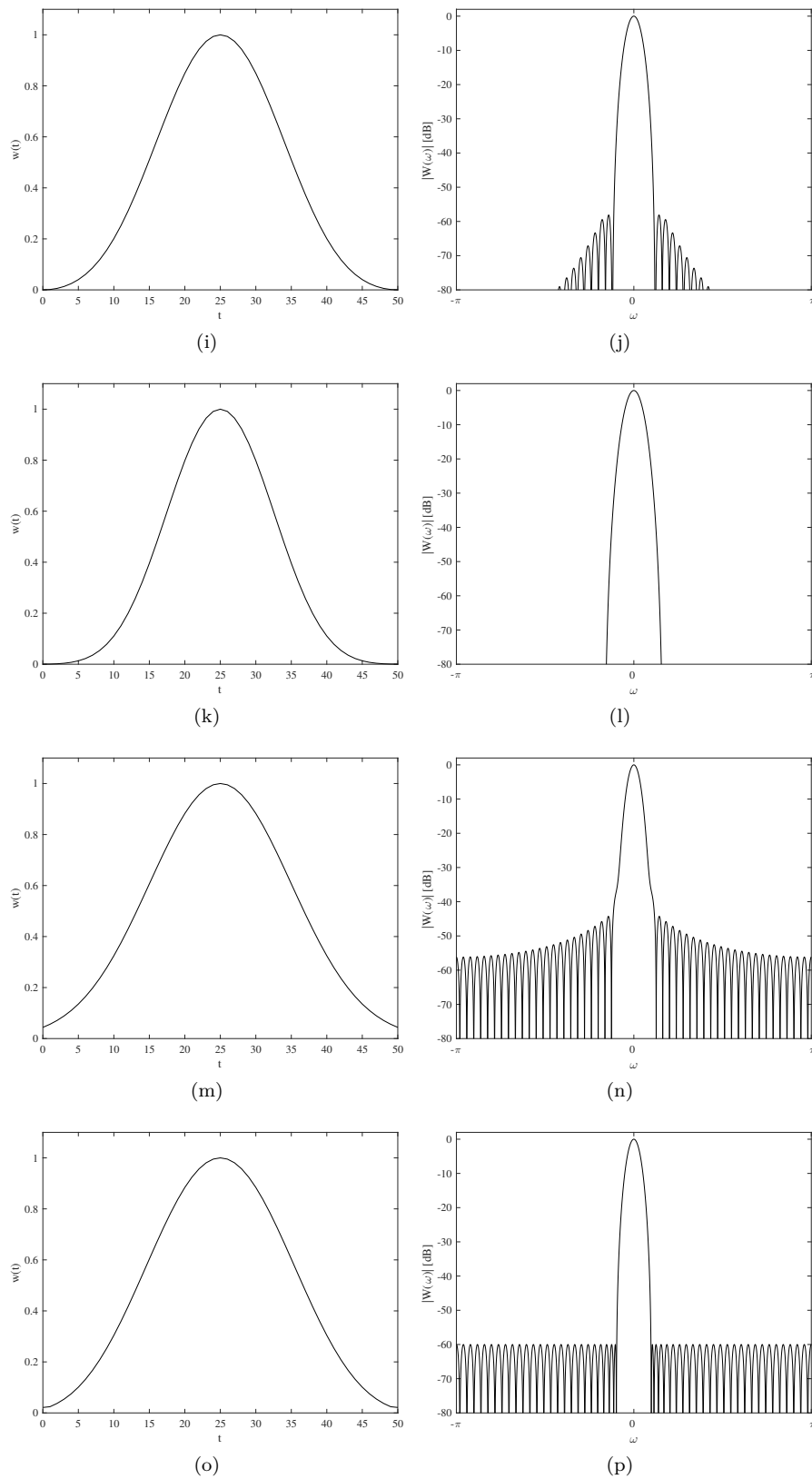
(f)



(g)



(h)



Rysunek 4.3: Przykładowe funkcje okien o długości $N = 51$, przedstawione zarówno w dziedzinie czasu jak i częstotliwości. (a-b) Prostokątne. (c-d) Bartletta. (e-f) Hamminga. (g-h) Hanninga. (i-j) Blackmana. (k-l) Nuttalla. (m-n) Gaussa. (o-p) Czebyszewa.

Okno	Szerokość listka głównego [rad/sa]	Tłumienie listków bocznych [dB]
Prostokątne	$\frac{1.8\pi}{N}$	-13
Bartletta	$\frac{2.5\pi}{N}$	-26
Hamminga	$\frac{2.6\pi}{N}$	-42
Hanninga	$\frac{2.9\pi}{N}$	-31
Blackmana	$\frac{3.4\pi}{N}$	-59
Nuttalla	$\frac{3.7\pi}{N}$	-92
Gaussa	$\frac{2.55\pi}{N}$	-44
Czebyszewa ($\beta = 60$)	$\frac{2.75\pi}{N}$	-60

Tablica 4.1: Parametry przykładowych okien o długości N .

Okno prostokątne cechuje niewielka szerokość listka głównego. Jest ona najmniejsza co do wartości spośród okien zestawionych w tabeli 4.1. Z drugiej strony okno prostokątne posiada najmniejszą wartość tłumienia listków bocznych. Okno Bartletta ma dwukrotnie szerszy listek główny niż okno prostokątne o tej samej długości, ale znacznie lepiej redukuje efekt przecieku widma. Tłumienie listków bocznych dla tego okna przyjmuje wartość -26 dB. Szerokości listków głównych okna Hamminga i okna Bartletta mają w przybliżeniu tę samą wartość, przy czym okno Hamminga posiada dużo mniejszą maksymalną wysokość listków bocznych. Okno Hanninga ma kształt zbliżony do kształtu okna Hamminga lecz cechuje się gorszymi wartościami parametrów. Szerokość listka głównego okna Blackmana jest większa niż okien Hamminga i Hanninga lecz okno to lepiej redukuje efekt przecieku widma. Okna Nuttalla i Gaussa mają podobny kształt, jednak okno Nuttalla posiada znacznie niższy poziom tłumienia listków bocznych. Okno Czebyszewa cechuje identyczna wysokość wszystkich listków bocznych. Parametr β służy do określania poziomu tłumienia listków bocznych.

4.4 Metody nieparametryczne

W zastosowaniach nieparametrycznych metod estymacji widmowej gęstości mocy parametry rozdzielczości częstotliwości $\Delta\omega$ $[\hat{S}(\omega)]$ oraz wskaźnika jakości Q $[\hat{S}(\omega)]$ są ze sobą bezpośrednio związane. Niech N oznacza długość segmentu danych. Jeżeli jest spełniony warunek:

$$N \frac{\Delta\omega [\hat{S}(\omega)]}{2\pi} \gg 1,$$

wtedy przybliżony związek parametrów N , $\Delta\omega$ $[\hat{S}(\omega)]$ oraz Q $[\hat{S}(\omega)]$ może być opisany za pomocą formuły [18]:

$$Q [\hat{S}(\omega)] N \frac{\Delta\omega [\hat{S}(\omega)]}{2\pi} \approx 1. \quad (4.16)$$

Zależność (4.16) pokazuje, że nie można jednocześnie osiągnąć dużej rozdzielczości (małej wartości $\Delta\omega$ $[\hat{S}(\omega)]$) oraz wysokiej jakości estymaty (małej wartości Q $[\hat{S}(\omega)]$). Przykładowo, jeżeli pożądana wariancja estymatora $\hat{S}(\omega)$ ma mieć wartość równą dziesiątej części jego wartości oczekiwanej, wtedy Q $[\hat{S}(\omega)] = 0.1$, a osiągalna rozdzielczość $\Delta\omega$ $[\hat{S}(\omega)] \approx \frac{10}{N} \cdot 2\pi$ rad/sa. Stosowanie metod

nieparametrycznych wiąże się zatem ze znalezieniem kompromisu pomiędzy jakością oszacowania a rozdzielczością estymatora [18].

Periodogram

Metoda periodogramu opiera się na definicji widmowej gęstości mocy (2.17). Niech sygnał $y(t)$ będzie realizacją ergodycznego, stacjonarnego w szerszym sensie procesu stochastycznego o widmowej gęstości mocy $S(\omega)$. Zakładając, że wartości $y(t)$ znane są dla chwil czasu $t = 1, \dots, N$, współczynniki autokorelacji sygnału $y(t)$ mogą być oszacowane za pomocą estymatora obciążonego (4.7). Wykorzystując własność parzystości funkcji autokorelacji, po obliczeniu transformaty Fouriera otrzymuje się formułę:

$$\hat{S}_P(\omega) = \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}(\tau) e^{-j\omega\tau}. \quad (4.17)$$

Wielkość (4.17) bywa w literaturze nazywana korelogramem [42]. Obok formuły (4.17) periodogram może zostać wyrażony jako funkcja wartości sygnału [37]:

$$\hat{S}_P(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N y(t) e^{-j\omega t} \right|^2. \quad (4.18)$$

Periodogram zapewnia wysoką rozdzielczość estymacji dla odpowiednio długich segmentów danych, aczkolwiek jest to estymator o niskiej jakości estymacji ze względu na dużą wariancję. Dodatkową wadą metody jest fakt, iż zwiększenie liczby próbek sygnału nie redukuje wariancji oszacowania. Poza tym, wartość wskaźnika jakości nie zależy od długości segmentu danych, co potwierdza niską jakość estymacji [42]. Z drugiej strony jednak, periodogram jest estymatorem asymptotycznie nieobciążonym [37] co powoduje, że zwiększenie liczby danych pomiarowych zmniejsza wartość obciążenia. Oprócz tego periodogram nie jest estymatorem zgodnym [42].

Zmodyfikowany periodogram

Zmodyfikowany periodogram jest nieparametryczną metodą estymacji widmowej gęstości mocy opartą na metodzie periodogramu (4.18), w której stosowane jest okno czasowe inne niż prostokątne. Jeżeli $y(t)$ jest stacjonarnym sygnałem losowym o długości N , a $w(t)$ funkcją okna czasowego różnego od prostokątnego, to definicja zmodyfikowanego periodogramu wyrażona jest za pomocą wzoru:

$$\hat{S}_M(\omega) = \frac{1}{NU} \left| \sum_{t=1}^N y(t) w(t) e^{-j\omega t} \right|^2, \quad (4.19)$$

gdzie

$$U = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N w^2(t). \quad (4.20)$$

Dla $U = 1$, zmodyfikowany periodogram przyjmuje identyczną postać jak periodogram (4.18).

Podobnie jak periodogram, zmodyfikowany periodogram jest estymatorem asymptotycznie nieobciążonym. Kształt okna czasowego $w(t)$ nie ma wpływu na wartość wariancji, stąd wariancja zmodyfikowanego periodogramu jest w przybliżeniu równa wariancji periodogramu, co oznacza, że zmodyfikowany periodogram nie jest estymatorem zgodnym. Zastosowanie okna o kształcie innym niż prostokątne pozwala na uzyskanie kompromisu pomiędzy rozdzielczością, wysokością listków bocznych oraz efektem przecieku widma. Rozdzielczość zmodyfikowanego periodogramu jest związana z kształtem zastosowanego okna czasowego [37]. Przykładowe wartości rozdzielczości dla różnych okien czasowych zostały zestawione w tabeli 4.1.

Metoda Bartletta

W celu redukcji wariancji periodogramu stosuje się technikę polegającą na podziale analizowanego sygnału na segmenty o równej długości. Następnie, dla każdego segmentu obliczany jest periodogram, a otrzymane wyniki zostają uśrednione. Opisana metoda nosi nazwę metody Bartletta.

Jeżeli $y(t)$ jest fragmentem realizacji stacjonarnego sygnału losowego o długości N , to może on zostać podzielony na D segmentów danych o długości P każdy ($N = PD$). Niech sygnał postaci:

$$\begin{aligned} y_i(t) &= y[(i-1)P + t], \\ t &= 1, \dots, P, \\ i &= 1, \dots, D, \end{aligned}$$

będzie i -tym segmentem sygnału $y(t)$. Dla każdego i -tego segmentu można wyznaczyć periodogram $\hat{S}_{y_i}(\omega)$. Po uśrednieniu periodogramów otrzymanych dla wszystkich segmentów $y_i(t)$ otrzymuje się oszacowanie widmowej gęstości mocy [42]:

$$\hat{S}_B(\omega) = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^D \hat{S}_{y_i}(\omega). \quad (4.21)$$

Estymator Bartletta jest estymatorem obciążonym. Podobnie jednak jak w przypadku periodogramu, jest on także estymatorem asymptotycznie nieobciążonym. Wariancja estymatora maleje do zera wraz ze wzrostem liczby segmentów D co oznacza, że jest on estymatorem zgodnym.

Z powodu, iż przedstawiona metoda polega na oszacowaniu widmowej gęstości mocy na podstawie znajomości segmentów o stałej długości P , rozdzielczość estymatora wynosi [37]:

$$\Delta\omega \left[\hat{S}_B(\omega) \right] = \frac{1.8\pi}{P} = D \frac{1.8\pi}{N} \text{ rad/sa}. \quad (4.22)$$

Wraz ze wzrostem liczby segmentów D , maleje wariancja estymatora $\hat{S}_B(\omega)$. Z drugiej strony, formuła (4.22) pokazuje, iż wraz ze wzrostem liczby segmentów maleje (pogarsza się) rozdzielczość częstotliwości, która jest D -krotnie większa, niż rozdzielczość periodogramu. Stosowanie metody Bartletta wiąże się więc z odpowiednim wyborem długości segmentu P lub równoważnie, liczby segmentów D .

Metoda Welcha

Zmodyfikowaną wersją metody Bartletta jest metoda Welcha. Modyfikacja dotyczy dwóch aspektów. Po pierwsze, segmenty, na które dzielony jest analizowany sygnał, mogą na siebie nachodzić. Stosowanie nachodzących na siebie segmentów pozwala na uzyskanie ich większej liczby, w porównaniu z metodą Bartletta. Dzięki temu zredukowana jest wariancja estymatora. Drugą modyfikacją jest możliwość stosowania okna innego niż prostokątne. Ważenie segmentów sygnału przed obliczeniem periodogramów powoduje redukcję obciążenia estymatora oraz zmniejsza efekt przecieku widma kosztem rozdzielczości. Zalecane jest stosowanie okna Hanninga, o poziomie nakładania segmentów równym 50% [18].

Estymator Welcha jest estymatorem obciążonym. Podobnie jednak, jak w przypadku metody Bartletta, jest on także estymatorem asymptotycznie nieobciążonym [37].

Analiza wariancji estymatora Welcha jest trudnym zadaniem. Niemniej jednak, można empirycznie pokazać, że jej wartość jest mniejsza niż wariancja estymatora Bartletta [42]. Rozdzielczość estymatora Welcha jest ściśle związana z kształtem zastosowanego okna czasowego.



Metoda Daniella

Duża wariancja periodogramu (4.18) może zostać zredukowana poprzez zastosowanie uśredniania oszacowania widmowej gęstości mocy wokół danej częstotliwości ω . Opisana metoda nosi nazwę metody Daniella [42].

Jeżeli $\hat{S}_P(\omega)$ jest periodogramem stacjonarnego sygnału losowego $y(t)$ o długości N , to oszacowanie widmowej gęstości mocy dla i -tej częstotliwości przyjmuje postać:

$$\hat{S}_D(\omega_i) = \frac{1}{2D+1} \sum_{j=i-D}^{i+D} \hat{S}_P(\omega_j),$$

gdzie

$$\omega_i = \frac{2\pi i}{\tilde{N}}, \quad i = 0, 1, \dots, \tilde{N} - 1, \quad (4.23)$$

a D określa liczbę punktów wokół częstotliwości ω_i . Wartość \tilde{N} powinna być dużo większa niż wartość N , a wartość D powinna być odpowiednio mała, aby rzeczywista wartość widmowej gęstości mocy mogła być uznana za stałą w sąsiedztwie częstotliwości ω_i .

Metoda Blackmana-Tukeya

Metoda Blackmana-Tukeya opiera się na definicji korelogramu (4.17). Jeżeli $y(t)$ jest stacjonarnym sygnałem losowym o długości N , to estymator Blackmana-Tukeya przyjmuje postać:

$$\hat{S}_{BT}(\omega) = \sum_{\tau=-(P-1)}^{P-1} w(\tau) \hat{r}(\tau) e^{-j\omega\tau},$$

gdzie wielkości $\hat{r}(\tau)$ są oszacowaniami współczynników autokorelacji sygnału $y(t)$, natomiast wielkości $w(\tau)$ są współczynnikami okna o długości P . Zastosowanie ważenia oszacowań współczynników autokorelacji powoduje redukcję wariancji estymatora $\hat{S}_{BT}(\omega)$ w odniesieniu do periodogramu. Wraz ze wzrostem długości okna P maleje wariancja i maleje (pogarsza się) rozdzielczość oszacowania widmowej gęstości mocy. Wartość wariancji estymatora $\hat{S}_{BT}(\omega)$ jest proporcjonalna do wartości $\frac{P}{N}$, a jego rozdzielczość jest proporcjonalna do wartości $\frac{1}{P}$. Odpowiedni dobór wartości parametru P jest zatem związany z kompromisem pomiędzy wariancją, a rozdzielczością estymatora $\hat{S}_{BT}(\omega)$ [42].

W pracy [42] pokazano, że estymator Welch'a przyjmuje formę podobną do estymatora Blackmana-Tukeya.

4.5 Metody parametryczne

4.5.1 Proces średniej ruchomej (MA)

Kiedy filtr formujący (2.27) przyjmuje postać filtru o skończonej odpowiedzi impulsowej:

$$H(q^{-1}) = C(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^r c_{i,r} q^{-i}, \quad (4.24)$$

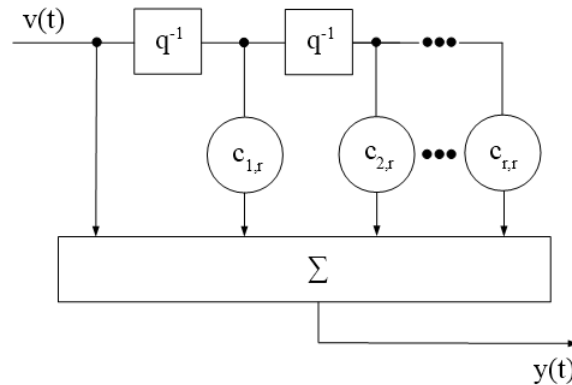
to sygnał obserwowany na jego wyjściu jest opisany za pomocą formuły:

$$y(t) = \sum_{i=1}^r c_{i,r} v(t-i) + v(t), \quad (4.25)$$

tj. wartość sygnału $y(t)$ w chwili czasu t jest ważoną sumą wartości szumu tworzącego $v(t)$ przesuniętych w czasie. Wagi $c_{1,r}, \dots, c_{r,r}$ są współczynnikami filtra (4.24), natomiast $v(t)$ jest szumem białym o zerowej wartości oczekiwanej i określonej wariancji ρ_r :

$$\begin{aligned} E[v(t)] &= 0, \\ E[v^2(t)] &= \rho_r. \end{aligned}$$

Proces (4.25) nazywany jest procesem średniej ruchomej (ang. *Moving Average*). Parametr r nazywany jest rzędem procesu. Proces średniej ruchomej rzędu r zapisuje się w skróconej formie jako MA(r). Na rysunku 4.4 przedstawiono schemat blokowy filtra (4.24) [18].



Rysunek 4.4: Schemat blokowy filtra (4.24) [18].

Filtr (4.24) nie ma biegunów, stąd jest on zawsze filtrem stabilnym. Ze względu na obecność zer, warunkiem minimalnofazowości filtra (4.24) jest położenie wszystkich zer wielomianu $C(q^{-1})$ wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej.

Proces średniej ruchomej jest wynikiem pobudzenia filtra formującego (4.24) szumem białym, stąd widmowa gęstość mocy procesu MA(r) wyraża się wzorem:

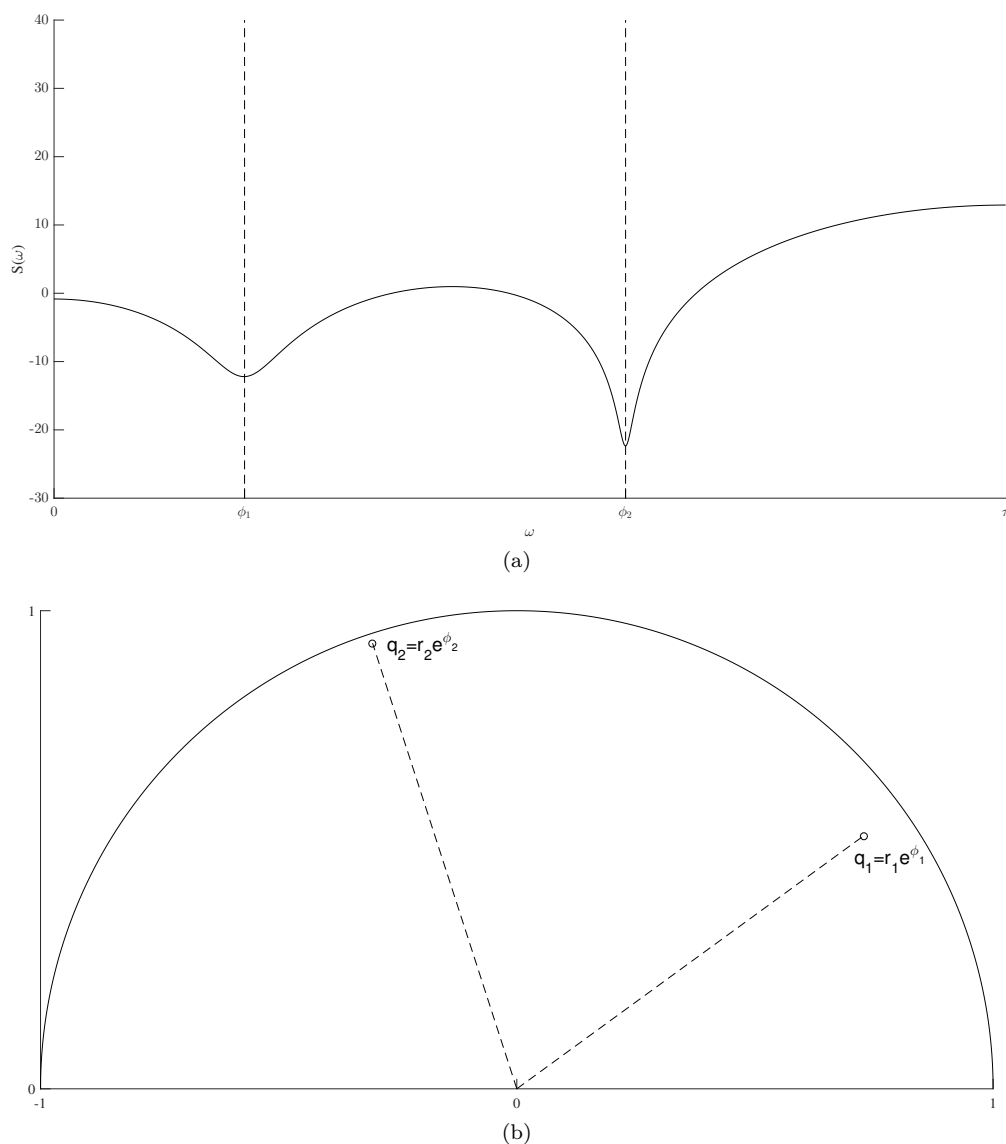
$$S(\omega) = |C(e^{-j\omega})|^2 \rho_r = \left| 1 + \sum_{i=1}^r c_{i,r} e^{-j\omega i} \right|^2 \rho_r. \quad (4.26)$$

Oszacowanie widmowej gęstości mocy procesu średniej ruchomej może zostać wyznaczone za pomocą formuły (4.26) po zastąpieniu wielkości ρ_r oraz $c_{i,r}$ ich oszacowaniami:

$$\hat{S}(\omega) = \left| 1 + \sum_{i=1}^r \hat{c}_{i,r} e^{-j\omega i} \right|^2 \hat{\rho}_r.$$

Przykładowe metody estymacji parametrów procesu średniej ruchomej zostały przedstawione m. in. w pracy [13].

Rysunek 4.5 (a) przedstawia przykładową postać widmowej gęstości mocy procesu MA(4). Charakterystyki widmowe procesów średniej ruchomej są bogate w doliny antyrezonansowe, stąd modele te są często stosowane do analizy procesów o widmie bogatym w takie składowe.



Rysunek 4.5: Przybliżony związek pomiędzy (b) położeniem zer filtru formującego (4.24) na płaszczyźnie zespolonej oraz (a) kształtem widmowej gęstości mocy procesu średniej ruchomej.

Kształt widma procesu $MA(r)$ jest bezpośrednio związany z położeniem zer filtru formującego $C(q^{-1})$:

- Każda para zer zespolonych sprzężonych $q_i = r_i e^{j\phi_i}$, $q_i^* = r_i e^{-j\phi_i}$ może generować jedną dolinę antyrezonansową.
- Pulsacja, dla której występuje dolina antyrezonansowa jest w przybliżeniu równa argumentowi danego bieguna.
- Głębokość względna doliny antyrezonansowej jest odwrotnie proporcjonalna do odległości zera od okręgu jednostkowego.

4.5.2 Proces mieszany autoregresji-średniej ruchomej (ARMA)

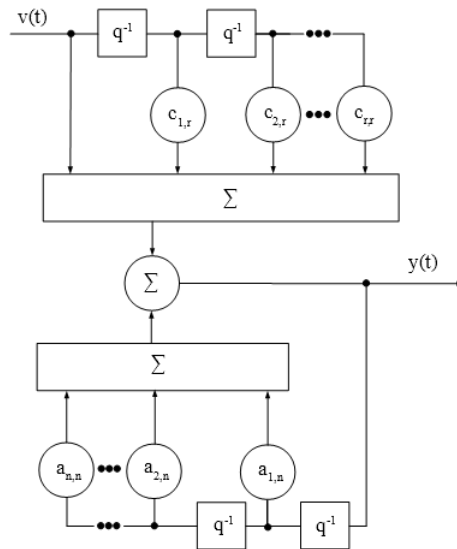
Procesem stanowiącym kombinację procesów autoregresyjnego oraz średniej ruchomej jest proces ARMA (ang. *AutoRegressive Moving Average*), nazywany modelem mieszanym autoregresji-średniej ruchomej. Jest on opisany za pomocą formuły:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n a_{i,n} y(t-i) + \sum_{i=1}^r c_{i,r} v(t-i) + v(t), \quad (4.27)$$

tj. wartość sygnału $y(t)$ w chwili czasu t jest ważoną sumą wartości sygnału $y(t)$ przesuniętych w czasie, powiększonych o ważoną sumę wartości szumu tworzącego $v(t)$ przesuniętych w czasie. Szum tworzący $v(t)$ ma zerową wartość oczekiwaną i daną wariancję $\rho_{n,r}$. Wagi $a_{1,n}, \dots, a_{n,n}$ są współczynnikami autoregresji, natomiast wagi $c_{1,r}, \dots, c_{r,r}$ są współczynnikami średniej ruchomej. Jeżeli wszystkie współczynniki autoregresji są równe zero, to proces (4.27) przyjmuje postać procesu średniej ruchomej. Dla wartości współczynników $c_{1,r}, \dots, c_{r,r}$ równych zero proces (4.27) jest procesem autoregresyjnym. Modelowi ARMA(n, r) odpowiada filtr formujący postaci:

$$H(q^{-1}) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{1 + \sum_{i=1}^r c_{i,r} q^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^n a_{i,n} q^{-i}}. \quad (4.28)$$

Ze względu na obecność biegunów w transmitancji, warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności filtru (4.28) jest położenie wszystkich jego biegunów tj. wszystkich zer wielomianu $A(q^{-1})$ wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej. Ze względu na obecność zer, warunkiem minimalnofazowości filtru (4.28) jest położenie wszystkich zer wielomianu $C(q^{-1})$ wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej. Na rysunku 4.6 przedstawiony jest schemat blokowy filtru formującego (4.28):



Rysunek 4.6: Schemat blokowy filtru (4.28) [18].

Proces mieszany autoregresji-średniej ruchomej jest wynikiem pobudzenia filtru formującego (4.28) szumem białym, stąd widmowa gęstość mocy procesu ARMA(n, r) wyrażona jest za pomocą wzoru:

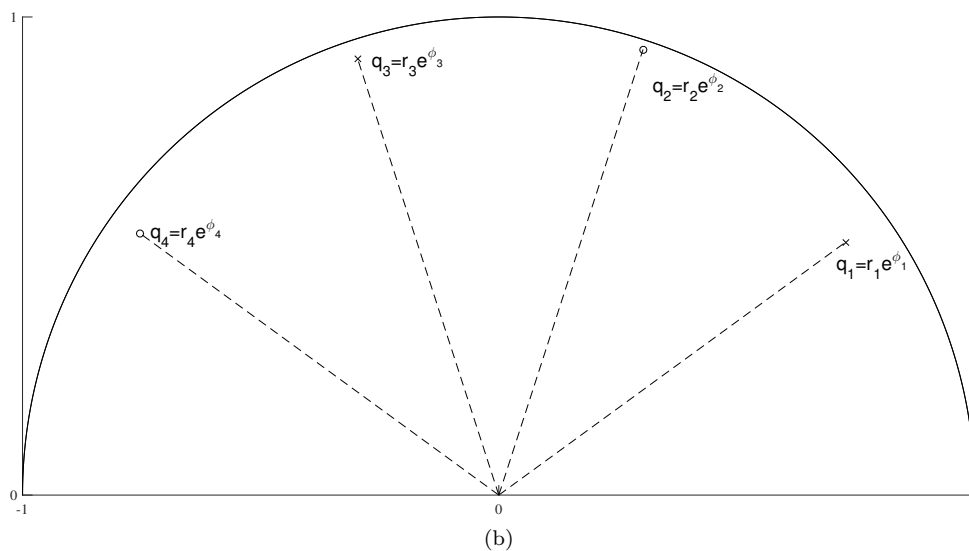
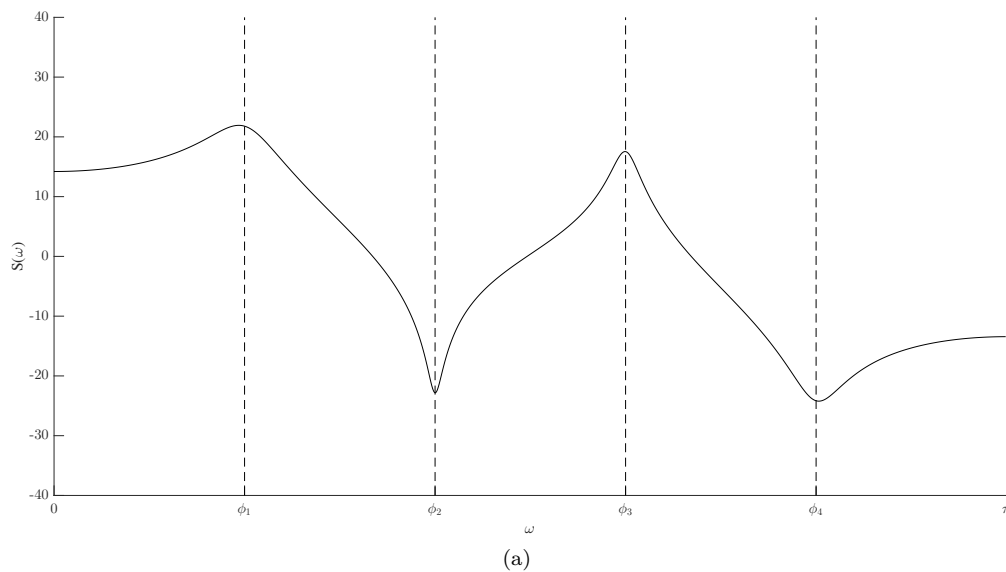
$$S(\omega) = \frac{|C(e^{-j\omega})|^2}{|A(e^{-j\omega})|^2} \rho_{n,r} = \frac{|1 + \sum_{i=1}^r c_{i,r} e^{-j\omega i}|^2}{|1 - \sum_{i=1}^n a_{i,n} e^{-j\omega i}|^2} \rho_{n,r}. \quad (4.29)$$

Oszacowanie widmowej gęstości mocy procesu mieszanego autoregresji-średniej ruchomej może zostać wyznaczone za pomocą formuły (4.29) po zastąpieniu wielkości $\rho_{n,r}$, $a_{i,n}$ oraz $c_{i,r}$ ich oszacowaniami:

$$\hat{S}(\omega) = \frac{|1 + \sum_{i=1}^r \hat{c}_{i,r} e^{-j\omega i}|^2}{|1 - \sum_{i=1}^n \hat{a}_{i,n} e^{-j\omega i}|^2} \hat{\rho}_{n,r}.$$

Przykładowe metody estymacji parametrów procesu mieszanego autoregresji-średniej ruchomej zostały przedstawione m. in. w pracy [13].

Rysunek 4.7 (a) przedstawia przykładową postać widmowej gęstości mocy procesu ARMA(4, 4). Charakterystyki widmowe procesów mieszaných autoregresji-średniej ruchomej są bogate zarówno w szczyty rezonansowe jak i doliny antyrezonansowe.



Rysunek 4.7: Przybliżony związek pomiędzy (b) położeniem zer i biegunów filtra formującego (4.28) na płaszczyźnie zespolonej oraz (a) kształtem widmowej gęstości mocy procesu mieszanego autoregresji-średniej ruchomej.

Dysponując jednym z modeli AR, MA lub ARMA o skończonej liczbie współczynników, możemy otrzymać pozostałe dwa modele. Proces ARMA lub AR o skończonym rzędzie może zostać przedstawiony za pomocą modelu średniej ruchomej o nieskończonym rzędzie. Z kolei proces ARMA lub MA o skończonym rzędzie może zostać przedstawiony za pomocą modelu autoregresyjnego o nieskończonym rzędzie. Właściwości te pozwalają na uproszczenie identyfikacji parametrów tych modeli. Przykładowo, estymacja parametrów procesu MA może zostać przeprowadzona dwuetapowo. W pierwszym etapie można wykorzystać algorytm estymacji parametrów AR, a następnie dokonać konwersji parametrów autoregresji na parametry średniej ruchomej. Oprócz tego, często kształt estymowanej widmowej gęstości mocy może zostać odwzorowany za pomocą różnych modeli. W takich sytuacjach, zgodnie z zasadą oszczędności, należy unikać estymacji nadmiernych parametrów modelu [18]. Zbyt wysoki rząd modelu może prowadzić do wystąpienia w widmie estymowanym dodatkowych składowych, które nie występują w widmie rzeczywistym, a dodatkowo, wraz ze wzrostem liczby estymowanych parametrów rośnie złożoność obliczeniowa algorytmów identyfikacji.

4.5.3 Wielowymiarowe procesy MA i ARMA

Analogicznie do przypadku jednowymiarowego (4.25), m -wymiarowy proces średniej ruchomej rzędu r jest opisany za pomocą formuły:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^r \mathbf{C}_{i,r} \mathbf{v}(t-i) + \mathbf{v}(t), \quad (4.30)$$

gdzie macierze:

$$\mathbf{C}_{i,r} = \begin{bmatrix} c_{11}^{i,r} & \cdots & c_{1m}^{i,r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1}^{i,r} & \cdots & c_{mm}^{i,r} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, r$$

są macierzami współczynników średniej ruchomej o wymiarach $m \times m$, a $\mathbf{v}(t)$ jest m -wymiarowym szumem białym o macierzy kowariancji równej $\boldsymbol{\rho}_r$:

$$\mathbf{E}[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t)] = \boldsymbol{\rho}_r.$$

Model (4.30) jest minimalnofazowy, jeśli wszystkie pierwiastki wielomianu:

$$\det[\mathbf{C}(q^{-1})] = \det\left[\mathbf{I}_m + \sum_{i=1}^r \mathbf{C}_{i,r} q^{-i}\right] \quad (4.31)$$

leżą wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej. Widmowa gęstość mocy wielowymiarowego procesu MA(r) dana jest wzorem:

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{C}(e^{-j\omega}) \boldsymbol{\rho}_r \mathbf{C}^T(e^{j\omega}). \quad (4.32)$$

Oszacowanie widmowej gęstości mocy wielowymiarowego procesu średniej ruchomej może zostać wyznaczone za pomocą formuły (4.32) po zastąpieniu macierzy $\boldsymbol{\rho}_r$ oraz $\mathbf{C}_{i,r}$ ich oszacowaniami:

$$\hat{\mathbf{S}}(\omega) = \left[\mathbf{I}_m + \sum_{i=1}^r \hat{\mathbf{C}}_{i,r} e^{-j\omega i} \right] \hat{\boldsymbol{\rho}}_r \left[\mathbf{I}_m + \sum_{i=1}^r \hat{\mathbf{C}}_{i,r} e^{j\omega i} \right]^T.$$

Podobnie jak w przypadku wielowymiarowych procesów autoregresyjnych i średniej ruchomej, m -wymiarowy sygnał ARMA(n, r) przyjmuje postać:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{i,n} \mathbf{y}(t-i) + \sum_{i=1}^r \mathbf{C}_{i,r} \mathbf{v}(t-i) + \mathbf{v}(t), \quad (4.33)$$

gdzie macierze $\mathbf{A}_{i,n}$ są macierzami współczynników autoregresji, $\mathbf{C}_{i,r}$ są macierzami współczynników średniej ruchomej o wymiarach $m \times m$, natomiast $\mathbf{v}(t)$ jest m -wymiarowym szumem białym o macierzy kowariancji $\rho_{n,r}$. Model (4.33) jest stabilny, gdy wszystkie pierwiastki wielomianu $\det[\mathbf{A}(q^{-1})]$ leżą wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej. Model (4.33) jest minimalnofazowy, gdy wszystkie pierwiastki wielomianu $\det[\mathbf{C}(q^{-1})]$ leżą wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej [18].

Widmowa gęstość mocy wielowymiarowego procesu ARMA(n, r) dana jest wzorem:

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{A}^{-1}(e^{-j\omega})\mathbf{C}(e^{-j\omega})\rho_{n,r}\mathbf{C}^T(e^{j\omega})\mathbf{A}^{-T}(e^{j\omega}). \quad (4.34)$$

Oszacowanie widmowej gęstości mocy wielowymiarowego procesu ARMA(n, r) może zostać wyznaczone za pomocą formuły (4.34) po zastąpieniu macierzy $\rho_{n,r}$, $\mathbf{A}_{i,n}$ oraz $\mathbf{C}_{i,r}$ ich oszacowaniami:

$$\hat{\mathbf{S}}(\omega) = \left[\mathbf{I}_m - \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{A}}_{i,n} e^{-j\omega i} \right]^{-1} \left[\mathbf{I}_m + \sum_{i=1}^r \hat{\mathbf{C}}_{i,r} e^{-j\omega i} \right] \hat{\rho}_{n,r} \times \\ \left[\mathbf{I}_m + \sum_{i=1}^r \hat{\mathbf{C}}_{i,r} e^{j\omega i} \right]^T \left[\mathbf{I}_m - \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{A}}_{i,n} e^{j\omega i} \right]^{-T}.$$

4.5.4 Metody parametryczne dla sygnału sinusoidalnego

Interesującą grupę parametrycznych metod estymacji widmowej gęstości mocy stanowią metody, w których sygnał jest opisany za pomocą modelu sinusoidalnego:

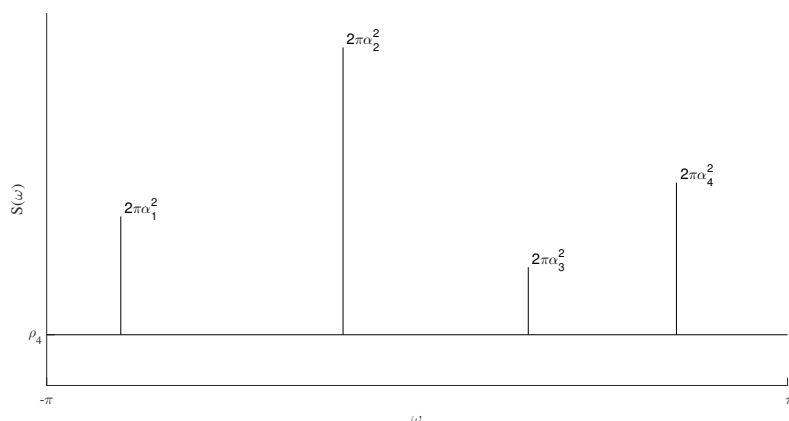
$$y(t) = x(t) + v(t), \quad x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{j(\omega_i t + \phi_i)}. \quad (4.35)$$

W modelu (4.35) $x(t)$ jest sygnałem sinusoidalnym, współczynniki α_i są amplitudami, parametry ω_i oznaczają pulsacje, ϕ_i są przesunięciami fazowymi, a $v(t)$ szumem białym o zerowej wartości oczekiwanej i wariancji ρ_n . W ogólności sygnał $x(t)$ może przyjmować wartości zespolone. Z oczywistych powodów taka sytuacja nie ma miejsca w praktycznych zastosowaniach. Założenie to ma na celu uwzględnienie w modelu zarówno składowych sinusoidalnych jak i cosinusoidalnych modelowanego sygnału. Przyjmuje się, że $\omega_i \in [-\pi, \pi]$ oraz $\alpha_i > 0$. Dodatkowo, zakłada się, że przesunięcia fazowe ϕ_i są niezależnymi zmiennymi losowymi, o rozkładzie równomiernym w przedziale $[-\pi, \pi]$.

Widmowa gęstość mocy sygnału $y(t)$, zdefiniowanego za pomocą modelu (4.35) ma postać:

$$S(\omega) = 2\pi \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \delta(\omega - \omega_i) + \rho_n, \quad (4.36)$$

gdzie $\delta(\omega - \omega_i)$ jest funkcją delty Kroneckera. Widmowa gęstość mocy (4.36) zawiera składową stałą o wartości równej wariancji szumu tworzącego oraz n impulsów o wysokościach $2\pi\alpha_i^2$, $i = 1, \dots, n$, rozmieszczonych na częstotliwościach ω_i . Rysunek 4.8 przedstawia przykładowy kształt widma (4.36).



Rysunek 4.8: Przykładowy kształt widma (4.36).

Ze względu na specyficzny kształt charakterystyki, problem estymacji widmowej gęstości mocy (4.36) sprowadza się do estymacji częstotliwości $\omega_1, \dots, \omega_n$. Dysponując informacją o wartościach częstotliwości ω_i , $i = 1, \dots, n$, sygnał $y(t)$ można zapisać w postaci:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i e^{j\omega_i t} + v(t),$$

gdzie

$$\beta_i = \alpha_i e^{j\omega_i t}.$$

Wyznaczenie wartości parametrów β_i , a co za tym idzie, parametrów α_i oraz ϕ_i , sprowadza się do rozwiązania problemu regresji liniowej [42].

Ze względu na specyficzny kształt, charakterystyka widmowa (4.36) może zostać zamodelowana za pomocą modelu autoregresyjnego, którego widmowa gęstość mocy jest bogata w szczyty rezonansowe. Z tego powodu, metody estymacji widma oparte na modelu sinusoidalnym nie zostały opisane w niniejszej pracy w szczególony sposób. Niemniej jednak, ze względu na to, że metody te mogą być wykorzystywane w praktycznych rozwiązaniach jak np. systemy nawigacji [42], ich krótki przegląd może stanowić interesującą dygresję.

Nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów

Wyznaczenie parametrów modelu sinusoidalnego (4.35) może zostać zrealizowane poprzez minimalizację funkcji:

$$f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varphi}) = \sum_{t=1}^N \left| y(t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{j(\omega_i t + \varphi_i)} \right|^2, \quad (4.37)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= [\omega_1 \dots \omega_n], \\ \boldsymbol{\alpha} &= [\alpha_1 \dots \alpha_n], \\ \boldsymbol{\varphi} &= [\varphi_1 \dots \varphi_n]. \end{aligned}$$

Ze względu na nieliniowość funkcji $f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varphi})$, jej minimalizacja jest nazywana nieliniową metodą najmniejszych kwadratów.



Nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów została opisana m. in. w pracy [42]. Metoda ta cechuje się dużą dokładnością estymacji. Trudno ją jednak zastosować w praktyce, gdyż maksymalizowana funkcja posiada wiele maksimumów lokalnych i jedno ostro zarysowane maksimum globalne. Z tego powodu algorytm szukania $\hat{\omega}$ wymaga precyzyjnej inicjalizacji. Niestety nie istnieje żadna metoda gwarantująca znalezienie $\hat{\omega}$ w pobliżu maksimum globalnego analizowanej funkcji, dlatego też stosowanie tej metody w praktycznych rozwiązaniach nie jest zadaniem trywialnym [42].

Metody oparte na rozkładzie według wartości osobliwych

Do metod estymacji parametrów modelu sinusoidalnego (4.35) należą metody oparte na rozkładzie macierzy autokorelacji według wartości osobliwych (ang. *Singular Value Decomposition*). Zaliczają się do nich metoda MUSIC (ang. *MUltiple SIgnal Classification*) oraz metoda Pisarenki.

Macierz autokorelacji sygnału $y(t)$ ma postać:

$$\mathbf{R}_m = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(m-1) \\ r(1) & r(0) & \dots & r(m-2) \\ r(2) & r(1) & \dots & r(m-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(m-1) & r(m-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix},$$

gdzie m jest dodatnią liczbą całkowitą. W ogólności parametr m może przyjmować duże wartości. Należy jednak pamiętać, aby wartość m nie była zbliżona do długości sygnału N . W przeciwnym wypadku wartości oszacowań współczynników autokorelacji nie byłyby wiarygodne. Wraz ze wzrostem wartości parametru m rośnie złożoność obliczeniowa opisanej metody. Z drugiej strony, im większa wartość m , tym większa dokładność estymacji częstotliwości. Stąd, odpowiedni dobór wartości m polega na znalezieniu kompromisu pomiędzy dokładnością estymacji, a złożonością obliczeniową. Zarówno metoda MUSIC jak i metoda Pisarenki zostały opisane m. in. w pracy [42].

4.5.5 Estymator minimalnowariancyjny

Obok parametrycznych metod opartych na modelu sinusoidalnym, interesującą metodą estymacji widmowej gęstości mocy jest estymacja minimalnowariancyjna. Estymator minimalnowariancyjny MV (ang. *Minimum Variance estimator*) w rzeczywistości nie jest prawdziwym estymatorem widmowej gęstości mocy z dwóch powodów:

- obszar pod krzywą widma MV nie jest równy mocy analizowanego sygnału,
- wynik odwrotnej transformaty Fouriera z funkcji widmowej gęstości mocy MV nie odpowiada sekwencji współczynników autokorelacji użytej do obliczenia widma.

Niemniej jednak, minimalnowariancyjna widmowa gęstość mocy opisuje względny rozkład mocy sygnału na poszczególne pasma częstotliwości. Jedną z zalet estymatora MV jest występowanie szczytów rezonansowych w estymowanym widmie, których wysokość jest liniowo proporcjonalna do wysokości tych składowych w widmie rzeczywistym [18].

Istnieje bezpośredni związek pomiędzy minimalnowariancyjnym, a autoregresyjnym estymatorem widmowej gęstości mocy. Związek ten jest opisany równaniem:

$$\frac{1}{S_{MV}(n, \omega)} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{S_{AR}(i, \omega)}, \quad (4.38)$$

gdzie $S_{MV}(n, \omega)$ jest estymatorem minimalnowariancyjnym rzędu n , natomiast $S_{AR}(i, \omega)$ jest estymatorem autoregresyjnym rzędu i . Związek (4.38) jest prawdziwy przy założeniu, że współczynniki autoregresji $a_{1,i}$ są równe 1 dla wszystkich rzędów $0 \leq i \leq n$. Rozdzielczość estymatora

minimalnowariancyjnego jest mniejsza w porównaniu do estymatora autoregresyjnego, ale większa niż rozdzielczość klasycznych metod estymacji. Z drugiej strony, w przypadku dużych segmentów danych, estymator minimalnowariancyjny cechuje mniejsza wariancja niż estymator autoregresyjny o tym samym rzędzie [18].

Rozdział 5

Lokalnie stacjonarne procesy stochastyczne i estymacja ich widmowej gęstości mocy

W ogólności nie istnieje żadne uniwersalne uogólnienie widmowej gęstości mocy dla procesów o parametrach zmiennych w czasie. Rozszerzenie koncepcji widmowej gęstości mocy na procesy niestacjonarne poprawnie opisuje rozkład chwilowej mocy tylko w niektórych przypadkach. Zarówno nieparametryczne, jak i parametryczne metody estymacji widmowej gęstości mocy zostały rozszerzone dla wybranych klas niestacjonarnych procesów stochastycznych. Do pierwszej grupy metod można zaliczyć analizę widmową Wigner-Ville'a [22]. Autoregresyjna estymacja zmiennej w czasie widmowej gęstości mocy, oparta na teorii lokalnie stacjonarnych procesów stochastycznych [8]-[11] należy do drugiej grupy.

5.1 Chwilowa widmowa gęstość mocy

W pracy [19] postulowano pożądane własności zmiennej w czasie widmowej gęstości mocy $S(t, \omega)$ procesów niestacjonarnych. Do najważniejszych z nich można zaliczyć:

- $S(t, \omega)$ jest rzeczywistą funkcją czasu t i częstotliwości ω , całkowicie określoną przez chwilową funkcję autokorelacji $r(t, \tau)$.
- Wielkości $S(t, \omega)$ oraz $r(t, \tau)$ łączy relacja jeden do jednego.
- Kształt $S(t, \omega)$ nie zmienia się w czasie t , jeżeli proces $X(t)$ jest stacjonarny.
- Jeżeli proces $X(t)$ jest złożony z segmentów stacjonarnych, np.

$$X(t) = \begin{cases} X_1(t) & \text{jeżeli } t < 0 \\ X_2(t) & \text{jeżeli } t \geq 0 \end{cases},$$

to widmowa gęstość mocy $S(t, \omega)$ jest również złożona z fragmentów, w których jej kształt nie zmienia się.

- Zasadniczo $S(t, \omega)$ może zostać oszacowana na podstawie znajomości pojedynczej (nieskończonej) realizacji procesu $X(t)$.
- $S(t, \omega)$ przyjmuje wartości nieujemne.



- Chwilowa moc procesu $X(t)$ w danej chwili czasu t , opisana za pomocą funkcji $S(t, \omega)$, przyjmuje skończoną wartość, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t, \omega) d\omega < \infty.$$

5.2 Widmo Wignera-Ville'a

Chwilowa widmowa gęstość mocy niestacjonarnego procesu losowego może być wyrażona w postaci:

$$S(t, \omega) = E [W(t, \omega)], \quad (5.1)$$

gdzie $W(t, \omega)$ jest transformatą Wignera-Ville'a [5]:

$$W(t, \omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) x(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau},$$

a $x(t)$ jest realizacją niestacjonarnego procesu stochastycznego $X(t)$. W literaturze wielkość (5.1) jest nazywana widmem Wignera-Ville'a, a także chwilową lub ewolucyjną widmową gęstością mocy.

W praktyce stosuje się często ważoną wersję transformaty Wignera-Ville'a (ang. *windowed Wigner-Ville distribution*) [5]:

$$\begin{aligned} S(t, \omega) &= E \left[\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} w(\tau) x(t + \frac{\tau}{2}) x(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} \right] \\ &= E [W_w(t, \omega)], \end{aligned} \quad (5.2)$$

gdzie $w(\tau)$ jest funkcją okna.

Przy założeniu, że transformata $W_w(t, \omega)$ jest lokalnie ergodyczna w przedziale $[t - \frac{\Delta}{2}, t + \frac{\Delta}{2}]$, gdzie $\Delta > 0$ jest wielkością niezależną od t , oszacowanie $\hat{S}(t, \omega)$ może zostać wyznaczone za pomocą formuły:

$$\hat{S}(t, \omega) = \sum_{i=-\Delta/2}^{\Delta/2} \gamma(i) \widehat{W}_w(t + i, \omega),$$

gdzie $\gamma(i) > 0$ oznaczają wagi spełniające warunek:

$$\sum_{i=-\Delta/2}^{\Delta/2} \gamma(i) = 1,$$

a wielkość $\widehat{W}_w(t, \omega)$ jest lokalną oceną ważonej transformaty Wignera-Ville'a [5]:

$$\widehat{W}_w(t, \omega) = \sum_{\tau=-\Delta_w/2}^{\Delta_w/2} w(\tau) x(t + \frac{\tau}{2}) x(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau},$$

gdzie $\Delta_w > 0$.

Chwilowa widmowa gęstość mocy (5.1) spełnia zależność [36]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(t, \omega) d\omega = E [X^2(t)]. \quad (5.3)$$



Formuła (5.3) pokazuje, że $S(t, \omega)$ reprezentuje rozkład chwilowej wartości średniokwadratowej procesu $X(t)$ w chwili czasu t . Niemniej jednak, w przeciwieństwie do (2.17) chwilowa widmowa gęstość mocy (5.1) może przyjmować wartości ujemne. Poza tym, $S(t, \omega)$ jest wielkością, która w praktyce nie może zostać zmierzona w sposób bezpośredni. Z tych powodów, nie można oczekiwać, że dla każdego przypadku wielkość (5.1) dostarcza prawidłowej informacji o rozkładzie chwilowej mocy procesu losowego na składowe częstotliwościowe [36].

5.3 Lokalna stacjonarność

Niech $y(t)$ będzie niestacjonarnym procesem autoregresyjnym rzędu n , opisanym za pomocą modelu:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n a_{i,n}(t)y(t-i) + v_n(t) = \varphi_n^T(t)\theta_n(t) + v_n(t), \quad (5.4)$$

$$\text{var}[v_n(t)] = \rho_n(t),$$

gdzie

$$\theta_n(t) = \begin{bmatrix} a_{1,n}(t) \\ \vdots \\ a_{n,n}(t) \end{bmatrix}.$$

Ponadto, niech $q_1(t), \dots, q_n(t)$ będą zerami wielomianu charakterystycznego:

$$A(q^{-1}) = 1 - \sum_{i=1}^n a_{i,n}(t)q^{-i} = 0. \quad (5.5)$$

Założmy, że dyskretne trajektorie $\{\theta_n(t), \rho_n(t), t \in \mathbb{Z}\}$ mogą zostać potraktowane jako wynik próbkowania ciągłych trajektorii $\{\theta_c(s), \rho_c(s), s \in \mathbb{R}\}$:

$$\theta_n(t) = \theta_c(s)|_{s=t\Delta}, \quad \rho_n(t) = \rho_c(s)|_{s=t\Delta}, \quad (5.6)$$

gdzie Δ oznacza okres próbkowania. Dodatkowo, założmy, że wszystkie zera wielomianu charakterystycznego (5.5) leżą wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej:

$$\exists \epsilon \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \quad |q_i(t)| \leq 1 - \epsilon, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.7)$$

oraz funkcja $\rho_c(s)$ jest ograniczona, a także szybkość zmian wektora parametrów $\theta_c(s)$ jest ograniczona, tj. funkcja $\theta_c(s)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą c_θ :

$$\sup_{s_1 \neq s_2} \frac{\|\theta_c(s_1) - \theta_c(s_2)\|}{|s_1 - s_2|} \leq c_\theta < \infty. \quad (5.8)$$

Rodzina procesów losowych otrzymanych dla różnych wartości parametru Δ , a dodatkowo spełniających warunki (5.7) oraz (5.8) należy do klasy lokalnie stacjonarnych procesów losowych, opisanych w pracach [8]-[11].

Podobnie jak w przypadku stacjonarnych procesów autoregresyjnych, procesy lokalnie stacjonarne posiadają reprezentację widmową. W szczególności, przy spełnionych założeniach (5.7) oraz (5.8) chwilowa widmowa gęstość mocy lokalnie stacjonarnego procesu stochastycznego, opisanego za pomocą modelu (5.4) jest wyrażona za pomocą formuły:

$$S(t, \omega) = \frac{\rho_n(t)}{|1 - \sum_{i=1}^n a_{i,n}(t)e^{-j\omega i}|^2} \quad (5.9)$$



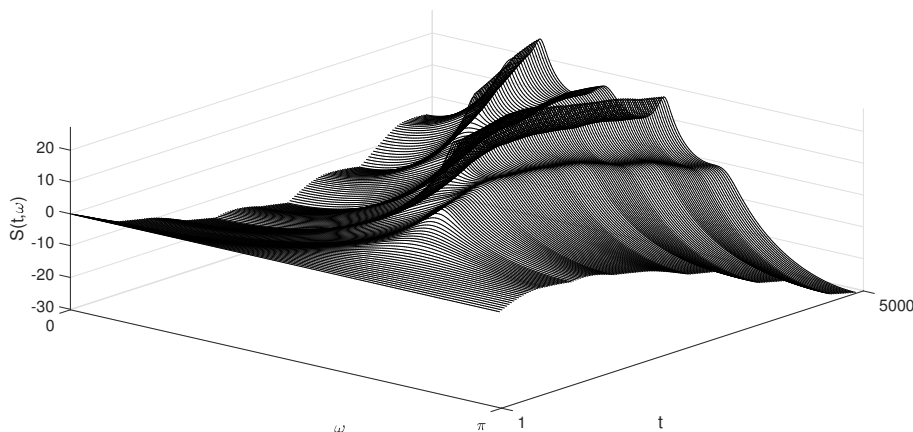
i jest jednoznacznie zdefiniowana w przeskalowanej dziedzinie czasu ($\Delta \rightarrow 0$). Jednoznaczność ta nie jest gwarantowana w nieprzeskalowanej dziedzinie czasu ($\Delta = \text{const.}$).

Oszacowanie wielkości $\hat{S}(t, \omega)$ może zostać otrzymane poprzez zastąpienie wielkości $\rho_n(t)$ oraz $a_{i,n}(t)$ w formule (5.9) ich oszacowaniami:

$$\hat{S}(t, \omega) = \frac{\hat{\rho}_n(t)}{|1 - \sum_{i=1}^n \hat{a}_{i,n}(t) e^{-j\omega i}|^2}.$$

Nie zagłębiając się w szczegółowe elementy teorii lokalnie stacjonarnych procesów stochastycznych można powiedzieć, że w przedstawionym ujęciu segment czasowy o określonej długości jest próbkowany na coraz bardziej zagęszczonej siatce punktów ($\Delta \rightarrow 0$) co sprawia, że liczba próbek rośnie. Pozwala to na zdefiniowanie i zastosowanie pewnego rodzaju asymptotycznych własności (ang. *infill asymptotics*). Chwilowa widmowa gęstość mocy (5.9) może być interpretowana jako widmowa gęstość mocy procesu stacjonarnego $\{y_0(\tau), \tau \in \mathbb{Z}\}$ „stycznego” do procesu $\{y(\tau), \tau \in \mathbb{Z}\}$ w punkcie t .

Na potrzeby niniejszej pracy proces spełniający warunki (5.7) oraz (5.8) będzie nazywany procesem lokalnie stacjonarnym. Należy jednak pamiętać, że taka terminologia jest pewnego rodzaju skrótem myślowym, gdyż lokalna stacjonarność jest własnością asymptotyczną, prawdziwą tylko wtedy, gdy $\Delta \rightarrow 0$, tj. formalnie żaden proces stochastyczny odpowiadający skończonej wartości parametru Δ nie może być nazywany procesem lokalnie stacjonarnym.



Rysunek 5.1: Przykładowy kształt zmiennej w czasie charakterystyki widmowej procesu stochastycznego.

Rozdział 6

Metody identyfikacji procesów autoregresyjnych

Wprowadzenie

Ze względu na korzystne własności, parametryczna estymacja widmowej gęstości mocy za pomocą modeli autoregresyjnych zyskała dużą popularność w praktycznych rozwiązaniach. Charakterystyki widmowe zawierające wąskie szczyty rezonansowe są często spotykane w praktycznych zastosowaniach.

Proces estymacji parametrów sygnału o założonym modelu jest nazywany identyfikacją parametryczną. Identyfikacja procesu autoregresyjnego opisanego równaniem (3.1) polega na oszacowaniu wartości współczynników autoregresji na podstawie znajomości wartości fragmentu pojedynczej realizacji $y(t)$ procesu autoregresyjnego. Formuła opisująca model autoregresyjny rzędu n (3.1) może zostać zapisana w postaci:

$$y(t) = \varphi_n^T(t)\theta_n + v_n(t),$$

gdzie $\varphi_n(t)$ jest wektorem regresji:

$$\varphi_n(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ \vdots \\ y(t-n) \end{bmatrix},$$

a θ_n jest wektorem parametrów:

$$\theta_n = \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

6.1 Metoda Yule-Walkera

Równania Yule-Walkera (3.12) przedstawiają związek pomiędzy współczynnikami autokorelacji, a współczynnikami autoregresji i wariancją szumu tworzącego. Mogą one zostać zapisane w postaci:

$$\mathbf{R}_n \theta_n = \mathbf{r}_n,$$



gdzie \mathbf{R}_n jest macierzą opisaną zależnością (3.15) oraz

$$\mathbf{r}_n = \begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \\ r(3) \\ \vdots \\ r(n) \end{bmatrix}.$$

Metoda Yule-Walkera polega na rozwiązaniu równań Yule-Walkera, po zastąpieniu prawdziwych wartości ich obciążonymi oszacowaniami (4.7):

$$\widehat{\mathbf{R}}_n \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = \widehat{\mathbf{r}}_n.$$

W ogólności oszacowania współczynników autokorelacji $\widehat{r}(0), \dots, \widehat{r}(n)$ mogą zostać uzyskane za pomocą estymatora obciążonego (4.7) lub nieobciążonego (4.13). Użycie estymatora obciążonego (4.7) gwarantuje uzyskanie stabilnego modelu autoregresyjnego. Takiej gwarancji nie daje zastosowanie estymatora nieobciążonego (4.13). Stabilność modelu jest istotnym wymaganiem w rozwiązaniach wykorzystujących modele autoregresyjne. Obok estymacji widmowej gęstości mocy, jednym z takich zastosowań jest kodowanie predykcyjne LPC (ang. *Linear Predictive Coding*). Użycie niestabilnego modelu powoduje, że odpowiedź modelu narasta do nieskończoności w sposób niekontrolowany. Bezpośrednie rozwiązanie równań Yule-Walkera przyjmuje postać:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = \widehat{\mathbf{R}}_n^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_n.$$

Dysponując oszacowaniami współczynników autokorelacji $\widehat{r}(0), \dots, \widehat{r}(n)$ oraz oszacowaniami parametrów autoregresji $\widehat{a}_{1,n}, \dots, \widehat{a}_{n,n}$ oszacowanie wariancji szumu tworzącego $\widehat{\rho}_n$ możemy wyznaczyć korzystając z formuły:

$$\widehat{\rho}_n = \widehat{r}(0) - \sum_{i=1}^n \widehat{a}_{i,n} \widehat{r}(i).$$

Gdy charakterystyki analizowanego sygnału zmieniają się wolno w czasie, wówczas lokalne oszacowania parametrów modelu można obliczyć za pomocą formuły:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(t) = \widehat{\mathbf{R}}_n^{-1}(t) \widehat{\mathbf{r}}_n(t),$$

gdzie elementami macierzy $\widehat{\mathbf{R}}_n^{-1}(t)$ oraz wektora $\widehat{\mathbf{r}}_n(t)$ są lokalne oszacowania współczynników autokorelacji $r(t, \tau)$, $\tau = 0, 1, \dots, n$.

Algorytm Levinsona-Durbina

Złożoność obliczeniowa bezpośredniego rozwiązania równań Yule-Walkera dla modelu rzędu n wynosi $\mathcal{O}(n^3)$ operacji zmiennoprzecinkowych (ang. *flops*). W praktycznych zastosowaniach zwykle nie dysponuje się informacją o rzeczywistym rzędzie modelowanego procesu. Często procedura estymacji współczynników autoregresji zostaje przeprowadzona dla modeli różnych rzędów $n = 1, \dots, n_{\max}$. W takich przypadkach, złożoność obliczeniowa bezpośredniego rozwiązania równań Yule-Walkera wynosi $\mathcal{O}(n_{\max}^4)$ operacji. Gdy maksymalny rząd estymowanego modelu jest wysoki (np. $n_{\max} = 100$), istotną rolę może odgrywać redukcja złożoności obliczeniowej algorytmu estymacji. Jednym z algorytmów rozwiązania równań Yule-Walkera, wymagającym mniejszej liczby operacji dominujących jest algorytm Levinsona-Durbina.

Dzięki wykorzystaniu faktu, iż macierz współczynników autokorelacji \mathbf{R}_n występująca w równaniach Yule-Walkera jest symetryczną macierzą Toeplitza, złożoność obliczeniowa algorytmu Levinsona-Durbina wynosi $\mathcal{O}(n_{\max}^2)$. Jest to algorytm rekursywny względem rzędu, tzn. dla określonego maksymalnego rzędu estymacji n_{\max} pozwala on na obliczenie współczynników modeli rzędów $n = 1, 2, \dots, n_{\max}$ [42]. Równania algorytmu Levinsona-Durbina zostały zawarte w rozdziale 3 (patrz (3.13)).



Związek równań Yule-Walkera ze średniokwadratowym błędem jednokrokowej predykcji

Istnieje związek pomiędzy równaniami Yule-Walkera, a średniokwadratowym błędem jednokrokowej predykcji. Niech $y(t)$ będzie procesem autoregresyjnym rzędu n . Wtedy wartość jednokrokowej predykcji $\hat{y}(t|t-1)$ jest oszacowaniem wartości sygnału $y(t)$ na podstawie znajomości jego n poprzednich wartości:

$$\hat{y}(t|t-1) = \varphi_n^T(t)\theta_n(t-1).$$

Błąd jednokrokowej predykcji jest zdefiniowany jako:

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1).$$

Błąd średniokwadratowy jednokrokowej predykcji wyraża się wzorem:

$$E[\varepsilon^2(t)] = E\left[\left[y(t) - \varphi_n^T(t)\theta_n(t-1)\right]^2\right] \quad (6.1)$$

i jest równy co do wartości wariancji szumu tworzącego:

$$E[\varepsilon^2(t)] = \rho_n(t).$$

W pracy [42] pokazano, że wektor parametrów $\theta_n(t)$, który minimalizuje wielkość (6.1) przyjmuje postać:

$$\theta_n(t) = \mathbf{R}_n^{-1}(t)\mathbf{r}_n(t), \quad (6.2)$$

a średniokwadratowy błąd jednokrokowej predykcji przyjmuje wartość:

$$\rho_n(t) = r(t,0) - \sum_{i=1}^n a_{i,n}(t)r(t,i). \quad (6.3)$$

Równania (6.2) oraz (6.3) są de facto rozwiązaniem równań Yule-Walkera (3.12), co pokazuje, że może być ono interpretowane jako rozwiązanie problemu minimalizacji błędu jednokrokowej predykcji [42].

6.2 Estymatory najmniejszych kwadratów

Obok metody Yule-Walkera, jedną z metod estymacji parametrów modelu autoregresyjnego, rozwiązującą problem minimalizacji błędów jednokrokowej predykcji jest metoda najmniejszych kwadratów (ang. *Least Squares*). Oszacowanie parametrów autoregresji na podstawie sygnału $y(t)$ o długości N za pomocą metody najmniejszych kwadratów polega na znalezieniu takiego wektora parametrów $\theta_n(t)$, który minimalizuje funkcję kosztów $J(\theta_n)$:

$$\hat{\theta}_n(t) = \arg \min_{\theta_n} J(\theta_n), \quad (6.4)$$

gdzie

$$J(\theta_n) = \sum_{i=0}^{t-1} \left[y(t-i) - \varphi_n^T(t-i)\theta_n \right]^2, \quad (6.5)$$

przy założeniu, że próbki sygnału $y(t)$ dla chwil czasu $t < 1$ oraz $t > N$ przyjmują zerowe wartości. Rozwiązanie problemu (6.4) można znaleźć poprzez przyrównanie gradientu funkcji kosztów $J(\theta_n)$

do wektora zerowego o długości n :

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta_n} J(\theta_n) \Big|_{\theta_n = \hat{\theta}_n(t)} &= \frac{\partial J(\theta_n)}{\partial \theta_n} \Big|_{\theta_n = \hat{\theta}_n(t)} \\ &= 2 \left[\sum_{i=0}^{t-1} \varphi_n(t-i) \varphi_n^T(t-i) \right] \hat{\theta}_n(t) - 2 \left[\sum_{i=0}^{t-1} y(t-i) \varphi_n(t-i) \right] = \mathbf{0}_n. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Macierz $\sum_{i=0}^{t-1} \varphi_n(t-i) \varphi_n^T(t-i)$ nazywana jest macierzą regresji. Zakładając, że macierz regresji nie jest macierzą osobliwą, tj.

$$\det \left[\sum_{i=0}^{t-1} \varphi_n(t-i) \varphi_n^T(t-i) \right] \neq 0, \quad (6.7)$$

rozwiązanie równania (6.6) przyjmuje postać:

$$\hat{\theta}_n(t) = \left[\sum_{i=0}^{t-1} \varphi_n(t-i) \varphi_n^T(t-i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^{t-1} y(t-i) \varphi_n(t-i) \right]. \quad (6.8)$$

Warunek (6.7) jest inaczej nazywany warunkiem identyfikowalności sygnału $AR(n)$. Oszacowanie wariancji szumu tworzącego może zostać wyznaczone poprzez uśrednienie kwadratów błędów resztowych:

$$\hat{\rho}_n(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \left[y(t-i) - \varphi_n^T(t-i) \hat{\theta}_n(t) \right]^2. \quad (6.9)$$

Dla dużych wartości długości segmentu danych, estymatory Yule-Walkera i najmniejszych kwadratów dają porównywalne wyniki. Dla segmentów o niewielkiej długości, estymatory te mogą dawać znacząco różniące się oszacowania parametrów autoregresji. Co więcej, w przeciwieństwie do metody Yule-Walkera, nie ma gwarancji, że model autoregresyjny otrzymany za pomocą metody najmniejszych kwadratów będzie stabilny [42].

Związek z metodą Yule-Walkera

Istnieje związek pomiędzy metodą najmniejszych kwadratów, a metodą Yule-Walkera. Niech $y(t)$ będzie sygnałem stacjonarnym o długości N . Rozważmy analizę sygnału $y_z(t)$ powstałego poprzez dodanie n zer na początku oraz na końcu sygnału $y(t)$, tj.

$$\begin{aligned} y_z(0) &= y_z(-1) = \dots = y_z(1-n) = 0, \\ y_z(N+1) &= y_z(N+2) = \dots = y_z(N+n) = 0. \end{aligned}$$

Stosując algorytm najmniejszych kwadratów, macierz regresji przyjmuje postać:

$$\sum_{i=1}^{N+n} \varphi_n(i) \varphi_n^T(i). \quad (6.10)$$

Wartość pojedynczej komórki w j -tym wierszu i k -tej kolumnie macierzy (6.10) przyjmuje wartość:

$$\left[\sum_{i=1}^{N+n} \varphi_n(i) \varphi_n^T(i) \right]_{jk} = \sum_{i=1}^{N+n} y(t-j) y(t-k) = \sum_{s=|j-k|+1}^N y(s) y(s-|j-k|),$$

co pokazuje, że algorytm Yule-Walkera zastosowany do identyfikacji sygnału stacjonarnego daje takie same rezultaty jak algorytm najmniejszych kwadratów zastosowany do identyfikacji tego samego sygnału, po dodaniu n zer na jego początku oraz końcu.

Algorytm RLS

Ze względu na konieczność odwracania macierzy regresji, stosowanie estymatora najmniejszych kwadratów dla sygnałów o długim czasie trwania wiąże się z dużą złożonością obliczeniową. Znacznie mniejszą złożoność obliczeniową posiada rekurencyjna wersja algorytmu najmniejszych kwadratów - algorytm RLS (ang. *Recursive Least Squares*).

Rekurencyjny algorytm najmniejszych kwadratów jest opisany za pomocą poniższych formuł:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= y(t) - \varphi_n^T(t)\hat{\theta}_n(t-1), \\ \mathbf{k}(t) &= \frac{\mathbf{P}(t-1)\varphi_n(t)}{1 + \varphi_n^T(t)\mathbf{P}(t-1)\varphi_n(t)}, \\ \mathbf{P}(t) &= \mathbf{P}(t-1) - \frac{\mathbf{P}(t-1)\varphi_n(t)\varphi_n^T(t)\mathbf{P}(t-1)}{1 + \varphi_n^T(t)\mathbf{P}(t-1)\varphi_n(t)}, \\ \hat{\theta}_n(t) &= \hat{\theta}_n(t-1) + \mathbf{k}(t)\varepsilon(t),\end{aligned}\tag{6.11}$$

z warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_n(0) &= \mathbf{0}_n, \\ \mathbf{P}(0) &= \delta\mathbf{I}_n,\end{aligned}$$

gdzie δ jest stałą o dużej wartości (np. $\delta = 10^4$). Macierz $\mathbf{P}(t)$ jest odwrotnością macierzy regresji:

$$\mathbf{P}(t) = \left[\sum_{i=1}^t \varphi_n(i)\varphi_n^T(i) \right]^{-1}.$$

Oszacowanie wariancji szumu tworzącego może zostać wyznaczone stosując rekursję:

$$\hat{\rho}_n(t) = \frac{s(t)}{t},\tag{6.12}$$

gdzie

$$s(t) = s(t-1) + \frac{\varepsilon^2(t)}{1 + \varphi_n^T(t)\mathbf{P}(t-1)\varphi_n(t)},\tag{6.13}$$

przy warunku początkowym $s(0) = 0$. Wyznaczenie zestawu równań (6.11)-(6.13) znajduje się w dodatku A.

6.2.1 Ważone estymatory najmniejszych kwadratów

Zmodyfikowaną wersją metody najmniejszych kwadratów są ważne estymatory najmniejszych kwadratów WLS (ang. *Weighted Least Squares*) [28]. Pozwalają one zredukować wpływ przeszłych wartości sygnału na oszacowania parametrów modelu w danej chwili czasu.

Jeżeli $y(t)$ jest niestacjonarnym sygnałem $\text{AR}(n)$, to estymator WLS minimalizuje funkcję kosztów $J(\theta)$:

$$\hat{\theta}_n = \arg \min_{\theta_n} J(\theta_n),\tag{6.14}$$

gdzie

$$J(\theta_n) = \sum_{i=0}^{t-1} w(i) \left[y(t-i) - \varphi_n^T(t-i)\theta_n \right]^2.$$

Parametry $w(0), \dots, w(t-1)$ są współczynnikami ważącymi (współczynnikami okna) spełniającymi warunki:

$$\begin{aligned} w(0) = 1 \geq w(1) \geq \dots \geq 0, \\ \sum_{i=0}^{\infty} w(i) < \infty. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Analogicznie do estymatora najmniejszych kwadratów, rozwiązanie problemu (6.14) można znaleźć poprzez przyrównanie gradientu funkcji (6.14) do wektora zerowego. Wektor parametrów minimalizujący funkcję kosztów (6.14) estymatora WLS przyjmuje postać:

$$\hat{\theta}_n(t) = \left[\sum_{i=0}^{t-1} w(i) \varphi_n(t-i) \varphi_n^T(t-i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^{t-1} w(i) y(t-i) \varphi_n(t-i) \right]. \quad (6.16)$$

Warunek identyfikowalności sygnału $AR(n)$ przyjmuje postać:

$$\det \left[\sum_{i=0}^{t-1} w(i) \varphi_n(t-i) \varphi_n^T(t-i) \right] \neq 0.$$

Wartości współczynników ważących $w(0), \dots, w(t-1)$ określają tzw. pamięć estymatora, czyli stopień wpływu przeszłych próbek sygnału na oszacowania parametrów sygnału w danej chwili czasu. Pamięć estymatora ma bezpośredni wpływ na jakość śledzenia zmian wartości parametrów [28]. Estymatory o krótkiej pamięci cechują się małym obciążeniem (szybka reakcja na zmiany) oraz dużą wariancją (mała dokładność estymacji). Z kolei estymatory o długiej pamięci cechują się dużą dokładnością estymacji kosztem wolnej reakcji na zmiany wartości parametrów.

W praktyce stosuje się zwykle dwa rodzaje funkcji ważących: okno prostokątne oraz okno wykładnicze. W przypadku okna prostokątnego o długości N :

$$w(i) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } 0 \leq i \leq N \\ 0 & \text{jeżeli } i < 0 \text{ lub } i > N \end{cases},$$

do procesu identyfikacji parametrów w danej chwili czasu branych pod uwagę jest N ostatnich próbek sygnału $y(t)$. Rozwiązanie to nazywane jest estymatorem najmniejszych kwadratów z przesuwym oknem SWLS (ang. *Sliding Window Least Squares*).

Zastosowanie okna wykładniczego:

$$w(i) = \lambda^i, \quad 0 < \lambda < 1,$$

powoduje stopniowe zmniejszanie wpływu starszych próbek sygnału na estymację parametrów w danej chwili czasu. Opisany algorytm nazywa się estymatorem najmniejszych kwadratów z zapominaniem wykładniczym EWLS (ang. *Exponentially Weighted Least Squares*), a parametr λ nazywany jest stałą zapominania.

Estymator SWLS

Estymator SWLS o długości okna N przyjmuje postać:

$$\hat{\theta}_n(t, N) = \left[\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_n(t-i) \varphi_n^T(t-i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} y(t-i) \varphi_n(t-i) \right]. \quad (6.17)$$



Analogicznie do formuły (6.9), oszacowanie wariancji szumu tworzącego może zostać wyznaczone za pomocą wzoru:

$$\hat{\rho}_n(t, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[y(t-i) - \varphi_n^T(t-i) \hat{\theta}_n(t, N) \right]^2. \quad (6.18)$$

Estymator SWLS może zostać przedstawiony w postaci rekurencyjnej. Stosując notację:

$$\mathbf{Q}(t, N) = \left[\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_n(t-i) \varphi_n^T(t-i) \right]^{-1},$$

$$\mathbf{q}(t, N) = \left[\sum_{i=0}^{N-1} y(t-i) \varphi_n(t-i) \right],$$

estymator (6.17) może zostać zapisany jako:

$$\hat{\theta}_n(t, N) = \mathbf{Q}^{-1}(t, N) \mathbf{q}(t, N).$$

Procedura rekurencyjna estymatora SWLS składa się z dwóch kroków. Najpierw, zestaw danych użyty do estymacji wektora parametrów jest rozszerzany o kolejną próbkę sygnału:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t, N+1) &= \mathbf{Q}(t-1, N) + \varphi_n(t) \varphi_n^T(t), \\ \mathbf{q}(t, N+1) &= \mathbf{q}(t-1, N) + y(t) \varphi_n(t), \\ \hat{\theta}_n(t, N+1) &= \mathbf{Q}^{-1}(t, N+1) \mathbf{q}(t, N+1). \end{aligned} \quad (6.19)$$

W drugim kroku następuje usunięcie „najstarszej” próbki sygnału $y(t)$, wchodzącej w skład przedziału analizy:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t, N) &= \mathbf{Q}(t, N+1) - \varphi_n(t-N) \varphi_n^T(t-N), \\ \mathbf{q}(t, N) &= \mathbf{q}(t, N+1) - y(t-N) \varphi_n(t-N), \\ \hat{\theta}_n(t, N) &= \mathbf{Q}^{-1}(t, N) \mathbf{q}(t, N). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Ze względu na konieczność odwracania macierzy regresji algorytm SWLS cechuje duża złożoność obliczeniowa. Obok równań (6.19) i (6.20) estymator SWLS może zostać przedstawiony w postaci rekurencyjnej, w której nie jest wymagane odwracanie macierzy regresji. Wyprowadzenie algorytmu SWLS w takiej wersji podano między innymi w pracy [28], a jego pierwszy krok opisują równania:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= y(t) - \varphi_n^T(t) \hat{\theta}_n(t-1, N), \\ \mathbf{k}(t, N+1) &= \frac{\mathbf{P}(t-1, N) \varphi_n(t)}{1 + \varphi_n^T(t) \mathbf{P}(t-1, N) \varphi_n(t)}, \\ \mathbf{P}(t, N+1) &= \mathbf{P}(t-1, N) - \frac{\mathbf{P}(t-1, N) \varphi_n(t) \varphi_n^T(t) \mathbf{P}(t-1, N)}{1 + \varphi_n^T(t) \mathbf{P}(t-1, N) \varphi_n(t)}, \\ \hat{\theta}_n(t, N+1) &= \hat{\theta}_n(t-1, N) + \mathbf{k}(t, N+1) \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (6.21)$$

gdzie

$$\mathbf{P}(t, N) = \mathbf{Q}^{-1}(t, N).$$

Drugi krok algorytmu opisany jest za pomocą równań:

$$\begin{aligned} \nu(t) &= y(t-N) - \varphi_n^T(t-N) \hat{\theta}_n(t, N+1), \\ \mathbf{k}(t, N) &= \frac{\mathbf{P}(t, N+1) \varphi_n(t-N)}{1 - \varphi_n^T(t-N) \mathbf{P}(t, N+1) \varphi_n(t-N)}, \\ \mathbf{P}(t, N) &= \mathbf{P}(t, N+1) + \frac{\mathbf{P}(t, N+1) \varphi_n(t-N) \varphi_n^T(t-N) \mathbf{P}(t, N+1)}{1 - \varphi_n^T(t-N) \mathbf{P}(t, N+1) \varphi_n(t-N)}, \\ \hat{\theta}_n(t, N) &= \hat{\theta}_n(t, N+1) - \mathbf{k}(t, N) \nu(t). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Wyprowadzenie równań (6.21) i (6.22) opiera się na wykorzystaniu wzoru Shermana-Morrisona (A.6).

Oszacowanie wariancji szumu tworzącego (6.18) również może zostać wyznaczone za pomocą dwuetapowego algorytmu rekurencyjnego [28]. Stosując oznaczenie:

$$\hat{\rho}_n(t, N) = \frac{s(t, N)}{N},$$

gdzie

$$s(t, N) = \sum_{i=0}^{N-1} \left[y(t-i) - \varphi_n^T(t-i) \hat{\theta}_n(t, N) \right]^2,$$

pierwszy krok procedury przyjmuje postać:

$$s(t, N+1) = s(t-1, N) + \frac{\varepsilon^2(t)}{1 + \varphi_n^T(t) \mathbf{P}(t-1, N) \varphi_n(t)}.$$

W drugim kroku następuje usunięcie „najstarszej” próbki sygnału $y(t)$:

$$s(t, N) = s(t, N+1) - \frac{\nu^2(t)}{1 - \varphi_n^T(t-N) \mathbf{P}(t, N+1) \varphi_n(t-N)}.$$

Estymator EWLS

Estymator EWLS o stałej zapomnienia λ przyjmuje postać:

$$\hat{\theta}_n(t) = \left[\sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i \varphi_n(t-i) \varphi_n^T(t-i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i y(t-i) \varphi_n(t-i) \right]. \quad (6.23)$$

Wariancja szumu tworzącego może być wyznaczona za pomocą formuły:

$$\hat{\rho}_n(t) = \frac{1}{L(t)} \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i \left[y(t-i) - \varphi_n^T(t-i) \hat{\theta}_n(t) \right]^2, \quad (6.24)$$

gdzie wielkość $L(t)$ nazywana jest efektywną szerokością okna lub efektywną liczbą obserwacji:

$$L(t) = \frac{1}{1 - \lambda}. \quad (6.25)$$

Podobnie jak estymatory LS oraz SWLS, estymator EWLS może zostać przedstawiony w postaci rekurencyjnej, co znacznie zmniejsza jego złożoność obliczeniową. Rekurencyjna postać estymatora EWLS przedstawiona jest za pomocą równań:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= y(t) - \varphi_n^T(t) \hat{\theta}_n(t-1), \\ \mathbf{k}(t) &= \frac{\mathbf{P}(t-1) \varphi_n(t)}{\lambda + \varphi_n^T(t) \mathbf{P}(t-1) \varphi_n(t)}, \\ \mathbf{P}(t) &= \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{P}(t-1) - \frac{\mathbf{P}(t-1) \varphi_n(t) \varphi_n^T(t) \mathbf{P}(t-1)}{\lambda + \varphi_n^T(t) \mathbf{P}(t-1) \varphi_n(t)} \right], \\ \hat{\theta}_n(t) &= \hat{\theta}_n(t-1) + \mathbf{k}(t) \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (6.26)$$

z warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_n(0) &= \mathbf{0}_n, \\ \mathbf{P}(0) &= \delta \mathbf{I}_n, \end{aligned}$$



gdzie δ jest stałą o dużej wartości (np. $\delta = 10^4$). Macierz $\mathbf{P}(t)$ jest odwrotnością macierzy regresji:

$$\mathbf{P}(t) = \left[\sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i \varphi_n(t-i) \varphi_n^T(t-i) \right]^{-1}.$$

Rekurencyjny algorytm wyznaczania wariancji szumu tworzącego (6.24) przyjmuje postać:

$$\hat{\rho}_n(t) = \frac{s(t)}{L(t)}, \quad (6.27)$$

gdzie

$$s(t) = \lambda s(t-1) + \frac{\lambda \varepsilon^2(t)}{\lambda + \varphi_n^T(t) \mathbf{P}(t-1) \varphi_n(t)}. \quad (6.28)$$

Wyprowadzenie równań (6.26)-(6.28) jest analogiczne do wyprowadzenia równań (6.11)-(6.13) i może być znalezione w pracy [21].

Porównanie estymatorów WLS

Istnieje możliwość porównania zarówno właściwości statycznych (np. estymacja parametrów) jak i dynamicznych (np. śledzenie parametrów) ważonych estymatorów najmniejszych kwadratów o różnych kształtach okien. Wielkości, które to umożliwiają to efektywna szerokość okna $L(t)$ i równoważna szerokość okna $M(t)$, zwana też równoważną liczbą obserwacji.

Efektywna szerokość okna dana jest wzorem:

$$L(t) = \sum_{i=0}^{t-1} w(i).$$

Stosując ważenie, średnia energia (moc) segmentu danych o długości t jest równa średniej energii segmentu danych o długości $L(t)$ bez stosowania ważenia [28]. Dla estymatora SWLS o długości okna N wartość $L(t)$ wynosi:

$$L^{\text{SWLS}}(t) = \min(t, N).$$

Dla okna wykładniczego (estymator EWLS) efektywna szerokość okna dana jest wzorem (6.25).

Równoważna szerokość okna $M(t)$ jest zdefiniowana jako:

$$M(t) = \frac{\left[\sum_{i=0}^{t-1} w(i) \right]^2}{\sum_{i=0}^{t-1} w^2(i)}.$$

Wielkość ta ma wpływ na dokładność estymacji parametrów zgodnie z zależnością [28]:

$$\text{cov}[\hat{\theta}_{\text{WLS}}(t)] \cong \frac{\rho_n(t) \left[\mathbf{E} [\varphi(t) \varphi^T(t)] \right]^{-1}}{M(t)}.$$

Dla estymatorów SWLS i EWLS równoważna szerokość okna przyjmuje postaci odpowiednio:

$$M^{\text{SWLS}}(t) = \min(t, N),$$

$$M^{\text{EWLS}}(t) = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}.$$



Ważone estymatory najmniejszych kwadratów o takiej samej wartości parametru $M(t)$ są równoważne z punktu widzenia dokładności estymacji parametrów. Analiza porównawcza statycznych i dynamicznych własności estymatorów WLS o różnych kształtach okien ma sens wtedy i tylko wtedy, gdy są one scharakteryzowane przez tę samą równoważną szerokość okna. W pracy [28] pokazano, że jeżeli spełnione są warunki stacjonarności oraz parametry procesu są estymowane za pomocą algorytmów WLS o takich samych równoważnych liczbach obserwacji $M(t)$, to estymatory te cechują się podobnymi właściwościami statystycznymi, a ściślej ich macierze kowariancji błędów estymacji są w przybliżeniu równe:

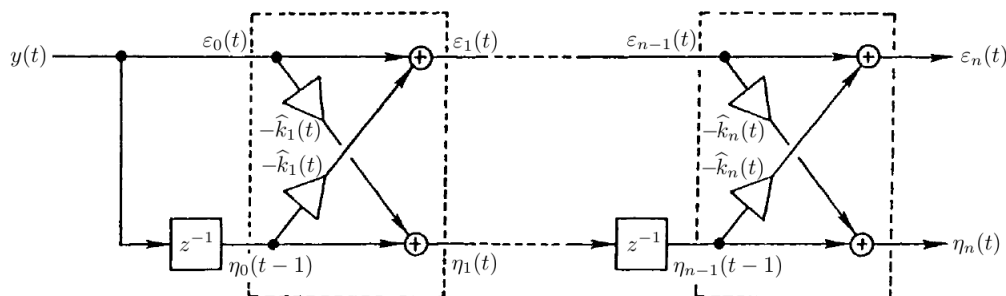
$$\text{cov}[\hat{\theta}_{\text{EWLS}}(t)] \approx \text{cov}[\hat{\theta}_{\text{SWLS}}(t)].$$

W pracy [28] pokazano również, że estymatory EWLS charakteryzują się lepszymi własnościami śledzącymi w porównaniu do estymatorów SWLS. Obszerną analizę właściwości statycznych i dynamicznych ważonych estymatorów najmniejszych kwadratów można znaleźć w pracy [28].

6.3 Algorytmy drabinkowe

Algorytmy drabinkowe (ang. *ladder/lattice algorithms*) stanowią klasę estymatorów, które podobnie jak algorytmy najmniejszych kwadratów, minimalizują funkcję kosztów (6.5). Z tego powodu można powiedzieć, że algorytmy drabinkowe stanowią pewną formę algorytmów najmniejszych kwadratów. Ze względu na niską złożoność obliczeniową, algorytmy te należą do grupy tzw. „szybkich” metod estymacji [13].

Algorytmy drabinkowe pozwalają na otrzymanie współczynników odbicia estymowanego modelu. Rysunek 6.1 przedstawia strukturę algorytmu drabinkowego [13].



Rysunek 6.1: Struktura algorytmu drabinkowego [13].

Algorytmy drabinkowe są rekursywne zarówno względem czasu jak i rzędu, tj. estymując model rzędu n otrzymuje się również modele rzędów $n - 1, n - 2, \dots, 1$. Oznacza to, że zwiększenie rzędu estymatora polega na dodaniu kolejnej sekcji do struktury przedstawionej na rysunku 6.1, bez ingerencji w żadną z istniejących. Dodatkowo, algorytmy drabinkowe mają dobre własności numeryczne, dzięki czemu są odporne na błędy zaokrągleń [12]. Wymienione cechy sprawiają, że algorytmy drabinkowe stanowią interesujące rozwiązania problemu estymacji widmowej gęstości mocy.

W ogólności algorytmy drabinkowe można podzielić na dwie grupy: unormowane oraz nieunormowane. Algorytmy nieunormowane cechują się zwykle większą złożonością obliczeniową i większą liczbą wyliczanych zmiennych, niż algorytmy unormowane. Z drugiej strony nieunormowane algorytmy drabinkowe posiadają własności, które mogą być korzystne w niektórych zastosowaniach (np. brak konieczności obliczania pierwiastka kwadratowego z macierzy w wielowymiarowej wersji estymatora). Z kolei w unormowanych algorytmach drabinkowych zmienne wyjściowe przyjmują

wartości z przedziału od -1 do 1. Oznacza to, że model otrzymany w wyniku zastosowania unormowanego algorytmu drabinkowego jest zawsze stabilny [14]. Unormowany algorytm drabinkowy opisany jest za pomocą zestawu równań [13]:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= p(t-1) + y^2(t) \\
 \varepsilon_0(t) = \eta_0(t) &= \frac{y(t)}{\sqrt{p(t)}} \\
 &\text{for } i = 1, \dots, \min\{n, t\} \text{ do} \\
 \hat{k}_i(t) &= \varepsilon_{i-1}(t)\eta_{i-1}(t-1) + \hat{k}_i(t-1)\sqrt{1 - \varepsilon_{i-1}^2(t)}\sqrt{1 - \eta_{i-1}^2(t-1)} \\
 \varepsilon_i(t) &= \frac{\varepsilon_{i-1}(t) - \hat{k}_i(t)\eta_{i-1}(t-1)}{\sqrt{1 - \hat{k}_i^2(t)}\sqrt{1 - \eta_{i-1}^2(t-1)}} \\
 \eta_i(t) &= \frac{\eta_{i-1}(t-1) - \hat{k}_i(t)\varepsilon_{i-1}(t)}{\sqrt{1 - \hat{k}_i^2(t)}\sqrt{1 - \varepsilon_{i-1}^2(t)}} \\
 &\text{end}
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

z warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_0(0) &= \eta_0(0) = 0, \\
 \hat{k}_i(0) &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\
 p(0) &= \delta,
 \end{aligned}$$

gdzie δ jest małą liczbą dodatnią.

Unormowane algorytmy drabinkowe pozwalają na otrzymanie unormowanych współczynników odbicia, podczas, gdy wersje nieunormowane umożliwiają wyznaczenie dwóch zestawów nieunormowanych współczynników odbicia. Zarówno związek pomiędzy unormowanymi i nieunormowanymi współczynnikami odbicia jak i nieunormowany odpowiednik algorytmu (6.29) może zostać znaleziony w pracy [12]. Dysponując zestawem unormowanych współczynników odbicia, po zastosowaniu przekształcenia (3.14) możemy otrzymać wektor parametrów modelu autoregresyjnego i wariancję szumu tworzącego.

Podobnie jak w przypadku estymatorów najmniejszych kwadratów, w algorytmach drabinkowych można zastosować okna ważące w celu zmniejszenia wpływu starszych próbek sygnału na oszacowania parametrów w danej chwili czasu. Gdy stosowane jest okno prostokątne, mamy do czynienia z algorytmem drabinkowym z przesuwным oknem (ang. *Sliding Window Lattice Algorithm*) [13]. Minimalizuje on funkcję kosztów:

$$J(\theta_n) = \sum_{i=0}^{N-1} \left[y(t-i) - \varphi_n^T(t-i)\theta_n \right]^2,$$

gdzie N jest długością okna. Unormowany algorytm drabinkowy z przesuwным oknem o długości N opisany jest za pomocą formuł:

$$\begin{aligned}
p(t) &= p(t-1) + y^2(t) - y^2(t-N-1) \\
\tilde{\varepsilon}_0(t) &= \tilde{\eta}_0(t) = \frac{y(t)}{\sqrt{p(t)}} \\
\bar{\varepsilon}_0(t) &= \bar{\eta}_0(t) = \frac{y(t-N)}{\sqrt{p(t)}} \\
&\text{for } i = 1, \dots, \min\{n, t\} \text{ do} \\
&\quad \hat{k}_i(t) = g \left[\bar{k}_i(t-1), \tilde{\eta}_{i-1}(t-1), \tilde{\varepsilon}_{i-1}(t) \right] \\
&\quad \bar{k}_i(t) = f \left[\hat{k}_i(t-1), \bar{\eta}_{i-1}(t-1), \bar{\varepsilon}_{i-1}(t) \right] \\
&\quad \tilde{\varepsilon}_i(t) = f \left[\tilde{\varepsilon}_{i-1}(t), \tilde{\eta}_{i-1}(t-1), \hat{k}_i(t) \right] \\
&\quad \tilde{\eta}_i(t) = f \left[\tilde{\eta}_{i-1}(t-1), \tilde{\varepsilon}_{i-1}(t), \hat{k}_i(t) \right] \\
&\quad \bar{\varepsilon}_i(t) = f \left[\bar{\varepsilon}_{i-1}(t), \bar{\eta}_{i-1}(t-1), \hat{k}_i(t) \right] \\
&\quad \bar{\eta}_i(t) = f \left[\bar{\eta}_{i-1}(t-1), \bar{\varepsilon}_{i-1}(t), \hat{k}_i(t) \right] \\
&\text{end} \\
f(u, v, w) &= \frac{u - vw}{\sqrt{1 - w^2}\sqrt{1 - v^2}} \\
g(u, v, w) &= \sqrt{1 - w^2}u\sqrt{1 - v^2} + vw
\end{aligned} \tag{6.30}$$

z warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_0(0) &= \bar{\eta}_0(0) = \tilde{\varepsilon}_0(0) = \tilde{\eta}_0(0) = 0, \\
\hat{k}_i(0) &= \bar{k}_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \\
p(0) &= \delta,
\end{aligned}$$

gdzie δ jest małą liczbą dodatnią.

Gdy zamiast okna prostokątnego użyte zostanie okno wykładnicze, to otrzymany zostaje algorytm drabinkowy z zapominaniem wykładniczym (ang. *Exponentially Weighted Lattice Algorithm*) [13]. Unormowany algorytm drabinkowy z zapominaniem wykładniczym, o stałej zapominania λ , minimalizuje funkcję kosztów:

$$J(\theta_n) = \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i \left[y(t-i) - \varphi_n^T(t-i)\theta_n \right]^2$$

i jest opisany za pomocą równań (6.29) z tą różnicą, że pierwsze równanie przyjmuje postać:

$$p(t) = \lambda p(t-1) + y^2(t).$$

W porównaniu do rekursywnego algorytmu najmniejszych kwadratów, algorytmy drabinkowe cechują się mniejszą złożonością obliczeniową. Estymując model rzędu n , w każdej chwili czasu algorytm RLS wymaga wykonania liczby operacji proporcjonalnej do n^2 podczas, gdy w przypadku algorytmów drabinkowych liczba operacji jest proporcjonalna do n [12].



6.4 Wielowymiarowe metody identyfikacji procesów autoregresyjnych

Jeżeli sygnał $\mathbf{y}(t)$ jest wielowymiarowym stacjonarnym sygnałem autoregresyjnym rzędu n , to model (3.16) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{y}(t) = \Psi_n^T(t)\boldsymbol{\theta}_n + \mathbf{v}_n(t), \quad (6.31)$$

gdzie

$$\Psi_n(t) = \mathbf{I}_m \otimes \boldsymbol{\varphi}_n(t) = \text{diag}\{\boldsymbol{\varphi}_n(t), \dots, \boldsymbol{\varphi}_n(t)\},$$

$\boldsymbol{\varphi}_n(t)$ jest wektorem regresji o wymiarze $mn \times 1$:

$$\boldsymbol{\varphi}_n(t) = \left[\mathbf{y}^T(t-1), \dots, \mathbf{y}^T(t-n) \right]^T,$$

a $\boldsymbol{\theta}_n$ jest wektorem parametrów o wymiarze $m^2n \times 1$, otrzymanym poprzez wektoryzację macierzy $|\mathbf{A}_{1,n}| \dots |\mathbf{A}_{n,n}|$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &= \text{vec}\{[|\mathbf{A}_{1,n}| \dots |\mathbf{A}_{n,n}|]^T\} \\ &= \left[a_{11}^{1,n}, \dots, a_{1m}^{1,n}, \dots, a_{11}^{n,n}, \dots, a_{1m}^{n,n}, \dots, a_{m1}^{1,n}, \dots, a_{mm}^{1,n}, \dots, a_{m1}^{n,n}, \dots, a_{mm}^{n,n} \right]^T. \end{aligned}$$

Symbol \otimes oznacza iloczyn Kroneckera dwóch macierzy/wektorów.

W przypadku, gdy sygnał $\mathbf{y}(t)$ jest sygnałem niestacjonarnym, to model (6.31) przyjmuje postać:

$$\mathbf{y}(t) = \Psi_n^T(t)\boldsymbol{\theta}_n(t) + \mathbf{v}_n(t). \quad (6.32)$$

6.4.1 Metoda Yule-Walkera

Analogicznie do przypadku jednowymiarowego, metoda Yule-Walkera stosowana w kontekście stacjonarnych sygnałów wielowymiarowych polega na rozwiązaniu wielowymiarowej wersji równań Yule-Walkera (3.22). Z punktu widzenia identyfikacji, interesującym algorytmem rozwiązania równań (3.22) jest algorytm Whittle'a-Wigginsa-Robinsona (WWR), będący rozszerzeniem algorytmu Levinsona-Durbina [40]. Algorytm WWR dany jest za pomocą zestawu równań (3.25). Istotną cechą algorytmu WWR jest fakt, iż otrzymany model jest zawsze stabilny.

6.4.2 Estymatory najmniejszych kwadratów

Jeżeli sygnał $\mathbf{y}(t)$ jest m -wymiarowym, niestacjonarnym sygnałem autoregresyjnym rzędu n , o długości N , to analogicznie do przypadku jednowymiarowego, wielowymiarowa metoda najmniejszych kwadratów t polega na znalezieniu w każdej chwili czasu wektora macierzy parametrów $\boldsymbol{\theta}_n(t)$ minimalizującego funkcję kosztów:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t) = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}_n} J(\boldsymbol{\theta}_n),$$

gdzie

$$J(\boldsymbol{\theta}_n) = \sum_{i=0}^{t-1} \left[\mathbf{y}(t-i) - \Psi_n^T(t-i)\boldsymbol{\theta}_n \right]^T \left[\mathbf{y}(t-i) - \Psi_n^T(t-i)\boldsymbol{\theta}_n \right].$$

Wielowymiarowy estymator najmniejszych kwadratów w chwili czasu t przyjmuje postać:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t) = \left[\sum_{i=0}^{t-1} \boldsymbol{\Psi}_n(t-i) \boldsymbol{\Psi}_n^T(t-i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^{t-1} \boldsymbol{\Psi}_n(t-i) \mathbf{y}(t-i) \right]. \quad (6.33)$$

Oszacowanie macierzy kowariancji szumu tworzącego $\hat{\boldsymbol{\rho}}_n(t)$ w chwili czasu t może zostać wyznaczone za pomocą formuły:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_n(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \left[\mathbf{y}(t-i) - \boldsymbol{\Psi}_n^T(t-i) \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t) \right] \left[\mathbf{y}(t-i) - \boldsymbol{\Psi}_n^T(t-i) \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t) \right]^T.$$

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, istnieje możliwość wyznaczenia wielowymiarowej wersji algorytmu RLS.

Wielowymiarowy algorytm RLS

Analogicznie do wersji jednowymiarowej (6.11), wielowymiarowy algorytm RLS jest opisany za pomocą poniższych formuł:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(t) &= \mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\Psi}_n^T(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-1), \\ \mathbf{P}(t) &= \mathbf{P}(t-1) - \mathbf{P}(t-1) \boldsymbol{\Psi}_n(t) \left[\mathbf{I}_m + \boldsymbol{\Psi}_n^T(t) \mathbf{P}(t-1) \boldsymbol{\Psi}_n(t) \right]^{-1} \boldsymbol{\Psi}_n^T(t) \mathbf{P}(t-1), \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-1) + \mathbf{P}(t) \boldsymbol{\Psi}_n(t) \boldsymbol{\varepsilon}(t), \end{aligned} \quad (6.34)$$

z warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(0) &= \mathbf{0}_{m^2n}, \\ \mathbf{P}(0) &= \delta \mathbf{I}_{m^2n}, \end{aligned}$$

gdzie δ jest stałą o dużej wartości (np. $\delta = 10^4$). Macierz $\mathbf{P}(t)$ jest odwrotnością macierzy:

$$\mathbf{P}(t) = \left[\sum_{i=1}^t \boldsymbol{\Psi}_n(i) \boldsymbol{\Psi}_n^T(i) \right]^{-1}.$$

Wyznaczenie równań (6.34) znajduje się w dodatku A.

Ważone estymatory najmniejszych kwadratów

Wielowymiarowy estymator WLS minimalizuje funkcję kosztów $J(\boldsymbol{\theta}_n)$:

$$J(\boldsymbol{\theta}_n) = \sum_{i=0}^{t-1} w(i) \left[\mathbf{y}(t-i) - \boldsymbol{\Psi}_n^T(t-i) \boldsymbol{\theta}_n \right]^T \left[\mathbf{y}(t-i) - \boldsymbol{\Psi}_n^T(t-i) \boldsymbol{\theta}_n \right]. \quad (6.35)$$

Parametry $w(0), \dots, w(t-1)$ są współczynnikami okna spełniającymi warunki (6.15). Wektor parametrów minimalizujący funkcję kosztów (6.35) przyjmuje postać:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t) = \left[\sum_{i=0}^{t-1} w(i) \boldsymbol{\Psi}_n(t-i) \boldsymbol{\Psi}_n^T(t-i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^{t-1} w(i) \boldsymbol{\Psi}_n(t-i) \mathbf{y}(t-i) \right].$$

SWLS

Wielowymiarowy estymator SWLS o długości okna N przyjmuje postać:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t, N) = \left[\sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{\Psi}_n(t-i) \boldsymbol{\Psi}_n^T(t-i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{\Psi}_n(t-i) \mathbf{y}(t-i) \right]. \quad (6.36)$$

Oszacowanie macierzy kowariancji szumu tworzącego może zostać wyznaczone za pomocą wzoru:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_n(t, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[\mathbf{y}(t-i) - \boldsymbol{\Psi}_n^T(t-i) \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t, N) \right] \left[\mathbf{y}(t-i) - \boldsymbol{\Psi}_n^T(t-i) \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t, N) \right]^T.$$

Analogicznie do przypadku jednowymiarowego, wielowymiarowy estymator SWLS może zostać przedstawiony w postaci rekurencyjnej. Stosując notację:

$$\mathbf{Q}(t, N) = \left[\sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{\Psi}_n(t-i) \boldsymbol{\Psi}_n^T(t-i) \right]^{-1},$$

$$\mathbf{q}(t, N) = \left[\sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{\Psi}_n(t-i) \mathbf{y}(t-i) \right],$$

estymator (6.36) może zostać zapisany jako:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t, N) = \mathbf{Q}^{-1}(t, N) \mathbf{q}(t, N).$$

Procedura rekurencyjna estymatora SWLS składa się z dwóch kroków. Najpierw, zestaw danych użyty do estymacji wektora parametrów jest rozszerzany o kolejną próbkę sygnału wielowymiarowego:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t, N+1) &= \mathbf{Q}(t-1, N) + \boldsymbol{\Psi}_n(t) \boldsymbol{\Psi}_n^T(t), \\ \mathbf{q}(t, N+1) &= \mathbf{q}(t-1, N) + \boldsymbol{\Psi}_n(t) \mathbf{y}(t), \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(t, N+1) &= \mathbf{Q}^{-1}(t, N+1) \mathbf{q}(t, N+1). \end{aligned} \quad (6.37)$$

W drugim kroku następuje usunięcie „najstarszej” próbki sygnału $\mathbf{y}(t)$, wchodzącej w skład przedziału analizy:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t, N) &= \mathbf{Q}(t, N+1) - \boldsymbol{\Psi}_n(t-N) \boldsymbol{\Psi}_n^T(t-N), \\ \mathbf{q}(t, N) &= \mathbf{q}(t, N+1) - \boldsymbol{\Psi}_n(t-N) \mathbf{y}(t-N), \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(t, N) &= \mathbf{Q}^{-1}(t, N) \mathbf{q}(t, N). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Rekursywny algorytm SWLS może zostać opisany za pomocą zmodyfikowanych równań wielowymiarowej wersji algorytmu RLS. Zaletą takiego rozwiązania jest redukcja złożoności obliczeniowej. W takiej formie, pierwszy krok algorytmu SWLS przyjmuje postać formuł:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(t) &= \mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\Psi}_n^T(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-1, N), \\ \mathbf{P}(t, N+1) &= \mathbf{P}(t-1, N) - \mathbf{P}(t-1, N) \boldsymbol{\Psi}_n(t) \left[\mathbf{I}_m + \boldsymbol{\Psi}_n^T(t) \mathbf{P}(t-1, N) \boldsymbol{\Psi}_n(t) \right]^{-1} \times \\ &\quad \boldsymbol{\Psi}_n^T(t) \mathbf{P}(t-1, N), \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t, N+1) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-1, N) + \mathbf{P}(t, N+1) \boldsymbol{\Psi}_n(t) \boldsymbol{\varepsilon}(t). \end{aligned}$$

Drugi krok algorytmu jest opisany za pomocą równań:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu}(t) &= \mathbf{y}(t-N) - \boldsymbol{\Psi}_n^T(t-N)\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t, N+1), \\ \mathbf{P}(t, N) &= \mathbf{P}(t, N+1) + \mathbf{P}(t, N+1)\boldsymbol{\Psi}_n(t-N) \left[\mathbf{I}_m - \boldsymbol{\Psi}_n^T(t-N)\mathbf{P}(t, N+1)\boldsymbol{\Psi}_n(t-N) \right]^{-1} \times \\ &\quad \boldsymbol{\Psi}_n^T(t-N)\mathbf{P}(t, N+1), \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t, N) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t, N+1) - \mathbf{P}(t, N)\boldsymbol{\Psi}_n(t-N)\boldsymbol{\nu}(t).\end{aligned}$$

EWLS

Wielowymiarowy estymator EWLS o stałej zapomnienia λ przyjmuje postać:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t) = \left[\sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i \boldsymbol{\Psi}_n(t-i)\boldsymbol{\Psi}_n^T(t-i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i \boldsymbol{\Psi}_n(t-i)\mathbf{y}(t-i) \right]. \quad (6.39)$$

Oszacowanie macierzy kowariancji szumu tworzącego może być wyznaczone za pomocą formuły:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_n(t) = \frac{1}{L(t)} \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i \left[\mathbf{y}(t-i) - \boldsymbol{\Psi}_n^T(t-i)\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t) \right] \left[\mathbf{y}(t-i) - \boldsymbol{\Psi}_n^T(t-i)\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t) \right]^T,$$

gdzie wielkość $L(t)$ jest efektywną szerokością okna (6.25).

Stosując oznaczenia:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(t) &= \left[\sum_{i=0}^{t-1} \boldsymbol{\Psi}_n(t-i)\boldsymbol{\Psi}_n^T(t-i) \right]^{-1}, \\ \mathbf{q}(t) &= \left[\sum_{i=0}^{t-1} \boldsymbol{\Psi}_n(t-i)\mathbf{y}(t-i) \right]\end{aligned}$$

oraz zauważając, że:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(t) &= \lambda\mathbf{Q}(t-1) + \boldsymbol{\Psi}_n(t)\boldsymbol{\Psi}_n^T(t), \\ \mathbf{q}(t) &= \lambda\mathbf{q}(t-1) + \boldsymbol{\Psi}_n(t)\mathbf{y}(t),\end{aligned}$$

wielowymiarowy estymator EWLS (6.39) może zostać przedstawiony w postaci rekurencyjnej:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(t) &= \mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\Psi}_n^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-1), \\ \mathbf{P}(t) &= \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{P}(t-1) - \mathbf{P}(t-1)\boldsymbol{\Psi}_n(t)\boldsymbol{\Psi}_n^T(t)\mathbf{P}(t-1) \left[\lambda\mathbf{I}_m + \boldsymbol{\Psi}_n^T(t)\mathbf{P}(t-1)\boldsymbol{\Psi}_n(t) \right]^{-1} \right], \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-1) + \mathbf{P}(t)\boldsymbol{\Psi}_n(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t),\end{aligned}$$

z warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(0) &= \mathbf{0}_{m^2n}, \\ \mathbf{P}(0) &= \delta\mathbf{I}_{m^2n},\end{aligned}$$

gdzie δ jest stałą o dużej wartości (np. $\delta = 10^4$).

6.4.3 Algorytmy drabinkowe

Wielowymiarowa wersja unormowanego algorytmu drabinkowego (6.29) jest opisana za pomocą zestawu równań [13]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) &= \mathbf{P}(t-1) + \mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t) \\
\boldsymbol{\varepsilon}_0(t) &= \boldsymbol{\eta}_0(t) = \mathbf{P}(t)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y}(t) \\
&\text{for } i = 1, \dots, \min\{n, t\} \text{ do} \\
\widehat{\mathbf{K}}_i(t) &= \left[\mathbf{I}_m - \boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}^T(t) \right]^{\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{K}}_i(t-1) \left[\mathbf{I}_m - \boldsymbol{\eta}_{i-1}^T(t-1)\boldsymbol{\eta}_{i-1}(t-1) \right]^{\frac{T}{2}} + \\
&\quad \boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}(t)\boldsymbol{\eta}_{i-1}^T(t-1) \\
\boldsymbol{\varepsilon}_i(t) &= \frac{\left[\mathbf{I}_m - \widehat{\mathbf{K}}_i(t-1)\widehat{\mathbf{K}}_i^T(t-1) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}(t) - \widehat{\mathbf{K}}_i(t-1)\boldsymbol{\eta}_{i-1}(t-1) \right]}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\eta}_{i-1}^T(t-1)\boldsymbol{\eta}_{i-1}(t-1)}} \\
\boldsymbol{\eta}_i(t) &= \frac{\left[\mathbf{I}_m - \widehat{\mathbf{K}}_i(t-1)\widehat{\mathbf{K}}_i^T(t-1) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\boldsymbol{\eta}_{i-1}(t-1) - \widehat{\mathbf{K}}_i(t-1)\boldsymbol{\varepsilon}_i(t-1) \right]}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\varepsilon}_i^T(t-1)\boldsymbol{\varepsilon}_i(t-1)}} \\
&\text{end}
\end{aligned} \tag{6.40}$$

z warunkami początkowymi

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_0(0) &= \boldsymbol{\eta}_0(0) = \mathbf{0}_m, \\
\widehat{\mathbf{K}}_i(0) &= \mathbf{O}_{m \times m}, \quad i = 1, \dots, n, \\
\mathbf{P}(0) &= \delta \mathbf{I}_m,
\end{aligned}$$

gdzie δ jest małą liczbą dodatnią.

Wielowymiarowa wersja unormowanego estymatora drabinkowego z przesuwym oknem (6.30) o długości N jest opisana za pomocą formuł:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) &= \mathbf{P}(t-1) + \mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t) - \mathbf{y}(t-N-1)\mathbf{y}^T(t-N-1) \\
\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(t) &= \tilde{\boldsymbol{\eta}}_0(t) = \mathbf{P}(t)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y}(t) \\
\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(t) &= \bar{\boldsymbol{\eta}}_0(t) = \mathbf{P}(t)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y}(t-N) \\
&\text{for } i = 1, \dots, \min\{n, t\} \text{ do} \\
\widehat{\mathbf{K}}_i(t) &= \mathbf{G} \left[\bar{\mathbf{K}}_i(t-1), \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{i-1}^T(t-1), \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i-1}(t) \right] \\
\bar{\mathbf{K}}_i(t) &= \mathbf{F} \left[\widehat{\mathbf{K}}_i(t-1), \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{i-1}^T(t-1), \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i-1}(t) \right] \\
\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i(t) &= \mathbf{F} \left[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i-1}(t), \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{i-1}(t-1), \widehat{\mathbf{K}}_i(t) \right] \\
\tilde{\boldsymbol{\eta}}_i(t) &= \mathbf{F} \left[\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{i-1}(t-1), \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i-1}(t), \widehat{\mathbf{K}}_i^T(t) \right] \\
\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i(t) &= \mathbf{F} \left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i-1}(t), \bar{\boldsymbol{\eta}}_{i-1}(t-1), \widehat{\mathbf{K}}_i(t) \right] \\
\bar{\boldsymbol{\eta}}_i(t) &= \mathbf{F} \left[\bar{\boldsymbol{\eta}}_{i-1}(t-1), \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i-1}(t), \widehat{\mathbf{K}}_i^T(t) \right] \\
&\text{end} \\
\mathbf{F}(\mathbf{U}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \left[\mathbf{I}_m - \mathbf{w}\mathbf{w}^T \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\mathbf{U} - \mathbf{w}\mathbf{v} \right] \left[\mathbf{I}_m - \mathbf{v}^T\mathbf{v} \right]^{-\frac{T}{2}} \\
\mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \left[\mathbf{I}_m - \mathbf{w}\mathbf{w}^T \right]^{\frac{1}{2}} \mathbf{U} \left[\mathbf{I}_m - \mathbf{v}^T\mathbf{v} \right]^{\frac{T}{2}} + \mathbf{w}\mathbf{v}
\end{aligned}$$

z warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(0) &= \bar{\boldsymbol{\eta}}_0(0) = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(0) = \tilde{\boldsymbol{\eta}}_0(0) = \mathbf{0}_m, \\ \widehat{\mathbf{K}}_i(0) &= \bar{\mathbf{K}}_i(0) = \mathbf{O}_{m \times m}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \mathbf{P}(0) &= \delta \mathbf{I}_m,\end{aligned}$$

gdzie δ jest małą liczbą dodatnią.

Wielowymiarowa wersja unormowanego estymatora drabinkowego z zapominaniem wykładniczym, o stałej zapominania λ jest opisana za pomocą równań (6.40), z tą różnicą, że pierwsze równanie przyjmuje postać:

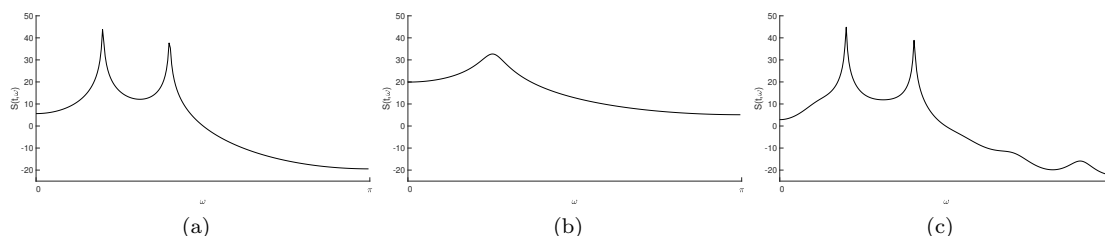
$$\mathbf{P}(t) = \lambda \mathbf{P}(t-1) + \mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t).$$

6.5 Metody wyboru rzędu modelu oraz pasma estymacji

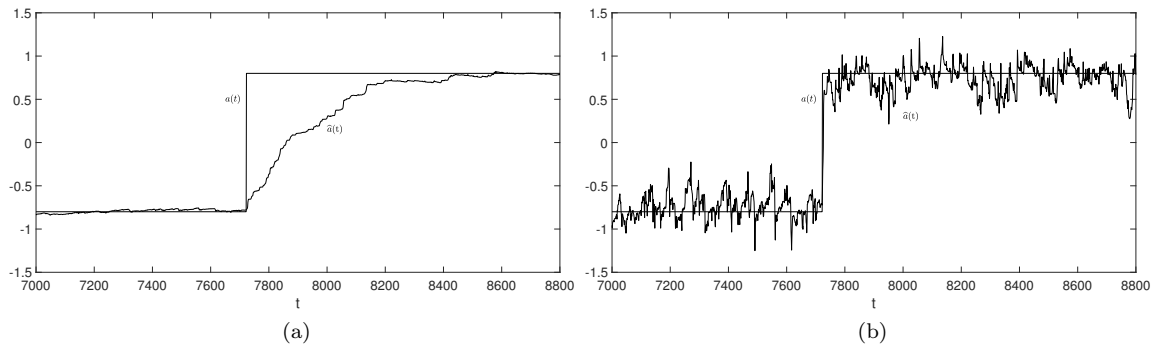
W procesie identyfikacji niestacjonarnych procesów stochastycznych wartości dwóch istotnych parametrów muszą zostać odpowiednio dobrane. Tymi parametrami są rząd estymowanego modelu oraz szerokość okna analizy danych, nazywana pasmem estymacji. Rząd estymowanego modelu (czyli liczba parametrów opisujących model autoregresyjny) jest bezpośrednio związany z kształtem widmowej gęstości mocy. Jeżeli rząd modelu jest zbyt niski (rząd niedoszacowany), estymowana charakterystyka widmowa może nie zawierać istotnych składowych, znajdujących się w charakterystyce rzeczywistej. Z kolei jeżeli rząd modelu jest zbyt wysoki (przeszacowany), w estymowanym widmie mogą występować dodatkowe składowe, które nie występują w widmie rzeczywistym. Na rysunku 6.2 przedstawiono przykładowe charakterystyki widmowe, otrzymane w przypadku niedoszacowania i przeszacowania rzędu modelu.

Odpowiedni wybór pasma estymacji pozwala na uzyskanie kompromisu pomiędzy obciążeniem, a wariancją estymowanych wartości parametrów modelu. Przykładowo, gdy parametry sygnału zmieniają się w sposób gwałtowny, niewielka wartość pasma estymacji powoduje, że estymowane wartości cechują się małym obciążeniem, ale za to dużą wariancją. Gdy pasmo estymacji przyjmuje dużą wartość, efekt jest przeciwny. Na rysunku 6.3 zobrazowano opisaną sytuację. Gdy stopień niestacjonarności zmienia się w czasie, rozsądnym rozwiązaniem wydaje się wybór zarówno rzędu modelu jak i pasma estymacji w sposób adaptacyjny.

Problemy wyboru pasma estymacji oraz rzędu estymowanego modelu zwykle rozpatrywane były oddzielnie. Do najpopularniejszych metod wyboru rzędu estymowanego modelu należą metody oparte na kryterium informacyjnym Akaikego (AIC, ang. *Akaike Information Criterion*) [1], kryterium końcowego błędu predykcji (FPE, ang. *Final Prediction Error*) [4], kryterium Schwarzera (BIC, ang. *Bayesian Information Criterion*) [39] oraz kryterium Rissanena [38]. Rozszerzone wersje AIC oraz BIC dla sygnałów niestacjonarnych zostały opisane w pracach [26] oraz [29].



Rysunek 6.2: (a) Przykładowa rzeczywista widmowa gęstość mocy oraz jej estymata, gdy rząd modelu jest (b) niedoszacowany oraz (c) przeszacowany.



Rysunek 6.3: Przykładowa trajektoria śledzenia wartości parametru w przypadku jej skokowej zmiany, gdy pasmo estymacji ma (a) dużą oraz (b) małą wartość.

W przeciwieństwie do problemu wyboru rzędu modelu, wybór pasma estymacji jest problemem zbadanym w znacznie mniejszym stopniu. Jedną z metod, która zyskała uwagę w ostatnich latach jest metoda oparta na analizie przedziałów ufności ICI (ang. *Intersection of the Confidence Intervals*) [16].

6.5.1 Metody wyboru rzędu modelu

Kryterium informacyjne Akaikego

Kryterium informacyjne Akaikego zostało zaproponowane w pracy [1]. W przypadku sygnałów stacjonarnych kryterium przyjmuje postać:

$$AIC_n = N \ln \hat{\rho}_n + 2n \rightarrow \min,$$

gdzie N jest długością segmentu danych, n jest rzędem estymowanego modelu, a $\hat{\rho}_n$ jest oszacowaniem wariancji szumu tworzącego.

Opisana w pracy [29] rozszerzona wersja kryterium AIC dla sygnałów niestacjonarnych przyjmuje postać:

$$AIC_n(t) = L(t) \ln \hat{\rho}_n(t) + \frac{2nL(t)}{M(t)} \rightarrow \min, \quad (6.41)$$

gdzie $L(t)$ jest efektywną, a $M(t)$ równoważną szerokością okna.

Jedną z istotnych właściwości kryterium AIC jest fakt, iż wykazuje ono tendencję do przeszacowywania rzędu modelu, tj. jeżeli n_0 oznacza rzeczywisty rząd modelu, to w warunkach stacjonarności prawdopodobieństwo wyboru rzędu $n > n_0$ nie dąży do zera wraz ze wzrostem liczby realizacji. Niemniej jednak kryterium AIC sprawdza się bardzo dobrze jeśli chodzi o odrzucanie modeli o rzędach niższych niż n_0 [1].

Wielowymiarowa wersja kryterium (6.41) przyjmuje postać:

$$MAIC_n(t) = L(t) \ln [\det \hat{\boldsymbol{\rho}}_n(t)] + \frac{2nm^2L(t)}{M(t)} \rightarrow \min,$$

gdzie $\hat{\boldsymbol{\rho}}_n(t)$ jest oszacowaniem macierzy kowariancji szumu tworzącego m -wymiarowego sygnału autoregresyjnego.

Kryterium końcowego błędu predykcji

Kryterium końcowego błędu predykcji [4] jest zdefiniowane następująco:

$$\text{FPE}_n = E \left\{ \left[\tilde{y}(t) - \hat{\varphi}_n(t) \hat{\theta}_n \right]^2 \right\} \rightarrow \min, \quad (6.42)$$

gdzie $\tilde{y}(t)$ jest zestawem danych niezależnym od danych, na podstawie których przeprowadzona została identyfikacja modelu $\hat{\theta}_n$.

Wielkość (6.42) może zostać wyrażona za pomocą formuły:

$$\text{FPE}_n = \frac{1 + \frac{n}{N}}{1 - \frac{n}{N}} \hat{\rho}_n \rightarrow \min,$$

a jej rozszerzenie dla sygnałów niestacjonarnych [29] przyjmuje postać:

$$\text{FPE}_n(t) = \frac{1 + \frac{n}{M(t)}}{1 - \frac{n}{M(t)}} \hat{\rho}_n(t) \rightarrow \min. \quad (6.43)$$

Wielowymiarowa wersja kryterium (6.43) wyrażona jest wzorem [2]:

$$\text{MFPE}_n(t) = \left[\frac{1 + \frac{mn}{M(t)}}{1 - \frac{mn}{M(t)}} \right]^m \det \hat{\rho}_n(t) \rightarrow \min.$$

Kryterium Schwarzera

Bayesowskie kryterium informacyjne Schwarzera dla sygnałów stacjonarnych [39] jest opisane za pomocą formuły:

$$\text{BIC}_n = \frac{N}{2} \ln \hat{\rho}_n + \frac{n}{2} \ln N \rightarrow \min.$$

W pracy [26] zostało opisane kryterium BIC dla sygnałów niestacjonarnych:

$$\text{BIC}_n(t) = \frac{L(t)}{2} \ln \hat{\rho}_n + \frac{n}{2} \ln L(t) \rightarrow \min. \quad (6.44)$$

Wielowymiarowa wersja kryterium (6.44) przyjmuje postać:

$$\text{MBIC}_n(t) = \frac{L(t)}{2} \ln [\det \hat{\rho}_n] + \frac{nm^2}{2} \ln L(t) \rightarrow \min.$$

Kryterium Rissanena

Zaproponowane w pracy [38] kryterium MDL (ang. *Minimum Description Length*) dla sygnałów stacjonarnych wyrażone jest za pomocą wzoru:

$$\text{MDL}_n = N \ln \hat{\rho}_n + n \ln N \rightarrow \min. \quad (6.45)$$

Obok kryterium (6.45), Rissanen zaproponował również kryterium PLS (ang. *Predictive Least Squares*) oparte na sumie kwadratów błędów jednokrokowej predykcji:

$$\text{PLS}_n = \sum_{t=n+1}^N [y(t) - \hat{y}_n(t|t-1)]^2 \rightarrow \min,$$

gdzie

$$\hat{y}_n(t|t-1) = \varphi_n^T(t) \hat{\theta}_n(t-1).$$

6.5.2 Metody wyboru pasma estymacji

Metoda oparta na analizie przedziałów ufności

Metoda oparta na analizie przedziałów ufności została opisana m. in. w pracy [41]. Została ona opracowana dla przypadku estymacji skalarnego parametru $\theta(t)$. W kontekście wyboru pasma estymacji metoda ta polega na znalezieniu takiej wartości pasma κ , aby zminimalizować średnio-kwadratowy błąd estymacji:

$$E \left[\theta(t) - \hat{\theta}_{n|\kappa}(t) \right]^2 \rightarrow \min,$$

gdzie $\hat{\theta}_{n|\kappa}(t)$ jest oszacowaniem parametru $\theta(t)$ dla pasma estymacji κ .

Niech \mathcal{K} będzie zbiorem możliwych wartości pasma estymacji:

$$\mathcal{K} = \{ \kappa_s | \kappa_s = \alpha \kappa_{s-1}, s = 1, \dots, s_{\max} \},$$

gdzie $\alpha > 1$, $\kappa_0 > 0$ oraz $\kappa_s > \kappa_{s-1}$. W ogólnym przypadku optymalna wartość pasma estymacji κ_{opt} nie jest równa żadnej wartości ze zbioru \mathcal{K} . Niech $\kappa_{s^+} \in \mathcal{K}$ będzie wartością pasma estymacji zbliżoną do wartości optymalnej κ_{opt} , tj.

$$\kappa_{s^+} \approx \kappa_{\text{opt}}.$$

Wartość κ_{s^+} może zostać zapisana w postaci:

$$\kappa_{s^+} = \alpha^p \kappa_{\text{opt}},$$

gdzie p przyjmuje wartość bliską zeru.

Niech $B(t, \kappa_s)$ będzie obciążeniem estymatora $\hat{\theta}_{n|s}(t)$. Nieobciążone oszacowanie

$$\hat{\theta}_{n|s}(t) - B(t, \kappa_s)$$

jest zlokalizowane wokół prawdziwej wartości $\theta(t)$, stąd można zapisać nierówność:

$$\left| \theta(t) - (\hat{\theta}_{n|s}(t) - B(t, \kappa_s)) \right| \leq \delta \sigma(\kappa_s),$$

gdzie wielkość $\sigma(\kappa_s)$ jest średnim odchyleniem standardowym estymatora $\hat{\theta}_{n|s}(t)$.

Dla każdej wartości $\kappa_s \in \mathcal{K}$ można zdefiniować przedziały ufności postaci $D_s = [L_s, U_s]$, gdzie

$$L_s = \hat{\theta}_{n|s} - (\delta + \Delta\delta)\sigma(\kappa_s),$$

$$U_s = \hat{\theta}_{n|s} + (\delta + \Delta\delta)\sigma(\kappa_s).$$

Wielkość $\hat{\theta}_{n|s}(t)$ jest oszacowaniem $\theta(t)$, otrzymanym dla wybranego parametru $\kappa = \kappa_s$.

Dla małych wartości κ_s , gdy $s \ll s^+$, obciążenie estymatora przyjmuje niewielkie wartości, stąd $\theta(t) \in D_s$. Zachodzi wtedy:

$$D_{s-1} \cap D_s \neq \emptyset,$$

gdyż co najmniej jedna wartość ($\theta_n(t)$) należy do obu przedziałów ufności. Dla $s \gg s^+$ wariancja jest niewielka, natomiast obciążenie estymatora przyjmuje duże wartości, dlatego też zawsze istnieje taka wartość s , dla której zachodzi:

$$D_{s-1} \cap D_s = \emptyset.$$

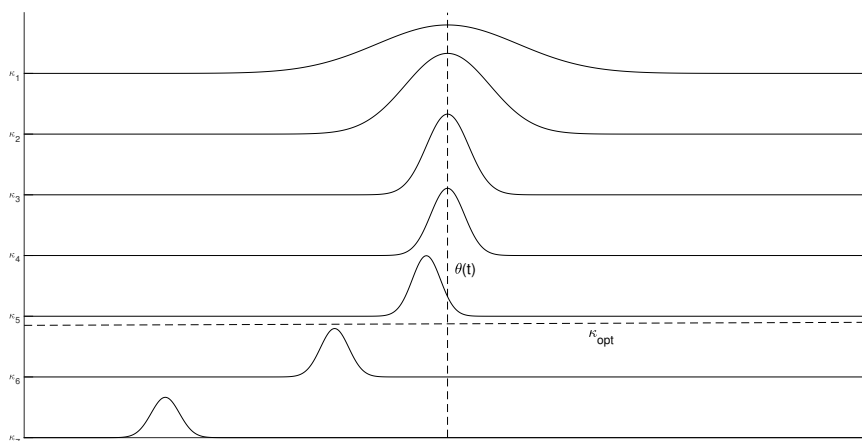


Wartość parametru $\Delta\delta$ może zostać wybrana w taki sposób, aby największa wartość s , dla której przedziały ufności D_{s-1} oraz D_s mają część wspólną, wynosiła $s = s^+$. Wtedy, przecięcie przedziałów ufności D_{s-1} oraz D_s , które występuje kiedy:

$$\left| \hat{\theta}_{n|s-1}(t) - \hat{\theta}_{n|s}(t) \right| \leq (\delta + \Delta\delta) [\sigma(\kappa_{s-1}) + \sigma(\kappa_s)],$$

służy jako wskaźnik tego, iż $s = s^+$, tj. $\kappa_s \approx \kappa_{\text{opt}}$. Metody wyboru wartości parametrów δ , $\Delta\delta$ oraz p zostały opisane m. in. w pracy [41].

Na rysunku 6.4 zilustrowano przykładowe funkcje gęstości rozkładów prawdopodobieństwa oszacowań $\hat{\theta}_{n|s}(t)$ dla różnych wartości κ_s [41].



Rysunek 6.4: Przykładowe funkcje gęstości rozkładów prawdopodobieństwa oszacowań $\hat{\theta}_{n|s}(t)$ dla różnych wartości κ_s [41].

Rozdział 7

Dwukierunkowy algorytm drabinkowy z zapominaniem wykładniczym

Wprowadzenie

Opisane w rozdziale 6 metody identyfikacji niestacjonarnych procesów autoregresyjnych oparte są na postulatcie lokalnej stacjonarności analizowanego sygnału. Ich działanie jest zwykle satysfakcjonujące w przypadkach, gdy charakterystyki procesu zmieniają się wolno w czasie. Metody te mogą jednak działać niezadowolająco, gdy charakterystyki procesu zmieniają się w sposób gwałtowny (np. skokowe zmiany parametrów).

Zaproponowane w niniejszym rozdziale podejście, oparte na łączeniu wyników otrzymanych na drodze dwukierunkowej analizy umożliwi uzyskanie dokładniejszych oszacowań parametrów sygnału także w przypadku występowania ich gwałtownych zmian.

7.1 Wariant jednowymiarowy

7.1.1 Analiza dwukierunkowa

Jeżeli dany jest sygnał $y(t)$, $t = 1, \dots, N$, to analiza dwukierunkowa sygnału $y(t)$ polega na jego niezależnym przetwarzaniu za pomocą tej samej metody, w kierunku od pierwszej próbki $y(1)$ do próbki ostatniej $y(N)$ oraz w kierunku od próbki ostatniej $y(N)$ do próbki pierwszej $y(1)$. Analiza sygnału rozpoczynająca się od próbki $y(1)$ będzie nazywana lewostronną, natomiast analiza rozpoczynająca się od próbki $y(N)$ będzie nazywana analizą prawostronną. Analiza dwukierunkowa zakłada znajomość pełnej historii przetwarzanego sygnału $y(t)$. Takie przetwarzanie sygnału jest nazywane przetwarzaniem w trybie *offline*.

Stacjonarny w szerszym sensie sygnał $y(t)$ opisany za pomocą modelu autoregresyjnego rzędu n :

$$y(t) = \sum_{i=1}^n a_{i,n} y(t-i) + v(t),$$



ma następującą równoważną reprezentację w czasie odwrotnym:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n a_{i,n} y(t+i) + \eta(t),$$

gdzie $\eta(t)$ jest szumem białym różnym od $v(t)$, ale o takiej samej wariancji:

$$\text{var}[v(t)] = \text{var}[\eta(t)] = \rho_n.$$

Równoważność powyższych reprezentacji można pokazać analizując sygnał $\tilde{y}(t)$ postaci:

$$\tilde{y}(t) = y(N-t+1).$$

Ponieważ sygnał $y(t)$ jest stacjonarny, prawdziwe jest:

$$\begin{aligned} r_{\tilde{y}}(\tau) &= \text{E}[\tilde{y}(t)\tilde{y}(t-\tau)] = \text{E}[y(t-N+1)y(t-N+1+\tau)] \\ &= r_y(-\tau) = r_y(\tau), \end{aligned} \quad (7.1)$$

gdzie $\tau = 0, 1, \dots$ jest przesunięciem czasowym. Równość (7.1) pokazuje, że sygnały $y(t)$ oraz $\tilde{y}(t)$ mają tę samą funkcję autokorelacji, a zatem opisane są za pomocą tych samych równań Yule-Walkera.

W dalszych rozważaniach równoważne reprezentacje zestawów oszacowań parametrów analizowanego sygnału, otrzymane w wyniku lewostronnej identyfikacji parametrycznej, będą zapisywane w następujący sposób:

- sekwencja oszacowań współczynników autokorelacji:

$$\widehat{\mathcal{R}}_n^-(t) = \{\widehat{r}^-(t, 0), \widehat{r}^-(t, 1), \dots, \widehat{r}^-(t, n)\},$$

- oszacowanie wariancji sygnału $y(t)$ i zestaw współczynników odbicia:

$$\widehat{\mathcal{Q}}_n^-(t) = \{\widehat{r}^-(t, 0), \widehat{k}_1^-(t), \dots, \widehat{k}_n^-(t)\}.$$

W analogiczny sposób będą zapisywane oszacowania parametrów, otrzymane w wyniku analizy prawostronnej:

$$\widehat{\mathcal{R}}_n^+(t) = \{\widehat{r}^+(t, 0), \widehat{r}^+(t, 1), \dots, \widehat{r}^+(t, n)\},$$

$$\widehat{\mathcal{Q}}_n^+(t) = \{\widehat{r}^+(t, 0), \widehat{k}_1^+(t), \dots, \widehat{k}_n^+(t)\}.$$

Dodatkowo, zbiór oszacowań współczynników autoregresji oraz wariancji szumu tworzącego będzie przedstawiany w następujący sposób:

$$\widehat{\mathcal{P}}_n(t) = \{\widehat{a}_{1,n}(t), \dots, \widehat{a}_{n,n}(t), \widehat{\rho}_n(t)\}.$$

7.1.2 Dwukierunkowy algorytm najmniejszych kwadratów z zapominaniem wykładniczym

Oszacowania współczynników autoregresji i wariancji szumu tworzącego w danej chwili czasu t mogą zostać otrzymane za pomocą dwukierunkowego algorytmu najmniejszych kwadratów z zapominaniem wykładniczym:

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_{n|\pi}(t) &= \begin{bmatrix} \widehat{a}_{1,n|\pi}(t) \\ \vdots \\ \widehat{a}_{n,n|\pi}(t) \end{bmatrix} = \arg \min_{\theta_n} \sum_{i=1}^N w_\pi(t-i) [y(i) - \varphi_n^T(i)\theta_n]^2, \\ \widehat{\rho}_{n|\pi}(t) &= \frac{1}{L_\pi(t)} \sum_{i=1}^N w_\pi(t-i) [y(i) - \varphi_n^T(i)\widehat{\theta}_{n|\pi}(t)]^2, \end{aligned} \quad (7.2)$$

gdzie wielkość:

$$w_\pi(t-i) = \begin{cases} \lambda_{\kappa^-}^{t-i} & \text{dla } i \leq t \\ \lambda_{\kappa^+}^{i-t} & \text{dla } i > t \end{cases} \quad (7.3)$$

opisuje dwustronne okno wykładnicze, $\pi = (\lambda_{\kappa^-}, \lambda_{\kappa^+})$ oznacza parę złożoną z lewostronnej i prawostronnej stałej zapomnienia $0 < \lambda_{\kappa^\pm} < 1$, a wielkość:

$$L_\pi(t) = \sum_{i=1}^t w_\pi(i) \quad (7.4)$$

oznacza efektywną szerokość okna, inaczej nazywaną efektywną pamięcią algorytmu.

Ze względu na to, że stopień niestacjonarności analizowanego sygnału zwykle jest nieznamy i zmienny w czasie, w praktyce stosuje się często podejście oparte na równoległej identyfikacji parametrycznej dla różnych wartości stałych zapomnienia $\pi = (\lambda_{\kappa^-}, \lambda_{\kappa^+})$, $\lambda_{\kappa^-}, \lambda_{\kappa^+} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{\kappa_{\max}}\}$.

W pracy [33] pokazano, że jeżeli zmienny w czasie wektor parametrów może być opisany jako proces losowy o przyrostach ortogonalnych, to dwukierunkowe okno wykładnicze daje najlepsze oszacowania parametrów w sensie średniokwadratowym spośród wszystkich symetrycznych okien. Mimo, iż rezultaty zostały otrzymane dla problemu parametrycznej identyfikacji filtrów o skończonej odpowiedzi impulsowej FIR, to jakościowe konsekwencje otrzymanych wyników wydają się bardziej ogólne.

Rozwiązanie algorytmu (7.2) można zapisać w postaci:

$$\hat{\theta}_{n|\pi}(t) = \left[\sum_{i=1}^N w_\pi(t-i) \varphi_n(i) \varphi_n^T(i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N w_\pi(t-i) y(i) \varphi_n(i) \right].$$

W przeciwieństwie do „klasycznego” algorytmu najmniejszych kwadratów z zapominaniem wykładniczym (6.23) wartość macierzy $\left[\sum_{i=1}^N w_\pi(t-i) \varphi_n(i) \varphi_n^T(i) \right]^{-1}$, podobnie jak wartość oszacowania wariancji szumu tworzącego $\hat{\rho}_{n|\pi}(t)$ nie mogą zostać obliczone w sposób rekurencyjny. Z tego powodu przedstawiony algorytm cechuje się dużą złożonością obliczeniową. Poza tym, podobnie jak w przypadku algorytmu najmniejszych kwadratów z zapominaniem wykładniczym, algorytm (7.2) również nie daje pewności, że otrzymany model jest stabilny. Ta wada jest istotą z punktu widzenia estymacji widmowej gęstości mocy. Jeżeli jedno bądź więcej zer wielomianu charakterystycznego znajduje się poza okręgiem jednostkowym, wartość widmowej gęstości mocy jest szacowana w oparciu o niestabilny model, co czyni procedurę estymacji niezgodną z założeniami.

7.1.3 Dwukierunkowy algorytm drabinkowy z zapominaniem wykładniczym

Problem estymacji parametrów modelu autoregresyjnego przy użyciu algorytmu (7.2) może zostać rozwiązany za pomocą podejścia opartego na zastosowaniu dwóch algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym: lewostronnego i prawostronnego. W przeciwieństwie do algorytmu (7.2) takie rozwiązanie gwarantuje stabilność modelu w każdej chwili czasu. Poza tym, algorytmy drabinkowe mogą zostać przedstawione w postaci rekurencyjnej zarówno względem czasu, jak i względem rzędu, co znacznie redukuje ich złożoność obliczeniową.

Dwukierunkowy algorytm drabinkowy z zapominaniem wykładniczym może zostać opisany w 4 krokach:

- oszacowanie współczynników odbicia,
- oszacowanie współczynników autokorelacji,
- fuzja modeli,
- wybór najlepiej dopasowanego modelu.



Oszacowanie współczynników odbicia

Niech sygnał $y(t)$ o długości N będzie fragmentem pojedynczej realizacji procesu niestacjonarnego. Niech $n = 1, \dots, n_{\max}$ oznacza rząd estymowanego modelu, a $\kappa = 1, \dots, \kappa_{\max}$ oznacza indeks pasma estymacji. Pierwszym krokiem dwukierunkowego algorytmu drabinkowego z zapominaniem wykładniczym jest uzyskanie dwóch zestawów (lewostronnych i prawostronnych) oszacowań współczynników odbicia oraz oszacowań współczynników autokorelacji dla zerowego przesunięcia czasowego na podstawie znajomości segmentu danych $y(t)$:

$$\hat{Q}_{n_{\max}|\kappa}^{\pm}(t) = \{\hat{r}_{\kappa}^{\pm}(t, 0), \hat{k}_{1|\kappa}^{\pm}(t), \dots, \hat{k}_{n_{\max}|\kappa}^{\pm}(t)\}, \quad t \in [1, N]. \quad (7.5)$$

To zadanie może zostać zrealizowane za pomocą następującego algorytmu rekurencyjnego:

$$\begin{aligned} & \text{for } t = 1, \dots, N \text{ do } (-) \\ & \quad \text{for } t = N, \dots, 1 \text{ do } (+) \\ & \quad p_{\kappa}^{\pm}(t) = \lambda_{\kappa} p_{\kappa}^{\pm}(t \pm 1) + y^2(t) \\ & \quad L_{\kappa}^{\pm}(t) = \lambda_{\kappa} L_{\kappa}^{\pm}(t \pm 1) + 1 \\ & \quad \hat{r}_{\kappa}^{\pm}(t, 0) = \frac{p_{\kappa}^{\pm}(t)}{L_{\kappa}^{\pm}(t)} \\ & \quad \varepsilon_{0|\kappa}^{\pm}(t) = \eta_{0|\kappa}^{\pm}(t) = \frac{y(t)}{\sqrt{p_{\kappa}^{\pm}(t)}} \\ & \quad \text{for } n = 1, \dots, \min\{n_{\max}, t\} \text{ do } (-) \\ & \quad \text{for } n = 1, \dots, \min\{n_{\max}, N - t + 1\} \text{ do } (+) \\ & \quad \quad \hat{k}_{n|\kappa}^{\pm}(t) = \varepsilon_{n-1|\kappa}^{\pm}(t) \eta_{n-1|\kappa}^{\pm}(t \pm 1) \\ & \quad \quad \quad + \hat{k}_{n|\kappa}^{\pm}(t \pm 1) \sqrt{1 - [\varepsilon_{n-1|\kappa}^{\pm}(t)]^2} \sqrt{1 - [\eta_{n-1|\kappa}^{\pm}(t \pm 1)]^2} \\ & \quad \quad \varepsilon_{n|\kappa}^{\pm}(t) = \frac{\varepsilon_{n-1|\kappa}^{\pm}(t) - \hat{k}_{n|\kappa}^{\pm}(t) \eta_{n-1|\kappa}^{\pm}(t \pm 1)}{\sqrt{1 - [\hat{k}_{n|\kappa}^{\pm}(t)]^2} \sqrt{1 - [\eta_{n-1|\kappa}^{\pm}(t \pm 1)]^2}} \\ & \quad \quad \eta_{n|\kappa}^{\pm}(t) = \frac{\eta_{n-1|\kappa}^{\pm}(t \pm 1) - \hat{k}_{n|\kappa}^{\pm}(t) \varepsilon_{n-1|\kappa}^{\pm}(t)}{\sqrt{1 - [\hat{k}_{n|\kappa}^{\pm}(t)]^2} \sqrt{1 - [\varepsilon_{n-1|\kappa}^{\pm}(t)]^2}} \\ & \quad \text{end} \\ & \quad \text{end} \end{aligned} \quad (7.6)$$

z warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0|\kappa}^{-}(0) &= \eta_{0|\kappa}^{-}(0) = 0, \\ \varepsilon_{0|\kappa}^{+}(N+1) &= \eta_{0|\kappa}^{+}(N+1) = 0, \\ L_{\kappa}^{-}(0) &= L_{\kappa}^{+}(N+1) = 0, \\ \hat{k}_{i|\kappa}^{-}(0) &= \hat{k}_{i|\kappa}^{+}(N+1) = 0, \quad i = 1, \dots, n_{\max}, \\ p_{\kappa}^{-}(0) &= p_{\kappa}^{+}(N+1) = \delta, \end{aligned}$$

gdzie δ oznacza stałą o niewielkiej wartości (np. $\delta = 10^{-2}$). Wielkości

$$\begin{aligned} L_{\kappa}^{-}(t) &= \sum_{i=0}^{t-1} \lambda_{\kappa}^i, \\ L_{\kappa}^{+}(t) &= \sum_{i=0}^{N-t} \lambda_{\kappa}^i \end{aligned} \quad (7.7)$$

określają efektywne szerokości okien adekwatne do wartości stałych zapominania.

Zmienne pomocnicze $\varepsilon_{n|\kappa}^{\pm}(t)$ oraz $\eta_{n|\kappa}^{\pm}(t)$ mogą być interpretowane jako unormowane błędy jednokrokowej predykcji w przód i w tył. Warto zauważyć, że stała zapominania λ_{κ} występuje tylko w pierwszych dwóch równaniach algorytmu (7.6).

Oszacowanie współczynników autokorelacji

Kolejnym krokiem dwukierunkowego algorytmu drabinkowego z zapominaniem wykładniczym jest konwersja zestawu $\hat{Q}_{n_{\max}|\kappa}^{\pm}(t)$ na zestaw lewostronnych i prawostronnych współczynników autokorelacji:

$$\hat{\mathcal{R}}_{n_{\max}|\kappa}^{\pm}(t) = \{\hat{r}_{\kappa}^{\pm}(t, 0), \hat{r}_{\kappa}^{\pm}(t, 1), \dots, \hat{r}_{\kappa}^{\pm}(t, n_{\max})\}, \quad t \in [1, N]. \quad (7.8)$$

Taka konwersja może zostać dokonana z wykorzystaniem algorytmu rekurencyjnego względem rzędu, opisanego równaniami:

$$\begin{aligned} &\text{for } t = 1, \dots, N \text{ do} \\ &\quad \text{for } n = 1, \dots, n_{\max} \text{ do} \\ &\quad\quad \hat{\rho}_{n|\kappa}^{\pm}(t) = (1 - [\hat{k}_{n|\kappa}^{\pm}(t)]^2) \hat{\rho}_{n-1|\kappa}^{\pm}(t) \\ &\quad\quad \hat{a}_{n,n|\kappa}^{\pm}(t) = \hat{k}_{n|\kappa}^{\pm}(t) \\ &\quad\quad \text{for } i = 1, \dots, n-1 \text{ do} \\ &\quad\quad\quad \hat{a}_{i,n|\kappa}^{\pm}(t) = \hat{a}_{i,n-1|\kappa}^{\pm}(t) - \hat{k}_{n|\kappa}^{\pm}(t) \hat{a}_{n-i,n-1|\kappa}^{\pm}(t) \\ &\quad\quad \text{end} \\ &\quad\quad \hat{r}_{n|\kappa}^{\pm}(t) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_{i,n|\kappa}^{\pm}(t) \hat{r}_{n-i|\kappa}^{\pm}(t) \\ &\quad \text{end} \\ &\text{end} \end{aligned} \quad (7.9)$$

z warunkiem początkowym

$$\hat{\rho}_{0,\kappa}^{\pm}(t) = \hat{r}_{\kappa}^{\pm}(t, 0).$$

W dalszych rozważaniach wykorzystane zostaną macierze złożone z oszacowań współczynników korelacji:

$$\mathbf{W}_{n_{\max}|\kappa}^{\pm}(t) = \begin{bmatrix} \hat{r}_{\kappa}^{\pm}(t, 0) & \hat{r}_{\kappa}^{\pm}(t, 1) & \dots & \hat{r}_{\kappa}^{\pm}(t, n_{\max}) \\ \hat{r}_{\kappa}^{\pm}(t, 1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \hat{r}_{\kappa}^{\pm}(t, 1) \\ \hat{r}_{\kappa}^{\pm}(t, n_{\max}) & \dots & \hat{r}_{\kappa}^{\pm}(t, 1) & \hat{r}_{\kappa}^{\pm}(t, 0) \end{bmatrix}.$$

Z racji tego, że zestawy współczynników $\hat{Q}_{n_{\max}|\kappa}^{-}(t)$ oraz $\hat{Q}_{n_{\max}|\kappa}^{+}(t)$ opisują stabilne modele autoregresyjne, macierze $\mathbf{W}_{n_{\max}|\kappa}^{-}(t)$ oraz $\mathbf{W}_{n_{\max}|\kappa}^{+}(t)$ są dodatnio określonymi macierzami Toeplitza.

Fuzja modeli

W celu uzyskania dwukierunkowych oszacowań parametrów modelu autoregresyjnego, analogicznych do parametrów modelu (7.2), należy dokonać połączenia (fuzji) oszacowanych wielkości otrzymanych za pomocą algorytmu (7.6). Zasadniczo, możliwe jest zastosowanie dowolnej kombinacji stałych zapominania $\pi = (\kappa^-, \kappa^+)$. Wybór wariantu symetrycznego, tj. $\kappa^- = \kappa^+$ spowoduje, że połączone zostaną wyniki otrzymane za pomocą algorytmów drabinkowych lewostronnego i prawostronnego o takich samych stałych zapominania λ_κ . W przypadku wariantu niesymetrycznego ($\kappa^- \neq \kappa^+$) wyniki otrzymane za pomocą algorytmu o większej pamięci będą łączone z wynikami otrzymanymi za pomocą algorytmu o pamięci mniejszej. Takie podejście może być użyteczne np. w przypadku występowania nagłych zmian wartości parametrów sygnału. Przedstawiona metoda została opisana w pracy [32].

Niech Π oznacza zestaw par $\pi = (\kappa^-, \kappa^+)$, gdzie $\kappa^-, \kappa^+ = 1, \dots, \kappa_{\max}$. Dla każdej pary $\pi \in \Pi$ macierze $\mathbf{W}_{n_{\max}|\kappa^-}^-(t-1)$ oraz $\mathbf{W}_{n_{\max}|\kappa^+}^+(t+1)$ mogą być połączone w następujący sposób:

$$\mathbf{W}_{n_{\max}|\pi}(t) = \mu_-(t)\mathbf{W}_{n_{\max}|\kappa^-}^-(t-1) + \mu_+(t)\mathbf{W}_{n_{\max}|\kappa^+}^+(t+1),$$

gdzie

$$\mu_\pm(t) = \frac{L_{\kappa^\pm}^\pm(t \pm 1)}{L_{\kappa^-}^-(t-1) + L_{\kappa^+}^+(t+1)} \quad (7.10)$$

lub równoważnie

$$\begin{aligned} \hat{r}_\pi(t, n) &= \mu_-(t)\hat{r}_{\kappa^-}^-(t-1, n) + \mu_+(t)\hat{r}_{\kappa^+}^+(t+1, n), \\ n &= 0, \dots, n_{\max}. \end{aligned}$$

Warto zauważyć, że podobnie jak macierze $\mathbf{W}_{n_{\max}|\kappa^-}^-(t-1)$ i $\mathbf{W}_{n_{\max}|\kappa^+}^+(t+1)$, macierz $\mathbf{W}_{n_{\max}|\pi}(t)$ również jest dodatnio określoną macierzą Toeplitza.

Uzyskane macierze $\mathbf{W}_{n_{\max}|\pi}(t)$, $t \in [1, N]$ pozwalają na otrzymanie zestawu oszacowań współczynników autoregresji $\hat{a}_{1,n|\pi}(t), \dots, \hat{a}_{n,n|\pi}(t)$ i oszacowania wariancji szumu tworzącego $\hat{\rho}_{n|\pi}(t)$ dla różnych rzędów $n = 1, \dots, n_{\max}$:

$$\hat{\mathcal{P}}_{n|\pi}(t) = \{\hat{a}_{1,n|\pi}(t), \dots, \hat{a}_{n,n|\pi}(t), \hat{\rho}_{n|\pi}(t)\}, \quad t \in [1, N]. \quad (7.11)$$

Zestaw parametrów (7.11) może zostać otrzymany poprzez rozwiązanie równań Yule-Walkera postaci:

$$\begin{bmatrix} 1, -\hat{a}_{1,n_{\max}|\pi}(t), \dots, -\hat{a}_{n_{\max}|\pi}(t) \end{bmatrix} \mathbf{W}_{n_{\max}|\pi}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_{n_{\max}|\pi}(t), 0, \dots, 0 \end{bmatrix}. \quad (7.12)$$

Równania (7.12) mogą zostać rozwiązane za pomocą algorytmu Levinsona-Durbina:

$$\begin{aligned} &\text{for } t = 1, \dots, N \text{ do} \\ &\text{for } n = 1, \dots, n_{\max} \text{ do} \\ &\quad \hat{k}_{n|\pi}(t) = \frac{\hat{r}_\pi(t, n) - \sum_{i=1}^{n-1} \hat{a}_{i,n-1|\pi}(t)\hat{r}_\pi(t, n-i)}{\hat{\rho}_{n-1|\pi}(t)} \\ &\quad \hat{a}_{n,n|\pi}(t) = \hat{k}_{n|\pi}(t) \\ &\quad \text{for } i = 1, \dots, n-1 \text{ do} \\ &\quad \quad \hat{a}_{i,n|\pi}(t) = \hat{a}_{i,n-1|\pi}(t) - \hat{k}_{i|\pi}(t)\hat{a}_{n-i,n-1}(t) \\ &\quad \text{end} \\ &\quad \hat{\rho}_{n,\pi}(t) = [1 - \hat{k}_{n|\pi}^2(t)]\hat{\rho}_{n-1|\pi}(t) \\ &\text{end} \\ &\text{end} \end{aligned} \quad (7.13)$$

z warunkiem początkowym:

$$\widehat{\rho}_{0|\pi}(t) = \widehat{r}_\pi(t, 0).$$

Wybór najlepiej dopasowanego modelu

Po wyznaczeniu oszacowań parametrów modelu autoregresyjnego dla różnych rzędów modelu n i różnych wartości par pasm estymacji π należy w każdej chwili czasu $t = 1, \dots, N$ dokonać wyboru optymalnych wartości tych wielkości. Kryterium wyboru jest oparte o zmodyfikowaną wersję kryterium końcowego błędu predykcji Akaikiego (6.43). Aby zastosować to kryterium najpierw należy obliczyć zmienne pomocnicze:

$$C_\kappa^-(t) = \sum_{i=0}^{t-1} \lambda_\kappa^{2i},$$

$$C_\kappa^+(t) = \sum_{i=0}^{N-t} \lambda_\kappa^{2i}.$$

Zmienne $C_\kappa^-(t)$ oraz $C_\kappa^+(t)$ mogą zostać obliczone w sposób rekurencyjny:

$$C_\kappa^-(t) = \lambda_\kappa^2 C_\kappa^-(t-1) + 1,$$

$$C_\kappa^+(t) = \lambda_\kappa^2 C_\kappa^+(t+1) + 1,$$

z warunkami początkowymi:

$$C_\kappa^-(0) = C_\kappa^+(N+1) = 0.$$

Dysponując wartościami $C_\kappa^-(t)$ oraz $C_\kappa^+(t)$ możemy obliczyć równoważną liczbę obserwacji dla wariantu połączonego $\pi = (\kappa^-, \kappa^+)$:

$$M_\pi(t) = \frac{[L_\pi(t)]^2}{C_{\kappa^-}^-(t) + C_{\kappa^+}^+(t)}, \quad (7.14)$$

gdzie

$$L_\pi(t) = L_{\kappa^-}^-(t) + L_{\kappa^+}^+(t). \quad (7.15)$$

Wartości pasma estymacji i rzędu modelu mogą zostać wybrane za pomocą kryterium:

$$\{\widehat{n}(t), \widehat{\pi}(t)\} = \{\widehat{n}(t), \widehat{\kappa}^-(t), \widehat{\kappa}^+(t)\} = \arg \min_{n, \pi} \text{FPE}_{n|\pi}(t),$$

gdzie

$$\text{FPE}_{n|\pi}(t) = \left[\frac{1 + \frac{n}{M_\pi(t)}}{1 - \frac{n}{M_\pi(t)}} \right] \widehat{\rho}_{n|\pi}(t). \quad (7.16)$$

Z powodu, iż oszacowania parametrów modelu autoregresyjnego $\widehat{a}_{1,n|\pi}(t), \dots, \widehat{a}_{n,n|\pi}(t)$ oraz $\widehat{\rho}_{n|\pi}(t)$ nie są funkcjami $y(t)$, wielkości te mogą zostać wykorzystane do obliczenia nieobciążonych błędów jednokrokowej predykcji:

$$\varepsilon_{n|\pi}^\pm(t) = y(t) - \sum_{i=1}^n \widehat{a}_{i,n|\pi}(t) y(t \pm i).$$

W rezultacie, obok kryterium (7.16) optymalne wartości pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu mogą zostać wybrane na podstawie kryterium:

$$\{\hat{n}(t), \hat{\pi}(t)\} = \{\hat{n}(t), \hat{\kappa}^-(t), \hat{\kappa}^+(t)\} = \arg \min_{n, \pi} \text{PE}_{n|\pi}(t),$$

gdzie

$$\text{PE}_{n|\pi}(t) = \sum_{i=-D}^D \left[\varepsilon_{n|\pi}^-(t+i) \right]^2 + \sum_{i=-D}^D \left[\varepsilon_{n|\pi}^+(t+i) \right]^2, \quad (7.17)$$

a $D \in [20, 50]$ określa szerokość lokalnego okna decyzyjnego $[t-D, t+D]$, zlokalizowanego wokół próbki o indeksie t .

Fuzja modeli - wariant uproszczony

Opisana wcześniej fuzja modeli opierała się na połączeniu lewostronnych i prawostronnych oszacowań współczynników autokorelacji. Takie podejście gwarantuje stabilność otrzymanych później modeli autoregresyjnych. Zamiast łączenia oszacowań współczynników autokorelacji można również zastosować połączenie lewostronnych i prawostronnych oszacowań współczynników odbicia, otrzymanych za pomocą algorytmów drabinkowych. Taka procedura również gwarantuje stabilność modeli, a dodatkowo redukuje złożoność obliczeniową algorytmu estymacji. Oszacowania współczynników odbicia otrzymane w pierwszym kroku opisanego algorytmu mogą zostać połączone za pomocą formuł:

$$\begin{aligned} \hat{k}_{n|\pi}(t) &= \mu_-(t) \hat{k}_{n|\kappa^-}^-(t-1) + \mu_+(t) \hat{k}_{n|\kappa^+}^+(t+1), \\ \hat{r}_{\pi}(t, 0) &= \mu_-(t) \hat{r}_{\kappa^-}^-(t-1, 0) + \mu_+(t) \hat{r}_{\kappa^+}^+(t+1, 0). \end{aligned}$$

Z uwagi na to, iż współczynniki $\hat{k}_{n|\pi}(t)$ są liniowymi kombinacjami współczynników $\hat{k}_{n|\kappa^-}^-(t-1)$ i $\hat{k}_{n|\kappa^+}^+(t+1)$ prawdziwe jest, że

$$\left| \hat{k}_{n|\pi}(t) \right| < 1, \quad t \in [1, N],$$

tj. modele

$$\hat{\mathcal{Q}}_{n|\pi}(t) = \{\hat{r}_{\pi}(t, 0), \hat{k}_{1|\pi}(t), \dots, \hat{k}_{n|\pi}(t)\}, \quad t \in [1, N],$$

$$n = 1, \dots, n_{\max}$$

są stabilne w każdej chwili czasu $t = 1, \dots, N$.

Opierając się na zestawie parametrów $\hat{\mathcal{Q}}_{n|\pi}(t)$ można wyznaczyć oszacowania współczynników modeli autoregresyjnych za pomocą następującego algorytmu rekurencyjnego:

```

for  $t = 1, \dots, N$  do
  for  $n = 1, \dots, n_{\max}$  do
     $\hat{\rho}_{n,\pi}(t) = [1 - \hat{k}_{n|\pi}^2(t)] \hat{\rho}_{n-1|\pi}(t)$ 
     $\hat{a}_{n,n|\pi}(t) = \hat{k}_{n|\pi}(t)$ 
    for  $i = 1, \dots, n-1$  do
       $\hat{a}_{i,n|\pi}(t) = \hat{a}_{i,n-1|\pi}(t) - \hat{k}_{i|\pi}(t) \hat{a}_{n-i,n-1}(t)$ 
    end
  end
end

```


z warunkiem początkowym:

$$\hat{\rho}_{0|\pi}(t) = \hat{r}_\pi(t, 0).$$

Podobnie jak w kroku nr 4 opisanego algorytmu, optymalne wartości pasma estymacji i rzędu modelu mogą zostać wybrane na podstawie kryterium końcowego błędu predykcji (7.16).

7.1.4 Wariant uwzględniający próbkę „centralną”

W opisanym dwukierunkowym algorytmie drabinkowym oszacowania parametrów modelu autoregresyjnego w każdej chwili czasu t nie zależą (w deterministycznym sensie) od „centralnej” próbki sygnału $y(t)$. Można dokonać niewielkiej modyfikacji przedstawionego algorytmu w taki sposób, aby oszacowania parametrów modelu były zależne (w deterministycznym sensie) od próbki „centralnej”. Metoda w takim wariantcie została opisana w pracy [34]. Modyfikacja dotyczy kroku, w którym następuje wyznaczenie oszacowań dwukierunkowych współczynników autokorelacji:

$$\hat{\mathcal{R}}_{n_{\max}|\pi}(t) = \{\hat{r}_\pi(t, 0), \hat{r}_\pi(t, 1), \dots, \hat{r}_\pi(t, n_{\max})\},$$

które mogą zostać otrzymane za pomocą formuły:

$$\hat{r}_\pi(t, n) = \mu_\pi(t) \hat{r}_{\kappa^-}^-(t, n) + [1 - \mu_\pi(t)] \hat{r}_{\kappa^+}^+(t, n), \quad n = 0, 1, \dots, n_{\max},$$

gdzie

$$\mu_\pi(t) = \frac{L_{\kappa^-}^-(t)}{L_{\kappa^-}^-(t) + L_{\kappa^+}^+(t)}, \quad (7.18)$$

a zmienne $L_{\kappa^\pm}^\pm(t)$ są efektywnymi szerokościami okien (7.7).

Dysponując oszacowaniami współczynników $\hat{\mathcal{R}}_{n_{\max}|\pi}(t)$, możemy wyznaczyć zestaw oszacowań parametrów $\hat{\mathcal{P}}_{n|\pi}(t)$ za pomocą algorytmu (7.13).

7.2 Wariant wielowymiarowy

7.2.1 Analiza dwukierunkowa

Analogicznie do przypadku jednowymiarowego, dwukierunkowa analiza wielowymiarowego sygnału $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t)]^T$, $t \in [1, N]$ polega na jego niezależnym przetwarzaniu z wykorzystaniem tej samej metody, rozpoczynając od pierwszej próbki $\mathbf{y}(1)$ i kończąc na próbce ostatniej $\mathbf{y}(N)$ oraz w kierunku odwrotnym.

Jak zapisano w rozdziale 3.2.1, każdemu stacjonarnemu wielowymiarowemu sygnałowi autoregresyjnemu, opisanemu modelem rzędu n :

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{i,n} \mathbf{y}(t-i) + \mathbf{v}_n(t),$$

odpowiada równoważny model:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{i,n} \mathbf{y}(t+i) + \boldsymbol{\eta}_n(t).$$

W dalszej części pracy, analogicznie do przypadku jednowymiarowego, reprezentacje oszacowań macierzy parametrów analizowanego sygnału wielowymiarowego, otrzymane za pomocą lewostronnych metod identyfikacji, będą oznaczane następująco:

- sekwencja oszacowań macierzy współczynników autokorelacji:

$$\widehat{\mathbf{R}}_n^-(t) = \{\widehat{\mathbf{R}}^-(t, 0), \widehat{\mathbf{R}}^-(t, 1), \dots, \widehat{\mathbf{R}}^-(t, n)\},$$

- oszacowanie macierzy kowariancji sygnału $\mathbf{y}(t)$ i zestaw macierzy współczynników odbicia:

$$\widehat{\mathbf{Q}}_n^-(t) = \{\widehat{\mathbf{R}}^-(t, 0), \widehat{\mathbf{K}}_1^-(t), \dots, \widehat{\mathbf{K}}_n^-(t)\}.$$

Z kolei prawostronne zestawy oszacowań macierzy parametrów będą zapisywane jako:

$$\widehat{\mathbf{R}}_n^+(t) = \{\widehat{\mathbf{R}}^+(t, 0), \widehat{\mathbf{R}}^+(t, 1), \dots, \widehat{\mathbf{R}}^+(t, n)\},$$

$$\widehat{\mathbf{Q}}_n^+(t) = \{\widehat{\mathbf{R}}^+(t, 0), \widehat{\mathbf{K}}_1^+(t), \dots, \widehat{\mathbf{K}}_n^+(t)\}.$$

Dodatkowo, zestaw oszacowań macierzy współczynników autoregresji oraz macierzy kowariancji szumu tworzącego będzie przedstawiony w postaci:

$$\widehat{\mathbf{P}}_n(t) = \{\widehat{\mathbf{A}}_{1,n}(t), \dots, \widehat{\mathbf{A}}_{n,n}(t), \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n(t)\}$$

oraz równoważnie

$$\widehat{\mathbf{P}}_n^*(t) = \{\widehat{\mathbf{B}}_{1,n}(t), \dots, \widehat{\mathbf{B}}_{n,n}(t), \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_n(t)\}.$$

7.2.2 Dwukierunkowy algorytm najmniejszych kwadratów z zapominaniem wykładniczym

Oszacowania macierzy parametrów wielowymiarowego modelu autoregresyjnego w danej chwili czasu t , $t \in [1, N]$ mogą zostać otrzymane za pomocą wielowymiarowej wersji dwukierunkowego algorytmu najmniejszych kwadratów z zapominaniem wykładniczym (7.2):

$$\{\widehat{\mathbf{A}}_{1,n|\pi}(t), \dots, \widehat{\mathbf{A}}_{n,n|\pi}(t)\} = \arg \min_{\{\mathbf{A}_{1,n}, \dots, \mathbf{A}_{n,n}\}} \sum_{i=1}^N w_\pi(t-i) \left[\mathbf{y}(i) - \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{i,n} \mathbf{y}(t-i) \right]^T \left[\mathbf{y}(i) - \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{i,n} \mathbf{y}(t-i) \right], \quad (7.19)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{n|\pi}(t) = \frac{1}{L_\pi(t)} \sum_{i=1}^N w_\pi(t-i) \left[\mathbf{y}(i) - \sum_{i=1}^n \widehat{\mathbf{A}}_{i,n}(t) \mathbf{y}(t-i) \right] \left[\mathbf{y}(i) - \sum_{i=1}^n \widehat{\mathbf{A}}_{i,n}(t) \mathbf{y}(t-i) \right]^T,$$

gdzie $w_\pi(t-i)$ są współczynnikami okna wykładniczego (7.3), $\pi = (\lambda_{\kappa^-}, \lambda_{\kappa^+})$ oznacza parę złożoną z lewostronnej i prawostronnej stałej zapominania $0 < \lambda_{\kappa^\pm} < 1$, a wielkość $L_\pi(t)$ jest efektywną szerokością okna (7.4).

Wektor oszacowań macierzy współczynników regresji:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{n|\pi}(t) = \text{vec}\{[\widehat{\mathbf{A}}_{1,n|\pi}(t) | \dots | \widehat{\mathbf{A}}_{n,n|\pi}(t)]^T\},$$

otrzymany za pomocą algorytmu (7.19) przyjmuje postać:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{n|\pi}(t) = \left[\sum_{i=1}^N w_\pi(t-i) \boldsymbol{\Psi}_n(i) \boldsymbol{\Psi}_n^T(i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N w_\pi(t-i) \boldsymbol{\Psi}_n(i) \mathbf{y}(i) \right].$$

Podobnie jak w przypadku wersji jednowymiarowej, ani macierz $\left[\sum_{i=1}^N w_\pi(t-i) \boldsymbol{\Psi}_n(i) \boldsymbol{\Psi}_n^T(i) \right]^{-1}$ ani macierz kowariancji szumu tworzącego $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{n|\pi}(t)$ nie mogą zostać obliczone w sposób rekurencyjny, co czyni procedurę złożoną obliczeniowo. Dodatkowo, algorytm (7.19) nie daje gwarancji stabilności otrzymanego modelu autoregresyjnego.

7.2.3 Dwukierunkowy algorytm drabinkowy z zapominaniem wykładniczym

Oszacowania macierzy parametrów modelu, otrzymanego za pomocą algorytmu (7.19) mogą zostać uzyskane za pomocą algorytmu opartego na kombinacji wyników otrzymanych za pomocą lewostronnego i prawostronnego wielowymiarowego algorytmu drabinkowego. Takie rozwiązanie zapewnia stabilność otrzymanych modeli w każdej chwili czasu, a dodatkowo algorytm może zostać przedstawiony w postaci rekurencyjnej, co zmniejsza złożoność obliczeniową metody.

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, wielowymiarowa wersja dwukierunkowego algorytmu drabinkowego z zapominaniem wykładniczym może zostać opisana w 4 krokach:

- oszacowanie macierzy współczynników odbicia,
- oszacowanie macierzy współczynników autokorelacji,
- fuzja modeli,
- wybór najlepiej dopasowanego modelu.

Oszacowanie macierzy współczynników odbicia

Niech wielowymiarowy sygnał $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t)]^T$, $t = 1, \dots, N$ będzie fragmentem pojedynczej realizacji wielowymiarowego procesu niestacjonarnego. Niech wielkości $n = 1, \dots, n_{\max}$ i $\kappa = 1, \dots, \kappa_{\max}$ oznaczają odpowiednio rząd modelu i indeks pasma estymacji. Uzyskanie lewostronnego i prawostronnego zestawu oszacowań macierzy współczynników odbicia i oszacowań macierzy współczynników autokorelacji dla zerowego przesunięcia czasowego:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{n_{\max}|\kappa}^{\pm}(t) = \{\hat{\mathbf{R}}_{\kappa}^{\pm}(t, 0), \hat{\mathbf{K}}_{1|\kappa}^{\pm}(t), \dots, \hat{\mathbf{K}}_{n_{\max}|\kappa}^{\pm}(t)\},$$

może zostać zrealizowane za pomocą algorytmu rekurencyjnego względem czasu i rzędu:

$$\begin{aligned} & \text{for } t = 1, \dots, N \text{ do } (-) \\ & \text{for } t = N, \dots, 1 \text{ do } (+) \\ & \mathbf{P}_{\kappa}^{\pm}(t) = \lambda_{\kappa} \mathbf{P}_{\kappa}^{\pm}(t \pm 1) + \mathbf{y}(t) \mathbf{y}^T(t) \\ & L_{\kappa}^{\pm}(t) = \lambda_{\kappa} L_{\kappa}^{\pm}(t \pm 1) + 1 \\ & \hat{\mathbf{R}}_{\kappa}^{\pm}(t, 0) = \frac{1}{L_{\kappa}^{\pm}(t)} \mathbf{P}_{\kappa}^{\pm}(t) \\ & \boldsymbol{\varepsilon}_{0|\kappa}^{\pm}(t) = \boldsymbol{\eta}_{0|\kappa}^{\pm}(t) = \left[\mathbf{P}_{\kappa}^{\pm}(t) \right]^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}(t) \\ & \text{for } n = 1, \dots, \min\{n_{\max}, t\} \text{ do } (-) \\ & \text{for } n = 1, \dots, \min\{n_{\max}, N - t + 1\} \text{ do } (+) \\ & \hat{\mathbf{K}}_{n|\kappa}^{\pm}(t) = \mathbf{F} \left[\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1|\kappa}^{\pm}(t), \hat{\mathbf{K}}_{n|\kappa}^{\pm}(t \pm 1), \boldsymbol{\eta}_{n-1|\kappa}^{\pm}(t \pm 1) \right] \\ & \boldsymbol{\varepsilon}_{n|\kappa}^{\pm}(t) = \mathbf{g} \left[\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1|\kappa}^{\pm}(t), \hat{\mathbf{K}}_{n|\kappa}^{\pm}(t), \boldsymbol{\eta}_{n-1|\kappa}^{\pm}(t \pm 1) \right] \\ & \boldsymbol{\eta}_{n|\kappa}^{\pm}(t) = \mathbf{g} \left[\boldsymbol{\eta}_{n-1|\kappa}^{\pm}(t \pm 1), \left[\hat{\mathbf{K}}_{n|\kappa}^{\pm}(t) \right]^T, \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1|\kappa}^{\pm}(t) \right] \\ & \text{end} \\ & \text{end} \end{aligned} \tag{7.20}$$

gdzie

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{I}_m - \mathbf{x}\mathbf{x}^T)^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y} (\mathbf{I}_m - \mathbf{z}\mathbf{z}^T)^{\frac{T}{2}} + \mathbf{x}\mathbf{z}^T,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}, \mathbf{z}) = \frac{(\mathbf{I}_m - \mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x} - \mathbf{Y}\mathbf{z})}{\sqrt{1 - \mathbf{z}^T \mathbf{z}}},$$

z warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0|\kappa}^- (0) &= \varepsilon_{0|\kappa}^+ (N+1), \\ \boldsymbol{\eta}_{i|\kappa}^- (0) &= \boldsymbol{\eta}_{i|\kappa}^+ (N+1) = \mathbf{0}_m \quad i = 1, \dots, n_{\max}, \\ L_{\kappa}^- (0) &= L_{\kappa}^+ (N+1) = 0, \\ \widehat{\mathbf{K}}_{i|\kappa}^- (0) &= \widehat{\mathbf{K}}_{i|\kappa}^+ (N+1) = \mathbf{0}_m, \quad i = 1, \dots, n_{\max}, \\ \mathbf{P}_{\kappa}^- (0) &= \mathbf{P}_{\kappa}^+ (N+1) = \delta \mathbf{I}_m, \end{aligned}$$

gdzie δ oznacza stałą o niewielkiej wartości (np. $\delta = 10^{-2}$). Wielkości $L_{\kappa}^- (t)$ oraz $L_{\kappa}^+ (t)$ są efektywnymi szerokościami okien (7.7). Zmienne pomocnicze $\varepsilon_{n|\kappa}^{\pm} (t)$ oraz $\boldsymbol{\eta}_{n|\kappa}^{\pm} (t)$ mogą być interpretowane jako unormowane błędy jednokrokowej predykcji w przód i w tył. Podobnie jak w wersji jednowymiarowej, stała zapominania λ_{κ} występuje tylko w pierwszych dwóch równaniach algorytmu (7.20).

Oszacowanie macierzy współczynników autokorelacji

Konwersja zestawu współczynników $\widehat{\mathcal{Q}}_{n_{\max}|\kappa}^{\pm} (t)$ na zestaw prawostronnych i lewostronnych oszacowań macierzy współczynników autokorelacji:

$$\widehat{\mathbf{R}}_{n_{\max}|\kappa}^{\pm} (t) = \{\widehat{\mathbf{R}}_{\kappa}^{\pm} (t, 0), \widehat{\mathbf{R}}_{\kappa}^{\pm} (t, 1), \dots, \widehat{\mathbf{R}}_{\kappa}^{\pm} (t, n_{\max})\}, \quad t \in [1, N],$$

może zostać dokonana za pomocą wielowymiarowej wersji algorytmu (7.9):

```

for  $t = 1, \dots, N$  do
  for  $n = 1, \dots, n_{\max}$  do
     $\Delta_{n|\kappa}^{\pm} (t) = [\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{n-1|\kappa}^{\pm} (t)]^{\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{K}}_{n|\kappa}^{\pm} (t) [\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1|\kappa}^{\pm} (t)]^{-\frac{1}{2}}$ 
     $\nabla_{n|\kappa}^{\pm} (t) = [\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1|\kappa}^{\pm} (t)]^{\frac{1}{2}} [\widehat{\mathbf{K}}_{n|\kappa}^{\pm} (t)]^T [\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{n-1|\kappa}^{\pm} (t)]^{-\frac{1}{2}}$ 
     $\widehat{\mathbf{A}}_{n,n|\kappa}^{\pm} (t) = \Delta_{n|\kappa}^{\pm} (t)$ 
     $\widehat{\mathbf{B}}_{n,n|\kappa}^{\pm} (t) = \nabla_{n|\kappa}^{\pm} (t)$ 
    for  $i = 1, \dots, n-1$  do
       $\widehat{\mathbf{A}}_{i,n|\kappa}^{\pm} (t) = \widehat{\mathbf{A}}_{i,n-1|\kappa}^{\pm} (t) - \Delta_{n|\kappa}^{\pm} (t) \widehat{\mathbf{B}}_{n-i,n-1|\kappa}^{\pm} (t)$ 
       $\widehat{\mathbf{B}}_{i,n|\kappa}^{\pm} (t) = \widehat{\mathbf{B}}_{i,n-1|\kappa}^{\pm} (t) - \nabla_{n|\kappa}^{\pm} (t) \widehat{\mathbf{A}}_{n-i,n-1|\kappa}^{\pm} (t)$ 
    end
     $[\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{n|\kappa}^{\pm} (t)]^{\frac{1}{2}} = [\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{n-1|\kappa}^{\pm} (t)]^{\frac{1}{2}} \left\{ \mathbf{I}_m - \widehat{\mathbf{K}}_{n|\kappa}^{\pm} (t) [\widehat{\mathbf{K}}_{n|\kappa}^{\pm} (t)]^T \right\}^{\frac{1}{2}}$ 
     $[\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{n|\kappa}^{\pm} (t)]^{\frac{1}{2}} = [\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1|\kappa}^{\pm} (t)]^{\frac{1}{2}} \left\{ \mathbf{I}_m - [\widehat{\mathbf{K}}_{n|\kappa}^{\pm} (t)]^T \widehat{\mathbf{K}}_{n|\kappa}^{\pm} (t) \right\}^{\frac{1}{2}}$ 
     $\widehat{\mathbf{R}}_{n|\kappa}^{\pm} (t) = \sum_{i=1}^n \widehat{\mathbf{A}}_{i,n|\kappa}^{\pm} (t) \widehat{\mathbf{R}}_{n-i|\kappa}^{\pm} (t).$ 
  end
end
end
```

z warunkiem początkowym:

$$\left[\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{0,\kappa}^{\pm}(t)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{0,\kappa}^{\pm}(t)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\widehat{\mathbf{R}}_{\kappa}^{\pm}(t, 0)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

W dalszych rozważaniach wykorzystane zostaną macierze złożone z oszacowań macierzy współczynników autokorelacji:

$$\mathbf{W}_{n_{\max}|\kappa}^{\pm}(t) = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}_{\kappa}^{\pm}(t, 0) & \widehat{\mathbf{R}}_{\kappa}^{\pm}(t, 1) & \dots & \widehat{\mathbf{R}}_{\kappa}^{\pm}(t, n_{\max}) \\ \left[\widehat{\mathbf{R}}_{\kappa}^{\pm}(t, 1)\right]^T & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \widehat{\mathbf{R}}_{\kappa}^{\pm}(t, 1) \\ \left[\widehat{\mathbf{R}}_{\kappa}^{\pm}(t, n_{\max})\right]^T & \dots & \left[\widehat{\mathbf{R}}_{\kappa}^{\pm}(t, 1)\right]^T & \widehat{\mathbf{R}}_{\kappa}^{\pm}(t, 0) \end{bmatrix},$$

które są dodatnio określonymi macierzami Toeplitza, gdyż zestawy współczynników $\widehat{\mathbf{Q}}_{n_{\max}|\kappa}^{-}(t)$ oraz $\widehat{\mathbf{Q}}_{n_{\max}|\kappa}^{+}(t)$ opisują stabilne modele autoregresyjne.

Fuzja modeli

Niech Π oznacza zestaw par $\pi = (\kappa^{-}, \kappa^{+})$. Dla każdej pary $\pi \in \Pi$ macierze $\mathbf{W}_{n_{\max}|\kappa^{-}}^{-}(t-1)$ oraz $\mathbf{W}_{n_{\max}|\kappa^{+}}^{+}(t+1)$ mogą zostać połączone za pomocą formuły:

$$\mathbf{W}_{n_{\max}|\pi}(t) = \mu_{-}(t)\mathbf{W}_{n_{\max}|\kappa^{-}}^{-}(t-1) + \mu_{+}(t)\left[\mathbf{W}_{n_{\max}|\kappa^{+}}^{+}(t+1)\right]^T, \quad (7.21)$$

gdzie wielkości $\mu_{\pm}(t)$ są zdefiniowane wzorem (7.10). Macierz $\mathbf{W}_{n_{\max}|\pi}(t)$ jest dodatnio określoną macierzą Toeplitza, a jej poszczególne bloki przyjmują postać:

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\pi}(t, n) = \mu_{-}(t)\widehat{\mathbf{R}}_{\kappa^{-}}^{-}(t, n) + \mu_{+}(t)\left[\widehat{\mathbf{R}}_{\kappa^{+}}^{+}(t, n)\right]^T. \quad (7.22)$$

W formułach (7.21) oraz (7.22) składniki $\mathbf{W}_{n_{\max}|\kappa^{+}}^{+}(t)$ oraz $\widehat{\mathbf{R}}_{\kappa^{+}}^{+}(t, n)$ są poddane operacji transpozycji, gdyż stosując prawostronny algorytm estymacji, lokalna wartość oszacowania macierzy współczynników autokorelacji wynosi:

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t+n)\right] = \mathbf{R}_{-n}(t) = \mathbf{R}_n^T(t).$$

Zestawy oszacowań macierzy współczynników autokorelacji oraz oszacowania macierzy kowariancji szumu tworzącego:

$$\widehat{\mathcal{P}}_{n|\pi}(t) = \{\widehat{\mathbf{A}}_{1,n|\pi}(t), \dots, \widehat{\mathbf{A}}_{n,n|\pi}(t), \widehat{\boldsymbol{\rho}}_{n|\pi}(t)\}$$

oraz

$$\widehat{\mathcal{P}}_{n|\pi}^{*}(t) = \{\widehat{\mathbf{B}}_{1,n|\pi}(t), \dots, \widehat{\mathbf{B}}_{n,n|\pi}(t), \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{n|\pi}(t)\}$$

mogą zostać wyznaczone poprzez rozwiązanie wielowymiarowych równań Yule-Walkera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & -\widehat{\mathbf{A}}_{1,n|\pi}(t) & \dots & -\widehat{\mathbf{A}}_{n,n|\pi}(t) \\ -\widehat{\mathbf{B}}_{n,n|\pi}(t) & \dots & -\widehat{\mathbf{B}}_{1,n|\pi}(t) & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \mathbf{W}_{n_{\max}|\pi}(t) = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\rho}}_{n|\pi}(t) & \mathbf{O}_m & \dots & \mathbf{O}_m \\ \mathbf{O}_m & \dots & \mathbf{O}_m & \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{n|\pi}(t) \end{bmatrix}.$$

Powyższe równania mogą zostać rozwiązane za pomocą algorytmu Whittle'a-Wiggins'a-Robinsona:

```

for  $t = 1, \dots, N$  do
  for  $n = 1, \dots, n_{\max}$  do
     $\mathbf{V}_{n|\pi}(t) = \widehat{\mathbf{R}}_{n|\pi}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \widehat{\mathbf{A}}_{i,n-1|\pi}(t) \widehat{\mathbf{R}}_{n-i|\pi}(t)$ 
     $\Delta_{n|\pi}(t) = \mathbf{V}_{n|\pi}(t) \widehat{\sigma}_{n-1|\pi}^{-1}(t)$ 
     $\nabla_{n|\pi}(t) = \mathbf{V}_{n|\pi}^T(t) \widehat{\rho}_{n-1|\pi}^{-1}(t)$ 
     $\widehat{\mathbf{A}}_{n,n|\pi}(t) = \Delta_{n|\pi}(t)$ 
     $\widehat{\mathbf{B}}_{n,n|\pi}(t) = \nabla_{n|\pi}(t)$ 
    for  $i = 1, \dots, n-1$  do
       $\widehat{\mathbf{A}}_{i,n|\pi}(t) = \widehat{\mathbf{A}}_{i,n-1|\pi}(t) - \Delta_{n|\pi}(t) \widehat{\mathbf{B}}_{n-i,n-1|\pi}(t)$ 
       $\widehat{\mathbf{B}}_{i,n|\pi}^{\pm}(t) = \widehat{\mathbf{B}}_{i,n-1|\pi}^{\pm}(t) - \nabla_{n|\pi}^{\pm}(t) \widehat{\mathbf{A}}_{n-i,n-1|\pi}^{\pm}(t)$ 
    end
     $\widehat{\rho}_{n|\pi}(t) = \widehat{\rho}_{n-1|\pi}(t) - \Delta_{n|\pi}(t) \mathbf{V}_{n|\pi}^T(t)$ 
     $\widehat{\sigma}_{n|\pi}(t) = \widehat{\sigma}_{n-1|\pi}(t) - \nabla_{n|\pi}(t) \mathbf{V}_{n|\pi}(t)$ 
  end
end

```

z warunkiem początkowym:

$$\widehat{\rho}_{0|\pi}(t) = \widehat{\sigma}_{0|\pi}(t) = \widehat{\mathbf{R}}_{0|\pi}(t).$$

Wybór najlepiej dopasowanego modelu

Analogicznie do przypadku jednowymiarowego, optymalne wartości pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu mogą zostać wybrane stosując kryterium końcowego błędu predykcji dla wariantu wielowymiarowego:

$$\{\widehat{n}(t), \widehat{\pi}(t)\} = \{\widehat{n}(t), \widehat{\kappa}^-(t), \widehat{\kappa}^+(t)\} = \arg \min_{n, \pi} \text{MFPE}_{n|\pi}(t),$$

gdzie

$$\text{MFPE}_{n|\pi}(t) = \left[\frac{1 + \frac{mn}{M_{\pi}(t)}}{1 - \frac{mn}{M_{\pi}(t)}} \right]^m \det \left[\widehat{\rho}_{n|\pi}(t) \right], \quad (7.23)$$

a wielkość $M_{\pi}(t)$ jest zdefiniowana za pomocą formuły (7.14).

Oprócz kryterium (7.23) optymalne wartości pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu mogą zostać wybrane stosując wielowymiarową wersję kryterium (7.17):

$$\{\widehat{n}(t), \widehat{\pi}(t)\} = \{\widehat{n}(t), \widehat{\kappa}^-(t), \widehat{\kappa}^+(t)\} = \arg \min_{n, \pi} \det \left[\text{MPE}_{n|\pi}(t) \right], \quad (7.24)$$

gdzie

$$\text{MPE}_{n|\pi}(t) = \sum_{i=-D}^D \varepsilon_{n|\pi}^-(t+i) \left[\varepsilon_{n|\pi}^-(t+i) \right]^T + \sum_{i=-D}^D \varepsilon_{n|\pi}^+(t+i) \left[\varepsilon_{n|\pi}^+(t+i) \right]^T,$$

wielkość $D \in [20, 50]$ określa szerokość lokalnego okna decyzyjnego $[t - D, t + D]$, zlokalizowanego wokół próbki o indeksie t , a $\varepsilon_{n|\pi}^\pm(t \pm i)$ są błędami jednokrokowej predykcji:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n|\pi}^-(t) &= \mathbf{y}(t) - \sum_{i=1}^n \widehat{\mathbf{A}}_{i,n|\pi}(t) \mathbf{y}(t-i), \\ \varepsilon_{n|\pi}^+(t) &= \mathbf{y}(t) - \sum_{i=1}^n \widehat{\mathbf{B}}_{i,n|\pi}(t) \mathbf{y}(t+1).\end{aligned}$$

Zamiast kryterium (7.24) można również stosować kryterium o mniejszej złożoności obliczeniowej:

$$\{\widehat{n}(t), \widehat{\pi}(t)\} = \{\widehat{n}(t), \widehat{\kappa}^-(t), \widehat{\kappa}^+(t)\} = \arg \min_{n,\pi} \text{tr} \left[\text{MPE}_{n|\pi}(t) \right].$$

Fuzja modeli - wariant uproszczony

W uproszczonym wariancie fuzji modeli, lewostronne i prawostronne oszacowania macierzy współczynników odbicia oraz oszacowania macierzy autokorelacji dla zerowego przesunięcia czasowego mogą zostać połączone za pomocą formuł:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{K}}_{n|\pi}(t) &= \mu_-(t) \widehat{\mathbf{K}}_{n|\kappa^-}^-(t) + \mu_+(t) \left[\widehat{\mathbf{K}}_{n|\kappa^+}^+(t) \right]^T, \\ \widehat{\mathbf{R}}_{\pi}(t, 0) &= \mu_-(t) \widehat{\mathbf{R}}_{\kappa^-}^-(t, 0) + \mu_+(t) \widehat{\mathbf{R}}_{\kappa^+}^+(t, 0).\end{aligned}$$

Stosując nierówność trójkąta dla normy spektralnej otrzymujemy:

$$s_{\max} \left[\widehat{\mathbf{K}}_{n|\pi}(t) \right] \leq \mu_-(t) s_{\max} \left[\widehat{\mathbf{K}}_{n|\kappa^-}^-(t) \right] + \mu_+(t) s_{\max} \left[\widehat{\mathbf{K}}_{n|\kappa^+}^+(t) \right] \leq 1,$$

co pokazuje, że modele

$$\widehat{\mathcal{Q}}_{n|\pi}(t) = \{ \widehat{\mathbf{R}}_{\pi}(t, 0), \widehat{\mathbf{K}}_{1|\pi}(t), \dots, \widehat{\mathbf{K}}_{n|\pi}(t) \}$$

są stabilne dla każdej chwili czasu $t \in [1, N]$.

Oszacowania macierzy współczynników modeli autoregresyjnych, wyznaczone w oparciu o zestawy parametrów $\widehat{\mathcal{Q}}_{n_{\max}|\pi}(t)$, mogą zostać otrzymane za pomocą algorytmu:

```
for t = 1, ..., N do
  for n = 1, ..., n_max do
     $\Delta_{n|\pi}(t) = \widehat{\rho}_{n-1|\pi}^{\frac{1}{2}}(t) \widehat{\mathbf{K}}_{n|\pi}(t) \widehat{\sigma}_{n-1|\pi}^{-\frac{1}{2}}(t)$ 
     $\nabla_{n|\pi}(t) = \widehat{\sigma}_{n-1|\pi}^{\frac{1}{2}}(t) \widehat{\mathbf{K}}_{n|\pi}^T(t) \widehat{\rho}_{n-1|\pi}^{-\frac{1}{2}}(t)$ 
     $\widehat{\mathbf{A}}_{n,n|\pi}(t) = \Delta_{n|\pi}(t)$ 
     $\widehat{\mathbf{B}}_{n,n|\pi}(t) = \nabla_{n|\pi}(t)$ 
    for i = 1, ..., n-1 do
       $\widehat{\mathbf{A}}_{i,n|\pi}(t) = \widehat{\mathbf{A}}_{i,n-1|\pi}(t) - \Delta_{n|\pi}(t) \widehat{\mathbf{B}}_{n-i,n-1|\pi}(t)$ 
       $\widehat{\mathbf{B}}_{i,n|\pi}(t) = \widehat{\mathbf{B}}_{i,n-1|\pi}(t) - \nabla_{n|\pi}(t) \widehat{\mathbf{A}}_{n-i,n-1|\pi}(t)$ 
    end
     $\widehat{\rho}_{n|\pi}^{\frac{1}{2}}(t) = \widehat{\rho}_{n-1|\pi}^{\frac{1}{2}}(t) \left[ \mathbf{I}_m - \widehat{\mathbf{K}}_{n|\pi}(t) \widehat{\mathbf{K}}_{n|\pi}^T(t) \right]^{\frac{1}{2}}$ 
     $\widehat{\sigma}_{n|\pi}^{\frac{1}{2}}(t) = \widehat{\sigma}_{n-1|\pi}^{\frac{1}{2}}(t) \left[ \mathbf{I}_m - \widehat{\mathbf{K}}_{n|\pi}^T(t) \widehat{\mathbf{K}}_{n|\pi}(t) \right]^{\frac{1}{2}}$ 
  end
end
```

z warunkiem początkowym:

$$\hat{\rho}_{0|\pi}^{\frac{1}{2}}(t) = \hat{\sigma}_{0|\pi}^{\frac{1}{2}}(t) = \hat{\mathbf{R}}_{n|\pi}^{\frac{1}{2}}(t, 0).$$

7.2.4 Wariant uwzględniający próbkę „centralną”

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, można dokonać niewielkiej modyfikacji przedstawionego algorytmu w taki sposób, aby oszacowania parametrów modelu były zależne (w deterministycznym sensie) od próbki „centralnej”. Przedstawiona metoda w wariacie wielowymiarowym została opisana w pracy [35].

W każdej chwili czasu t macierze oszacowań współczynników autokorelacji:

$$\hat{\mathcal{R}}_{n_{\max}|\pi}(t) = \{\hat{\mathbf{R}}_{\pi}(t, 0), \hat{\mathbf{R}}_{\pi}(t, 1), \dots, \hat{\mathbf{R}}_{\pi}(t, n_{\max})\}$$

mogą zostać wyznaczone za pomocą formuły:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\pi}(t, n) = \mu_{\pi}(t)\hat{\mathbf{R}}_{\kappa^{-}}^{-}(t, n) + [1 - \mu_{\pi}(t)]\hat{\mathbf{R}}_{\kappa^{+}}^{+}(t, n), \quad n = 0, 1, \dots, n_{\max},$$

gdzie wielkość $\mu_{\pi}(t)$ jest opisana formułą (7.18).

Rozdział 8

Metoda uśredniania modeli

Wprowadzenie

W procesie równoległej estymacji optymalne wartości zarówno pasma estymacji jak i rzędu estymowanego modelu są zwykle wybierane spośród pewnych zbiorów możliwych wartości. Wybór konkretnej wartości estymowanego parametru w oparciu o dane kryterium sprawia, że ignorowana jest niepewność wynikająca z procesu decyzyjnego - wybrana wartość rzędu modelu może być różna od wartości rzeczywistej, natomiast wybrana wartość pasma estymacji może być różna od jej optymalnej wartości.

Podejście zaproponowane w niniejszym rozdziale, oparte na łączeniu modeli, pozwala na wykorzystanie wszystkich modeli otrzymanych na drodze równoległej identyfikacji. Zamiast wybierać jeden konkretny model, w każdej chwili czasu modele otrzymane dla różnych nastaw algorytmów identyfikacji są łączone. Procedura łączenia modeli odbywa się poprzez uśrednianie ich parametrów. Technika ta została zaproponowana przez Akaikego w pracy [3].

Optymalne wartości pasma estymacji mogą zostać wybrane na dwa sposoby. Pierwszym jest wybór konkretnej wartości pasma estymacji, przy użyciu np. zmodyfikowanego kryterium końcowego błędu predykcji. Drugi sposób polega na łączeniu uśrednionych modeli otrzymanych dla różnych wartości pasm estymacji.

8.1 Wariant jednowymiarowy

Bayesowskie podejście do problemu wyboru rzędu modelu

Niech sygnał $y(t)$, $t = 1, \dots, N$ będzie fragmentem realizacji niestacjonarnego procesu autoregresyjnego. Dodatkowo, niech $\mathcal{N} = \{n_1, \dots, n_{\max}\}$ będzie zbiorem rzędów estymowanego modelu oraz $\mathcal{K} = \{\kappa_1, \dots, \kappa_{\max}\}$ będzie zbiorem indeksów okien analizy. Oszacowania parametrów $\hat{\theta}_{n|\kappa}(t)$ oraz $\hat{\rho}_{n|\kappa}(t)$ modelu opisującego sygnał $y(t)$ mogą zostać otrzymane na drodze równoległej analizy np. poprzez zastosowanie ważonych estymatorów najmniejszych kwadratów.

Rozważmy problem jednokrokowej predykcji sygnału $y(t)$ na podstawie znajomości jego przeszłych wartości $\mathcal{Y}(t) = y(s)$, $s \leq t$. Optymalny bayesowski predyktor próbki $y(t+1)$ przyjmuje postać [27]:

$$\hat{y}_{\mathcal{N}|\kappa}(t+1|t) = \sum_{n=1}^{n_{\max}} \mu_n(t) \hat{y}_{n|\kappa}(t+1|t), \quad (8.1)$$

gdzie

$$\hat{y}_{n|\kappa}(t+1|t) = \varphi_n^T(t+1)\hat{\theta}_{n|\kappa}(t)$$

oznacza predyktor oparty na modelu autoregresyjnym rzędu n , a $\mu_n(t)$ jest prawdopodobieństwem *a posteriori* wystąpienia n wyznaczonym na podstawie znajomości $\mathcal{Y}(t)$. Ponieważ prawdopodobieństwa $\mu_n(t)$ są nieujemne:

$$\mu_n(t) \geq 0, \quad n \in [1, n_{\max}] \quad (8.2)$$

oraz ich suma jest równa jedności:

$$\sum_{n=1}^{n_{\max}} \mu_n(t) = 1,$$

otrzymane rozwiązanie stanowi liniową kombinację predyktorów wyznaczonych dla różnych wartości n . Formuła (8.1) może być zapisana w równoważnej formie:

$$\hat{y}_{\mathcal{N}|\kappa}(t+1|t) = \varphi_{n_{\max}}^T(t+1)\bar{\theta}_{\mathcal{N}|\kappa}(t),$$

gdzie $\bar{\theta}_{\mathcal{N}|\kappa}(t)$ oznacza wektor uśrednionych współczynników autoregresji:

$$\bar{\theta}_{\mathcal{N}|\kappa}(t) = \sum_{n=1}^{n_{\max}} \mu_n(t)\hat{\theta}_{n|\kappa}^a(t) \quad (8.3)$$

oraz

$$\hat{\theta}_{n|\kappa}^a(t) = \left[\hat{\theta}_{n|\kappa}^T(t), \mathbf{0}_{n_{\max}-n}^T \right]^T,$$

oznacza wektor parametrów modelu rzędu n , rozszerzony o $n_{\max} - n$ zer.

W analogiczny sposób można otrzymać uśrednioną wartość oszacowania wariancji szumu tworzącego:

$$\bar{\rho}_{\mathcal{N}|\kappa}(t) = \sum_{n=1}^{n_{\max}} \mu_n(t)\hat{\rho}_{n|\kappa}(t). \quad (8.4)$$

Uzyskane wartości $\bar{\theta}_{\mathcal{N}|\kappa}(t)$ oraz $\bar{\rho}_{\mathcal{N}|\kappa}(t)$ odpowiadają uśrednionemu modelowi rzędu n_{\max} przedstawionemu w pracy [3]. Jak pokazano w pracy [3], współczynniki ważące $\mu_n(t)$ mogą zostać wyznaczone za pomocą formuły:

$$\mu_n(t) \propto e^{-\frac{1}{2}\text{AIC}_n(t)},$$

gdzie wielkość

$$\text{AIC}_n(t) = t \ln \hat{\rho}_n(t) + 2n$$

jest kryterium informacyjnym Akaikego [1].

W pracy [26] metoda uśredniania modeli została wykorzystana w przypadku użycia ważonych estymatorów najmniejszych kwadratów. Dla określonego pasma estymacji κ parametry uśrednionego modelu mogą zostać obliczone w sposób analogiczny do zależności (8.3)-(8.4):

$$\bar{\theta}_{\mathcal{N}|\kappa}(t) = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1, n_{\max}|\kappa}(t) \\ \vdots \\ \bar{a}_{n_{\max}, n_{\max}|\kappa}(t) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{n_{\max}} \mu_n(t)\hat{\theta}_{n|\kappa}^a(t), \quad (8.5)$$

$$\bar{\rho}_{\mathcal{N}|\kappa}(t) = \sum_{n=1}^{n_{\max}} \mu_{n|\kappa}(t) \hat{\rho}_{n|\kappa}(t),$$

gdzie

$$\mu_{n|\kappa}(t) \propto e^{-\frac{1}{2} \text{AIC}_{n|\kappa}(t)}$$

oraz wielkość:

$$\text{AIC}_{n|\kappa}(t) = L_{\kappa}(t) \ln \hat{\rho}_{n|\kappa}(t) + \frac{2nL_{\kappa}(t)}{M_{\kappa}(t)}$$

jest uogólnionym kryterium informacyjnym Akaikego.

Optymalna wartość pasma estymacji może zostać wybrana za pomocą następującego zmodyfikowanego kryterium końcowego błędu predykcji:

$$\hat{\kappa}(t) = \arg \min_{\kappa} \text{FPE}_{\mathcal{N}|\kappa}^*(t), \quad (8.6)$$

gdzie

$$\text{FPE}_{\mathcal{N}|\kappa}^*(t) = \frac{1 + \frac{1}{M_{\kappa}(t)} \sum_{i=1}^{n_{\max}} \sum_{j=1}^{n_{\max}} \mu_{i|\kappa}(t) \mu_{j|\kappa}(t) \min(i, j)}{1 - \frac{\hat{n}_{\kappa}(t)}{M_{\kappa}(t)}} \hat{\rho}_{\hat{n}_{\kappa}(t)|\kappa}(t) \quad (8.7)$$

oraz

$$\hat{n}_{\kappa}(t) = \arg \min_n \text{FPE}_{n|\kappa}(t).$$

Wyprowadzenie formuły (8.7) znajduje się w pracy [24].

Warto zauważyć, że dla wartości $n \ll M_{\kappa}(t)$ zachodzi:

$$\begin{aligned} \ln \text{FPE}_{n|\kappa}(t) &= \ln \hat{\rho}_{n|\kappa}(t) + \ln \left(1 + \frac{n}{M_{\kappa}(t)} \right) - \ln \left(1 - \frac{n}{M_{\kappa}(t)} \right) \\ &\cong \ln \hat{\rho}_{n|\kappa}(t) + \frac{2n}{M_{\kappa}(t)} \\ &= \frac{1}{L_{\kappa}(t)} \text{AIC}_{n|\kappa}(t), \end{aligned}$$

co oznacza, że wybór rzędu estymowanego modelu na podstawie kryterium informacyjnego Akaikego daje w przybliżeniu taki sam rezultat, jak wybór rzędu w oparciu o kryterium końcowego błędu predykcji.

Dysponując uśrednionym modelem dla określonego pasma estymacji możemy wyznaczyć oszacowanie widmowej gęstości mocy za pomocą formuły:

$$\bar{S}_{\mathcal{N}|\kappa}(t, \omega) = \frac{\bar{\rho}_{\mathcal{N}|\kappa}(t)}{|1 - \sum_{i=1}^{n_{\max}} \bar{a}_{i, n_{\max}|\kappa}(t) e^{-j\omega i}|^2}.$$

Bayesowskie podejście do problemu wyboru pasma estymacji

Zamiast wyboru konkretnej wartości pasma estymacji, jego optymalna wartość może zostać wyznaczona na drodze łączenia uśrednionych modeli $\hat{\theta}_{\mathcal{N}|\kappa_1}(t), \dots, \hat{\theta}_{\mathcal{N}|\kappa_{\max}}(t)$ otrzymanych dla różnych wartości pasm estymacji [31].

Optymalny bayesowski predyktor próbki $y(t+1)$ przyjmuje postać:

$$\hat{y}_{\mathcal{N}|\kappa}(t+1|t) = \sum_{\kappa=1}^{\kappa_{\max}} \mu_{\kappa}(t) \hat{y}_{\mathcal{N}|\kappa}(t+1|t), \quad (8.8)$$

gdzie wielkości $\mu_\kappa(t)$, $\kappa \in [1, \kappa_{\max}]$ są prawdopodobieństwami *a posteriori* wystąpienia κ wyznaczonymi na podstawie znajomości $\mathcal{Y}(t)$. Podobnie jak w przypadku wielkości $\mu_n(t)$ suma wartości prawdopodobieństw $\mu_\kappa(t)$ w każdej chwili czasu jest równa jedności:

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^{\kappa_{\max}} \mu_\kappa(t) &= 1, \\ \mu_\kappa(t) &\geq 0, \quad \kappa \in [1, \kappa_{\max}]. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Predyktor (8.8) może zostać zapisany w postaci:

$$\hat{y}_{\mathcal{N}|\mathcal{K}}(t+1|t) = \varphi_{n_{\max}}^T(t+1)\bar{\theta}_{\mathcal{N}|\mathcal{K}}(t),$$

gdzie

$$\bar{\theta}_{\mathcal{N}|\mathcal{K}}(t) = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1, n_{\max}|\mathcal{K}}(t) \\ \vdots \\ \bar{a}_{n_{\max}, n_{\max}|\mathcal{K}}(t) \end{bmatrix} = \sum_{\kappa=1}^{\kappa_{\max}} \mu_\kappa(t)\bar{\theta}_{\mathcal{N}|\kappa}(t).$$

Uśredniona wartość oszacowania wariancji szumu tworzącego może zostać obliczona za pomocą formuły:

$$\bar{\rho}_{\mathcal{N}|\mathcal{K}}(t) = \sum_{\kappa=1}^{\kappa_{\max}} \mu_\kappa(t)\hat{\rho}_{\mathcal{N}|\kappa}(t).$$

W pracy [30] pokazano, że wartości współczynników $\mu_\kappa(t)$ mogą zostać obliczone za pomocą formuły:

$$\mu_\kappa(t) \propto \left[\sum_{i=-D}^D \left[\varepsilon_{\mathcal{N}|\kappa}(t+i) \right]^2 \right]^{-\frac{2D+1}{2}},$$

gdzie

$$\varepsilon_{\mathcal{N}|\kappa}(t) = y(t) - \varphi_{n_{\max}}^T(t)\bar{\theta}_{\mathcal{N}|\kappa}(t-1),$$

a $D \in [20, 50]$ określa szerokość lokalnego okna decyzyjnego $[t-D, t+D]$ o środku w punkcie t .

Korzystając z wyznaczonych parametrów możemy wyznaczyć oszacowanie widmowej gęstości mocy za pomocą formuły:

$$\bar{S}_{\mathcal{N}|\mathcal{K}}(t, \omega) = \frac{\bar{\rho}_{\mathcal{N}|\mathcal{K}}(t)}{|1 - \sum_{i=1}^{n_{\max}} \bar{a}_{i, n_{\max}|\mathcal{K}}(t)e^{-j\omega i}|^2}.$$

Bayesowskie podejście do problemu wyboru rzędu modelu i pasma estymacji w kontekście dwukierunkowego algorytmu drabinkowego z zapominaniem wykładniczym

Opisana metoda uśredniania modeli może zostać zastosowana w przypadku użycia dwukierunkowego algorytmu drabinkowego z zapominaniem wykładniczym (rozdział 7). Formuły opisujące uśrednione modele przyjmują wtedy postaci:

$$\bar{\theta}_{\mathcal{N}|\pi}(t) = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1, n_{\max}|\pi}(t) \\ \vdots \\ \bar{a}_{n_{\max}, n_{\max}|\pi}(t) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{n_{\max}} \mu_n|\pi(t)\hat{\theta}_{n|\pi}^a(t),$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{n|\pi}^a(t) &= \left[\hat{\theta}_{n|\pi}^T(t), \mathbf{0}_{n_{\max}-n}^T \right]^T, \\ \bar{\rho}_{\mathcal{N}|\pi}(t) &= \sum_{n=1}^{n_{\max}} \mu_{n|\pi}(t) \hat{\rho}_{n|\pi}(t), \\ \mu_{n|\pi}(t) &\propto e^{-\frac{1}{2} \text{AIC}_{n|\pi}(t)}, \\ \text{AIC}_{n|\pi}(t) &= L_{\pi}(t) \ln \hat{\rho}_{n|\pi}(t) + \frac{2nL_{\pi}(t)}{M_{\pi}(t)}, \\ \bar{\theta}_{\mathcal{N}|\Pi}(t) &= \begin{bmatrix} \bar{a}_{1, n_{\max}|\Pi}(t) \\ \vdots \\ \bar{a}_{n_{\max}, n_{\max}|\Pi}(t) \end{bmatrix} = \sum_{\pi=1}^{\pi_{\max}} \mu_{\pi}(t) \bar{\theta}_{\mathcal{N}|\pi}(t), \\ \bar{\rho}_{\mathcal{N}|\Pi}(t) &= \sum_{\pi=1}^{\pi_{\max}} \mu_{\pi}(t) \hat{\rho}_{\mathcal{N}|\pi}(t), \\ \mu_{\pi}(t) &\propto \left[\sum_{i=-D}^D \left[\varepsilon_{\mathcal{N}|\pi}(t+i) \right]^2 \right]^{-\frac{2D+1}{2}},\end{aligned}$$

gdzie

$$\varepsilon_{\mathcal{N}|\pi}(t) = y(t) - [\varphi_{n_{\max}}(t)]^T \bar{\theta}_{\mathcal{N}|\pi}(t-1)$$

oraz $L_{\pi}(t)$ jest efektywną (7.15), a $M_{\pi}(t)$ równoważną (7.14) liczbą obserwacji.

8.2 Wariant wielowymiarowy

Niech sygnał $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t)]^T$, $t \in [1, N]$ będzie fragmentem realizacji m -wymiarowego niestacjonarnego procesu autoregresyjnego. Oszacowania macierzy parametrów $\hat{\theta}_{n|\kappa}(t)$ oraz $\hat{\rho}_{n|\kappa}(t)$ modelu opisującego sygnał $\mathbf{y}(t)$ mogą zostać otrzymane na drodze równoległej analizy np. poprzez zastosowanie wielowymiarowych ważonych estymatorów najmniejszych kwadratów.

Bayesowskie podejście do problemu wyboru rzędu modelu

Analogicznie do wariantu jednowymiarowego, rozważmy problem jednokrokowej predykcji m -wymiarowego stacjonarnego sygnału autoregresyjnego $\mathbf{y}(t)$ na podstawie znajomości jego przeszłych wartości $\mathcal{Y}(t) = \mathbf{y}(s)$, $s \leq t$. Optymalny predyktor próbki $\mathbf{y}(t+1)$ przyjmuje postać [27]:

$$\hat{\mathbf{y}}_{\mathcal{N}|\kappa}(t+1|t) = \sum_{n=1}^{n_{\max}} \mu_n(t) \hat{\mathbf{y}}_{n|\kappa}(t+1|t), \quad (8.10)$$

gdzie wielkość

$$\hat{\mathbf{y}}_{n|\kappa}(t+1|t) = \Psi_n^T(t+1) \hat{\theta}_{n|\kappa}(t)$$

jest predyktorem opartym na modelu autoregresyjnym rzędu n . Wielkość $\mu_n(t)$ jest prawdopodobieństwem *a posteriori* (8.2) wystąpienia n na podstawie znajomości $\mathcal{Y}(t)$.

Formuła (8.10) może być zapisana w równoważnej formie:

$$\hat{\mathbf{y}}_{\mathcal{N}|\kappa}(t+1|t) = \Psi_{n_{\max}}^T(t+1) \bar{\theta}_{\mathcal{N}|\kappa}(t),$$

gdzie $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{N}|\kappa}(t)$ oznacza wektor uśrednionych współczynników autoregresji:

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{N}|\kappa}(t) = \sum_{n=1}^{n_{\max}} \mu_n(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}_{n|\kappa}^a(t)$$

oraz $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n|\kappa}^a(t)$ oznacza wektor parametrów modelu otrzymany dla wartości rzędu n , rozszerzony w następujący sposób:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n|\kappa}^a(t) = \mathbf{X}_{n \rightarrow n_{\max}} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{n|\kappa}(t),$$

gdzie $\mathbf{X}_{n \rightarrow n_{\max}}$ jest macierzą ekspansji:

$$\mathbf{X}_{n \rightarrow n_{\max}} = \mathbf{I}_m \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{nm} \\ \mathbf{0}_{(n_{\max}-n)m \times nm} \end{bmatrix}.$$

Uśredniona wartość oszacowania macierzy kowariancji szumu tworzącego przyjmuje postać:

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}_{\mathcal{N}|\kappa}(t) = \sum_{n=1}^{n_{\max}} \mu_n(t) \hat{\boldsymbol{\rho}}_{n|\kappa}(t).$$

Podobnie jak w wariancie jednowymiarowym, współczynniki ważące $\mu_n(t)$ mogą zostać wyznaczone za pomocą formuły:

$$\mu_n(t) \propto e^{-\frac{1}{2} \text{MAIC}_n(t)},$$

gdzie wielkość

$$\text{MAIC}_n(t) = \ln [\det \hat{\boldsymbol{\rho}}_n(t)] + 2m^2 n$$

jest wielowymiarową wersją kryterium informacyjnego Akaikiego.

Analogicznie do przypadku jednowymiarowego (8.5), dla danej wartości pasma estymacji κ parametry uśrednionego modelu mogą zostać obliczone następująco:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{N}|\kappa}(t) &= \sum_{n=1}^{n_{\max}} \mu_{n|\kappa}(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}_{n|\kappa}^a(t), \\ \bar{\boldsymbol{\rho}}_{\mathcal{N}|\kappa}(t) &= \sum_{n=1}^{n_{\max}} \mu_{n|\kappa}(t) \hat{\boldsymbol{\rho}}_{n|\kappa}(t), \end{aligned}$$

gdzie

$$\mu_{n|\kappa}(t) \propto e^{-\frac{1}{2} \text{MAIC}_{n|\kappa}(t)}$$

oraz wielkość

$$\text{MAIC}_{n|\kappa}(t) = L_{\kappa}(t) \ln [\det \hat{\boldsymbol{\rho}}_{n|\kappa}(t)] + 2m^2 n \frac{L_{\kappa}(t)}{M_{\kappa}(t)}$$

jest wielowymiarową wersją uogólnionego kryterium informacyjnego Akaikiego.

Optymalna wartość pasma estymacji może zostać wybrana za pomocą wielowymiarowej wersji kryterium (8.6):

$$\hat{\kappa}(t) = \arg \min_{\kappa} \text{MFPE}_{\mathcal{N}|\kappa}^*(t),$$

gdzie

$$\text{MFPE}_{\mathcal{N}|\kappa}^*(t) = \frac{1 + \frac{m}{M_{\kappa}} \sum_{i=1}^{n_{\max}} \sum_{j=1}^{n_{\max}} \mu_{i|\kappa}(t) \mu_{j|\kappa}(t) \min(i, j)}{1 - \frac{mn_{\kappa}(t)}{M_{\kappa}}} \det \hat{\boldsymbol{\rho}}_{n_{\kappa}(t)|\kappa}(t) \quad (8.11)$$



oraz

$$n_\kappa(t) = \arg \max_n \mu_{n|\kappa}(t).$$

Wyprowadzenie formuły (8.11) znajduje się w pracy [23].

Oszacowanie widmowej gęstości mocy w oparciu o uśredniony model dla określonego pasma estymacji może zostać wyznaczone za pomocą wzoru:

$$\bar{\mathbf{S}}_{\mathcal{N}|\kappa}(t, \omega) = \mathbf{A}^{-1} [e^{-j\omega}, \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{N}|\kappa}(t)] \bar{\boldsymbol{\rho}}_{\mathcal{N}|\kappa}(t) \mathbf{A}^{-T} [e^{j\omega}, \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{N}|\kappa}(t)].$$

Bayesowskie podejście do problemu wyboru pasma estymacji

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, wybór konkretnej wartości pasma estymacji może zostać zastąpiony procedurą uśredniania modeli otrzymanych dla różnych pasm estymacji [31].

Optymalny predyktor próbki $\mathbf{y}(t+1)$ przyjmuje postać:

$$\hat{\mathbf{y}}_{\mathcal{N}|\mathcal{K}}(t+1|t) = \sum_{\kappa=1}^{\kappa_{\max}} \mu_\kappa(t) \hat{\mathbf{y}}_{\mathcal{N}|\kappa}(t+1|t), \quad (8.12)$$

gdzie wielkości $\mu_\kappa(t)$, $\kappa \in [1, \kappa_{\max}]$ są wagami (8.9). Formuła (8.12) może zostać zapisana w postaci:

$$\hat{\mathbf{y}}_{\mathcal{N}|\mathcal{K}}(t+1|t) = \boldsymbol{\Psi}_{n_{\max}}^T(t+1) \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{N}|\mathcal{K}}(t),$$

gdzie

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{N}|\mathcal{K}}(t) = \sum_{\kappa=1}^{\kappa_{\max}} \mu_\kappa(t) \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{N}|\kappa}(t).$$

Uśredniona wartość oszacowania wariancji szumu tworzącego może zostać obliczona za pomocą formuły:

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}_{\mathcal{N}|\mathcal{K}}(t) = \sum_{\kappa=1}^{\kappa_{\max}} \mu_\kappa(t) \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\mathcal{N}|\kappa}(t).$$

W pracy [30] pokazano, że dla przypadku wielowymiarowego wartości współczynników $\mu_\kappa(t)$ mogą zostać obliczone za pomocą formuły:

$$\mu_\kappa(t) \propto \left[\det \left[\sum_{i=-D}^D \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{N}|\kappa}(t+i) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{N}|\kappa}^T(t+i) \right] \right]^{-\frac{2D+1}{2}},$$

gdzie

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{N}|\kappa}(t) = \mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\Psi}_{n_{\max}}^T(t) \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{N}|\kappa}(t-1),$$

a $D \in [20, 50]$ określa szerokość lokalnego okna decyzyjnego.

Oszacowanie widmowej gęstości mocy może zostać wyznaczone za pomocą formuły:

$$\bar{\mathbf{S}}_{\mathcal{N}|\mathcal{K}}(t, \omega) = \mathbf{A}^{-1} [e^{-j\omega}, \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{N}|\mathcal{K}}(t)] \bar{\boldsymbol{\rho}}_{\mathcal{N}|\mathcal{K}}(t) \mathbf{A}^{-T} [e^{j\omega}, \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{N}|\mathcal{K}}(t)].$$

Bayesowskie podejście do problemu wyboru rzędu modelu i pasma estymacji w kontekście dwukierunkowego algorytmu drabinkowego z zapominaniem wykładniczym

Formuły opisujące uśrednione modele w przypadku użycia dwukierunkowego algorytmu drabinkowego z zapominaniem wykładniczym (rozdział 7) przyjmują postaci:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{N}|\pi}(t) &= \sum_{n=1}^{n_{\max}} \mu_{n|\pi}(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}_{n|\pi}^a(t), \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{n|\pi}^a(t) &= \mathbf{X}_{n \rightarrow n_{\max}} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{n|\pi}(t), \\ \bar{\boldsymbol{\rho}}_{\mathcal{N}|\pi}(t) &= \sum_{n=1}^{n_{\max}} \mu_{n|\pi}(t) \hat{\boldsymbol{\rho}}_{n|\pi}(t), \\ \mu_{n|\pi}(t) &\propto e^{-\frac{1}{2} \text{MAIC}_{n|\pi}(t)}, \\ \text{MAIC}_{n|\pi}(t) &= L_{\pi}(t) \ln \left[\det \hat{\boldsymbol{\rho}}_{n|\pi}(t) \right] + 2m^2 n \frac{L_{\pi}(t)}{M_{\pi}(t)}, \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{N}|\Pi}(t) &= \sum_{\pi=1}^{\pi_{\max}} \mu_{\pi}(t) \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{N}|\pi}(t), \\ \bar{\boldsymbol{\rho}}_{\mathcal{N}|\Pi}(t) &= \sum_{\pi=1}^{\pi_{\max}} \mu_{\pi}(t) \bar{\boldsymbol{\rho}}_{\mathcal{N}|\pi}(t), \\ \mu_{\pi}(t) &\propto \left[\det \left[\sum_{i=-D}^D \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{N}|\pi}(t+i) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{N}|\pi}^T(t+i) \right] \right]^{-\frac{2D+1}{2}},\end{aligned}$$

gdzie

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{N}|\pi}(t) = \mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\Psi}_{n_{\max}}^T(t) \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{N}|\pi}(t-1).$$

Rozdział 9

Wyniki eksperymentów

9.1 Metodologia

W celu uzyskania wiarygodnej oceny skuteczności opracowanych algorytmów przeprowadzono testy symulacyjne oparte na wielu realizacjach tego samego procesu stochastycznego. Przygotowano scenariusze symulacyjne zarówno dla jednowymiarowych jak i wielowymiarowych wariantów zaprezentowanych metod. Dla każdego z wariantów przygotowano dwa scenariusze symulacyjne. Pierwszy z nich służył do oceny skuteczności danego algorytmu w warunkach, gdy parametry analizowanego sygnału zmieniały się w sposób łagodny, a drugi pozwalał ocenić skuteczność metody, gdy parametry sygnału zmieniały się w sposób gwałtowny.

Do oceny jakości estymacji widmowej gęstości mocy dla dowolnych nastaw algorytmu identyfikacji w wariancie jednowymiarowym użyta została miara Itakury-Saito (4.5), natomiast w wariancie wielowymiarowym zastosowano miarę względnej entropii (4.6). Oprócz tego, do oceny jakości identyfikacji użyto kwadratów błędów oszacowań parametrów. W wariancie jednowymiarowym miara ta jest zdefiniowana jako:

$$d_{\text{CE}}(t) = \sum_{i=1}^n [a_{i,n}(t) - \hat{a}_{i,n}(t)]^2,$$

natomiast w wariancie wielowymiarowym miara ta przyjmuje postać:

$$d_{\text{MCE}}(t) = [\boldsymbol{\theta}_n(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t)]^T [\boldsymbol{\theta}_n(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t)].$$

Użyte miary zostały uśrednione po czasie oraz po 100 niezależnych realizacjach.

9.1.1 Kwestie implementacyjne

Aby zredukować złożoność obliczeniową przeprowadzonych testów symulacyjnych, widmowa gęstość mocy procesu autoregresyjnego rzędu n była obliczana za pomocą procedury opartej na szybkiej transformacji Fouriera (FFT, ang. *Fast Fourier Transform*). W wariancie jednowymiarowym widmowa gęstość mocy (3.9) może zostać wyznaczona za pomocą formuły:

$$S_{\text{FFT}}(\omega_i) = \frac{\rho_n}{|u_{\text{FFT},i}|^2},$$

gdzie $u_{\text{FFT},i}$ jest i -tym elementem wektora \mathbf{u}_{FFT} :

$$\mathbf{u}_{\text{FFT}} = \text{FFT}\{[1, -a_1, \dots, -a_n, 0, \dots, 0]_{1 \times u_s}\},$$

a u_s jest rozmiarem wektora \mathbf{u}_{FFT} . Pulsacja

$$\omega_i = 2\pi \frac{i}{u_s}$$

przyjmuje wartości z przedziału $(0, 2\pi]$.

W wariancie wielowymiarowym widmowa gęstość mocy (3.23) może zostać wyznaczona w analogiczny sposób:

$$\mathbf{S}_{\text{FFT}}(\omega_i) = \mathbf{U}_{\text{FFT},i}^{-1} \boldsymbol{\rho}_n \mathbf{U}_{\text{FFT},i}^{-T},$$

gdzie $\mathbf{U}_{\text{FFT},i}$ jest macierzą:

$$\mathbf{U}_{\text{FFT},i} = \begin{bmatrix} u_{\text{FFT},i}^{1,1} & u_{\text{FFT},i}^{1,2} & \cdots & u_{\text{FFT},i}^{1,m} \\ u_{\text{FFT},i}^{2,1} & u_{\text{FFT},i}^{2,2} & \cdots & u_{\text{FFT},i}^{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{\text{FFT},i}^{m,1} & u_{\text{FFT},i}^{m,2} & \cdots & u_{\text{FFT},i}^{m,m} \end{bmatrix},$$

gdzie wartości $u_{\text{FFT},i}^{j,k}$, $j, k = 1, \dots, m$ są i -tymi elementami poszczególnych wektorów:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{FFT}}^{j,k} &= \text{FFT} \left\{ \left[1, -a_{jk}^{1,n}, \dots, -a_{jk}^{n,n}, 0, \dots, 0 \right]_{1 \times u_s} \right\}, \quad \text{dla } j = k, \\ \mathbf{u}_{\text{FFT}}^{j,k} &= \text{FFT} \left\{ \left[0, -a_{jk}^{1,n}, \dots, -a_{jk}^{n,n}, 0, \dots, 0 \right]_{1 \times u_s} \right\}, \quad \text{dla } j \neq k. \end{aligned}$$

Wielkość u_s jest rozmiarem wektora $\mathbf{u}_{\text{FFT}}^{j,k}$.

W przeprowadzonych symulacjach stosowano rozmiar $u_s = 512$ próbek.

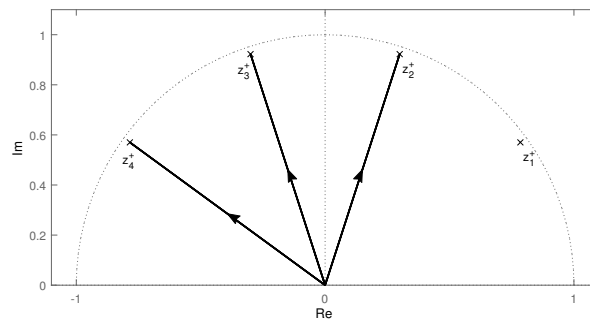
9.1.2 Scenariusze testowe wariantu jednowymiarowego

Scenariusze symulacyjne dla wariantu jednowymiarowego opierały się na połączeniu czterech stacjonarnych modeli autoregresyjnych M_1 , M_2 , M_3 oraz M_4 o rzędach odpowiednio 2, 4, 6 oraz 8. Wielomian charakterystyczny i -tego modelu M_i posiadał i par zer zespolonych sprzężonych postaci:

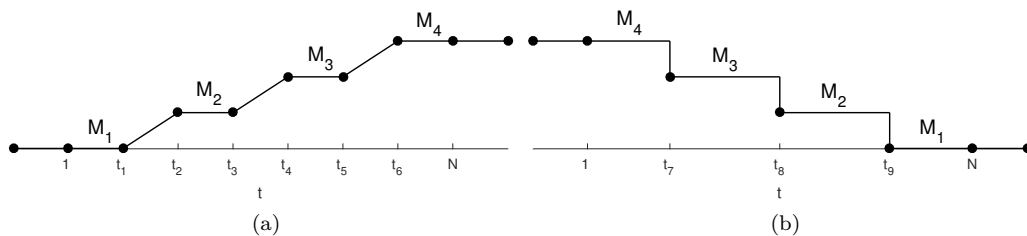
$$z_k^\pm = 0.995 e^{\pm j k \pi / 5}, \quad k = 1, \dots, i,$$

które odpowiadały i -temu szczytowi rezonansowemu charakterystyki widmowej filtra $1/A_i(z)$.

Wygenerowany sygnał $y(t)$, $t = 1, \dots, N$ zawierał okresy opisane za pomocą modeli M_1, \dots, M_4 , w których był stacjonarny oraz okresy, w których jego parametry zmieniały się w czasie. W scenariuszu symulacyjnym o łagodnych zmianach parametrów transformacja z modelu M_{i-1} w model M_i została zrealizowana poprzez stopniowe przemieszczanie, ze stałą prędkością, i -tej pary biegunów zespolonych sprzężonych filtra $1/A_i(z)$ z punktu zerowego do punktów z_i^\pm położonych blisko okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej. Trajektorie zmian położenia par biegunów zostały przedstawione na rysunku 9.1. W przypadku gwałtownych zmian parametrów, model M_i był natychmiast zastępowany modelem M_{i-1} . Oba scenariusze zostały poglądowo przedstawione na rysunku 9.2.



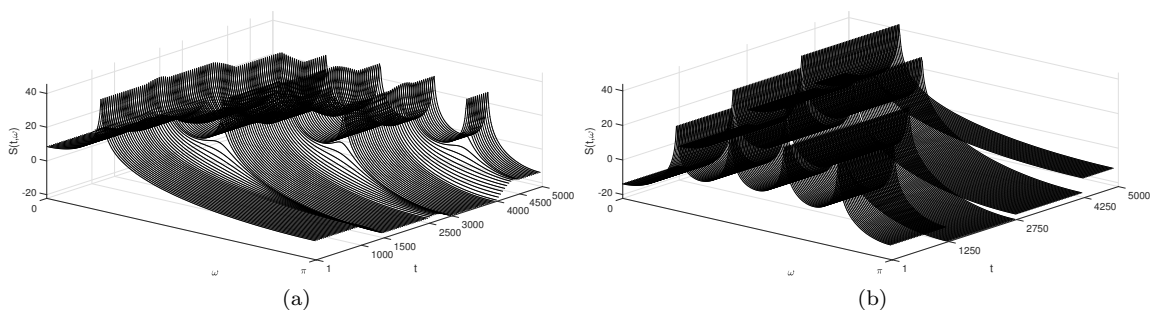
Rysunek 9.1: Trajektoria zmian położenia biegunów filtra formującego.



Rysunek 9.2: Scenariusz symulacyjny z (a) łagodnymi oraz z (b) gwałtownymi zmianami parametrów.

Symulacje zostały przeprowadzone dla trzech sygnałów niestacjonarnych o długościach odpowiednio $N = 2500$, $N = 5000$ oraz $N = 10000$ próbek. Analiza sygnałów o różnych długościach pozwoliła sprawdzić skuteczność zaproponowanych metod w warunkach różnych szybkości zmian parametrów procesu. Chwile czasu t , w których nastąpiły zmiany parametrów w scenariuszu łagodnych zmian, miały następujące wartości: $t_1 = 2N/10$, $t_2 = 3N/10$, $t_3 = 5N/10$, $t_4 = 6N/10$, $t_5 = 8N/10$, $t_6 = 9N/10$, a w scenariuszu gwałtownych zmian: $t_7 = 5N/20$, $t_8 = 11N/20$, $t_9 = 17N/20$. Generowanie sygnału zostało rozpoczęte $N/5$ próbek przed chwilą czasu $t = 1$ i zostało zakończone $N/5$ próbek po chwili czasu $t = N$, dzięki czemu bez względu na wartość pamięci algorytmu identyfikacja sygnału mogła zostać rozpoczęta w chwili czasu $t = 1$ i zakończona w $t = N$.

Widmowe gęstości mocy odpowiadające wygenerowanym scenariuszom testowym dla sygnału o długości $N = 5000$ próbek zostały przedstawione na rysunku 9.3.

Rysunek 9.3: Widmowa gęstość mocy odpowiadająca scenariuszowi symulacyjnemu z (a) łagodnymi oraz z (b) gwałtownymi zmianami parametrów dla sygnału o długości $N = 5000$ próbek.

9.1.3 Scenariusze testowe wariantu wielowymiarowego

Scenariusze testowe wariantu wielowymiarowego były oparte na procesie autoregresyjnym, którego parametry zmieniały się w czasie zarówno w sposób łagodny jak i gwałtowny. Do wygenerowania procesu posłużono się trzema dwuwymiarowymi ($m = 2$) modelami niezmiennymi w czasie o rzędach 2, 6 oraz 10. Modele te zostały uzyskane na drodze identyfikacji stereofonicznego sygnału fonicznego za pomocą lewostronnego algorytmu drabinkowego. W rezultacie otrzymano następujące modele:

- M_1 :

$$\mathbf{K}_{1,1}^0 = \begin{bmatrix} 0.9342 & -0.1019 \\ 0.0947 & 0.9771 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{1,2}^0 = \begin{bmatrix} -0.6701 & 0.1769 \\ -0.5527 & -0.5789 \end{bmatrix},$$

- M_2 :

$$\mathbf{K}_{2,1}^0 = \begin{bmatrix} 0.9342 & -0.1019 \\ 0.0947 & 0.9771 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{2,2}^0 = \begin{bmatrix} -0.6701 & 0.1769 \\ -0.5527 & -0.5789 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{2,3}^0 = \begin{bmatrix} 0.5521 & -0.1935 \\ -0.1074 & 0.3588 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{2,4}^0 = \begin{bmatrix} -0.1708 & 0.1714 \\ -0.2756 & -0.1789 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{2,5}^0 = \begin{bmatrix} 0.1678 & -0.2540 \\ -0.4411 & -0.0848 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{2,6}^0 = \begin{bmatrix} -0.0316 & -0.0097 \\ -0.0038 & -0.1596 \end{bmatrix},$$

- M_3 :

$$\mathbf{K}_{3,1}^0 = \begin{bmatrix} 0.9342 & -0.1019 \\ 0.0947 & 0.9771 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{3,2}^0 = \begin{bmatrix} -0.6701 & 0.1769 \\ -0.5527 & -0.5789 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{3,3}^0 = \begin{bmatrix} 0.5521 & -0.1935 \\ -0.1074 & 0.3588 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{3,4}^0 = \begin{bmatrix} -0.1708 & 0.1714 \\ -0.2756 & -0.1789 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{3,5}^0 = \begin{bmatrix} 0.1678 & -0.2540 \\ -0.4411 & -0.0848 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{3,6}^0 = \begin{bmatrix} -0.0316 & -0.0097 \\ -0.0038 & -0.1596 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{3,7}^0 = \begin{bmatrix} -0.1647 & -0.0958 \\ 0.0160 & -0.0020 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{3,8}^0 = \begin{bmatrix} -0.1344 & 0.2574 \\ -0.0628 & -0.0309 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{3,9}^0 = \begin{bmatrix} 0.0608 & 0.0725 \\ -0.1992 & 0.0474 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{3,10}^0 = \begin{bmatrix} -0.0853 & 0.1874 \\ -0.1784 & -0.0023 \end{bmatrix}.$$

Macierz współczynników autokorelacji dla zerowego przesunięcia czasowego miała wartości:

$$\mathbf{R}^0(0) = \begin{bmatrix} 0.0099 & 0.0087 \\ 0.0087 & 0.0088 \end{bmatrix},$$

Wygenerowany sygnał dwuwymiarowy $\mathbf{y}(t)$, $t = 1, \dots, N$ zawierał okresy opisane za pomocą modeli M_1, \dots, M_3 , w których jego parametry nie zmieniały się w czasie oraz zawierał okresy, w których był niestacjonarny. W scenariuszu symulacyjnym o łagodnych zmianach parametrów, przedstawionym na rysunku 9.4 (a), przekształcenie modelu M_1 w model M_2 zostało zrealizowane za pomocą techniki liniowego morfingu. Macierze parametrów modelu przejściowego zostały wyznaczone za pomocą formuły:

$$\mathbf{K}_i(t) = [1 - \beta(t)] \mathbf{K}_{1,i}^0 + \beta(t) \mathbf{K}_{2,i}^0, \quad t \in [t_1, t_2], \\ i = 1, \dots, 6,$$

gdzie

$$\beta(t) = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

oraz

$$\mathbf{K}_{1,i}^0 = \mathbf{O}_{m \times m}, \quad \text{dla } i = 3, \dots, 6.$$

Podobnie została zrealizowana ewolucja modelu M_2 do postaci modelu M_3 :

$$\mathbf{K}_i(t) = [1 - \gamma(t)] \mathbf{K}_{2,i}^0 + \gamma(t) \mathbf{K}_{3,i}^0, \quad t \in [t_3, t_4], \\ i = 1, \dots, 10,$$

gdzie

$$\gamma(t) = \frac{t - t_3}{t_4 - t_3}$$

oraz

$$\mathbf{K}_{2,i}^0 = \mathbf{O}_{m \times m}, \quad \text{dla } i = 7, \dots, 10.$$

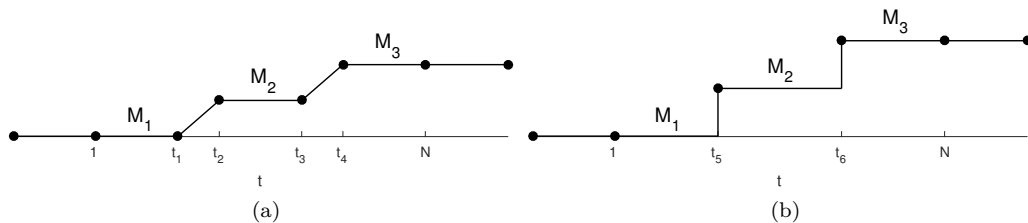
W scenariuszu gwałtownych zmian parametrów, zilustrowanym na rysunku 9.4 (b), model M_1 został natychmiastowo zamieniony na model M_2 w chwili czasu t_5 oraz model M_2 został zamieniony na model M_3 w chwili czasu t_6 .

Na rysunkach 9.5 oraz 9.6 zestawiono charakterystyki częstotliwościowe modeli w opisanych scenariuszach testowych dla sygnału o długości $N = 4000$ próbek.

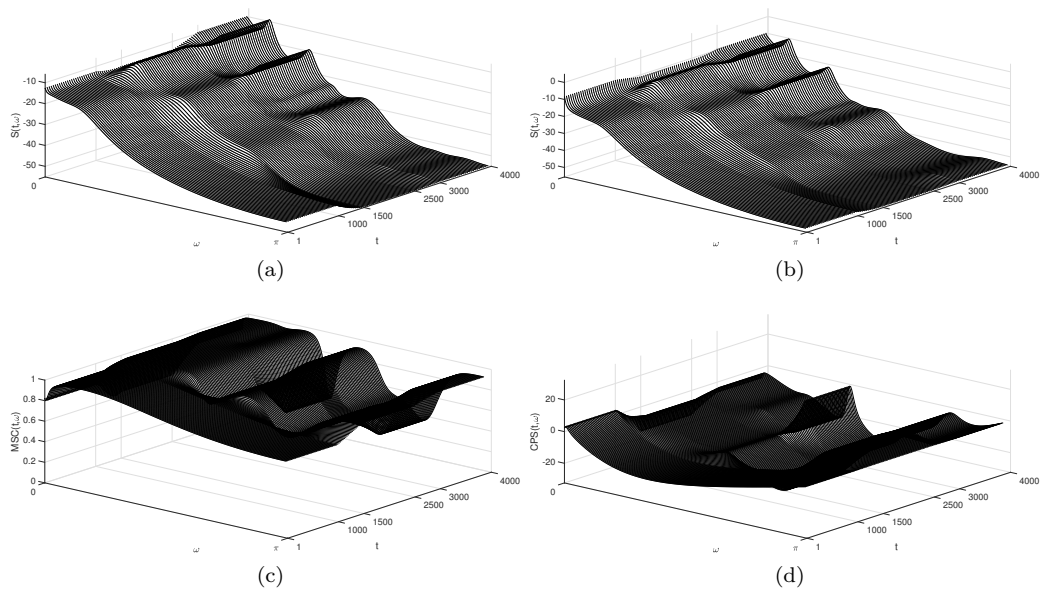
W obu scenariuszach, w procesie generowania sygnału testowego użyto stacjonarnego szumu białego o rozkładzie normalnym, o macierzy kowariancji:

$$\boldsymbol{\rho}^0 = \begin{bmatrix} 1.49 & 0.99 \\ 0.99 & 0.74 \end{bmatrix} \times 10^{-4}.$$

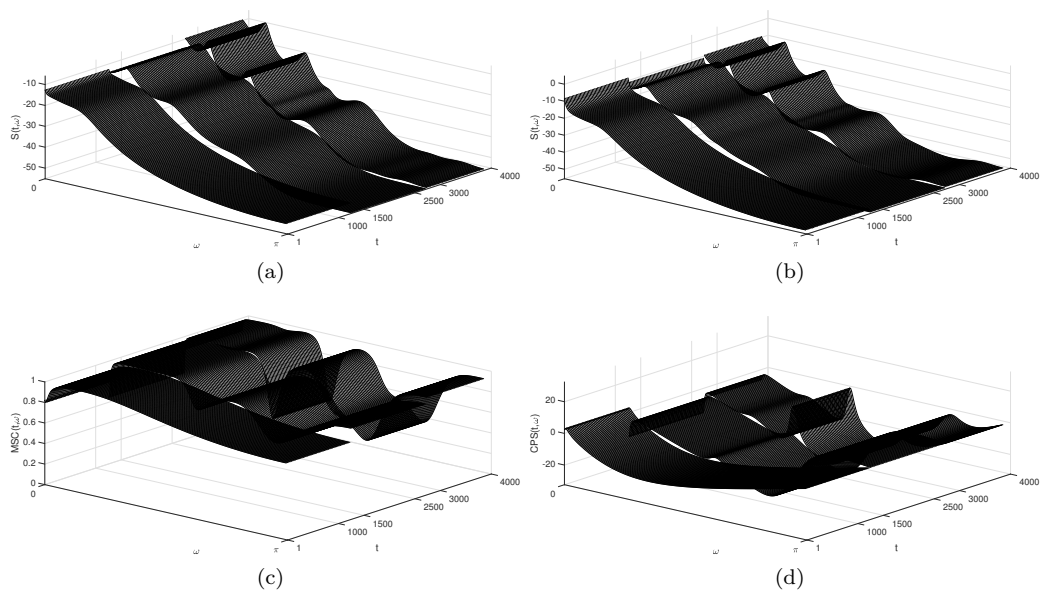
Symulacje zostały przeprowadzone dla trzech sygnałów niestacjonarnych o długościach odpowiednio $N = 2000$, $N = 4000$ oraz $N = 8000$ próbek. Chwile czasu t , w których nastąpiły zmiany parametrów w scenariuszu łagodnych zmian miały następujące wartości: $t_1 = 2/8N$, $t_2 = 3/8N$, $t_3 = 5/8N$, $t_4 = 6/8N$, natomiast w scenariuszu gwałtownych zmian: $t_5 = 5/16N$, $t_6 = 11/16N$. Podobnie jak w wariancie jednowymiarowym, proces generowania sygnału został rozpoczęty $N/4$ próbek przed $t = 1$ i został zakończony $N/4$ próbek po chwili czasu $t = N$.



Rysunek 9.4: Scenariusz symulacyjny z (a) łagodnymi oraz z (b) gwałtownymi zmianami parametrów.



Rysunek 9.5: Charakterystyki scenariusza testowego z łagodnymi zmianami parametrów dla sygnału o długości $N = 4000$ próbek. Widmowa gęstość mocy (a) pierwszego i (b) drugiego kanału oraz widmo (c) amplitudowe i (d) fazowe koherencji.



Rysunek 9.6: Charakterystyki scenariusza testowego z gwałtownymi zmianami parametrów dla sygnału o długości $N = 4000$ próbek. Widmowa gęstość mocy (a) pierwszego i (b) drugiego kanału oraz widmo (c) amplitudowe i (d) fazowe koherencji.

9.2 Dwukierunkowy algorytm drabinkowy z zapominaniem wykładniczym - wyniki badań

Aby ocenić skuteczność przedstawionego dwukierunkowego algorytmu drabinkowego z zapominaniem wykładniczym zarówno w wersji jednowymiarowej jak i wielowymiarowej przeprowadzono proces równoległej identyfikacji wygenerowanego sygnału dla maksymalnego rzędu modelu $n_{\max} = 20$ oraz z następującymi parami stałych zapominania:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= (0.99, 0.99), \\ \pi_2 &= (0.995, 0.995), \\ \pi_3 &= (0.995, 0.95), \\ \pi_4 &= (0.95, 0.995).\end{aligned}$$

Maksymalny estymowany rząd n_{\max} przyjmuje wartość znacznie większą niż maksymalny rząd estymowanego sygnału w celu sprawdzenia „skłonności” zastosowanej metody do przeszacowywania estymowanego modelu. Sprawdzone także skuteczność metody zarówno w przypadku stosowania symetrycznych par stałych zapominania - π_1 oraz π_2 jak i par niesymetrycznych - π_3 i π_4 . Wyniki dokładności estymacji widma za pomocą zaproponowanej metody zostały zestawione z rezultatami otrzymanymi dla różnych wartości rzędów estymowanego modelu za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym o stałych zapominania:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0.95, \\ \lambda_2 &= 0.99, \\ \lambda_3 &= 0.995.\end{aligned}$$

9.2.1 Wariant jednowymiarowy

W tabelach 9.1-9.12 przedstawiono uśrednione miary oceny jakości analizy wygenerowanego niestacjonarnego procesu autoregresyjnego dla różnych długości sygnału. Wyniki zostały otrzymane dla różnych wartości rzędów estymowanego modelu za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmów wykorzystujących zaproponowane kryteria adaptacyjnego wyboru rzędu i pasma estymacji dla różnych wartości maksymalnego rzędu modelu od $n = 1$ do $n = 20$. Tabele zawierają wyniki zarówno dla wariantu uśredniania oszacowań współczynników odbicia (FK), jak i oszacowań współczynników autokorelacji (FR). W tabelach 9.1-9.3 została przedstawiona uśredniona miara Itakury-Saito estymowanej widmowej gęstości mocy dla scenariusza testowego z łagodnymi zmianami parametrów. Analogiczne wyniki dla scenariusza z gwałtownymi zmianami parametrów zestawiono w tabelach 9.4-9.6. Tabele 9.7-9.12 zawierają natomiast uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów analizowanego sygnału w rozważanych scenariuszach.

Tablica 9.1: Usredniona miara Itakury-Saito w scenariuszu łagodnych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 2500$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmów wykorzystujących zaproponowane kryteria wyboru rzędu i pasma estymacji FPE oraz PE. FK - procedura usredniania oszacowań współczynników odbicia, FR - procedura usredniania współczynników autokorelacji.

n/n_{max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK						FR					
				π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE	π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE
1	4,2437	4,2059	4,5394	4,1420	4,1029	4,1923	4,1243	4,1979	4,1276	4,1431	4,1030	4,1930	4,1248	4,1990	4,1282
2	2,8642	3,0325	3,1121	2,5589	2,6356	2,8313	2,7953	2,8536	2,6353	2,5545	2,6411	2,8002	2,7933	2,8198	2,6281
3	2,7531	2,9144	3,0388	2,4206	2,4915	2,7126	2,6550	2,7182	2,4785	2,4208	2,5003	2,6845	2,6559	2,6881	2,4838
4	1,7301	2,0234	1,9888	1,4357	1,6440	1,7505	1,7445	1,7147	1,3947	1,3692	1,5506	1,6844	1,7320	1,6102	1,3678
5	1,7402	2,0126	2,0659	1,4231	1,6262	1,7447	1,7116	1,7044	1,3828	1,3544	1,5141	1,6831	1,6920	1,6145	1,3532
6	0,8830	1,3438	1,1101	0,7407	1,1380	1,0152	1,1425	0,9353	0,5362	0,6037	0,9319	0,8519	1,1180	0,7075	0,4672
7	0,8942	1,2283	1,2096	0,7234	1,1025	0,9421	0,9841	0,8928	0,5554	0,5563	0,7947	0,8405	0,9396	0,7427	0,4712
8	0,3045	0,5853	0,7720	0,4086	0,8243	0,4322	0,5385	0,2082	0,1668	0,1682	0,3890	0,2722	0,5188	0,0758	0,0932
9	0,2814	0,4598	0,8476	0,4077	0,8198	0,3618	0,4743	0,1939	0,1672	0,1555	0,3356	0,2181	0,4368	0,0774	0,0931
10	0,2890	0,4472	0,9262	0,4072	0,8121	0,3527	0,4301	0,1864	0,1674	0,1470	0,3003	0,2197	0,3840	0,0788	0,0932
11	0,2983	0,4484	1,0144	0,4078	0,8009	0,3526	0,4039	0,1784	0,1669	0,1400	0,2660	0,2229	0,3524	0,0805	0,0933
12	0,3082	0,4534	1,1062	0,4085	0,7973	0,3572	0,3985	0,1762	0,1665	0,1378	0,2556	0,2258	0,3450	0,0817	0,0935
13	0,3207	0,4604	1,2022	0,4101	0,7996	0,3637	0,3957	0,1763	0,1668	0,1387	0,2523	0,2282	0,3422	0,0827	0,0934
14	0,3303	0,4623	1,3185	0,4106	0,7940	0,3655	0,3841	0,1739	0,1666	0,1362	0,2373	0,2315	0,3296	0,0839	0,0932
15	0,3440	0,4732	1,4337	0,4126	0,7926	0,3716	0,3825	0,1723	0,1665	0,1359	0,2324	0,2364	0,3278	0,0846	0,0931
16	0,3574	0,4827	1,5759	0,4133	0,7917	0,3777	0,3811	0,1719	0,1658	0,1355	0,2290	0,2414	0,3274	0,0855	0,0935
17	0,3706	0,4933	1,7093	0,4158	0,7937	0,3845	0,3819	0,1720	0,1659	0,1367	0,2275	0,2462	0,3294	0,0861	0,0937
18	0,3843	0,5045	1,8541	0,4197	0,7958	0,3924	0,3838	0,1722	0,1661	0,1390	0,2282	0,2510	0,3323	0,0866	0,0939
19	0,3961	0,5132	1,9859	0,4217	0,7972	0,3983	0,3851	0,1723	0,1662	0,1403	0,2276	0,2558	0,3345	0,0870	0,0942
20	0,4127	0,5272	2,1323	0,4241	0,7985	0,4078	0,3851	0,1725	0,1663	0,1422	0,2263	0,2619	0,3356	0,0874	0,0945

Tablica 9.2: Usredniona miara Itakury-Saito w scenariuszu łagodnych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 5000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmów wykorzystujących zaproponowane kryteria wyboru rzędu i pasma estymacji FPE oraz PE. FK - procedura usredniania oszacowań współczynników odbicia, FR - procedura usredniania współczynników autokorelacji.

n/n_{max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK						FR					
				π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE	π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE
1	4,2233	4,1599	4,5552	4,1405	4,0885	4,1523	4,1206	4,1843	4,1079	4,1415	4,0887	4,1529	4,1210	4,1853	4,1091
2	2,6550	2,6851	3,0789	2,4876	2,4871	2,6038	2,5961	2,6475	2,5315	2,4851	2,4903	2,5987	2,5934	2,6440	2,5316
3	2,5301	2,5564	2,9929	2,3420	2,3413	2,4725	2,4488	2,5053	2,3808	2,3425	2,3464	2,4679	2,4480	2,5030	2,3832
4	1,4655	1,5337	1,9952	1,3115	1,3797	1,4372	1,4502	1,4328	1,3188	1,2748	1,3209	1,4143	1,4467	1,4142	1,3082
5	1,4735	1,5353	2,0798	1,2974	1,3636	1,4335	1,4372	1,4350	1,3067	1,2618	1,3004	1,4107	1,4335	1,4189	1,2959
6	0,5678	0,7056	1,0760	0,5272	0,7100	0,6138	0,7159	0,5581	0,4510	0,4414	0,5760	0,5582	0,7083	0,5089	0,4279
7	0,5775	0,6971	1,1426	0,5054	0,6851	0,5962	0,6344	0,5534	0,4392	0,4088	0,5128	0,5584	0,6155	0,5211	0,4085
8	0,1381	0,2006	0,7485	0,2075	0,4036	0,1773	0,2514	0,0832	0,1009	0,0687	0,1616	0,1213	0,2374	0,0538	0,0657
9	0,1406	0,1790	0,8196	0,2098	0,4029	0,1644	0,2275	0,0833	0,1013	0,0696	0,1450	0,1126	0,2051	0,0543	0,0663
10	0,1481	0,1816	0,8949	0,2109	0,4009	0,1655	0,2161	0,0840	0,1019	0,0709	0,1333	0,1153	0,1908	0,0548	0,0667
11	0,1541	0,1834	0,9742	0,2135	0,4020	0,1674	0,2098	0,0845	0,1024	0,0719	0,1241	0,1173	0,1820	0,0553	0,0672
12	0,1611	0,1863	1,0604	0,2157	0,4023	0,1706	0,2079	0,0850	0,1029	0,0737	0,1202	0,1199	0,1795	0,0559	0,0677
13	0,1679	0,1888	1,1525	0,2176	0,4036	0,1736	0,2086	0,0852	0,1032	0,0753	0,1197	0,1221	0,1807	0,0562	0,0679
14	0,1746	0,1908	1,2633	0,2192	0,4031	0,1751	0,2057	0,0854	0,1037	0,0761	0,1153	0,1243	0,1776	0,0566	0,0681
15	0,1833	0,1963	1,3733	0,2217	0,4039	0,1788	0,2055	0,0857	0,1042	0,0782	0,1130	0,1277	0,1772	0,0569	0,0685
16	0,1912	0,2007	1,5040	0,2244	0,4032	0,1819	0,2050	0,0860	0,1047	0,0802	0,1109	0,1309	0,1768	0,0572	0,0689
17	0,1991	0,2054	1,6288	0,2267	0,4043	0,1853	0,2061	0,0861	0,1050	0,0824	0,1102	0,1339	0,1778	0,0575	0,0692
18	0,2069	0,2099	1,7719	0,2308	0,4070	0,1896	0,2084	0,0863	0,1054	0,0849	0,1110	0,1372	0,1805	0,0576	0,0695
19	0,2145	0,2138	1,9005	0,2331	0,4078	0,1928	0,2095	0,0864	0,1057	0,0870	0,1105	0,1401	0,1818	0,0578	0,0698
20	0,2237	0,2190	2,0398	0,2351	0,4086	0,1964	0,2109	0,0866	0,1062	0,0896	0,1107	0,1434	0,1839	0,0580	0,0702

Tablica 9.3: Uśredniona miara Itakury-Saito w scenariuszu łagodnych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 10000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmów wykorzystujących zaproponowane kryteria wyboru rzędu i pasma estymacji FPE oraz PE. FK - procedura uśredniania oszacowań współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania współczynników autokorelacji.

n/n_{max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK						FR					
				π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE	π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE
1	4,2092	4,1390	4,5371	4,1383	4,0843	4,1339	4,1213	4,1744	4,1044	4,1392	4,0846	4,1344	4,1217	4,1753	4,1058
2	2,5669	2,5152	3,0736	2,4605	2,4205	2,4861	2,5005	2,5328	2,4789	2,4561	2,4187	2,4844	2,4979	2,5334	2,4796
3	2,4392	2,3835	2,9896	2,3177	2,2755	2,3519	2,3594	2,3988	2,3379	2,3166	2,2755	2,3505	2,3586	2,4004	2,3401
4	1,3491	1,3210	1,9445	1,2594	1,2543	1,2931	1,3023	1,3149	1,2620	1,2347	1,2173	1,2822	1,2984	1,3093	1,2543
5	1,3425	1,3133	2,0153	1,2373	1,2320	1,2809	1,2840	1,3042	1,2421	1,2135	1,1946	1,2693	1,2811	1,2984	1,2355
6	0,4684	0,4754	1,0514	0,4503	0,4985	0,4585	0,5035	0,4474	0,4194	0,3959	0,4213	0,4360	0,4955	0,4301	0,4011
7	0,4600	0,4701	1,1072	0,4241	0,4746	0,4443	0,4603	0,4358	0,3932	0,3657	0,3850	0,4248	0,4503	0,4211	0,3723
8	0,0849	0,0766	0,7273	0,1233	0,1852	0,0831	0,1116	0,0554	0,0646	0,0395	0,0567	0,0597	0,0987	0,0398	0,0359
9	0,0906	0,0763	0,7969	0,1258	0,1864	0,0830	0,1076	0,0560	0,0653	0,0423	0,0554	0,0606	0,0932	0,0406	0,0368
10	0,0970	0,0792	0,8708	0,1279	0,1866	0,0853	0,1070	0,0565	0,0659	0,0450	0,0549	0,0632	0,0924	0,0412	0,0377
11	0,1030	0,0819	0,9511	0,1302	0,1875	0,0875	0,1072	0,0569	0,0666	0,0475	0,0540	0,0656	0,0923	0,0417	0,0384
12	0,1095	0,0850	1,0359	0,1326	0,1885	0,0902	0,1084	0,0573	0,0672	0,0501	0,0541	0,0683	0,0936	0,0421	0,0391
13	0,1158	0,0879	1,1252	0,1348	0,1895	0,0927	0,1098	0,0576	0,0677	0,0526	0,0544	0,0707	0,0952	0,0425	0,0398
14	0,1223	0,0908	1,2315	0,1373	0,1901	0,0952	0,1104	0,0579	0,0682	0,0551	0,0536	0,0733	0,0956	0,0428	0,0404
15	0,1290	0,0941	1,3381	0,1396	0,1910	0,0977	0,1119	0,0581	0,0687	0,0578	0,0540	0,0761	0,0973	0,0430	0,0409
16	0,1359	0,0974	1,4691	0,1427	0,1920	0,1005	0,1135	0,0583	0,0693	0,0606	0,0543	0,0788	0,0988	0,0433	0,0416
17	0,1425	0,1006	1,5925	0,1451	0,1929	0,1032	0,1154	0,0585	0,0698	0,0633	0,0550	0,0815	0,1009	0,0435	0,0421
18	0,1491	0,1036	1,7309	0,1482	0,1943	0,1059	0,1178	0,0586	0,0702	0,0660	0,0558	0,0842	0,1033	0,0436	0,0426
19	0,1559	0,1069	1,8589	0,1504	0,1951	0,1084	0,1194	0,0587	0,0707	0,0685	0,0561	0,0869	0,1051	0,0438	0,0431
20	0,1632	0,1105	1,9919	0,1528	0,1960	0,1114	0,1214	0,0588	0,0711	0,0714	0,0570	0,0899	0,1076	0,0439	0,0436

Tablica 9.4: Uśredniona miara Itakury-Saito w scenariuszu gwałtownych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 2500$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmów wykorzystujących zaproponowane kryteria wyboru rzędu i pasma estymacji FPE oraz PE. FK - procedura uśredniania oszacowań współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania współczynników autokorelacji.

n/n_{max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK						FR					
				π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE	π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE
1	4,0988	4,0800	4,2859	4,0308	4,0104	4,0632	4,0620	4,0874	4,0303	4,0314	4,0098	4,0623	4,0620	4,0863	4,0324
2	3,2839	3,3446	3,5902	3,0610	3,0878	3,3011	3,1548	3,2541	3,0330	3,0595	3,0944	3,2930	3,1250	3,2149	3,0393
3	3,1555	3,2111	3,5260	2,9257	2,9493	3,1635	3,0340	3,1105	2,8819	2,9299	2,9603	3,1594	3,0052	3,0727	2,8906
4	2,1475	2,3655	2,5048	1,9483	2,1250	2,3337	2,0070	2,0084	1,7666	1,8923	2,0531	2,3022	1,9124	1,8868	1,7437
5	2,1526	2,3510	2,6332	1,9403	2,1034	2,3199	2,0000	1,9980	1,7592	1,8691	2,0065	2,2801	1,9018	1,8804	1,7353
6	1,3654	1,7231	1,6510	1,2523	1,6074	1,7134	1,3676	1,2782	0,9064	1,1268	1,4236	1,6653	1,1003	0,9884	0,8375
7	1,2607	1,5522	1,7783	1,2438	1,5829	1,5663	1,3362	1,2756	0,9329	1,0439	1,2840	1,4890	1,0817	1,0188	0,8548
8	0,4155	0,6666	0,8597	0,5941	0,9694	0,6907	0,6555	0,3438	0,1969	0,3220	0,5459	0,6398	0,3154	0,1141	0,1232
9	0,3505	0,5459	0,9216	0,5865	0,9591	0,6020	0,6080	0,3290	0,1961	0,2690	0,4543	0,5243	0,2456	0,1100	0,1161
10	0,3268	0,4739	0,9903	0,5817	0,9446	0,5429	0,5981	0,3188	0,1956	0,2441	0,3970	0,4520	0,2371	0,1115	0,1123
11	0,3162	0,4311	1,0730	0,5805	0,9316	0,5063	0,5931	0,3040	0,1942	0,2295	0,3510	0,4093	0,2380	0,1123	0,1113
12	0,3154	0,4275	1,1550	0,5800	0,9273	0,5030	0,5940	0,3007	0,1938	0,2240	0,3417	0,4032	0,2417	0,1131	0,1115
13	0,3213	0,4239	1,2433	0,5817	0,9293	0,5000	0,6008	0,3019	0,1938	0,2254	0,3370	0,3996	0,2448	0,1144	0,1115
14	0,3231	0,4136	1,3564	0,5816	0,9227	0,4889	0,6065	0,2980	0,1933	0,2228	0,3227	0,3880	0,2480	0,1149	0,1117
15	0,3265	0,4114	1,4613	0,5830	0,9209	0,4857	0,6099	0,2966	0,1932	0,2216	0,3178	0,3849	0,2516	0,1154	0,1119
16	0,3299	0,4112	1,5990	0,5834	0,9212	0,4846	0,6148	0,2953	0,1923	0,2202	0,3138	0,3839	0,2556	0,1152	0,1122
17	0,3352	0,4142	1,7263	0,5846	0,9217	0,4850	0,6238	0,2951	0,1923	0,2204	0,3131	0,3859	0,2606	0,1160	0,1124
18	0,3424	0,4171	1,8999	0,5872	0,9226	0,4862	0,6323	0,2953	0,1925	0,2225	0,3132	0,3880	0,2650	0,1166	0,1126
19	0,3485	0,4199	2,0330	0,5884	0,9232	0,4875	0,6389	0,2955	0,1924	0,2234	0,3129	0,3902	0,2692	0,1176	0,1128
20	0,3556	0,4221	2,1801	0,5899	0,9237	0,4881	0,6456	0,2955	0,1927	0,2249	0,3116	0,3916	0,2734	0,1183	0,1131

Tablica 9.5: Uśredniona miara Itakury-Saito w scenariuszu gwałtownych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 5000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmów wykorzystujących zaproponowane kryteria wyboru rzędu i pasma estymacji FPE oraz PE. FK - procedura uśredniania oszacowań współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania współczynników autokorelacji.

n/n_{\max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK						FR					
				π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE	π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE
1	4,0890	4,0424	4,3313	4,0287	3,9919	4,0329	4,0373	4,0660	4,0122	4,0294	3,9920	4,0326	4,0376	4,0661	4,0156
2	3,1431	3,1629	3,5899	2,9856	2,9864	3,1366	3,0214	3,0958	2,9782	2,9853	2,9902	3,1317	3,0069	3,0776	2,9816
3	3,0227	3,0325	3,5357	2,8561	2,8514	3,0037	2,8986	2,9688	2,8401	2,8606	2,8574	3,0013	2,8855	2,9525	2,8466
4	1,9400	2,0285	2,4831	1,8035	1,8772	2,0035	1,8364	1,8369	1,7168	1,7700	1,8329	1,9924	1,7956	1,7952	1,7086
5	1,9421	2,0064	2,6013	1,7952	1,8631	1,9845	1,8320	1,8280	1,7101	1,7557	1,8015	1,9668	1,7897	1,7904	1,7013
6	1,0807	1,2648	1,6272	1,0048	1,1903	1,2523	1,0626	0,9805	0,8076	0,9254	1,0793	1,2317	0,9308	0,8610	0,7930
7	1,0436	1,1517	1,7782	1,0062	1,1742	1,1671	1,0428	0,9925	0,8303	0,8925	0,9908	1,1177	0,9201	0,8826	0,8040
8	0,2419	0,3661	0,8354	0,3477	0,5411	0,3909	0,3561	0,1569	0,1035	0,1783	0,2956	0,3538	0,1832	0,0509	0,0817
9	0,2136	0,2963	0,9033	0,3458	0,5317	0,3411	0,3326	0,1584	0,1038	0,1534	0,2403	0,2853	0,1463	0,0488	0,0753
10	0,2048	0,2669	0,9766	0,3443	0,5264	0,3175	0,3274	0,1591	0,1045	0,1423	0,2118	0,2554	0,1414	0,0482	0,0738
11	0,2026	0,2509	1,0626	0,3449	0,5250	0,3050	0,3262	0,1602	0,1049	0,1367	0,1947	0,2391	0,1425	0,0485	0,0740
12	0,2048	0,2462	1,1487	0,3463	0,5244	0,3013	0,3292	0,1608	0,1053	0,1353	0,1875	0,2337	0,1451	0,0490	0,0737
13	0,2110	0,2486	1,2393	0,3486	0,5254	0,3027	0,3331	0,1609	0,1059	0,1375	0,1878	0,2357	0,1480	0,0495	0,0739
14	0,2152	0,2465	1,3546	0,3501	0,5248	0,2998	0,3362	0,1612	0,1064	0,1378	0,1836	0,2330	0,1503	0,0500	0,0744
15	0,2199	0,2462	1,4619	0,3523	0,5251	0,2991	0,3403	0,1614	0,1067	0,1385	0,1809	0,2322	0,1534	0,0504	0,0747
16	0,2245	0,2455	1,6021	0,3538	0,5240	0,2975	0,3461	0,1614	0,1071	0,1392	0,1781	0,2307	0,1570	0,0510	0,0752
17	0,2303	0,2468	1,7286	0,3558	0,5243	0,2980	0,3502	0,1617	0,1074	0,1406	0,1767	0,2314	0,1606	0,0514	0,0756
18	0,2375	0,2501	1,9015	0,3592	0,5257	0,3003	0,3556	0,1621	0,1078	0,1431	0,1775	0,2341	0,1642	0,0517	0,0759
19	0,2435	0,2521	2,0349	0,3609	0,5258	0,3011	0,3606	0,1622	0,1080	0,1448	0,1772	0,2356	0,1676	0,0521	0,0762
20	0,2498	0,2545	2,1759	0,3626	0,5266	0,3022	0,3653	0,1624	0,1083	0,1469	0,1772	0,2375	0,1714	0,0525	0,0765

Tablica 9.6: Uśredniona miara Itakury-Saito w scenariuszu gwałtownych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 10000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmów wykorzystujących zaproponowane kryteria wyboru rzędu i pasma estymacji FPE oraz PE. FK - procedura uśredniania oszacowań współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania współczynników autokorelacji.

n/n_{\max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK						FR					
				π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE	π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE
1	4,0859	4,0299	4,3237	4,0268	3,9837	4,0237	4,0221	4,0584	4,0056	4,0277	3,9840	4,0238	4,0225	4,0588	4,0077
2	3,0652	3,0244	3,5556	2,9420	2,9065	3,0098	2,9446	3,0079	2,9410	2,9410	2,9066	3,0069	2,9367	2,9989	2,9439
3	2,9465	2,8958	3,4989	2,8111	2,7712	2,8790	2,8175	2,8806	2,8085	2,8139	2,7736	2,8777	2,8107	2,8735	2,8128
4	1,8576	1,8486	2,4921	1,7384	1,7389	1,8351	1,7303	1,7533	1,6913	1,7157	1,7118	1,8278	1,7049	1,7322	1,6870
5	1,8688	1,8390	2,6192	1,7353	1,7276	1,8258	1,7285	1,7581	1,6912	1,7109	1,6927	1,8161	1,7030	1,7400	1,6877
6	0,9394	0,9961	1,5847	0,8848	0,9481	0,9928	0,8954	0,8636	0,7695	0,8232	0,8767	0,9781	0,8187	0,7976	0,7549
7	0,9349	0,9461	1,7365	0,8931	0,9440	0,9564	0,8935	0,8795	0,7888	0,8147	0,8366	0,9271	0,8233	0,8214	0,7705
8	0,1562	0,2022	0,8099	0,2251	0,3020	0,2212	0,2038	0,1003	0,0706	0,1054	0,1559	0,1966	0,1044	0,0386	0,0496
9	0,1446	0,1678	0,8781	0,2255	0,2989	0,1973	0,1929	0,1010	0,0708	0,0944	0,1292	0,1628	0,0877	0,0376	0,0472
10	0,1433	0,1546	0,9533	0,2258	0,2963	0,1868	0,1917	0,1016	0,0717	0,0904	0,1157	0,1493	0,0869	0,0375	0,0466
11	0,1452	0,1483	1,0393	0,2276	0,2962	0,1821	0,1926	0,1020	0,0719	0,0890	0,1078	0,1428	0,0889	0,0377	0,0472
12	0,1495	0,1471	1,1255	0,2298	0,2968	0,1812	0,1952	0,1023	0,0725	0,0898	0,1050	0,1412	0,0917	0,0381	0,0478
13	0,1554	0,1497	1,2178	0,2323	0,2981	0,1831	0,1992	0,1030	0,0731	0,0922	0,1058	0,1434	0,0945	0,0385	0,0484
14	0,1605	0,1499	1,3305	0,2345	0,2984	0,1827	0,2023	0,1032	0,0736	0,0937	0,1043	0,1432	0,0972	0,0389	0,0489
15	0,1664	0,1511	1,4398	0,2370	0,2992	0,1834	0,2059	0,1034	0,0741	0,0956	0,1036	0,1440	0,1003	0,0391	0,0494
16	0,1722	0,1521	1,5790	0,2395	0,2995	0,1838	0,2103	0,1036	0,0745	0,0974	0,1028	0,1445	0,1033	0,0393	0,0499
17	0,1783	0,1540	1,7063	0,2420	0,3005	0,1853	0,2126	0,1037	0,0749	0,0996	0,1028	0,1460	0,1061	0,0395	0,0503
18	0,1851	0,1570	1,8769	0,2453	0,3019	0,1876	0,2170	0,1039	0,0754	0,1022	0,1039	0,1486	0,1092	0,0398	0,0507
19	0,1912	0,1592	2,0105	0,2477	0,3028	0,1890	0,2204	0,1040	0,0758	0,1046	0,1043	0,1504	0,1124	0,0400	0,0511
20	0,1975	0,1616	2,1512	0,2498	0,3034	0,1906	0,2229	0,1040	0,0762	0,1070	0,1048	0,1525	0,1154	0,0402	0,0516

Tablica 9.7: Usrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów w scenariuszu łagodnych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 2500$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmów wykorzystujących zaproponowane kryteria wyboru rzędu i pasma estymacji FPE oraz PE. FK - procedura usredniania oszacowań współczynników odbicia, FR - procedura usredniania współczynników autokorelacji.

n/n_{max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK						FR					
				π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE	π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE
1	11,9626	11,9217	12,0144	12,0047	12,0012	11,9297	12,0871	12,0192	12,0075	11,9973	11,9858	11,9274	12,0833	12,0135	12,0054
2	8,5685	8,5024	8,6470	8,6599	8,6722	8,5120	8,8696	8,6295	8,6562	8,6740	8,6917	8,5192	8,8723	8,6297	8,6738
3	6,3103	6,2682	6,4370	6,4059	6,5154	6,2702	6,8501	6,5050	6,4913	6,4023	6,5355	6,2586	6,8615	6,4769	6,5003
4	2,7993	2,7241	2,9415	2,9344	3,1916	2,6982	4,6062	2,8248	2,8914	3,2066	3,9842	2,6720	4,8500	2,7861	2,9561
5	2,6553	2,9210	2,6948	2,4441	2,9606	2,8045	3,6426	2,7810	2,4606	2,5804	3,3661	2,8120	3,7351	2,7192	2,5227
6	1,3558	1,8596	1,2170	0,6537	0,9963	1,6278	2,3297	1,4277	0,8651	0,8883	1,5856	1,5756	2,5043	1,2659	0,8911
7	0,7612	1,1901	1,1252	1,0377	1,6934	1,0148	5,3395	0,9599	0,5989	2,2618	4,2754	0,9739	5,9332	0,7211	0,5625
8	0,5534	0,8889	1,1265	0,6419	1,0327	0,7534	3,7842	0,5938	0,3133	1,4429	2,8980	0,6407	4,3201	0,3685	0,2916
9	0,6646	1,0792	1,4228	0,6248	1,0139	0,9270	3,1986	0,6319	0,3301	1,2396	2,6005	0,8515	3,6385	0,4063	0,3108
10	0,7270	1,1168	1,7452	0,7371	1,3756	0,9624	3,4123	0,6735	0,3463	1,2959	2,6728	0,9016	3,7353	0,4181	0,3265
11	0,7996	1,1408	2,0929	0,8889	1,9425	0,9851	4,3503	0,7541	0,3863	1,4110	3,5734	0,9265	4,6614	0,4546	0,3418
12	0,8635	1,1684	2,3952	0,9865	2,1432	1,0089	4,9360	0,8417	0,4220	1,6147	3,9432	0,9540	5,3595	0,5025	0,3475
13	0,9351	1,1946	2,7058	0,9838	1,9456	1,0323	4,3460	0,8286	0,4322	1,5607	3,2974	0,9677	4,6502	0,5085	0,3532
14	1,0023	1,2290	3,0392	0,9412	1,7582	1,0631	3,8124	0,7904	0,4371	1,4110	2,8561	0,9961	4,0764	0,5126	0,3574
15	1,0633	1,2616	3,2830	0,9439	1,7335	1,0917	3,6854	0,7679	0,4373	1,3412	2,7386	1,0241	3,9455	0,5195	0,3618
16	1,1382	1,2992	3,7006	0,9756	1,7402	1,1262	3,6294	0,7583	0,4459	1,3333	2,6922	1,0576	3,8603	0,5322	0,3708
17	1,2059	1,3354	3,9783	1,0227	1,7606	1,1580	3,6921	0,7626	0,4536	1,4075	2,7394	1,0892	3,9400	0,5442	0,3777
18	1,2665	1,3678	4,2457	1,0476	1,7665	1,1870	3,6859	0,7644	0,4587	1,4262	2,7124	1,1185	3,9254	0,5483	0,3830
19	1,3298	1,4020	4,5585	1,0634	1,7625	1,2176	3,6201	0,7631	0,4628	1,4124	2,6399	1,1493	3,8618	0,5512	0,3909
20	1,3960	1,4391	4,8615	1,0896	1,7651	1,2517	3,5710	0,7603	0,4671	1,4069	2,5701	1,1841	3,7915	0,5526	0,3954

Tablica 9.8: Usrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów w scenariuszu łagodnych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 5000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmów wykorzystujących zaproponowane kryteria wyboru rzędu i pasma estymacji FPE oraz PE. FK - procedura usredniania oszacowań współczynników odbicia, FR - procedura usredniania współczynników autokorelacji.

n/n_{max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK						FR					
				π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE	π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE
1	11,9857	11,9556	12,0268	12,0086	12,0012	11,9613	12,0521	12,0107	12,0108	12,0023	11,9922	11,9589	12,0494	12,0062	12,0095
2	8,6227	8,5770	8,6734	8,6699	8,6730	8,5821	8,7854	8,6373	8,6672	8,6792	8,6850	8,5865	8,7886	8,6373	8,6813
3	6,3861	6,3389	6,5039	6,4210	6,4465	6,3425	6,6111	6,4627	6,4794	6,4183	6,4438	6,3389	6,6148	6,4523	6,4842
4	2,8972	2,8387	3,0151	2,9185	2,9925	2,8249	3,6304	2,8938	2,9400	3,0105	3,2912	2,8287	3,7293	2,9005	2,9840
5	2,4603	2,5662	2,6279	2,2573	2,3741	2,5050	2,6843	2,4409	2,3489	2,3149	2,5170	2,5136	2,7201	2,4415	2,4018
6	1,0260	1,2818	1,1059	0,5170	0,5913	1,1628	1,0260	1,0524	0,7937	0,5932	0,8631	1,1559	1,1133	1,0320	0,8147
7	0,5474	0,6754	1,0826	0,4573	1,0264	0,5987	2,6693	0,5121	0,4184	0,7232	2,4122	0,5964	2,9702	0,4872	0,4775
8	0,3482	0,4412	1,1019	0,2343	0,6175	0,3778	1,8792	0,2551	0,1836	0,3693	1,5218	0,3517	2,1253	0,2153	0,2355
9	0,4254	0,5231	1,3918	0,2728	0,5938	0,4529	1,5317	0,2710	0,1995	0,3889	1,2839	0,4361	1,7179	0,2306	0,2517
10	0,4854	0,5518	1,6880	0,3242	0,7146	0,4792	1,5882	0,2806	0,2124	0,4436	1,3467	0,4636	1,7485	0,2408	0,2660
11	0,5515	0,5785	2,0141	0,3774	0,8609	0,5037	1,7418	0,2973	0,2257	0,4970	1,4490	0,4857	1,8524	0,2511	0,2782
12	0,6281	0,6176	2,3397	0,4221	0,9642	0,5393	1,9893	0,3201	0,2410	0,5602	1,6798	0,5228	2,1354	0,2632	0,2934
13	0,6899	0,6455	2,6126	0,4363	0,9169	0,5636	1,9186	0,3243	0,2473	0,5489	1,5604	0,5460	2,0665	0,2658	0,2979
14	0,7606	0,6823	2,9470	0,4635	0,8617	0,5970	1,7637	0,3265	0,2553	0,5566	1,3773	0,5800	1,9097	0,2690	0,3046
15	0,8269	0,7162	3,1972	0,4962	0,8491	0,6272	1,6810	0,3274	0,2633	0,5790	1,2754	0,6126	1,8013	0,2719	0,3119
16	0,9040	0,7555	3,6143	0,5353	0,8620	0,6646	1,6710	0,3322	0,2725	0,6154	1,2447	0,6458	1,7781	0,2771	0,3216
17	0,9623	0,7844	3,8869	0,5671	0,8943	0,6897	1,7448	0,3369	0,2792	0,6527	1,3063	0,6718	1,8547	0,2797	0,3281
18	1,0262	0,8157	4,1842	0,5928	0,8985	0,7173	1,7567	0,3391	0,2850	0,6731	1,3017	0,7015	1,8680	0,2811	0,3327
19	1,0847	0,8471	4,4747	0,6193	0,8971	0,7457	1,7294	0,3403	0,2902	0,6911	1,2593	0,7307	1,8414	0,2828	0,3384
20	1,1595	0,8846	4,8048	0,6586	0,9044	0,7798	1,7182	0,3421	0,2965	0,7231	1,2229	0,7662	1,8201	0,2851	0,3453

Tablica 9.9: Uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów w scenariuszu łagodnych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 10000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmów wykorzystujących zaproponowane kryteria wyboru rzędu i pasma estymacji FPE oraz PE. FK - procedura uśredniania oszacowań współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania współczynników autokorelacji.

n/n_{\max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK						FR					
				π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE	π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE
1	11,9958	11,9754	12,0271	12,0070	11,9991	11,9793	12,0274	12,0037	12,0074	12,0018	11,9926	11,9771	12,0252	11,9995	12,0060
2	8,6508	8,6237	8,6806	8,6725	8,6736	8,6253	8,7354	8,6403	8,6697	8,6811	8,6825	8,6289	8,7391	8,6412	8,6808
3	6,3945	6,3564	6,4999	6,4033	6,3974	6,3591	6,4788	6,3825	6,4445	6,4041	6,3959	6,3576	6,4793	6,3785	6,4478
4	2,9081	2,8744	3,0051	2,9071	2,9108	2,8648	3,1564	2,8727	2,9205	2,9487	3,0125	2,8750	3,1917	2,8847	2,9492
5	2,3901	2,4115	2,6082	2,2555	2,2355	2,3798	2,3348	2,3409	2,3412	2,2878	2,2922	2,3874	2,3528	2,3496	2,3715
6	0,8560	0,9744	1,0550	0,5725	0,4737	0,9150	0,5350	0,8811	0,6988	0,5971	0,5620	0,9221	0,5678	0,8856	0,7042
7	0,4635	0,4572	1,0651	0,3362	0,4274	0,4223	0,9071	0,3902	0,3507	0,3781	0,7377	0,4271	0,9785	0,3886	0,3713
8	0,2667	0,2341	1,0863	0,1324	0,1925	0,2036	0,5836	0,1431	0,1162	0,1420	0,3591	0,2034	0,6366	0,1319	0,1219
9	0,3431	0,2864	1,3820	0,1719	0,2207	0,2506	0,5427	0,1567	0,1317	0,1842	0,3591	0,2538	0,5853	0,1445	0,1362
10	0,4085	0,3162	1,6848	0,2039	0,2632	0,2775	0,5780	0,1652	0,1439	0,2167	0,4013	0,2811	0,6204	0,1524	0,1474
11	0,4775	0,3506	2,0045	0,2411	0,3071	0,3092	0,6374	0,1721	0,1559	0,2542	0,4475	0,3106	0,6723	0,1592	0,1583
12	0,5490	0,3875	2,3245	0,2783	0,3385	0,3427	0,7023	0,1782	0,1667	0,2917	0,5009	0,3453	0,7456	0,1647	0,1697
13	0,6119	0,4197	2,6028	0,3083	0,3368	0,3714	0,7004	0,1811	0,1759	0,3176	0,4708	0,3745	0,7390	0,1687	0,1780
14	0,6792	0,4548	2,9205	0,3423	0,3422	0,4033	0,7035	0,1843	0,1841	0,3520	0,4528	0,4080	0,7438	0,1723	0,1868
15	0,7451	0,4898	3,1678	0,3746	0,3565	0,4346	0,7185	0,1866	0,1924	0,3855	0,4512	0,4410	0,7532	0,1750	0,1948
16	0,8174	0,5260	3,5676	0,4115	0,3760	0,4683	0,7476	0,1898	0,2005	0,4216	0,4652	0,4729	0,7839	0,1784	0,2033
17	0,8811	0,5596	3,8397	0,4452	0,3995	0,4982	0,7934	0,1917	0,2071	0,4574	0,4978	0,5050	0,8292	0,1806	0,2105
18	0,9516	0,5964	4,1381	0,4813	0,4107	0,5318	0,8144	0,1926	0,2145	0,4912	0,4996	0,5393	0,8501	0,1820	0,2174
19	1,0142	0,6277	4,4485	0,5122	0,4224	0,5603	0,8312	0,1944	0,2211	0,5222	0,5007	0,5684	0,8674	0,1839	0,2236
20	1,0853	0,6653	4,7640	0,5501	0,4422	0,5948	0,8587	0,1951	0,2277	0,5603	0,5108	0,6042	0,8934	0,1850	0,2297

Tablica 9.10: Uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów w scenariuszu gwałtownych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 2500$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmów wykorzystujących zaproponowane kryteria wyboru rzędu i pasma estymacji FPE oraz PE. FK - procedura uśredniania oszacowań współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania współczynników autokorelacji.

n/n_{\max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK						FR					
				π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE	π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE
1	13,8552	13,9004	13,8283	13,7892	13,7835	13,8903	13,6941	13,8165	13,7903	13,7771	13,7607	13,8834	13,6914	13,8068	13,7869
2	10,6858	10,8202	10,5829	10,5368	10,5551	10,7881	10,3618	10,5378	10,5430	10,5440	10,5638	10,7862	10,3709	10,5374	10,5631
3	8,5839	8,9668	8,3003	8,2620	8,3889	8,8824	7,9530	8,3190	8,2749	8,2902	8,4427	8,8954	7,9466	8,3009	8,2980
4	5,7587	6,6706	4,5243	4,5226	4,7382	6,2900	3,8480	4,1565	4,3481	5,1086	5,6402	6,5444	3,8780	4,1914	4,3887
5	4,3750	5,4964	3,5386	3,6264	4,3112	5,2278	3,5833	3,6604	3,4759	3,9636	4,8389	5,3572	3,6457	3,6725	3,5210
6	2,6617	4,3202	1,2675	1,2803	1,7497	3,8251	1,2458	0,8838	0,7622	1,9629	2,7569	4,0750	1,2647	0,8543	0,7317
7	5,7578	8,0102	2,1514	2,2103	2,5104	7,0396	1,3656	1,1412	0,8734	4,8309	5,9161	7,7619	1,6792	1,2972	0,9911
8	4,1152	5,7527	1,7854	1,2613	1,3612	4,8523	0,7447	0,5319	0,5008	3,2436	4,1407	5,5491	0,9021	0,6916	0,4557
9	3,2151	4,8804	1,9605	1,1361	1,3943	4,0919	1,0196	0,5578	0,5041	2,5308	3,6537	4,6790	1,1480	0,6726	0,4592
10	3,2551	5,1266	2,2775	1,3857	1,9840	4,4657	1,1375	0,6470	0,5105	2,5451	3,7774	4,8994	1,2849	0,7653	0,4772
11	3,4696	6,5858	2,6760	1,7023	2,8343	5,9112	1,1976	0,8318	0,5634	2,7247	5,0419	6,3523	1,3851	1,0443	0,4911
12	3,9996	7,7092	3,0751	1,9699	3,2511	6,9429	1,2435	1,0223	0,6231	3,2051	5,6801	7,5223	1,4939	1,4127	0,5106
13	4,0614	6,9250	3,4031	1,9924	3,0640	6,2523	1,2694	0,9955	0,6367	3,1953	4,9774	6,7040	1,5150	1,4174	0,5223
14	3,8071	6,0871	3,7282	1,8998	2,8304	5,5126	1,2988	0,9333	0,6411	2,9021	4,3258	5,8596	1,5144	1,3476	0,5288
15	3,6169	5,7403	4,0111	1,8512	2,7369	5,1809	1,3301	0,8756	0,6309	2,6834	4,0414	5,5003	1,5153	1,2467	0,5344
16	3,5729	5,6737	4,4586	1,8708	2,7403	5,1338	1,3633	0,8463	0,6317	2,6142	4,0161	5,4143	1,5361	1,2039	0,5407
17	3,6768	5,7546	4,7594	1,9216	2,7637	5,1922	1,3969	0,8495	0,6394	2,6984	4,0681	5,5221	1,5807	1,2405	0,5477
18	3,7547	5,7172	5,0949	1,9601	2,7646	5,1647	1,4333	0,8508	0,6435	2,7311	4,0166	5,4675	1,6108	1,2450	0,5523
19	3,7623	5,6232	5,3927	1,9778	2,7649	5,0917	1,4620	0,8492	0,6466	2,7074	3,9183	5,3789	1,6348	1,2397	0,5565
20	3,7849	5,5415	5,7203	2,0008	2,7626	5,0287	1,4954	0,8483	0,6497	2,6878	3,8359	5,2937	1,6670	1,2275	0,5616

Tablica 9.11: Uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów w scenariuszu gwałtownych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 5000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmów wykorzystujących zaproponowane kryteria wyboru rzędu i pasma estymacji FPE oraz PE. FK - procedura uśredniania oszacowań współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania współczynników autokorelacji.

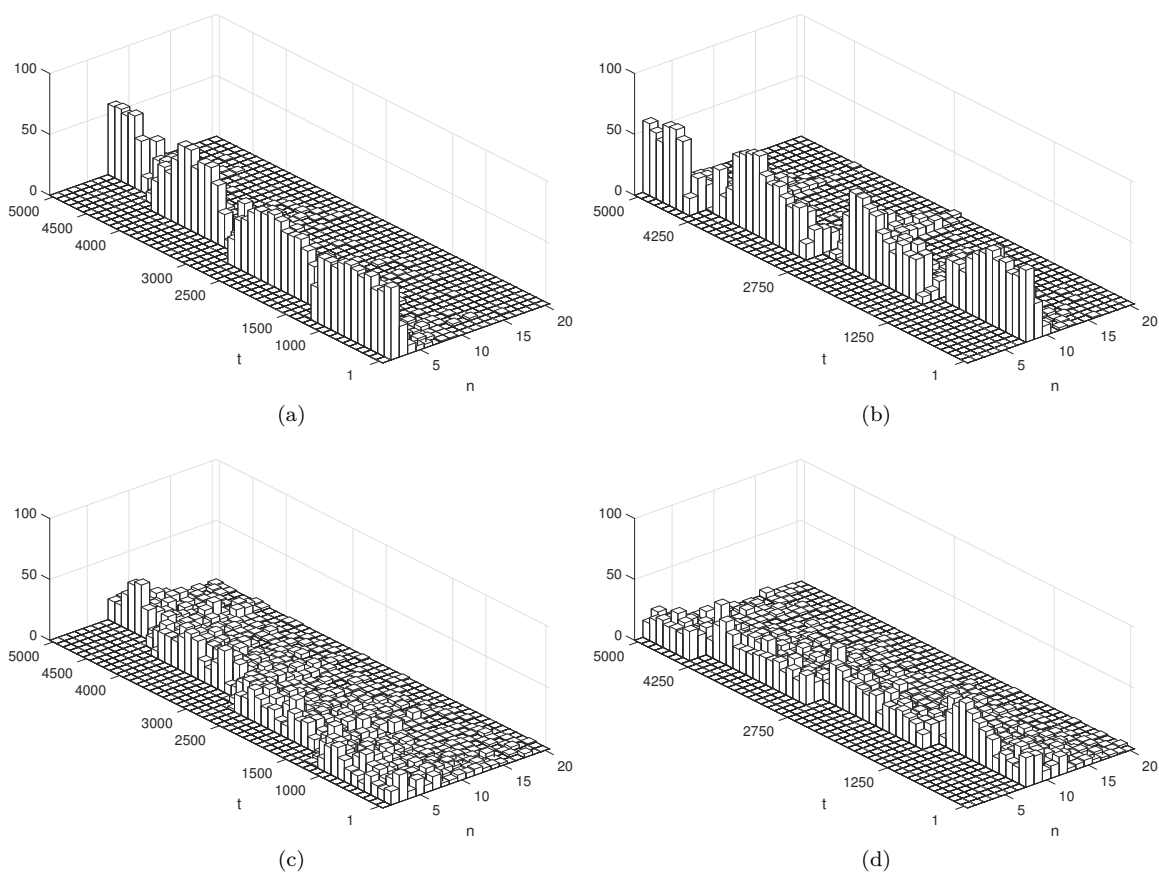
n/n_{\max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK						FR					
				π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE	π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE
1	13,8087	13,8284	13,8074	13,7736	13,7664	13,8240	13,7214	13,7809	13,7739	13,7650	13,7543	13,8194	13,7190	13,7742	13,7717
2	10,6168	10,6825	10,5694	10,5344	10,5397	10,6642	10,4394	10,5162	10,5377	10,5414	10,5451	10,6652	10,4454	10,5166	10,5533
3	8,3430	8,5451	8,2444	8,1708	8,2320	8,4984	8,0125	8,1862	8,1922	8,1889	8,2696	8,5077	8,0103	8,1734	8,2046
4	4,9313	5,7257	4,3101	4,2741	4,4608	5,4583	3,9419	4,0583	4,1809	4,5919	5,0836	5,6430	3,9650	4,1119	4,2062
5	3,7088	4,3480	3,4100	3,2971	3,6181	4,1969	3,2817	3,2098	3,2508	3,4853	3,9574	4,2604	3,3189	3,2568	3,2845
6	1,5910	2,6297	1,0684	0,8904	1,2642	2,3484	0,8635	0,5860	0,6224	1,2382	1,9562	2,5109	0,8793	0,6103	0,6148
7	3,1762	5,8393	1,7065	1,4270	2,2300	5,1397	0,9489	0,6189	0,6704	2,7475	4,9414	5,7032	1,1201	0,7428	0,7779
8	2,1961	4,0821	1,4281	0,7429	1,2348	3,4990	0,4329	0,1392	0,2573	1,7509	3,2720	3,9931	0,5267	0,2572	0,2789
9	1,7864	3,1225	1,6709	0,6878	1,0916	2,6711	0,5628	0,1504	0,2666	1,3904	2,5138	3,0096	0,6339	0,2378	0,2884
10	1,8354	3,1384	1,9997	0,8213	1,3406	2,7593	0,6401	0,1651	0,2787	1,4216	2,5152	3,0280	0,7215	0,2437	0,3066
11	1,9751	3,2934	2,3933	0,9835	1,6528	3,0187	0,6836	0,2043	0,2920	1,5141	2,6578	3,1751	0,7787	0,2787	0,3229
12	2,2611	3,8023	2,7652	1,1190	1,8893	3,5074	0,7247	0,2518	0,3073	1,7569	3,1382	3,7025	0,8487	0,3283	0,3406
13	2,3276	3,7976	3,0867	1,1504	1,8751	3,4886	0,7550	0,2633	0,3178	1,7806	3,0899	3,7058	0,8787	0,3417	0,3518
14	2,2449	3,4591	3,4470	1,1287	1,7497	3,1628	0,7880	0,2643	0,3288	1,6566	2,7292	3,3735	0,8974	0,3427	0,3630
15	2,1909	3,2179	3,6859	1,1215	1,6794	2,9349	0,8180	0,2625	0,3341	1,5708	2,4758	3,1059	0,9201	0,3375	0,3688
16	2,2162	3,1210	4,1380	1,1534	1,6760	2,8653	0,8547	0,2651	0,3420	1,5533	2,3754	2,9868	0,9487	0,3418	0,3805
17	2,3017	3,2200	4,4138	1,1957	1,7201	2,9528	0,8879	0,2796	0,3486	1,6106	2,4627	3,0935	0,9879	0,3562	0,3900
18	2,3769	3,2592	4,7522	1,2351	1,7391	2,9873	0,9255	0,2853	0,3551	1,6468	2,4790	3,1230	1,0222	0,3627	0,3978
19	2,4156	3,2210	5,0802	1,2594	1,7351	2,9508	0,9572	0,2859	0,3591	1,6514	2,4216	3,0838	1,0525	0,3646	0,4034
20	2,4594	3,1815	5,4206	1,2874	1,7325	2,9171	0,9882	0,2841	0,3649	1,6587	2,3621	3,0419	1,0829	0,3652	0,4097

Tablica 9.12: Uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów w scenariuszu gwałtownych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 10000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmów wykorzystujących zaproponowane kryteria wyboru rzędu i pasma estymacji FPE oraz PE. FK - procedura uśredniania oszacowań współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania współczynników autokorelacji.

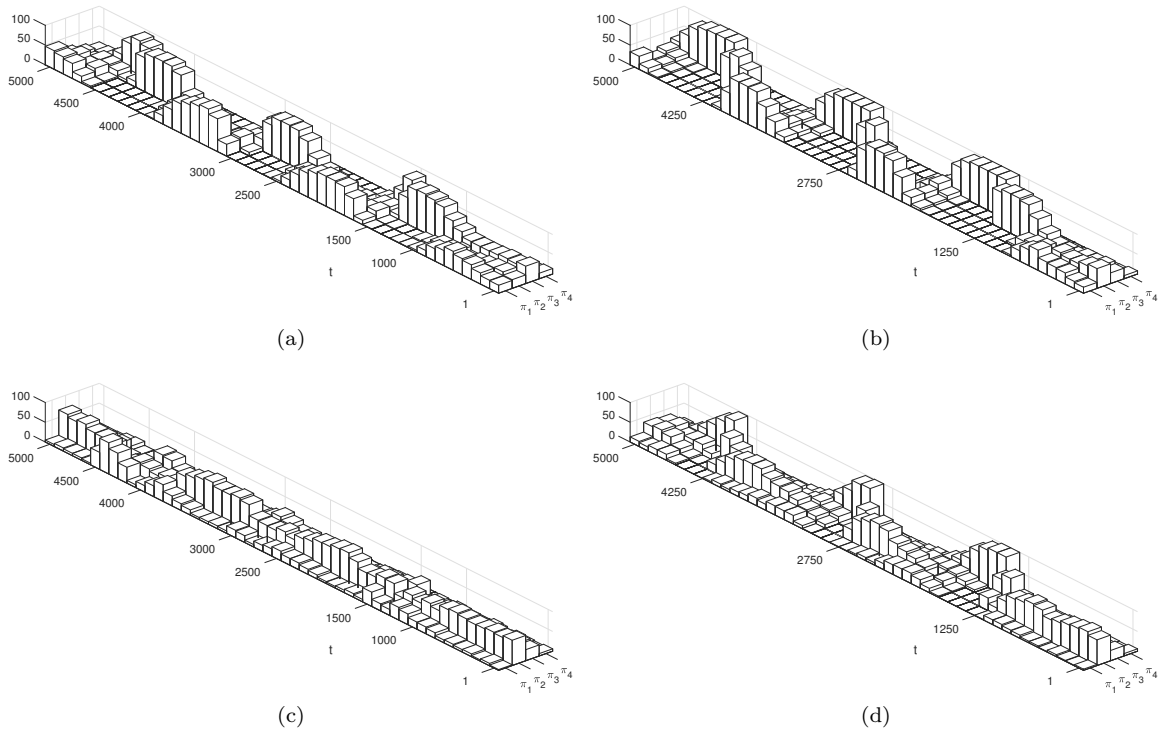
n/n_{\max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK						FR					
				π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE	π_1	π_2	π_3	π_4	FPE	PE
1	13,7798	13,7849	13,7926	13,7608	13,7526	13,7837	13,7323	13,7600	13,7610	13,7539	13,7446	13,7803	13,7298	13,7546	13,7592
2	10,5563	10,5883	10,5397	10,5098	10,5123	10,5773	10,4653	10,4872	10,5114	10,5172	10,5189	10,5796	10,4699	10,4865	10,5241
3	8,2311	8,3227	8,2171	8,1335	8,1548	8,2976	8,0522	8,1179	8,1560	8,1444	8,1732	8,3037	8,0516	8,1087	8,1664
4	4,5144	4,9362	4,2245	4,1691	4,2719	4,7904	4,0110	4,0616	4,1274	4,3432	4,5914	4,8918	4,0311	4,0949	4,1537
5	3,3957	3,7005	3,3712	3,1490	3,2941	3,6142	3,1454	3,1184	3,1749	3,2591	3,4775	3,6535	3,1718	3,1510	3,2058
6	1,0736	1,5802	0,9794	0,6876	0,8787	1,4324	0,6667	0,5176	0,5506	0,8676	1,2331	1,5193	0,6794	0,5404	0,5502
7	1,9275	3,2609	1,4914	0,9884	1,4402	2,8957	0,7348	0,5396	0,5888	1,6696	2,8597	3,1889	0,8262	0,6178	0,6403
8	1,2190	2,1528	1,2652	0,4369	0,7113	1,8532	0,2638	0,0801	0,1572	0,9406	1,7578	2,1051	0,3142	0,1492	0,1598
9	1,0397	1,6585	1,5329	0,4233	0,6281	1,4262	0,3482	0,0892	0,1691	0,7721	1,3426	1,5994	0,3898	0,1421	0,1689
10	1,1048	1,6826	1,8620	0,5058	0,7546	1,4831	0,4013	0,0970	0,1818	0,8077	1,3613	1,6260	0,4475	0,1458	0,1843
11	1,2091	1,7689	2,2419	0,6051	0,9064	1,6204	0,4436	0,1070	0,1959	0,8691	1,4194	1,7056	0,4953	0,1593	0,2008
12	1,3766	2,0248	2,6048	0,6815	1,0167	1,8644	0,4793	0,1160	0,2091	0,9960	1,6490	1,9682	0,5455	0,1749	0,2160
13	1,4424	2,0393	2,9075	0,7119	1,0185	1,8711	0,5104	0,1206	0,2197	1,0235	1,6368	1,9855	0,5760	0,1809	0,2275
14	1,4453	1,8933	3,2432	0,7261	0,9705	1,7297	0,5451	0,1236	0,2290	0,9890	1,4709	1,8437	0,6055	0,1827	0,2367
15	1,4585	1,7980	3,5157	0,7440	0,9460	1,6379	0,5783	0,1260	0,2377	0,9693	1,3601	1,7336	0,6356	0,1824	0,2458
16	1,5143	1,7804	3,9437	0,7818	0,9566	1,6305	0,6164	0,1285	0,2470	0,9855	1,3235	1,7039	0,6701	0,1838	0,2554
17	1,5966	1,8497	4,2380	0,8213	0,9872	1,6921	0,6485	0,1315	0,2548	1,0351	1,3759	1,7744	0,7055	0,1868	0,2641
18	1,6741	1,8883	4,5841	0,8610	1,0064	1,7272	0,6859	0,1337	0,2629	1,0746	1,3950	1,8075	0,7420	0,1901	0,2729
19	1,7323	1,8861	4,9247	0,8942	1,0120	1,7246	0,7203	0,1343	0,2689	1,0973	1,3720	1,8039	0,7765	0,1912	0,2787
20	1,7943	1,8876	5,2798	0,9307	1,0215	1,7274	0,7570	0,1347	0,2753	1,1215	1,3525	1,8032	0,8140	0,1924	0,2854

Wyniki przedstawione w tabelach 9.1-9.12 pokazują, że procedura uśredniania oszacowań współczynników autokorelacji daje lepsze rezultaty w procesie estymacji widmowej gęstości mocy, natomiast procedura uśredniania współczynników odbicia sprawdza się lepiej w przypadku śledzenia zmian parametrów procesu. Otrzymane wyniki pokazują także, że gdy rząd estymowanego modelu jest nie mniejszy niż maksymalny rzeczywisty rząd analizowanego sygnału, tj. gdy $n \geq 8$, wykorzystanie zaproponowanych kryteriów FPE oraz PE w procesie równoległej estymacji daje znacznie lepsze rezultaty niż pozostałe lewostronne oraz dwukierunkowe algorytmy estymacji zarówno w przypadku uśredniania współczynników odbicia, jak i uśredniania oszacowań współczynników autokorelacji. Istotną zaletą zaproponowanych metod jest to, iż zwiększenie wartości maksymalnego rzędu estymowanego modelu ma niewielki wpływ na pogorszenie jakości estymacji parametrów, a w następstwie estymowanej widmowej gęstości mocy.

Na rysunkach 9.7-9.8 przedstawiono uśrednione histogramy łącznego wyboru wartości rzędu i pasma estymacji na podstawie kryteriów FPE oraz PE w procesie równoległej estymacji w wariancie z uśrednianiem współczynników autokorelacji. Rezultaty przedstawiono dla scenariusza łagodnych oraz gwałtownych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 5000$ próbek. Wyniki zostały lokalnie uśrednione w obrębie 100 kolejnych chwil czasu.



Rysunek 9.7: Uśrednione histogramy wyboru wartości rzędu estymowanego modelu na podstawie kryteriów (a-b) FPE oraz (c-d) PE w procesie równoległej estymacji w wariancie z uśrednianiem współczynników autokorelacji dla scenariusza (a,c) łagodnych i (b,d) gwałtownych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 5000$ próbek.



Rysunek 9.8: Uśrednione histogramy wyboru wartości pasma estymacji na podstawie kryteriów (a-b) FPE oraz (c-d) PE w procesie równoległej estymacji w wariancie z uśrednianiem współczynników autokorelacji dla scenariusza (a,c) łagodnych i (b,d) gwałtownych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 5000$ próbek.

Przedstawione histogramy potwierdzają, że zarówno w jednym jak i w drugim scenariuszu testowym zastosowane kryteria wyboru działają w sposób zadowalający. Analizując histogramy wyboru rzędu (rysunek 9.7) można zauważyć, że stosowanie kryterium FPE daje lepsze rezultaty wyboru właściwego rzędu estymowanego modelu niż stosowanie kryterium PE. Ocena skuteczności kryteriów FPE oraz PE przy wyborze właściwego pasma estymacji na podstawie otrzymanych histogramów (rysunek 9.8) nie jest tak oczywista, jak w przypadku wyboru rzędu. W celu zbadania skuteczności zaproponowanych kryteriów w wyborze właściwego pasma estymacji przeprowadzono analizę obu scenariuszy testowych w taki sposób, że w każdej chwili czasu rząd estymowanego modelu był wybierany w sposób ustalony, natomiast pasmo estymacji było wybierane w sposób adaptacyjny za pomocą każdego z kryteriów. Symulacje przeprowadzono w wariancie uśredniania współczynników autokorelacji dla modeli o wybranych rzędach od $n = 1$ do $n = 20$. Otrzymane wyniki przedstawiono w tabelach 9.13-9.15.

Tablica 9.13: Uśrednione miary Itakury-Saito oraz uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów przy zastosowaniu kryteriów FPE oraz PE do wyboru pasma estymacji przy ustalonym rzędzie estymowanego modelu w wariancie uśredniania współczynników autokorelacji dla sygnału o długości $N = 2500$ próbek.

n_{\max}	d_{IS}				d_{CE}			
	Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne		Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne	
	FPE	PE	FPE	PE	FPE	PE	FPE	PE
1	4,1990	4,1282	4,0863	4,0324	12,0135	12,0054	13,8068	13,7869
2	2,8198	2,6275	3,2149	3,0373	8,6297	8,6721	10,5374	10,5575
3	2,6882	2,4744	3,0727	2,8862	6,4759	6,4770	8,3000	8,2749
4	1,6104	1,3555	1,8870	1,7400	2,7861	2,9559	4,1928	4,3838
5	1,6156	1,3396	1,8810	1,7336	2,7270	2,5324	3,6730	3,5510
6	0,7090	0,4538	0,9889	0,8324	1,2852	0,9456	0,8705	0,8640
7	0,7451	0,4576	1,0205	0,8537	0,7410	0,6752	1,3172	1,3019
8	0,0793	0,0775	0,1161	0,1213	0,3946	0,2892	0,3937	0,6998
9	0,0826	0,0739	0,1131	0,1068	0,4508	0,3209	0,4275	0,6837
10	0,0858	0,0757	0,1160	0,1036	0,4775	0,3511	0,4585	0,7514
11	0,0896	0,0785	0,1184	0,1063	0,5390	0,3947	0,5154	0,8715
12	0,0929	0,0808	0,1203	0,1084	0,6321	0,4528	0,5829	1,0501
13	0,0961	0,0825	0,1236	0,1106	0,6607	0,4680	0,6074	1,1011
14	0,1003	0,0846	0,1252	0,1130	0,6784	0,4869	0,6118	1,0911
15	0,1037	0,0868	0,1274	0,1154	0,7106	0,5115	0,6286	1,0866
16	0,1073	0,0893	0,1281	0,1173	0,7508	0,5477	0,6673	1,1245
17	0,1103	0,0917	0,1305	0,1193	0,8064	0,5859	0,7163	1,1994
18	0,1137	0,0942	0,1336	0,1216	0,8353	0,6082	0,7439	1,2321
19	0,1168	0,0968	0,1364	0,1238	0,8545	0,6298	0,7654	1,2499
20	0,1205	0,0997	0,1391	0,1260	0,8795	0,6592	0,7934	1,2770

Tablica 9.14: Uśrednione miary Itakury-Saito oraz uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów przy zastosowaniu kryteriów FPE oraz PE do wyboru pasma estymacji przy ustalonym rzędzie estymowanego modelu w wariancie uśredniania współczynników autokorelacji dla sygnału o długości $N = 5000$ próbek.

n_{\max}	d_{IS}				d_{CE}			
	Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne		Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne	
	FPE	PE	FPE	PE	FPE	PE	FPE	PE
1	4,1853	4,1091	4,0661	4,0156	12,0062	12,0095	13,7742	13,7717
2	2,6440	2,5306	3,0776	2,9797	8,6373	8,6786	10,5166	10,5477
3	2,5031	2,3764	2,9527	2,8390	6,4522	6,4559	8,1732	8,1746
4	1,4146	1,3014	1,7956	1,7018	2,9013	2,9845	4,1135	4,1998
5	1,4200	1,2865	1,7914	1,6915	2,4475	2,3650	3,2618	3,2328
6	0,5107	0,4188	0,8621	0,7818	1,0499	0,8291	0,6261	0,6298
7	0,5243	0,3982	0,8853	0,7914	0,5223	0,5352	0,7801	0,8688
8	0,0584	0,0552	0,0546	0,0698	0,2724	0,2892	0,3097	0,3596
9	0,0606	0,0567	0,0540	0,0606	0,3084	0,3209	0,3116	0,3613
10	0,0632	0,0585	0,0553	0,0600	0,3440	0,3511	0,3508	0,4165
11	0,0659	0,0606	0,0573	0,0618	0,3846	0,3947	0,4135	0,4791
12	0,0689	0,0629	0,0598	0,0632	0,4346	0,4528	0,5096	0,5709
13	0,0713	0,0645	0,0625	0,0657	0,4631	0,4680	0,5570	0,6156
14	0,0741	0,0660	0,0652	0,0682	0,4973	0,4869	0,5770	0,6365
15	0,0770	0,0681	0,0679	0,0705	0,5317	0,5115	0,5896	0,6505
16	0,0802	0,0704	0,0706	0,0727	0,5727	0,5477	0,6281	0,6876
17	0,0831	0,0725	0,0734	0,0749	0,6052	0,5859	0,6851	0,7439
18	0,0862	0,0747	0,0761	0,0774	0,6382	0,6082	0,7288	0,7857
19	0,0893	0,0769	0,0789	0,0796	0,6694	0,6298	0,7547	0,8086
20	0,0924	0,0792	0,0817	0,0820	0,7086	0,6592	0,7771	0,8362

Tablica 9.15: Uśrednione miary Itakury-Saito oraz uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów przy zastosowaniu kryteriów FPE oraz PE do wyboru pasma estymacji przy ustalonym rzędzie estymowanego modelu w wariancie uśredniania współczynników autokorelacji dla sygnału o długości $N = 10000$ próbek.

n_{max}	d_{IS}				d_{CE}			
	Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne		Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne	
	FPE	PE	FPE	PE	FPE	PE	FPE	PE
1	4,1753	4,1058	4,0588	4,0077	11,9995	12,0060	13,7546	13,7592
2	2,5334	2,4788	2,9989	2,9419	8,6412	8,6785	10,4865	10,5187
3	2,4006	2,3363	2,8737	2,8070	6,3790	6,4151	8,1092	8,1317
4	1,3097	1,2518	1,7326	1,6829	2,8862	2,9440	4,0964	4,1452
5	1,2995	1,2318	1,7409	1,6824	2,3544	2,3142	3,1546	3,1363
6	0,4318	0,3988	0,7989	0,7487	0,9022	0,7090	0,5572	0,5577
7	0,4242	0,3707	0,8243	0,7652	0,4222	0,4002	0,6551	0,6997
8	0,0442	0,0344	0,0424	0,0450	0,1859	0,1542	0,2061	0,2187
9	0,0466	0,0364	0,0430	0,0420	0,2230	0,1831	0,2245	0,2325
10	0,0492	0,0384	0,0447	0,0420	0,2527	0,2068	0,2574	0,2721
11	0,0516	0,0401	0,0468	0,0437	0,2867	0,2363	0,3004	0,3197
12	0,0543	0,0420	0,0493	0,0458	0,3213	0,2706	0,3487	0,3769
13	0,0569	0,0438	0,0518	0,0478	0,3508	0,2899	0,3857	0,4135
14	0,0594	0,0456	0,0542	0,0499	0,3826	0,3124	0,4171	0,4350
15	0,0619	0,0475	0,0567	0,0521	0,4136	0,3362	0,4451	0,4557
16	0,0646	0,0496	0,0591	0,0541	0,4473	0,3628	0,4796	0,4884
17	0,0669	0,0513	0,0616	0,0560	0,4774	0,3918	0,5143	0,5286
18	0,0694	0,0532	0,0642	0,0581	0,5117	0,4150	0,5520	0,5627
19	0,0718	0,0549	0,0665	0,0600	0,5386	0,4353	0,5821	0,5872
20	0,0743	0,0569	0,0690	0,0617	0,5720	0,4613	0,6171	0,6155

Analiza wyników przedstawionych w tabelach 9.13-9.15 pozwala dostrzec, iż przewaga kryterium FPE nad kryterium PE w przypadku wyboru pasma estymacji przy ustalonym rzędzie estymowanego modelu nie jest oczywista. Dla scenariusza łagodnych zmian parametrów procesu kryterium PE daje zwykle lepsze wyniki niż kryterium FPE.

Otrzymane rezultaty pokazują, że kryterium FPE jest skuteczniejsze w przypadku wyboru rzędu estymowanego modelu, natomiast kryterium PE może dawać lepsze rezultaty wyboru pasma estymacji. Uzyskane wyniki stały się motywacją do zastosowania mieszanych strategii adaptacyjnego wyboru pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu.

Strategie mieszane są dwuetapowymi procedurami wyboru pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu. Gdy kryterium FPE jest użyte do wyboru rzędu modelu, a kryterium PE do wyboru pasma estymacji, dla każdego pasma estymacji π wybierany jest rząd n , a następnie wybierana jest wartość pasma estymacji (strategia A):

$$\hat{n}_\pi(t) = \arg \min_n FPE_{n|\pi}(t),$$

$$\hat{\pi}(t) = \arg \min_\pi PE_{\hat{n}_\pi|\pi}(t)$$

lub najpierw wybierana jest wartość pasma estymacji dla każdego rzędu n , a następnie wybrany zostaje rząd modelu (strategia B):

$$\hat{\pi}_n(t) = \arg \min_\pi PE_{n|\pi}(t),$$

$$\hat{n}(t) = \arg \min_n FPE_{n|\hat{\pi}_n}(t).$$

W symulacjach sprawdzono działanie opisanych strategii również w przypadku zastosowania kryterium PE do wyboru rzędu estymowanego modelu oraz kryterium FPE do wyboru pasma estymacji (strategie C oraz D). Strategia C jest opisana za pomocą formuł:

$$\hat{n}_\pi(t) = \arg \min_n PE_{n|\pi}(t),$$

$$\hat{\pi}(t) = \arg \min_\pi FPE_{\hat{n}_\pi|\pi}(t),$$

natomiast strategia D:

$$\hat{\pi}_n(t) = \arg \min_{\pi} \text{FPE}_{n|\pi}(t),$$

$$\hat{n}(t) = \arg \min_n \text{PE}_{n|\hat{\pi}_n}(t).$$

Wyniki uzyskane dla strategii mieszanych zostały zamieszczone w tabelach 9.16-9.18 (scenariusz łagodnych zmian) oraz 9.19-9.21 (scenariusz gwałtownych zmian).

Tablica 9.16: Uśrednione miary Itakury-Saito oraz uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów przy zastosowaniu mieszanych strategii wyboru pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu dla scenariusza łagodnych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 2500$ próbek.

n_{\max}	d_{IS}				d_{CE}			
	A	B	C	D	A	B	C	D
1	4,1282	4,1282	4,1990	4,1990	12,0054	12,0054	12,0135	12,0135
2	2,6275	2,6275	2,8205	2,8210	8,6721	8,6719	8,6314	8,6344
3	2,4808	2,4836	2,6879	2,6877	6,4804	6,4805	6,5045	6,5458
4	1,3665	1,3706	1,6091	1,5947	2,9521	3,0692	2,7860	2,8327
5	1,3544	1,3565	1,6082	1,5905	2,6094	2,5924	2,6495	2,6544
6	0,4665	0,4716	0,6606	0,5695	0,9245	0,9983	1,1701	1,1193
7	0,4695	0,4737	0,7108	0,6917	0,6277	0,8442	0,6204	0,6370
8	0,0895	0,0942	0,0702	0,0735	0,3714	0,5023	0,2838	0,2945
9	0,0882	0,0941	0,0707	0,0746	0,3928	0,5409	0,3000	0,3133
10	0,0886	0,0948	0,0714	0,0755	0,4005	0,5756	0,3099	0,3256
11	0,0890	0,0941	0,0723	0,0767	0,4254	0,6622	0,3222	0,3369
12	0,0893	0,0934	0,0731	0,0777	0,4537	0,7251	0,3300	0,3451
13	0,0895	0,0935	0,0736	0,0787	0,4617	0,6994	0,3407	0,3555
14	0,0898	0,0927	0,0745	0,0797	0,4615	0,6693	0,3480	0,3623
15	0,0899	0,0926	0,0752	0,0806	0,4644	0,6585	0,3551	0,3709
16	0,0902	0,0926	0,0761	0,0818	0,4748	0,6636	0,3646	0,3812
17	0,0904	0,0924	0,0767	0,0825	0,4823	0,6778	0,3728	0,3895
18	0,0905	0,0925	0,0773	0,0832	0,4860	0,6794	0,3785	0,3952
19	0,0907	0,0926	0,0780	0,0839	0,4886	0,6780	0,3866	0,4022
20	0,0908	0,0925	0,0785	0,0847	0,4904	0,6722	0,3921	0,4077

Tablica 9.17: Uśrednione miary Itakury-Saito oraz uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów przy zastosowaniu mieszanych strategii wyboru pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu dla scenariusza łagodnych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 5000$ próbek.

n_{\max}	d_{IS}				d_{CE}			
	A	B	C	D	A	B	C	D
1	4,1091	4,1091	4,1853	4,1853	12,0095	12,0095	12,0062	12,0062
2	2,5306	2,5306	2,6450	2,6454	8,6786	8,6781	8,6403	8,6425
3	2,3797	2,3810	2,5053	2,5055	6,4575	6,4570	6,4847	6,5034
4	1,3066	1,3095	1,4139	1,4062	2,9765	3,0465	2,9054	2,9396
5	1,2936	1,2962	1,4160	1,4043	2,3850	2,3931	2,4655	2,4818
6	0,4258	0,4310	0,4882	0,4446	0,7982	0,8853	1,0081	0,9638
7	0,4057	0,4118	0,5047	0,4803	0,4498	0,7520	0,4769	0,4813
8	0,0625	0,0677	0,0533	0,0538	0,2095	0,4242	0,2115	0,2147
9	0,0626	0,0688	0,0541	0,0545	0,2248	0,4179	0,2266	0,2315
10	0,0627	0,0688	0,0548	0,0554	0,2334	0,4443	0,2385	0,2476
11	0,0628	0,0689	0,0556	0,0563	0,2410	0,5028	0,2508	0,2630
12	0,0630	0,0687	0,0565	0,0573	0,2499	0,5879	0,2645	0,2788
13	0,0631	0,0688	0,0571	0,0579	0,2517	0,5772	0,2719	0,2862
14	0,0632	0,0684	0,0579	0,0586	0,2541	0,5496	0,2810	0,2946
15	0,0633	0,0682	0,0586	0,0594	0,2559	0,5223	0,2896	0,3037
16	0,0634	0,0682	0,0594	0,0602	0,2594	0,5214	0,3006	0,3151
17	0,0635	0,0681	0,0600	0,0607	0,2613	0,5435	0,3074	0,3214
18	0,0636	0,0684	0,0607	0,0614	0,2622	0,5452	0,3141	0,3285
19	0,0636	0,0685	0,0613	0,0619	0,2633	0,5405	0,3213	0,3356
20	0,0637	0,0686	0,0621	0,0627	0,2646	0,5305	0,3303	0,3447

Tablica 9.18: Uśrednione miary Itakury-Saito oraz uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów przy zastosowaniu mieszanych strategii wyboru pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu dla scenariusza łagodnych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 10000$ próbek.

n_{\max}	d_{IS}				d_{CE}			
	A	B	C	D	A	B	C	D
1	4,1058	4,1058	4,1753	4,1753	12,0060	12,0060	11,9995	11,9995
2	2,4788	2,4787	2,5344	2,5349	8,6785	8,6781	8,6439	8,6460
3	2,3363	2,3370	2,4034	2,4039	6,4147	6,4140	6,4169	6,4294
4	1,2526	1,2536	1,3099	1,3084	2,9412	2,9575	2,8924	2,9110
5	1,2327	1,2338	1,2986	1,2938	2,3342	2,3209	2,4024	2,4179
6	0,3992	0,4019	0,4250	0,4143	0,6927	0,7200	0,8772	0,8558
7	0,3701	0,3735	0,4136	0,4022	0,3555	0,4536	0,3902	0,3898
8	0,0333	0,0362	0,0405	0,0406	0,1049	0,1762	0,1394	0,1370
9	0,0339	0,0373	0,0415	0,0415	0,1147	0,1811	0,1548	0,1520
10	0,0342	0,0379	0,0424	0,0425	0,1205	0,1898	0,1669	0,1648
11	0,0345	0,0382	0,0433	0,0433	0,1253	0,2054	0,1785	0,1764
12	0,0347	0,0386	0,0442	0,0441	0,1290	0,2261	0,1903	0,1881
13	0,0349	0,0389	0,0449	0,0449	0,1315	0,2241	0,2004	0,1978
14	0,0351	0,0391	0,0457	0,0456	0,1339	0,2246	0,2106	0,2076
15	0,0352	0,0393	0,0464	0,0462	0,1357	0,2231	0,2196	0,2158
16	0,0354	0,0394	0,0472	0,0470	0,1380	0,2262	0,2300	0,2253
17	0,0355	0,0396	0,0479	0,0476	0,1396	0,2329	0,2380	0,2324
18	0,0356	0,0397	0,0485	0,0482	0,1406	0,2329	0,2460	0,2397
19	0,0356	0,0398	0,0491	0,0488	0,1419	0,2331	0,2532	0,2471
20	0,0357	0,0399	0,0497	0,0493	0,1424	0,2326	0,2612	0,2542

Tablica 9.19: Uśrednione miary Itakury-Saito oraz uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów przy zastosowaniu mieszanych strategii wyboru pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu dla scenariusza gwałtownych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 2500$ próbek.

n_{\max}	d_{IS}				d_{CE}			
	A	B	C	D	A	B	C	D
1	4,0324	4,0324	4,0863	4,0863	13,7869	13,7869	13,8068	13,8068
2	3,0373	3,0374	3,2170	3,2174	10,5575	10,5572	10,5433	10,5456
3	2,8891	2,8885	3,0748	3,0744	8,2922	8,2755	8,3281	8,3548
4	1,7424	1,7433	1,8870	1,8804	4,3814	4,4070	4,1980	4,2429
5	1,7371	1,7354	1,8801	1,8705	3,6389	3,5785	3,6183	3,6124
6	0,8356	0,8380	0,9548	0,8980	0,8431	0,8611	0,7323	0,7150
7	0,8546	0,8562	0,9895	0,9687	1,2586	1,3740	0,9643	0,9685
8	0,1235	0,1239	0,1103	0,1136	0,6788	0,7104	0,4934	0,4901
9	0,1147	0,1167	0,1039	0,1131	0,6661	0,7062	0,4797	0,4750
10	0,1139	0,1125	0,1034	0,1170	0,7028	0,7552	0,4809	0,5159
11	0,1137	0,1108	0,1027	0,1232	0,7959	0,8773	0,5008	0,5981
12	0,1143	0,1102	0,1032	0,1259	0,9349	1,0451	0,5291	0,6882
13	0,1136	0,1104	0,1037	0,1273	0,9583	1,0530	0,5422	0,7065
14	0,1141	0,1101	0,1042	0,1292	0,9618	1,0192	0,5514	0,7110
15	0,1148	0,1101	0,1046	0,1295	0,9501	0,9710	0,5569	0,7013
16	0,1152	0,1099	0,1048	0,1295	0,9637	0,9548	0,5629	0,6914
17	0,1155	0,1101	0,1052	0,1296	0,9947	0,9803	0,5703	0,6983
18	0,1158	0,1103	0,1055	0,1296	1,0018	0,9837	0,5751	0,7039
19	0,1160	0,1106	0,1059	0,1298	1,0100	0,9814	0,5811	0,7080
20	0,1164	0,1109	0,1064	0,1300	1,0136	0,9763	0,5881	0,7126

Tablica 9.20: Uśrednione miary Itakury-Saito oraz uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów przy zastosowaniu mieszanych strategii wyboru pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu dla scenariusza gwałtownych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 5000$ próbek.

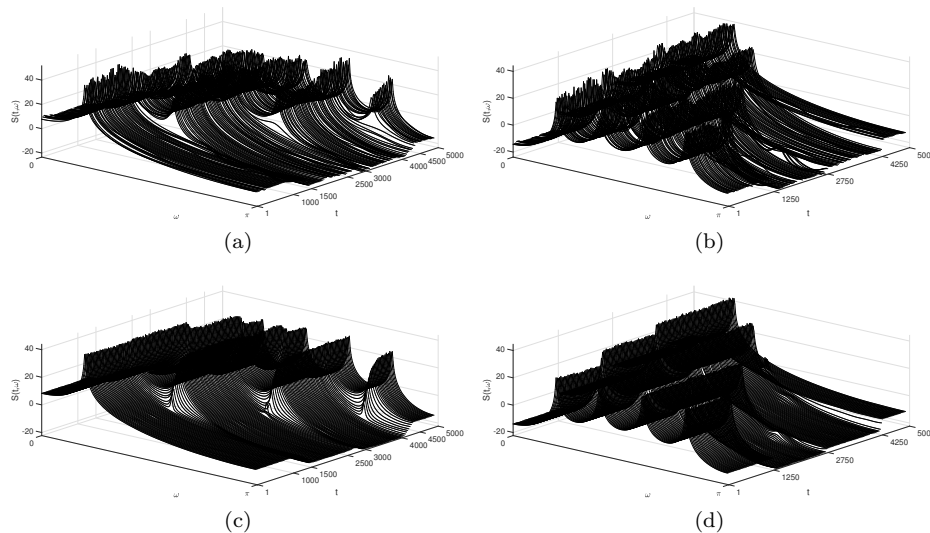
n_{\max}	d_{IS}				d_{CE}			
	A	B	C	D	A	B	C	D
1	4,0156	4,0156	4,0661	4,0661	13,7717	13,7717	13,7742	13,7742
2	2,9797	2,9796	3,0799	3,0810	10,5477	10,5471	10,5229	10,5272
3	2,8424	2,8437	2,9558	2,9567	8,1789	8,1757	8,2082	8,2346
4	1,7068	1,7083	1,7954	1,7911	4,1964	4,2515	4,1213	4,1743
5	1,6997	1,7004	1,7912	1,7852	3,2549	3,2759	3,3242	3,3479
6	0,7910	0,7929	0,8464	0,8117	0,5903	0,7019	0,6178	0,6111
7	0,8027	0,8049	0,8695	0,8563	0,7627	1,1042	0,7207	0,7222
8	0,0807	0,0825	0,0513	0,0511	0,2599	0,5076	0,2482	0,2438
9	0,0731	0,0753	0,0500	0,0493	0,2579	0,4675	0,2473	0,2412
10	0,0719	0,0730	0,0502	0,0493	0,2820	0,5046	0,2570	0,2474
11	0,0717	0,0726	0,0509	0,0499	0,3132	0,5981	0,2707	0,2586
12	0,0712	0,0715	0,0514	0,0507	0,3458	0,7544	0,2865	0,2738
13	0,0714	0,0717	0,0521	0,0514	0,3559	0,7644	0,2975	0,2857
14	0,0717	0,0717	0,0529	0,0521	0,3603	0,7230	0,3085	0,2975
15	0,0718	0,0715	0,0534	0,0527	0,3602	0,6723	0,3142	0,3029
16	0,0719	0,0714	0,0540	0,0534	0,3654	0,6639	0,3242	0,3132
17	0,0721	0,0714	0,0545	0,0540	0,3753	0,7048	0,3322	0,3218
18	0,0724	0,0716	0,0551	0,0546	0,3799	0,7108	0,3404	0,3296
19	0,0724	0,0716	0,0555	0,0551	0,3820	0,7056	0,3464	0,3350
20	0,0726	0,0718	0,0560	0,0555	0,3845	0,6921	0,3519	0,3404

Tablica 9.21: Uśrednione miary Itakury-Saito oraz uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów przy zastosowaniu mieszanych strategii wyboru pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu dla scenariusza gwałtownych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 10000$ próbek.

n_{\max}	d_{IS}				d_{CE}			
	A	B	C	D	A	B	C	D
1	4,0077	4,0077	4,0588	4,0588	13,7592	13,7592	13,7546	13,7546
2	2,9419	2,9419	3,0012	3,0021	10,5187	10,5181	10,4925	10,4970
3	2,8084	2,8094	2,8771	2,8774	8,1341	8,1316	8,1499	8,1629
4	1,6853	1,6867	1,7332	1,7325	4,1416	4,1725	4,1060	4,1288
5	1,6856	1,6869	1,7410	1,7393	3,1511	3,1546	3,2366	3,2592
6	0,7524	0,7548	0,7929	0,7708	0,5280	0,5923	0,5523	0,5531
7	0,7684	0,7723	0,8130	0,8052	0,6223	0,8416	0,6146	0,6207
8	0,0481	0,0512	0,0395	0,0390	0,1424	0,2984	0,1506	0,1492
9	0,0450	0,0488	0,0390	0,0383	0,1415	0,2732	0,1569	0,1530
10	0,0450	0,0476	0,0396	0,0387	0,1538	0,2959	0,1687	0,1628
11	0,0445	0,0473	0,0405	0,0395	0,1690	0,3430	0,1841	0,1760
12	0,0446	0,0472	0,0413	0,0403	0,1829	0,4191	0,1978	0,1888
13	0,0446	0,0476	0,0421	0,0411	0,1885	0,4270	0,2098	0,2006
14	0,0449	0,0476	0,0428	0,0418	0,1917	0,4081	0,2204	0,2102
15	0,0450	0,0477	0,0435	0,0424	0,1928	0,3825	0,2302	0,2186
16	0,0451	0,0477	0,0442	0,0430	0,1949	0,3771	0,2402	0,2280
17	0,0452	0,0477	0,0448	0,0436	0,1978	0,3967	0,2484	0,2355
18	0,0453	0,0479	0,0454	0,0442	0,2007	0,4011	0,2576	0,2441
19	0,0454	0,0480	0,0460	0,0447	0,2019	0,3977	0,2639	0,2495
20	0,0454	0,0481	0,0465	0,0452	0,2029	0,3916	0,2714	0,2559

Wyniki w powyższych tabelach pokazują skuteczność mieszanych strategii zarówno w procesie estymacji widmowej gęstości mocy, jak i śledzenia zmian parametrów procesu. Przykładowo, strategia C daje zwykle lepsze wyniki śledzenia parametrów i estymacji widma niż kryterium FPE bez względu na szybkość zmian parametrów analizowanego procesu.

Na rysunku 9.9 przedstawiono widmową gęstość mocy estymowaną za pomocą procedury uśredniania oszacowań współczynników autokorelacji, z wykorzystaniem kryterium FPE do łącznego wyboru rzędu modelu i pasma estymacji dla sygnału o długości $N = 5000$ próbek zarówno w scenariuszu łagodnych, jak i gwałtownych zmian parametrów.



Rysunek 9.9: Widmowa gęstość mocy estymowana za pomocą procedury uśredniania oszacowań współczynników autokorelacji, z wykorzystaniem kryterium FPE do łącznego wyboru rzędu modelu i pasma estymacji dla sygnału o długości $N = 5000$ próbek. (a-b) Wyniki dla pojedynczej realizacji procesu oraz (c-d) wyniki uśrednione po 100 niezależnych realizacjach w scenariuszu (a,c) łagodnych oraz (b,d) gwałtownych zmian parametrów

9.2.2 Wariant wielowymiarowy

Z uwagi na bardzo długie czasy obliczeń, symulacje w wariantcie wielowymiarowym ograniczono jedynie do algorytmów adaptacyjnego wyboru rzędu i pasma opartych na kryterium końcowego błędu predykcji. Z tego samego powodu pominięto również rozwiązania oparte na strategiach mieszanych.

W tabelach 9.22-9.33 zamieszczono uśrednione miary oceny jakości analizy wygenerowanych fragmentów realizacji wielowymiarowego niestacjonarnego procesu autoregresyjnego o długościach odpowiednio $N = 2000$, $N = 4000$ oraz $N = 8000$ próbek. Analogicznie do przypadku jednowymiarowego, symulacje przeprowadzono za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmu wykorzystującego zaproponowane kryterium adaptacyjnego wyboru rzędu i pasma estymacji (MFPE) dla różnych wartości maksymalnego rzędu modelu od $n = 1$ do $n = 20$. Rezultaty otrzymano dla wariantu uśredniania oszacowań macierzy współczynników odbicia (FK) oraz wariantu uśredniania oszacowań macierzy współczynników autokorelacji (FR). Tabele 9.22-9.27 zawierają wartości uśrednionej miary względnej entropii estymowanej widmowej gęstości mocy w scenariuszu łagodnych oraz gwałtownych zmian parametrów. W tabelach 9.28-9.33 zamieszczono natomiast uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów analizowanych sygnałów.

Tablica 9.22: Uśrednione miary względnej entropii w scenariuszu łagodnych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 2000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmu wykorzystującego zaproponowane kryterium wyboru rzędu i pasma estymacji MFPE. FK - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników autokorelacji.

n/n_{\max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK					FR				
				π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE	π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE
1	2,2294	1,8886	4,1644	2,0422	1,8159	1,8911	2,0859	2,2248	1,9963	1,7781	1,8777	2,0611	2,1882
2	0,5916	0,5194	1,6807	0,5512	0,5110	0,5265	0,5840	0,5493	0,5184	0,4832	0,5133	0,5615	0,5086
3	0,4000	0,3215	1,8025	0,3441	0,3102	0,3260	0,3932	0,3365	0,3157	0,2842	0,3134	0,3746	0,3049
4	0,3043	0,2515	1,6510	0,2559	0,2437	0,2540	0,3087	0,2463	0,2307	0,2204	0,2417	0,2919	0,2263
5	0,1944	0,1505	1,6285	0,1396	0,1415	0,1513	0,1972	0,1242	0,1156	0,1181	0,1393	0,1829	0,1097
6	0,1968	0,1471	1,8352	0,1358	0,1365	0,1471	0,1937	0,1195	0,1117	0,1128	0,1351	0,1793	0,1049
7	0,2043	0,1468	2,1405	0,1338	0,1318	0,1459	0,1877	0,1162	0,1103	0,1079	0,1339	0,1732	0,1018
8	0,1971	0,1380	2,3410	0,1206	0,1218	0,1359	0,1772	0,1024	0,0984	0,0997	0,1242	0,1640	0,0888
9	0,1997	0,1353	2,5885	0,1140	0,1144	0,1315	0,1673	0,0948	0,0931	0,0927	0,1205	0,1550	0,0818
10	0,2003	0,1303	2,8475	0,1056	0,1063	0,1250	0,1574	0,0849	0,0858	0,0854	0,1145	0,1463	0,0717
11	0,2157	0,1360	3,2359	0,1103	0,1077	0,1294	0,1593	0,0851	0,0910	0,0866	0,1192	0,1485	0,0721
12	0,2312	0,1419	3,6915	0,1152	0,1096	0,1339	0,1639	0,0854	0,0966	0,0886	0,1241	0,1534	0,0724
13	0,2473	0,1478	4,2467	0,1203	0,1115	0,1385	0,1686	0,0854	0,1022	0,0906	0,1290	0,1584	0,0725
14	0,2632	0,1539	4,8375	0,1251	0,1133	0,1431	0,1726	0,0855	0,1077	0,0927	0,1340	0,1628	0,0725
15	0,2799	0,1599	5,4720	0,1303	0,1152	0,1478	0,1776	0,0855	0,1135	0,0947	0,1389	0,1680	0,0725
16	0,2967	0,1660	6,1956	0,1354	0,1170	0,1525	0,1822	0,0855	0,1192	0,0968	0,1439	0,1729	0,0725
17	0,3147	0,1721	6,9995	0,1409	0,1189	0,1573	0,1874	0,0855	0,1252	0,0988	0,1489	0,1782	0,0726
18	0,3325	0,1783	7,9203	0,1461	0,1208	0,1621	0,1923	0,0855	0,1310	0,1010	0,1541	0,1833	0,0726
19	0,3519	0,1850	8,9990	0,1515	0,1227	0,1673	0,1969	0,0855	0,1371	0,1031	0,1596	0,1882	0,0726
20	0,3707	0,1913	10,1027	0,1570	0,1245	0,1723	0,2014	0,0855	0,1431	0,1051	0,1648	0,1929	0,0726

Tablica 9.23: Uśrednione miary względnej entropii w scenariuszu łagodnych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 4000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmu wykorzystującego zaproponowane kryterium wyboru rzędu i pasma estymacji MFPE. FK - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników autokorelacji.

n/n_{max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK					FR				
				π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE	π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE
1	2,4851	2,0452	4,5423	2,1996	1,8908	2,0445	2,1148	2,4038	2,1468	1,8497	2,0279	2,0940	2,3719
2	0,6485	0,5262	1,8513	0,5801	0,5030	0,5355	0,5539	0,5692	0,5445	0,4785	0,5216	0,5360	0,5396
3	0,4560	0,3236	2,0666	0,3684	0,2931	0,3296	0,3453	0,3605	0,3389	0,2720	0,3179	0,3319	0,3341
4	0,3354	0,2389	1,8706	0,2674	0,2164	0,2429	0,2515	0,2531	0,2422	0,1974	0,2324	0,2398	0,2342
5	0,2085	0,1255	1,7960	0,1416	0,1023	0,1273	0,1296	0,1214	0,1189	0,0828	0,1180	0,1200	0,1078
6	0,2087	0,1210	1,9805	0,1361	0,0957	0,1219	0,1239	0,1143	0,1133	0,0759	0,1128	0,1145	0,1007
7	0,2174	0,1212	2,3549	0,1352	0,0922	0,1210	0,1223	0,1097	0,1127	0,0727	0,1121	0,1131	0,0960
8	0,2048	0,1099	2,5224	0,1204	0,0794	0,1086	0,1088	0,0920	0,0990	0,0602	0,1004	0,1004	0,0790
9	0,2057	0,1065	2,7730	0,1135	0,0725	0,1035	0,1020	0,0821	0,0936	0,0538	0,0960	0,0945	0,0700
10	0,2023	0,0995	2,9947	0,1035	0,0629	0,0948	0,0928	0,0687	0,0845	0,0444	0,0880	0,0859	0,0573
11	0,2184	0,1059	3,4190	0,1089	0,0653	0,0999	0,0976	0,0692	0,0906	0,0470	0,0934	0,0911	0,0577
12	0,2342	0,1122	3,8602	0,1139	0,0675	0,1047	0,1024	0,0694	0,0963	0,0495	0,0987	0,0963	0,0579
13	0,2503	0,1185	4,4189	0,1191	0,0697	0,1096	0,1071	0,0694	0,1022	0,0521	0,1040	0,1014	0,0579
14	0,2671	0,1250	5,0450	0,1245	0,0721	0,1145	0,1121	0,0694	0,1083	0,0547	0,1094	0,1068	0,0579
15	0,2843	0,1317	5,7117	0,1299	0,0744	0,1197	0,1170	0,0695	0,1143	0,0573	0,1149	0,1120	0,0580
16	0,3012	0,1381	6,4257	0,1351	0,0766	0,1246	0,1219	0,0695	0,1201	0,0598	0,1202	0,1172	0,0580
17	0,3192	0,1446	7,2742	0,1408	0,0789	0,1297	0,1272	0,0695	0,1262	0,0624	0,1256	0,1227	0,0580
18	0,3378	0,1515	8,2423	0,1464	0,0813	0,1351	0,1322	0,0695	0,1324	0,0650	0,1313	0,1281	0,0580
19	0,3573	0,1588	9,4499	0,1521	0,0837	0,1407	0,1375	0,0695	0,1389	0,0678	0,1373	0,1337	0,0580
20	0,3759	0,1657	10,6341	0,1580	0,0862	0,1461	0,1430	0,0695	0,1454	0,0705	0,1430	0,1395	0,0580

Tablica 9.24: Uśrednione miary względnej entropii w scenariuszu łagodnych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 8000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmu wykorzystującego zaproponowane kryterium wyboru rzędu i pasma estymacji MFPE. FK - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników autokorelacji.

n/n_{max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK					FR				
				π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE	π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE
1	2,5277	2,0871	4,5833	2,2350	1,9224	2,0855	2,1231	2,4334	2,1850	1,8836	2,0694	2,1038	2,4040
2	0,6671	0,5369	1,8915	0,5904	0,5088	0,5478	0,5534	0,5770	0,5544	0,4850	0,5323	0,5366	0,5456
3	0,4746	0,3323	2,0672	0,3798	0,2984	0,3398	0,3452	0,3668	0,3496	0,2784	0,3272	0,3323	0,3392
4	0,3474	0,2415	1,8572	0,2743	0,2176	0,2471	0,2486	0,2544	0,2484	0,1996	0,2359	0,2375	0,2346
5	0,2125	0,1221	1,7762	0,1454	0,1007	0,1259	0,1248	0,1199	0,1223	0,0823	0,1161	0,1157	0,1049
6	0,2135	0,1175	1,9559	0,1401	0,0940	0,1206	0,1192	0,1128	0,1170	0,0753	0,1109	0,1103	0,0976
7	0,2222	0,1173	2,3269	0,1385	0,0901	0,1191	0,1173	0,1076	0,1157	0,0716	0,1096	0,1086	0,0919
8	0,2089	0,1047	2,4923	0,1230	0,0764	0,1052	0,1026	0,0887	0,1014	0,0583	0,0966	0,0947	0,0739
9	0,2091	0,1004	2,7598	0,1156	0,0690	0,0992	0,0958	0,0781	0,0956	0,0516	0,0914	0,0888	0,0641
10	0,2035	0,0923	3,0126	0,1049	0,0588	0,0895	0,0858	0,0636	0,0861	0,0416	0,0825	0,0795	0,0506
11	0,2188	0,0984	3,4270	0,1102	0,0612	0,0942	0,0907	0,0640	0,0919	0,0442	0,0876	0,0848	0,0509
12	0,2345	0,1046	3,8757	0,1153	0,0635	0,0990	0,0954	0,0641	0,0977	0,0468	0,0928	0,0898	0,0510
13	0,2497	0,1108	4,4163	0,1205	0,0660	0,1038	0,1003	0,0642	0,1036	0,0496	0,0981	0,0952	0,0511
14	0,2660	0,1172	5,0351	0,1258	0,0683	0,1087	0,1052	0,0642	0,1096	0,0523	0,1034	0,1005	0,0511
15	0,2826	0,1237	5,7136	0,1312	0,0707	0,1137	0,1103	0,0642	0,1156	0,0550	0,1087	0,1059	0,0511
16	0,3000	0,1303	6,4981	0,1368	0,0732	0,1188	0,1155	0,0642	0,1219	0,0577	0,1142	0,1114	0,0512
17	0,3172	0,1368	7,3685	0,1424	0,0756	0,1239	0,1207	0,0642	0,1280	0,0605	0,1196	0,1169	0,0512
18	0,3357	0,1437	8,3229	0,1483	0,0781	0,1293	0,1261	0,0642	0,1346	0,0633	0,1254	0,1227	0,0512
19	0,3543	0,1505	9,4252	0,1540	0,0806	0,1346	0,1315	0,0642	0,1409	0,0660	0,1310	0,1283	0,0512
20	0,3742	0,1576	10,6944	0,1601	0,0831	0,1402	0,1370	0,0642	0,1476	0,0689	0,1370	0,1342	0,0512

Tablica 9.25: Uśrednione miary względnej entropii w scenariuszu gwałtownych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 2000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmu wykorzystującego zaproponowane kryterium wyboru rzędu i pasma estymacji MFPE. FK - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników autokorelacji.

n/n_{\max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK					FR				
				π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE	π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE
1	2,2841	1,9211	4,2989	2,0912	1,8506	1,9244	2,1283	2,2733	2,0443	1,8123	1,9105	2,1039	2,2364
2	0,6129	0,5366	1,7123	0,5709	0,5292	0,5435	0,6008	0,5654	0,5382	0,5016	0,5302	0,5788	0,5270
3	0,4182	0,3353	1,8543	0,3596	0,3242	0,3389	0,4064	0,3475	0,3313	0,2988	0,3258	0,3887	0,3174
4	0,3199	0,2649	1,6850	0,2691	0,2568	0,2663	0,3203	0,2534	0,2440	0,2339	0,2535	0,3043	0,2344
5	0,2095	0,1646	1,6709	0,1515	0,1545	0,1640	0,2081	0,1275	0,1275	0,1311	0,1514	0,1941	0,1103
6	0,2121	0,1612	1,8777	0,1477	0,1496	0,1598	0,2046	0,1223	0,1235	0,1257	0,1472	0,1902	0,1056
7	0,2193	0,1605	2,2039	0,1453	0,1446	0,1582	0,1977	0,1186	0,1215	0,1202	0,1454	0,1833	0,1024
8	0,2112	0,1514	2,4009	0,1314	0,1342	0,1479	0,1866	0,1045	0,1088	0,1116	0,1353	0,1735	0,0887
9	0,2134	0,1485	2,6542	0,1243	0,1267	0,1433	0,1767	0,0967	0,1031	0,1043	0,1313	0,1643	0,0812
10	0,2139	0,1433	2,9052	0,1154	0,1184	0,1366	0,1669	0,0862	0,0953	0,0967	0,1251	0,1556	0,0705
11	0,2294	0,1492	3,3090	0,1200	0,1197	0,1410	0,1691	0,0865	0,1004	0,0978	0,1298	0,1580	0,0709
12	0,2450	0,1552	3,7600	0,1250	0,1216	0,1457	0,1736	0,0867	0,1060	0,0998	0,1347	0,1629	0,0711
13	0,2616	0,1614	4,3093	0,1299	0,1235	0,1504	0,1784	0,0868	0,1116	0,1019	0,1398	0,1679	0,0712
14	0,2778	0,1677	4,9026	0,1348	0,1254	0,1552	0,1825	0,0869	0,1171	0,1040	0,1450	0,1725	0,0712
15	0,2946	0,1738	5,5409	0,1400	0,1273	0,1599	0,1875	0,0869	0,1229	0,1060	0,1499	0,1777	0,0712
16	0,3120	0,1801	6,2596	0,1452	0,1292	0,1648	0,1924	0,0869	0,1288	0,1081	0,1551	0,1828	0,0713
17	0,3301	0,1862	7,0997	0,1507	0,1310	0,1696	0,1974	0,0869	0,1347	0,1101	0,1601	0,1880	0,0713
18	0,3484	0,1927	8,0775	0,1560	0,1329	0,1745	0,2024	0,0869	0,1406	0,1123	0,1654	0,1933	0,0713
19	0,3683	0,1995	9,2132	0,1616	0,1350	0,1798	0,2073	0,0869	0,1468	0,1145	0,1710	0,1984	0,0713
20	0,3876	0,2060	10,3502	0,1670	0,1367	0,1849	0,2119	0,0869	0,1529	0,1165	0,1763	0,2032	0,0713

Tablica 9.26: Uśrednione miary względnej entropii w scenariuszu gwałtownych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 4000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmu wykorzystującego zaproponowane kryterium wyboru rzędu i pasma estymacji MFPE. FK - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników autokorelacji.

n/n_{\max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK					FR				
				π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE	π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE
1	2,5828	2,1229	4,7078	2,2751	1,9502	2,1212	2,1735	2,4830	2,2223	1,9079	2,1045	2,1524	2,4492
2	0,6808	0,5525	1,9138	0,6059	0,5257	0,5617	0,5762	0,5944	0,5698	0,5006	0,5476	0,5582	0,5652
3	0,4820	0,3445	2,1124	0,3872	0,3100	0,3497	0,3620	0,3782	0,3575	0,2887	0,3376	0,3488	0,3524
4	0,3548	0,2560	1,8842	0,2816	0,2304	0,2589	0,2650	0,2650	0,2562	0,2111	0,2480	0,2535	0,2465
5	0,2232	0,1400	1,8193	0,1518	0,1142	0,1405	0,1407	0,1265	0,1289	0,0942	0,1309	0,1312	0,1112
6	0,2233	0,1354	2,0015	0,1461	0,1075	0,1350	0,1349	0,1190	0,1232	0,0871	0,1254	0,1255	0,1039
7	0,2318	0,1353	2,3914	0,1449	0,1037	0,1337	0,1328	0,1140	0,1221	0,0834	0,1242	0,1235	0,0986
8	0,2175	0,1232	2,5329	0,1288	0,0902	0,1204	0,1184	0,0952	0,1071	0,0701	0,1115	0,1098	0,0803
9	0,2177	0,1192	2,8059	0,1212	0,0828	0,1147	0,1113	0,0846	0,1010	0,0633	0,1066	0,1035	0,0705
10	0,2133	0,1117	3,0363	0,1104	0,0727	0,1054	0,1017	0,0703	0,0912	0,0533	0,0979	0,0945	0,0570
11	0,2298	0,1183	3,4607	0,1158	0,0751	0,1105	0,1066	0,0708	0,0972	0,0559	0,1034	0,0998	0,0575
12	0,2458	0,1246	3,9269	0,1208	0,0773	0,1154	0,1114	0,0709	0,1028	0,0585	0,1087	0,1050	0,0576
13	0,2621	0,1311	4,4748	0,1260	0,0796	0,1203	0,1162	0,0710	0,1088	0,0611	0,1141	0,1102	0,0577
14	0,2791	0,1377	5,1192	0,1314	0,0819	0,1254	0,1211	0,0710	0,1149	0,0637	0,1195	0,1156	0,0577
15	0,2965	0,1445	5,7846	0,1368	0,0843	0,1307	0,1261	0,0710	0,1209	0,0663	0,1251	0,1209	0,0577
16	0,3134	0,1509	6,5180	0,1420	0,0864	0,1356	0,1310	0,0710	0,1267	0,0688	0,1303	0,1262	0,0578
17	0,3315	0,1577	7,3723	0,1477	0,0888	0,1408	0,1363	0,0711	0,1328	0,0714	0,1359	0,1317	0,0578
18	0,3507	0,1648	8,3625	0,1534	0,0912	0,1463	0,1415	0,0711	0,1391	0,0741	0,1417	0,1372	0,0578
19	0,3707	0,1722	9,5612	0,1592	0,0937	0,1520	0,1468	0,0711	0,1456	0,0768	0,1478	0,1428	0,0578
20	0,3898	0,1793	10,7862	0,1651	0,0962	0,1575	0,1524	0,0711	0,1521	0,0796	0,1536	0,1487	0,0578

Tablica 9.27: Uśrednione miary względnej entropii w scenariuszu gwałtownych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 8000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmu wykorzystującego zaproponowane kryterium wyboru rzędu i pasma estymacji MFPE. FK - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników autokorelacji.

n/n_{max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK					FR				
				π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE	π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE
1	2,5937	2,1286	4,7267	2,2894	1,9589	2,1277	2,1726	2,4939	2,2378	1,9186	2,1109	2,1528	2,4632
2	0,6898	0,5548	1,9592	0,6111	0,5261	0,5658	0,5738	0,5958	0,5744	0,5022	0,5501	0,5568	0,5632
3	0,4924	0,3450	2,1584	0,3944	0,3100	0,3523	0,3601	0,3800	0,3636	0,2899	0,3393	0,3472	0,3506
4	0,3603	0,2522	1,9377	0,2849	0,2271	0,2573	0,2604	0,2633	0,2586	0,2092	0,2458	0,2493	0,2418
5	0,2232	0,1320	1,8462	0,1528	0,1087	0,1350	0,1340	0,1240	0,1295	0,0903	0,1249	0,1250	0,1072
6	0,2246	0,1276	2,0248	0,1477	0,1020	0,1298	0,1284	0,1167	0,1242	0,0831	0,1198	0,1195	0,0997
7	0,2329	0,1268	2,4096	0,1457	0,0977	0,1279	0,1262	0,1111	0,1225	0,0791	0,1180	0,1173	0,0935
8	0,2177	0,1133	2,5771	0,1286	0,0831	0,1130	0,1102	0,0911	0,1066	0,0648	0,1039	0,1021	0,0745
9	0,2170	0,1085	2,8550	0,1203	0,0752	0,1064	0,1028	0,0799	0,1000	0,0576	0,0982	0,0956	0,0641
10	0,2101	0,1000	3,1001	0,1085	0,0644	0,0961	0,0920	0,0645	0,0894	0,0470	0,0886	0,0856	0,0502
11	0,2254	0,1061	3,5199	0,1137	0,0669	0,1008	0,0969	0,0649	0,0952	0,0497	0,0938	0,0908	0,0505
12	0,2410	0,1124	3,9722	0,1187	0,0692	0,1056	0,1016	0,0650	0,1009	0,0522	0,0990	0,0959	0,0506
13	0,2564	0,1188	4,5198	0,1239	0,0716	0,1106	0,1065	0,0651	0,1068	0,0550	0,1044	0,1012	0,0507
14	0,2730	0,1254	5,1382	0,1292	0,0740	0,1156	0,1114	0,0651	0,1128	0,0577	0,1099	0,1066	0,0508
15	0,2898	0,1318	5,8336	0,1346	0,0763	0,1206	0,1165	0,0651	0,1188	0,0604	0,1152	0,1120	0,0508
16	0,3072	0,1385	6,6192	0,1401	0,0788	0,1257	0,1217	0,0651	0,1250	0,0632	0,1206	0,1175	0,0508
17	0,3249	0,1452	7,5229	0,1458	0,0812	0,1309	0,1269	0,0651	0,1312	0,0659	0,1262	0,1230	0,0508
18	0,3435	0,1522	8,5136	0,1517	0,0838	0,1364	0,1324	0,0651	0,1377	0,0688	0,1320	0,1288	0,0508
19	0,3624	0,1591	9,6293	0,1574	0,0862	0,1418	0,1378	0,0651	0,1440	0,0715	0,1377	0,1345	0,0508
20	0,3823	0,1663	10,8891	0,1633	0,0888	0,1474	0,1433	0,0651	0,1506	0,0744	0,1437	0,1404	0,0508

Tablica 9.28: Uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów w scenariuszu łagodnych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 2000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmu wykorzystującego zaproponowane kryterium wyboru rzędu i pasma estymacji MFPE. FK - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników autokorelacji.

n/n_{max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK					FR				
				π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE	π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE
1	63,3116	63,4540	63,2395	63,3029	63,4362	63,4206	63,3313	63,2681	63,3727	63,5035	63,4538	63,3626	63,3357
2	46,2146	46,4008	47,7211	46,5609	46,8039	46,6178	46,7271	46,2883	46,1247	46,3407	46,3692	46,4960	46,1095
3	33,0366	34,2635	35,9334	33,3067	34,6808	34,4047	34,5929	33,3010	32,5034	33,9393	34,0271	34,3242	33,0375
4	22,4212	24,2951	27,7840	22,5961	25,8958	24,3847	27,1877	22,7448	21,6841	25,6620	23,9246	27,0672	22,2860
5	12,9912	14,3423	23,7492	12,3165	16,2267	14,1785	20,4343	12,1780	11,8833	17,0243	13,8975	20,7039	11,6753
6	15,0141	16,3281	31,3727	14,2741	19,3188	16,2260	24,3511	13,5311	13,7018	21,2753	15,7446	24,5770	12,7129
7	14,4086	15,8235	33,6097	13,6685	19,4843	15,5249	24,9366	12,9028	13,4526	22,2706	15,2703	25,4552	12,1815
8	8,2009	9,5068	34,9131	6,4787	13,5368	9,1062	20,3366	6,5054	6,1937	16,9021	8,7766	20,9891	5,6773
9	10,3111	11,1102	42,9829	8,7687	16,2173	10,6973	23,3606	7,8242	8,6591	19,7627	10,4077	24,0282	6,9233
10	8,1795	8,2405	48,9356	5,2726	13,1317	7,6015	21,4667	4,6954	5,3710	17,4175	7,3795	22,3177	3,7367
11	9,2173	8,6762	57,6857	5,8916	13,8545	7,9778	22,4546	4,7504	6,1170	18,2294	7,7923	23,3064	3,8106
12	10,4056	9,2397	66,5623	6,5302	14,2314	8,4792	23,0131	4,7789	6,8219	18,6176	8,2901	23,8750	3,8346
13	11,4842	9,6268	76,6771	6,9322	14,3022	8,7988	23,3003	4,7873	7,2944	18,7561	8,6550	24,1978	3,8455
14	12,6155	10,0845	86,7459	7,4784	14,4943	9,2133	23,6757	4,7899	7,8656	18,9316	9,0713	24,5795	3,8510
15	13,6123	10,4404	97,3638	7,9101	14,6279	9,5246	24,0250	4,7903	8,3349	19,0749	9,3995	24,9495	3,8523
16	14,6958	10,8254	108,6216	8,3763	14,7606	9,8692	24,3500	4,7918	8,8029	19,2043	9,7432	25,2891	3,8544
17	15,7400	11,2025	121,2156	8,7894	14,8832	10,2007	24,6591	4,7918	9,2271	19,3355	10,0842	25,6030	3,8554
18	16,8024	11,5764	132,4147	9,2454	15,0321	10,5305	25,0124	4,7918	9,6976	19,4794	10,4205	25,9563	3,8558
19	17,9934	12,0310	144,5762	9,7420	15,1879	10,9304	25,3610	4,7918	10,2234	19,6337	10,8272	26,3105	3,8562
20	19,0701	12,4393	157,8558	10,1780	15,3222	11,2873	25,6993	4,7918	10,7155	19,7698	11,2033	26,6627	3,8563

Tablica 9.29: Uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów w scenariuszu łagodnych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 4000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmu wykorzystującego zaproponowane kryterium wyboru rzędu i pasma estymacji MFPE. FK - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników autokorelacji.

n/n_{\max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK					FR				
				π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE	π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE
1	63,1809	63,3124	63,1341	63,1691	63,3073	63,2795	63,2169	63,0958	63,2403	63,3757	63,3131	63,2490	63,1638
2	46,2619	46,1218	47,8615	46,5853	46,5227	46,3692	46,4065	46,2013	46,1489	46,0792	46,1291	46,1821	46,0701
3	32,8819	32,8094	36,0825	33,2065	33,2750	33,1507	32,8347	32,6927	32,4510	32,4072	32,7516	32,4924	32,5511
4	21,9498	21,8976	28,0376	22,1000	22,3207	22,2693	21,9444	21,6772	21,2145	21,3323	21,7835	21,5700	21,4840
5	12,6700	11,9920	24,0132	11,8533	11,7845	12,1084	12,3762	11,5207	11,3948	11,2026	11,8316	12,2617	11,3177
6	14,7840	13,6427	31,7378	13,5697	13,4393	13,8735	14,3382	12,8889	12,8439	12,7596	13,3653	14,0206	12,4951
7	13,8348	12,7111	33,9212	12,3833	12,7068	12,7856	13,7030	11,8769	11,8973	12,1208	12,4812	13,5550	11,6240
8	7,5378	5,8867	35,1527	5,0820	5,0125	5,8721	6,2920	4,5342	4,5563	4,3733	5,5474	6,1912	4,1760
9	9,8451	7,7437	43,1829	7,0296	7,1499	7,6952	8,7767	6,1826	6,5362	6,5851	7,3976	8,6847	5,8172
10	7,6319	4,7948	48,8753	3,8033	3,3192	4,4798	5,6463	2,7890	3,5938	2,9574	4,3001	5,7152	2,3927
11	8,8938	5,3511	58,3059	4,3649	3,6393	4,9439	6,4060	2,8556	4,2283	3,3598	4,8127	6,5030	2,4533
12	9,9752	5,8377	67,1647	4,8491	3,9331	5,3622	6,9974	2,8780	4,7574	3,6949	5,2486	7,1140	2,4733
13	11,1296	6,3315	77,2473	5,3533	4,1566	5,7817	7,4945	2,8842	5,2851	3,9464	5,6880	7,6310	2,4798
14	12,3260	6,8875	87,3407	5,8951	4,4054	6,2620	8,0004	2,8862	5,8841	4,2227	6,1923	8,1583	2,4819
15	13,5568	7,4374	98,1821	6,4432	4,6447	6,7379	8,4892	2,8878	6,4576	4,4791	6,6794	8,6504	2,4828
16	14,7004	7,9441	109,2472	6,9513	4,8646	7,1779	8,9621	2,8887	7,0101	4,7163	7,1334	9,1346	2,4844
17	15,9240	8,4629	121,5820	7,4906	5,0836	7,6290	9,4552	2,8919	7,5718	4,9526	7,5952	9,6328	2,4861
18	17,1432	8,9963	133,3705	8,0432	5,3214	8,0938	9,9416	2,8928	8,1549	5,2038	8,0729	10,1396	2,4871
19	18,3293	9,5101	146,2609	8,5466	5,5426	8,5396	10,4167	2,8930	8,6952	5,4439	8,5267	10,6223	2,4874
20	19,4749	9,9814	158,1379	9,0677	5,7616	8,9513	10,8915	2,8930	9,2409	5,6742	8,9501	11,1075	2,4878

Tablica 9.30: Uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów w scenariuszu łagodnych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 8000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmu wykorzystującego zaproponowane kryterium wyboru rzędu i pasma estymacji MFPE. FK - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników autokorelacji.

n/n_{\max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK					FR				
				π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE	π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE
1	63,1781	63,2992	63,1439	63,1753	63,3111	63,2687	63,2360	63,0927	63,2444	63,3776	63,3018	63,2677	63,1618
2	46,3378	46,1803	47,9438	46,6577	46,5795	46,4326	46,4689	46,2559	46,2272	46,1409	46,1887	46,2456	46,1354
3	32,8043	32,5701	36,0145	33,2033	33,1518	32,9449	32,7692	32,5112	32,4641	32,3084	32,5402	32,4165	32,3827
4	21,7719	21,3880	28,0679	22,0457	21,9139	21,8251	21,5178	21,2510	21,1658	20,9210	21,3278	21,1015	21,0700
5	12,6042	11,5804	24,1333	11,8928	11,4322	11,7284	11,6744	11,2282	11,4283	10,8751	11,4784	11,5200	11,0925
6	14,5240	12,9516	31,6710	13,4595	12,6735	13,2353	13,0964	12,4265	12,7090	11,9139	12,7462	12,7278	12,1182
7	13,6450	11,9897	33,9127	12,2903	11,6775	12,1366	11,9847	11,1417	11,7596	10,9443	11,8321	11,7656	10,9740
8	7,2489	4,8838	35,1303	4,9831	3,9262	4,9465	4,5211	3,6882	4,4433	3,2284	4,6550	4,6386	3,4005
9	9,5483	6,7298	43,4070	6,8595	5,6912	6,7627	6,4288	5,1815	6,3518	4,9624	6,4802	6,2584	4,9015
10	7,6363	4,0551	49,7238	3,8244	2,2741	3,7661	3,5613	2,0240	3,6265	1,8957	3,6475	3,5891	1,7447
11	8,8617	4,6220	58,7945	4,3574	2,5287	4,2393	4,1061	2,0638	4,2135	2,1830	4,1578	4,1437	1,7788
12	10,0036	5,1468	68,1370	4,8680	2,7747	4,6932	4,6033	2,0775	4,7605	2,4497	4,6252	4,6627	1,7892
13	11,1118	5,6781	78,0062	5,3524	3,0250	5,1406	5,0799	2,0846	5,2839	2,7238	5,1005	5,1508	1,7974
14	12,3440	6,2640	87,9934	5,9090	3,3001	5,6483	5,6222	2,0874	5,8794	3,0251	5,6186	5,7091	1,7997
15	13,4959	6,7825	98,5473	6,4037	3,5298	6,0904	6,1192	2,0916	6,4140	3,2782	6,0807	6,2157	1,8036
16	14,7095	7,3456	109,2839	6,9476	3,7957	6,5804	6,6480	2,0924	6,9914	3,5639	6,5853	6,7606	1,8043
17	16,0134	7,9332	121,5468	7,5167	4,0580	7,0911	7,1921	2,0927	7,5889	3,8465	7,1033	7,3110	1,8047
18	17,2313	8,4752	133,1751	8,0415	4,3044	7,5597	7,6994	2,0929	8,1458	4,1104	7,5865	7,8333	1,8049
19	18,5263	9,0588	146,1597	8,5948	4,5604	8,0661	8,2202	2,0929	8,7263	4,3889	8,0979	8,3611	1,8051
20	19,7334	9,6267	159,3072	9,1258	4,8371	8,5596	8,7515	2,0929	9,3074	4,6959	8,6094	8,9089	1,8051

Tablica 9.31: Uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów w scenariuszu gwałtownych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 2000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmu wykorzystującego zaproponowane kryterium wyboru rzędu i pasma estymacji MFPE. FK - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników autokorelacji.

n/n_{max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK					FR				
				π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE	π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE
1	65,6352	65,7802	65,5553	65,6203	65,7569	65,7454	65,6464	65,5920	65,6910	65,8248	65,7792	65,6784	65,6575
2	48,3021	48,4920	49,8034	48,6579	48,9039	48,7120	48,8292	48,3816	48,2141	48,4316	48,4602	48,5913	48,1993
3	34,7012	35,9515	37,4613	35,0506	36,4701	36,0899	36,4650	34,9014	34,2537	35,7369	35,6948	36,2034	34,6110
4	23,9039	25,8709	28,9839	24,0987	27,5187	25,9339	28,8237	23,8927	23,2119	27,2967	25,4606	28,7108	23,3259
5	14,5088	16,0241	24,8987	13,6137	17,7163	15,7821	21,7645	12,8700	13,2215	18,5455	15,5094	22,0104	12,2166
6	16,7523	18,3098	32,7231	15,6531	20,9306	18,0953	25,6664	14,2826	15,2078	23,0298	17,6565	25,8457	13,2982
7	16,1312	17,8496	34,7613	15,0042	21,1140	17,4184	26,1889	13,6585	14,9541	24,0838	17,2197	26,6685	12,7701
8	9,6390	11,3358	35,7842	7,5372	14,9987	10,7803	21,4822	6,9485	7,4060	18,5447	10,4918	22,0876	5,9151
9	11,7949	12,9810	43,9643	9,8966	17,7427	12,4187	24,5709	8,3441	9,9369	21,4741	12,1766	25,1970	7,2280
10	9,6106	10,0746	49,8213	6,2521	14,5867	9,2567	22,6137	5,0787	6,5143	19,0633	9,0821	23,4348	3,8943
11	10,6290	10,5060	58,4625	6,8781	15,3344	9,6318	23,6389	5,1378	7,2649	19,9001	9,4928	24,4630	3,9682
12	11,8559	11,0988	67,6563	7,5290	15,7265	10,1591	24,2092	5,1665	7,9863	20,3026	10,0188	25,0459	3,9950
13	12,9372	11,5041	77,7074	7,9325	15,8106	10,4934	24,4952	5,1752	8,4617	20,4557	10,4018	25,3664	4,0060
14	14,0974	11,9891	87,8784	8,4952	16,0151	10,9329	24,8830	5,1784	9,0520	20,6399	10,8433	25,7600	4,0110
15	15,0915	12,3508	98,3896	8,9254	16,1526	11,2493	25,2315	5,1792	9,5217	20,7859	11,1802	26,1285	4,0123
16	16,1827	12,7401	109,7162	9,3987	16,2877	11,5976	25,5612	5,1810	9,9994	20,9194	11,5289	26,4689	4,0141
17	17,2347	13,1206	121,9749	9,8136	16,4126	11,9325	25,8762	5,1810	10,4312	21,0532	11,8731	26,7916	4,0155
18	18,2994	13,4900	133,4004	10,2624	16,5539	12,2574	26,2232	5,1812	10,8914	21,1873	12,2053	27,1367	4,0156
19	19,5035	13,9518	145,6267	10,7616	16,7160	12,6627	26,5793	5,1812	11,4219	21,3469	12,6182	27,5008	4,0160
20	20,5711	14,3599	159,2890	11,2026	16,8510	13,0220	26,9167	5,1812	11,9143	21,4832	12,9935	27,8500	4,0161

Tablica 9.32: Uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów w scenariuszu gwałtownych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 4000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmu wykorzystującego zaproponowane kryterium wyboru rzędu i pasma estymacji MFPE. FK - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników autokorelacji.

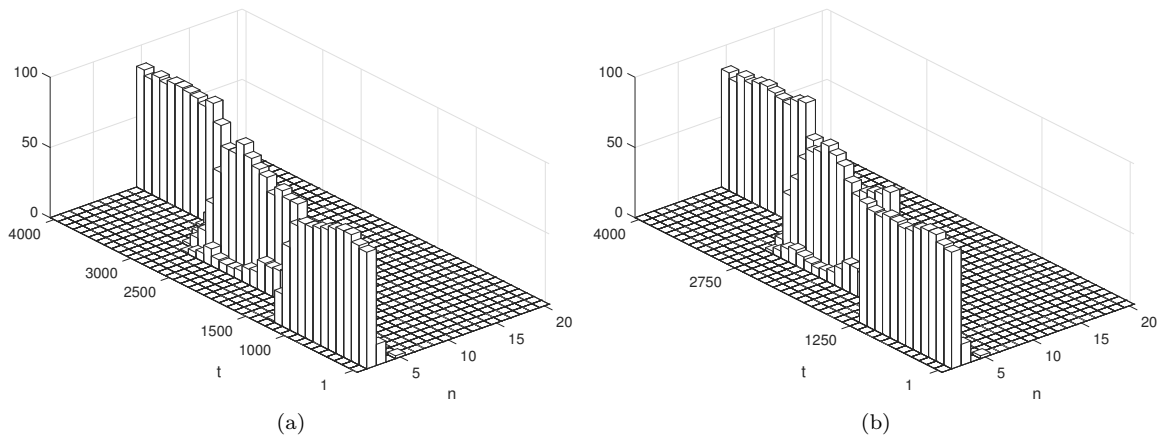
n/n_{max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK					FR				
				π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE	π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE
1	65,4862	65,6184	65,4364	65,4724	65,6125	65,5850	65,5209	65,4009	65,5443	65,6822	65,6188	65,5534	65,4702
2	48,3261	48,1819	49,9242	48,6596	48,6018	48,4329	48,4867	48,2663	48,2170	48,1466	48,1897	48,2567	48,1335
3	34,5207	34,4726	37,6295	34,8920	35,0305	34,8080	34,6537	34,3166	34,1331	34,1630	34,3927	34,3185	34,1487
4	23,3420	23,4161	29,1830	23,4812	23,8516	23,7593	23,4595	22,9125	22,6089	22,8769	23,2620	23,0928	22,6693
5	13,9777	13,5172	24,9514	12,9693	13,0933	13,5560	13,5708	12,3069	12,5360	12,5412	13,2845	13,4400	11,9959
6	16,2892	15,4453	32,8044	14,7719	14,8578	15,5700	15,5201	13,7092	14,1283	14,2987	15,0922	15,1678	13,1949
7	15,2621	14,4836	34,7885	13,5131	14,0883	14,4384	14,8148	12,6200	13,1368	13,6592	14,1775	14,6336	12,2591
8	8,6454	7,4199	35,6625	5,8696	6,1297	7,2651	7,1682	4,9317	5,4324	5,6376	6,9687	7,0272	4,4312
9	11,0275	9,3258	43,8458	7,8981	8,3228	9,1440	9,7102	6,6695	7,4948	7,9083	8,8761	9,5722	6,1621
10	8,6723	6,2828	49,4786	4,4665	4,3351	5,8029	6,4542	3,0591	4,3379	4,1140	5,6514	6,4794	2,5045
11	9,9188	6,8223	58,9155	5,0144	4,6434	6,2498	7,2293	3,1267	4,9619	4,5086	6,1471	7,2798	2,5616
12	11,0276	7,3273	67,9693	5,5085	4,9460	6,6848	7,8284	3,1478	5,5016	4,8524	6,6000	7,8967	2,5803
13	12,1815	7,8319	78,1232	6,0154	5,1731	7,1118	8,3302	3,1562	6,0337	5,1092	7,0513	8,4155	2,5880
14	13,3892	8,3986	88,2289	6,5575	5,4242	7,6019	8,8338	3,1583	6,6342	5,3882	7,5653	8,9400	2,5900
15	14,6400	8,9574	99,2096	7,1080	5,6606	8,0853	9,3185	3,1600	7,2136	5,6462	8,0617	9,4274	2,5913
16	15,7943	9,4651	110,5990	7,6202	5,8827	8,5257	9,7967	3,1606	7,7696	5,8852	8,5162	9,9173	2,5929
17	17,0302	9,9883	122,9484	8,1630	6,1035	8,9803	10,2900	3,1633	8,3364	6,1260	8,9829	10,4150	2,5945
18	18,2532	10,5208	134,5835	8,7176	6,3406	9,4429	10,7778	3,1641	8,9204	6,3771	9,4598	10,9212	2,5957
19	19,4592	11,0365	147,7375	9,2223	6,5593	9,8883	11,2558	3,1644	9,4636	6,6141	9,9138	11,4073	2,5959
20	20,6009	11,4963	159,5618	9,7363	6,7711	10,2899	11,7321	3,1645	10,0008	6,8375	10,3262	11,8909	2,5963

Tablica 9.33: Uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów w scenariuszu gwałtownych zmian parametrów procesu dla fragmentu o długości $N = 8000$ próbek. Wyniki otrzymane za pomocą trzech lewostronnych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym, czterech dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym oraz algorytmu wykorzystującego zaproponowane kryterium wyboru rzędu i pasma estymacji MFPE. FK - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników odbicia, FR - procedura uśredniania oszacowań macierzy współczynników autokorelacji.

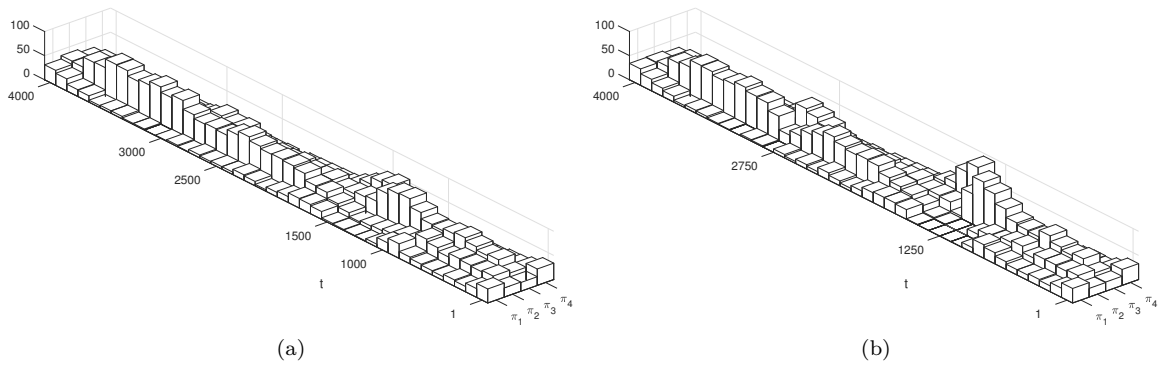
n/n_{\max}	λ_1	λ_2	λ_3	FK					FR				
				π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE	π_1	π_2	π_3	π_4	MFPE
1	65,4896	65,6114	65,4466	65,4847	65,6203	65,5804	65,5437	65,4072	65,5542	65,6873	65,6138	65,5756	65,4727
2	48,4026	48,2453	50,0097	48,7335	48,6561	48,5028	48,5440	48,3231	48,2968	48,2101	48,2553	48,3180	48,2001
3	34,4151	34,2156	37,5599	34,8431	34,8465	34,5884	34,4984	34,1408	34,0916	33,9938	34,1702	34,1518	33,9919
4	23,0345	22,7710	29,1462	23,3111	23,2990	23,1891	22,9034	22,4804	22,4224	22,3036	22,6809	22,4939	22,2501
5	13,7276	12,8960	25,0083	12,8680	12,5489	12,9794	12,7486	12,0457	12,4097	12,0004	12,7358	12,5849	11,8533
6	15,7668	14,4533	32,6319	14,5040	13,8749	14,6608	14,1738	13,2720	13,7817	13,1806	14,1888	13,7799	12,8989
7	14,8173	13,4716	34,7170	13,2608	12,8407	13,5301	12,9801	11,9276	12,7767	12,1925	13,2537	12,7384	11,6973
8	8,0297	6,0334	35,5878	5,5270	4,7204	5,9891	5,1825	4,0464	5,0130	4,0928	5,7150	4,9993	3,6883
9	10,4128	7,9383	44,0100	7,5148	6,5756	7,8776	7,1779	5,6384	7,0337	5,9180	7,6089	6,9738	5,2832
10	8,3365	5,1485	50,1584	4,2258	2,9417	4,7272	4,1058	2,2315	4,0621	2,6410	4,6309	4,1087	1,8667
11	9,5614	5,7129	59,2699	4,7574	3,1919	5,1990	4,6542	2,2688	4,6450	2,9237	5,1383	4,6623	1,8990
12	10,7119	6,2442	68,6692	5,2755	3,4417	5,6599	5,1531	2,2828	5,1987	3,1930	5,6127	5,1821	1,9097
13	11,8430	6,7904	78,6770	5,7661	3,6933	6,1204	5,6263	2,2896	5,7270	3,4707	6,1026	5,6648	1,9183
14	13,0956	7,3889	88,8824	6,3277	3,9705	6,6392	6,1692	2,2924	6,3257	3,7743	6,6319	6,2215	1,9206
15	14,2576	7,9075	99,4202	6,8218	4,1983	7,0806	6,6681	2,2966	6,8602	4,0271	7,0933	6,7309	1,9246
16	15,4909	8,4758	110,3905	7,3746	4,4647	7,5759	7,2033	2,2973	7,4440	4,3129	7,6018	7,2812	1,9253
17	16,7993	9,0636	122,7612	7,9446	4,7274	8,0868	7,7513	2,2976	8,0423	4,5967	8,1209	7,8351	1,9257
18	18,0293	9,6069	134,5275	8,4730	4,9753	8,5557	8,2697	2,2978	8,6061	4,8627	8,6044	8,3678	1,9259
19	19,3449	10,1973	147,5851	9,0375	5,2342	9,0687	8,8025	2,2978	9,1981	5,1441	9,1214	8,9090	1,9259
20	20,5622	10,7688	160,7291	9,5771	5,5144	9,5655	9,3425	2,2978	9,7855	5,4544	9,6358	9,4654	1,9259

Rezultaty przedstawione w tabelach 9.22-9.33 pokazują zalety stosowania dwukierunkowego algorytmu drabinkowego z zapominaniem wykładniczym oraz zaproponowanej metody adaptacyjnego wyboru rzędu i pasma estymacji. Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, gdy rząd estymowanego modelu nie jest niedoszacowany, zastosowanie kryterium MFPE w procesie równoległej estymacji daje zwykle lepsze rezultaty niż przedstawione lewostronne oraz dwukierunkowe algorytmy estymacji w wariantach z uśrednianiem oszacowań macierzy współczynników odbicia oraz z uśrednianiem oszacowań macierzy współczynników autokorelacji. Tak jak w przypadku jednowymiarowym, wzrost wartości maksymalnego rzędu estymowanego modelu ma niewielki wpływ na pogorszenie zarówno jakości estymowanej widmowej gęstości mocy jak i jakości śledzenia zmian parametrów procesu.

Na rysunkach 9.10 oraz 9.11 przedstawiono uśrednione histogramy wyboru wartości rzędu i pasma estymacji w przypadku zastosowania kryterium MFPE w procesie równoległej estymacji, w wariantach z uśrednianiem oszacowań macierzy współczynników autokorelacji, dla scenariusza łagodnych oraz gwałtownych zmian parametrów sygnału o długości $N = 4000$ próbek. Wyniki zostały lokalnie uśrednione po 100 sąsiadujących próbkach. W obu wariantach zaproponowane kryterium sprawdza się zadowalająco.

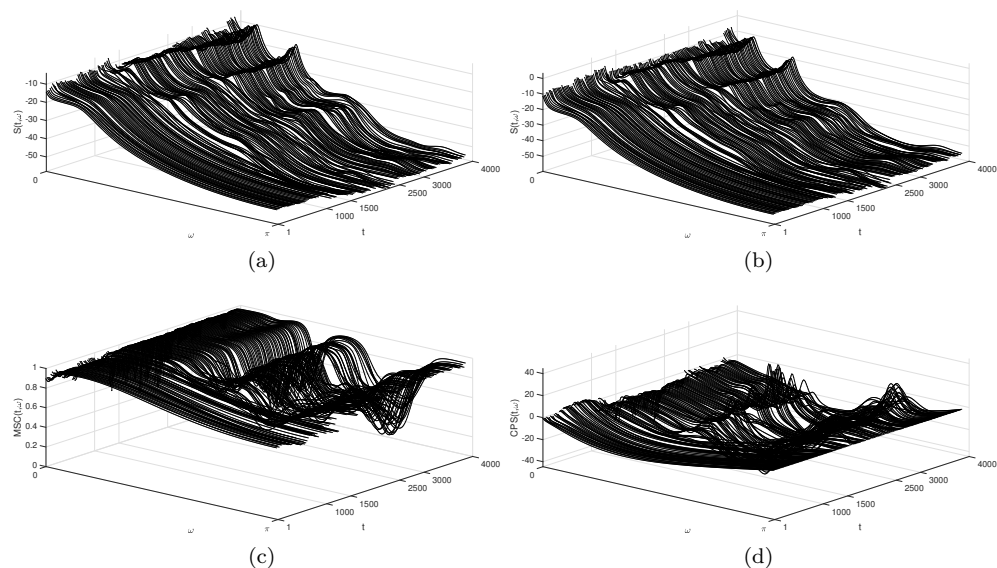


Rysunek 9.10: Uśrednione histogramy wyboru wartości rzędu estymowanego modelu na podstawie kryterium MFPE w procesie równoległej estymacji w wariancie z uśrednianiem oszacowań macierzy współczynników autokorelacji dla scenariusza (a) łagodnych i (b) gwałtownych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 4000$ próbek.

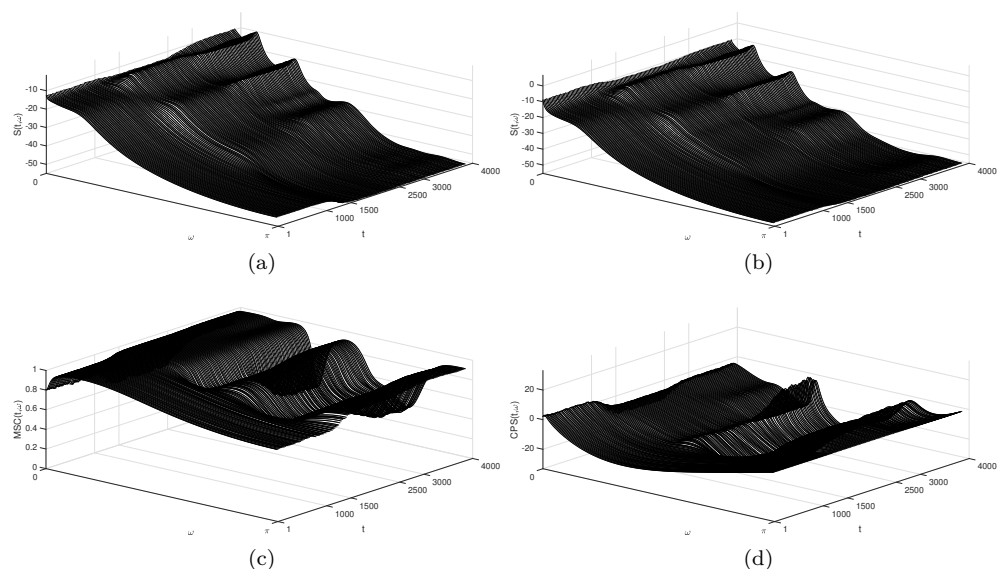


Rysunek 9.11: Uśrednione histogramy wyboru wartości pasma estymacji na podstawie kryterium MFPE w procesie równoległej estymacji w wariancie z uśrednianiem oszacowań macierzy współczynników autokorelacji dla scenariusza (a) łagodnych i (b) gwałtownych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 4000$ próbek.

Rysunki 9.12 oraz 9.15 przedstawiają widma estymowane za pomocą zaproponowanej metody w procesie równoległej estymacji, w wariancie uśredniania oszacowań macierzy współczynników autokorelacji, dla scenariusza łagodnych oraz gwałtownych zmian parametrów procesu. Przedstawione zostały oszacowania widmowej gęstości mocy kanału pierwszego, kanału drugiego oraz oszacowanie widma amplitudowego i fazowego koherencji dla sygnału o długości $N = 4000$ próbek.

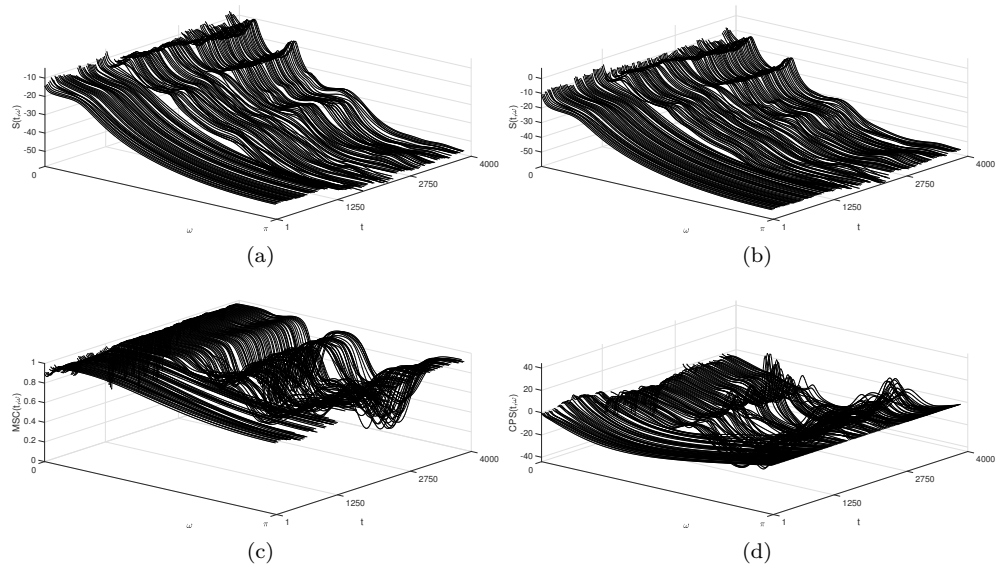


Rysunek 9.12: Przykładowe widmo estymowane za pomocą zaproponowanej metody i kryterium MFPE w procesie równoległej estymacji, w wariancie z uśrednianiem oszacowań macierzy współczynników autokorelacji, dla scenariusza łagodnych zmian parametrów sygnału dla pojedynczej realizacji: oszacowanie widmowej gęstości mocy kanału (a) pierwszego, (b) drugiego oraz oszacowanie widma (c) amplitudowego i (d) fazowego koherencji dla sygnału o długości $N = 4000$ próbek.

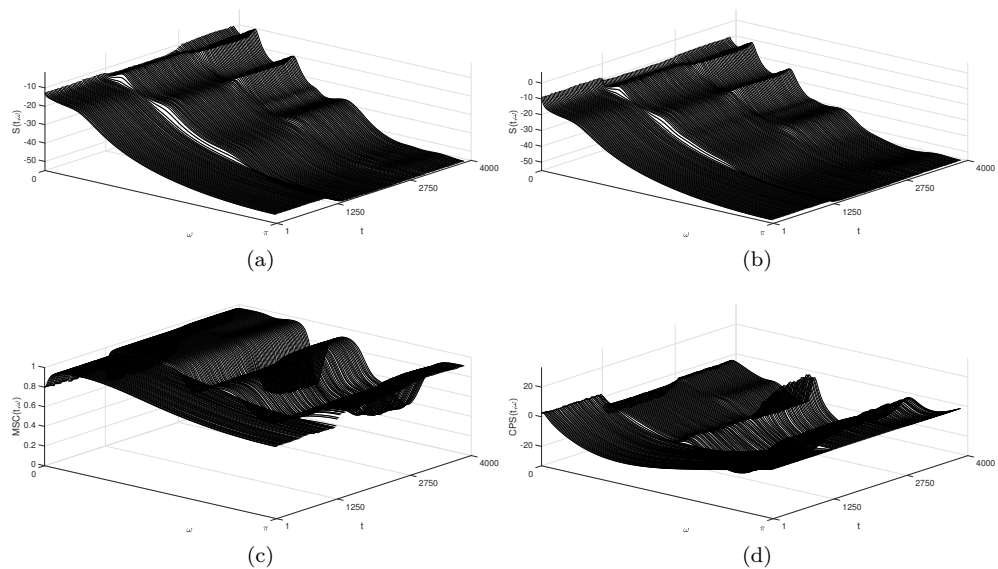


Rysunek 9.13: Uśrednione po 100 niezależnych realizacjach widmo estymowane za pomocą zaproponowanej metody i kryterium MFPE w procesie równoległej estymacji, w wariancie z uśrednianiem oszacowań macierzy współczynników autokorelacji, dla scenariusza łagodnych zmian parametrów sygnału: oszacowanie widmowej gęstości mocy kanału (a) pierwszego, (b) drugiego oraz oszacowanie widma (c) amplitudowego i (d) fazowego koherencji dla sygnału o długości $N = 4000$ próbek.





Rysunek 9.14: Przykładowe widmo estymowane za pomocą zaproponowanej metody i kryterium MFPE w procesie równoległej estymacji, w wariancie z uśrednianiem oszacowań macierzy współczynników autokorelacji, dla scenariusza gwałtownych zmian parametrów sygnału dla pojedynczej realizacji: oszacowanie widmowej gęstości mocy kanału (a) pierwszego, (b) drugiego oraz oszacowanie widma (c) amplitudowego i (d) fazowego koherencji. Wyniki otrzymane dla sygnału o długości $N = 4000$ próbek.



Rysunek 9.15: Uśrednione po 100 niezależnych realizacjach widmo estymowane za pomocą zaproponowanej metody i kryterium MFPE w procesie równoległej estymacji, w wariancie z uśrednianiem oszacowań macierzy współczynników autokorelacji, dla scenariusza gwałtownych zmian parametrów sygnału: oszacowanie widmowej gęstości mocy kanału (a) pierwszego, (b) drugiego oraz oszacowanie widma (c) amplitudowego i (d) fazowego koherencji. Wyniki otrzymane dla sygnału o długości $N = 4000$ próbek.

9.3 Metoda uśredniania modeli - wyniki badań

Metoda uśredniania modeli została użyta w procesie równoległej estymacji z zastosowaniem dwukierunkowego algorytmu drabinkowego z zapominaniem wykładniczym (podrozdział 9.2). Modele otrzymane na drodze uśredniania oszacowań współczynników autokorelacji dla rzędów $n = 1, \dots, 20$ oraz pasm estymacji π_1, \dots, π_4 zostały poddane procedurze uśredniania. Rezultaty obejmują dwa warianty wyboru wartości pasma estymacji - za pomocą zmodyfikowanego kryterium końcowego błędu predykcji oraz na podstawie podejścia bayesowskiego.

9.3.1 Wariant jednowymiarowy

W tabelach 9.34-9.36 przedstawiono uśrednione miary oceny jakości analizy wygenerowanego niestacjonarnego procesu autoregresyjnego dla różnych długości sygnału, dla dwóch scenariuszy zmian parametrów procesu - łagodnych oraz gwałtownych. Wyniki zostały otrzymane dla różnych wartości maksymalnego rzędu estymowanego modelu oraz różnych wartości pasm estymacji za pomocą dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym w wariancie z uśrednianiem oszacowań współczynników autokorelacji. Tabele zawierają wyniki zarówno dla przypadku konkretnego wyboru wartości pasma estymacji za pomocą zmodyfikowanego kryterium końcowego błędu predykcji (FPE*) oraz na podstawie uśredniania modeli otrzymanych dla różnych pasm estymacji (B).

Tablica 9.34: Uśrednione miary Itakury-Saito oraz uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów przy zastosowaniu zmodyfikowanego kryterium końcowego błędu predykcji (FPE*) oraz podejścia bayesowskiego (B) do wyboru rzędu estymowanego modelu oraz pasma estymacji w procedurze uśredniania modeli dla sygnału o długości $N = 2500$ próbek.

n_{\max}	d_{IS}				d_{CE}			
	Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne		Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne	
	FPE*	B	FPE*	B	FPE*	B	FPE*	B
1	4,1990	4,1147	4,0863	4,0136	12,0135	11,9996	13,8068	13,7801
2	2,8198	2,5974	3,2149	3,0128	8,6297	8,6685	10,5374	10,5536
3	2,6882	2,4551	3,0722	2,8680	6,4823	6,4776	8,3039	8,2760
4	1,6102	1,3396	1,8867	1,7380	2,7876	2,9441	4,1906	4,3753
5	1,6127	1,3289	1,8785	1,7285	2,6970	2,5302	3,6560	3,5652
6	0,7069	0,4485	0,9878	0,8333	1,2438	0,8961	0,8296	0,8327
7	0,7414	0,4482	1,0165	0,8487	0,6914	0,5726	1,2499	1,1847
8	0,0740	0,0666	0,1123	0,1223	0,3374	0,2934	0,6652	0,6141
9	0,0754	0,0621	0,1080	0,1042	0,3634	0,3165	0,6320	0,5905
10	0,0765	0,0622	0,1091	0,1005	0,3766	0,3307	0,7202	0,6349
11	0,0776	0,0628	0,1103	0,1014	0,4042	0,3519	0,9885	0,7151
12	0,0787	0,0634	0,1112	0,1018	0,4415	0,3685	1,3027	0,7946
13	0,0797	0,0636	0,1122	0,1024	0,4539	0,3736	1,3323	0,8240
14	0,0809	0,0638	0,1127	0,1029	0,4640	0,3728	1,3000	0,8296
15	0,0816	0,0640	0,1131	0,1034	0,4740	0,3738	1,2370	0,8284
16	0,0825	0,0642	0,1129	0,1036	0,4853	0,3794	1,1814	0,8316
17	0,0830	0,0644	0,1132	0,1039	0,4938	0,3838	1,1827	0,8421
18	0,0835	0,0645	0,1137	0,1042	0,4992	0,3881	1,1844	0,8514
19	0,0840	0,0647	0,1145	0,1044	0,5038	0,3911	1,1829	0,8579
20	0,0844	0,0648	0,1149	0,1047	0,5076	0,3935	1,1729	0,8639

Tablica 9.35: Uśrednione miary Itakury-Saito oraz uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów przy zastosowaniu zmodyfikowanego kryterium końcowego błędu predykcji (FPE*) oraz podejścia bayesowskiego (B) do wyboru rzędu estymowanego modelu oraz pasma estymacji w procedurze uśredniania modeli dla sygnału o długości $N = 5000$ próbek.

n_{\max}	d_{IS}				d_{CE}			
	Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne		Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne	
	FPE*	B	FPE*	B	FPE*	B	FPE*	B
1	4,1853	4,1041	4,0661	4,0012	12,0062	12,0031	13,7742	13,7654
2	2,6440	2,5035	3,0776	2,9566	8,6373	8,6757	10,5167	10,5443
3	2,5030	2,3593	2,9520	2,8215	6,4557	6,4530	8,1751	8,1741
4	1,4142	1,2876	1,7953	1,6911	2,9016	2,9672	4,1114	4,1913
5	1,4182	1,2765	1,7892	1,6814	2,4401	2,3511	3,2598	3,2366
6	0,5088	0,4098	0,8607	0,7735	1,0280	0,7764	0,6069	0,6028
7	0,5204	0,3865	0,8807	0,7808	0,4783	0,4362	0,7247	0,7813
8	0,0532	0,0433	0,0502	0,0632	0,2030	0,1802	0,2433	0,2676
9	0,0535	0,0435	0,0478	0,0531	0,2152	0,1982	0,2203	0,2572
10	0,0540	0,0435	0,0471	0,0506	0,2254	0,2105	0,2239	0,2803
11	0,0544	0,0438	0,0473	0,0508	0,2345	0,2219	0,2535	0,3114
12	0,0550	0,0441	0,0478	0,0511	0,2440	0,2364	0,2909	0,3411
13	0,0553	0,0443	0,0483	0,0514	0,2502	0,2385	0,3081	0,3539
14	0,0557	0,0442	0,0488	0,0519	0,2554	0,2380	0,3140	0,3610
15	0,0561	0,0443	0,0494	0,0524	0,2600	0,2382	0,3153	0,3634
16	0,0564	0,0444	0,0499	0,0527	0,2648	0,2419	0,3196	0,3681
17	0,0567	0,0446	0,0504	0,0530	0,2691	0,2449	0,3285	0,3752
18	0,0570	0,0447	0,0507	0,0534	0,2723	0,2468	0,3352	0,3809
19	0,0572	0,0447	0,0512	0,0536	0,2749	0,2480	0,3400	0,3852
20	0,0574	0,0449	0,0516	0,0539	0,2778	0,2498	0,3436	0,3889

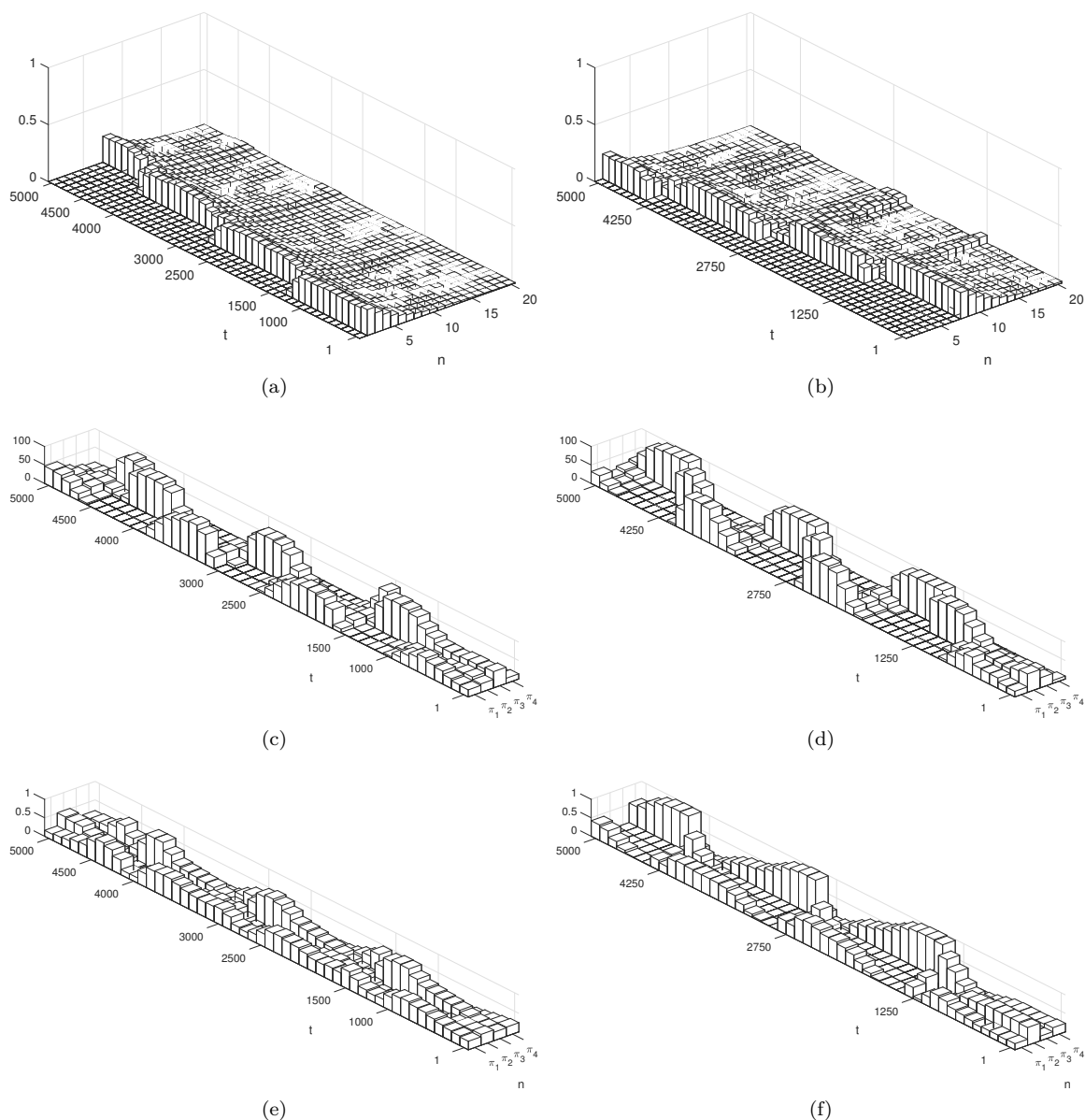
Tablica 9.36: Uśrednione miary Itakury-Saito oraz uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów przy zastosowaniu zmodyfikowanego kryterium końcowego błędu predykcji (FPE*) oraz podejścia bayesowskiego (B) do wyboru rzędu estymowanego modelu oraz pasma estymacji w procedurze uśredniania modeli dla sygnału o długości $N = 10000$ próbek.

n_{\max}	d_{IS}				d_{CE}			
	Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne		Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne	
	FPE*	B	FPE*	B	FPE*	B	FPE*	B
1	4,1753	4,1012	4,0588	3,9970	11,9995	12,0005	13,7546	13,7531
2	2,5334	2,4611	2,9990	2,9248	8,6412	8,6759	10,4866	10,5157
3	2,4002	2,3221	2,8728	2,7921	6,3798	6,4103	8,1095	8,1291
4	1,3092	1,2409	1,7322	1,6725	2,8847	2,9304	4,0945	4,1377
5	1,2976	1,2211	1,7389	1,6714	2,3522	2,3080	3,1587	3,1401
6	0,4297	0,3911	0,7974	0,7421	0,8813	0,6675	0,5377	0,5330
7	0,4202	0,3614	0,8197	0,7559	0,3790	0,3343	0,6045	0,6334
8	0,0392	0,0265	0,0379	0,0403	0,1203	0,0768	0,1366	0,1436
9	0,0397	0,0270	0,0368	0,0358	0,1302	0,0857	0,1294	0,1409
10	0,0402	0,0275	0,0367	0,0346	0,1386	0,0934	0,1333	0,1548
11	0,0408	0,0279	0,0369	0,0347	0,1461	0,1001	0,1459	0,1731
12	0,0413	0,0282	0,0374	0,0351	0,1528	0,1070	0,1605	0,1895
13	0,0418	0,0285	0,0378	0,0355	0,1586	0,1111	0,1685	0,1979
14	0,0422	0,0288	0,0382	0,0358	0,1635	0,1147	0,1728	0,2033
15	0,0425	0,0290	0,0385	0,0362	0,1677	0,1178	0,1747	0,2065
16	0,0428	0,0292	0,0388	0,0365	0,1718	0,1210	0,1772	0,2113
17	0,0431	0,0294	0,0392	0,0368	0,1752	0,1239	0,1808	0,2164
18	0,0434	0,0296	0,0394	0,0370	0,1781	0,1261	0,1844	0,2207
19	0,0436	0,0297	0,0397	0,0372	0,1808	0,1279	0,1872	0,2237
20	0,0438	0,0298	0,0400	0,0373	0,1831	0,1297	0,1896	0,2261

Wyniki zamieszczone w tabelach 9.34-9.36 pokazują, że w większości przypadków bayesowskie podejście do wyboru rzędu i pasma estymacji sprawdza się lepiej niż wybór konkretnej wartości pasma estymacji za pomocą zmodyfikowanego kryterium końcowego błędu predykcji. Na uwagę zasługuje również fakt, iż w każdym z rozważanych przypadków stosowanie zmodyfikowanego kryterium końcowego błędu predykcji do wyboru pasma estymacji daje lepsze rezultaty niż łączny wybór pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu za pomocą kryterium FPE (tabele 9.1-9.12). Istotną zaletą przedstawionych metod jest to, iż zwiększenie maksymalnego rzędu estymowanego

modelu ma niewielki wpływ na pogorszenie zarówno jakości estymacji widma jak i śledzenia zmian parametrów analizowanego procesu.

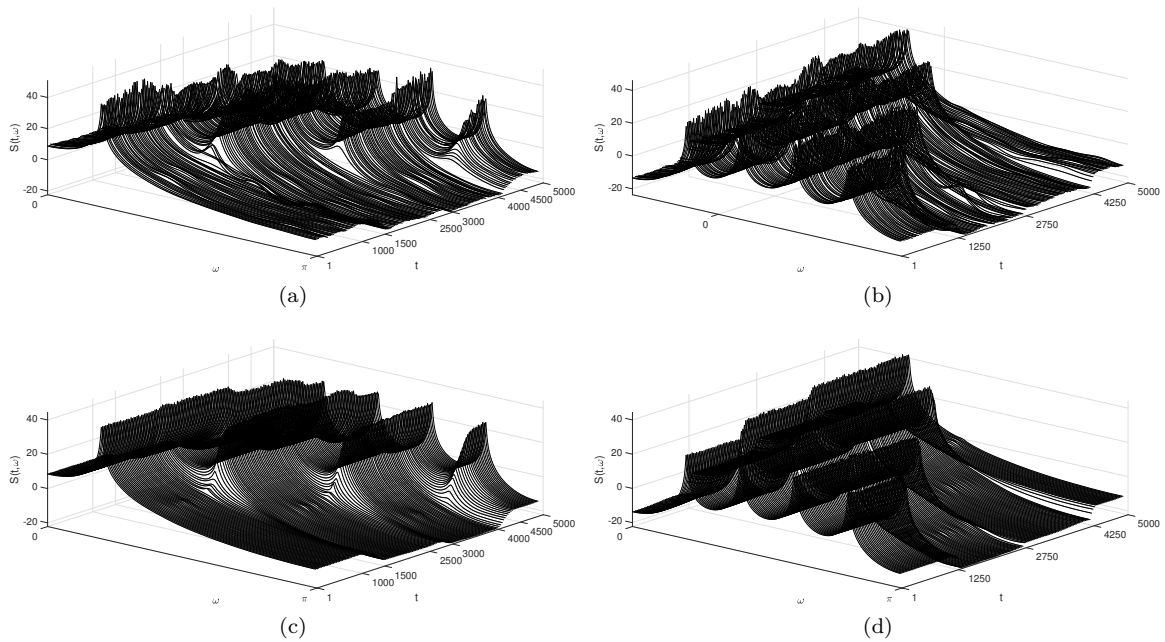
Na rysunku 9.16 przedstawiono uśrednione histogramy wartości współczynników wiarygodności rzędu estymowanego modelu, wartości pasm estymacji wybranych na podstawie kryterium FPE* oraz wartości współczynników wiarygodności pasma estymowanego modelu w procesie równoległej estymacji zarówno dla scenariusza łagodnych jak i gwałtownych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 5000$ próbek. Wyniki zostały lokalnie uśrednione po 100 sąsiadujących próbkach.



Rysunek 9.16: Uśrednione histogramy (a-b) wartości współczynników wiarygodności rzędu estymowanego modelu, (c-d) wartości pasm estymacji wybranych na podstawie kryterium FPE* oraz (e-f) wartości współczynników wiarygodności pasma estymowanego modelu w procesie równoległej estymacji dla scenariusza (a,c,e) łagodnych i (b,d,f) gwałtownych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 5000$ próbek.

Uśrednione histogramy wartości współczynników wiarygodności rzędu estymowanego modelu pokazują, że zarówno w scenariuszu łagodnych, jak i gwałtownych zmian parametrów procesu przedstawiona metoda sprawdza się zadowalająco. Zwykle, w każdej chwili czasu największą wartość ma ten współczynnik wiarygodności, który odpowiada rzeczywistej wartości rzędu modelu. Histogramy te pokazują również, że metoda wykazuje tendencję do przeszacowywania rzędu estymowanego modelu. Można zauważyć, że przeszacowanie rzędu modelu jest wyraźnie widoczne w chwilach skokowych zmian parametrów procesu.

Na rysunku 9.17 przedstawiono widmową gęstość mocy estymowaną za pomocą procedury uśredniania modeli otrzymanych dla różnych pasm estymacji dla sygnału o długości $N = 5000$ próbek zarówno w scenariuszu łagodnych, jak i gwałtownych zmian parametrów.



Rysunek 9.17: Widmowa gęstość mocy estymowana za pomocą procedury uśredniania modeli otrzymanych dla różnych pasm estymacji dla sygnału o długości $N = 5000$ próbek. (a-b) Wyniki dla pojedynczej realizacji procesu oraz (c-d) wyniki uśrednione po 100 niezależnych realizacjach zarówno w scenariuszu (a,c) łagodnych, jak i (b,d) gwałtownych zmian parametrów.

9.3.2 Wariant wielowymiarowy

Tabele 9.37-9.39 zawierają uśrednione miary oceny jakości analizy wygenerowanego wielowymiarowego niestacjonarnego procesu autoregresyjnego. Wyniki otrzymano dla różnych długości sygnału zarówno w scenariuszu łagodnych, jak i gwałtownych zmian parametrów procesu. Rezultaty zostały otrzymane na drodze identyfikacji za pomocą dwukierunkowych algorytmów drabinkowych z zapominaniem wykładniczym w wariancie uśredniania oszacowań macierzy współczynników autokorelacji dla różnych wartości maksymalnego rzędu estymowanego modelu oraz dla różnych wartości pasm estymacji. Analogicznie do przypadku jednowymiarowego, wyniki zostały otrzymane dla przypadku wyboru określonej wartości pasma estymacji na podstawie zmodyfikowanego wielowymiarowego kryterium końcowego błędu predykcji (MFPE*), a także dla metody uśredniania modeli otrzymanych dla różnych pasm estymacji (B).

Tablica 9.37: Uśrednione miary względnej entropii oraz uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów przy zastosowaniu zmodyfikowanego kryterium końcowego błędu predykcji (MFPE*) oraz podejścia bayesowskiego (B) do wyboru rzędu modelu oraz pasma estymacji w procedurze uśredniania modeli dla sygnału o długości $N = 2000$ próbek.

n_{\max}	d_{RER}				d_{MCE}			
	Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne		Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne	
	MFPE*	B	MFPE*	B	MFPE*	B	MFPE*	B
1	2,1882	2,1610	2,2364	2,2084	63,3357	63,2670	65,6575	65,5862
2	0,5086	0,5368	0,5270	0,5535	46,1095	46,1995	48,1993	48,2906
3	0,3047	0,3185	0,3172	0,3294	33,0282	32,6198	34,6039	34,2819
4	0,2261	0,2207	0,2342	0,2312	22,2954	21,8642	23,3328	23,1612
5	0,1093	0,1003	0,1102	0,1070	11,6709	11,5768	12,2178	12,5918
6	0,1036	0,0942	0,1045	0,1006	12,5207	12,8824	13,1087	13,9264
7	0,1003	0,0897	0,1011	0,0957	12,0723	12,9285	12,6689	13,9841
8	0,0877	0,0748	0,0878	0,0798	5,7651	5,6440	6,0287	6,3139
9	0,0805	0,0666	0,0802	0,0711	6,7087	7,3678	7,0377	8,1687
10	0,0705	0,0559	0,0696	0,0598	3,7284	3,9853	3,9168	4,6085
11	0,0706	0,0560	0,0697	0,0599	3,7486	4,0812	3,9406	4,7207
12	0,0708	0,0561	0,0699	0,0601	3,7687	4,1426	3,9646	4,7893
13	0,0709	0,0562	0,0700	0,0602	3,7824	4,1709	3,9779	4,8192
14	0,0710	0,0563	0,0701	0,0602	3,7911	4,1868	3,9884	4,8365
15	0,0711	0,0563	0,0701	0,0603	3,7948	4,1971	3,9925	4,8479
16	0,0711	0,0563	0,0701	0,0603	3,7976	4,2038	3,9939	4,8553
17	0,0711	0,0563	0,0702	0,0603	3,7989	4,2066	3,9951	4,8584
18	0,0711	0,0563	0,0702	0,0603	3,7996	4,2084	3,9963	4,8601
19	0,0711	0,0564	0,0702	0,0603	3,7999	4,2094	3,9965	4,8608
20	0,0711	0,0564	0,0702	0,0603	3,8004	4,2100	3,9968	4,8614

Tablica 9.38: Uśrednione miary względnej entropii oraz uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów przy zastosowaniu zmodyfikowanego kryterium końcowego błędu predykcji (MFPE*) oraz podejścia bayesowskiego (B) do wyboru rzędu modelu oraz pasma estymacji w procedurze uśredniania modeli dla sygnału o długości $N = 4000$ próbek.

n_{\max}	d_{RER}				d_{MCE}			
	Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne		Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne	
	MFPE*	B	MFPE*	B	MFPE*	B	MFPE*	B
1	2,3719	2,3081	2,4492	2,3894	63,1638	63,1240	65,4702	65,4270
2	0,5396	0,5461	0,5652	0,5716	46,0701	46,1230	48,1335	48,1912
3	0,3340	0,3345	0,3524	0,3512	32,5460	32,3307	34,1458	33,9549
4	0,2341	0,2269	0,2465	0,2379	21,4885	21,1443	22,6797	22,3695
5	0,1077	0,0984	0,1112	0,1048	11,3112	11,0968	11,9955	11,9948
6	0,1004	0,0906	0,1038	0,0966	12,3496	12,2609	13,0538	13,1869
7	0,0955	0,0849	0,0985	0,0904	11,5772	11,5113	12,2261	12,3932
8	0,0785	0,0673	0,0801	0,0716	4,1895	3,8375	4,4412	4,2723
9	0,0697	0,0579	0,0704	0,0615	5,6923	5,5539	6,0419	6,0912
10	0,0568	0,0450	0,0568	0,0478	2,3532	2,0483	2,4804	2,2889
11	0,0571	0,0452	0,0572	0,0481	2,3889	2,1010	2,5195	2,3421
12	0,0574	0,0453	0,0574	0,0482	2,4106	2,1287	2,5423	2,3684
13	0,0574	0,0454	0,0575	0,0482	2,4206	2,1428	2,5533	2,3830
14	0,0575	0,0454	0,0575	0,0483	2,4250	2,1488	2,5585	2,3891
15	0,0575	0,0454	0,0576	0,0483	2,4287	2,1530	2,5621	2,3931
16	0,0575	0,0455	0,0576	0,0483	2,4314	2,1556	2,5645	2,3956
17	0,0576	0,0455	0,0576	0,0483	2,4335	2,1574	2,5665	2,3976
18	0,0576	0,0455	0,0576	0,0483	2,4345	2,1585	2,5677	2,3987
19	0,0576	0,0455	0,0576	0,0483	2,4351	2,1590	2,5682	2,3992
20	0,0576	0,0455	0,0576	0,0483	2,4356	2,1593	2,5685	2,3995

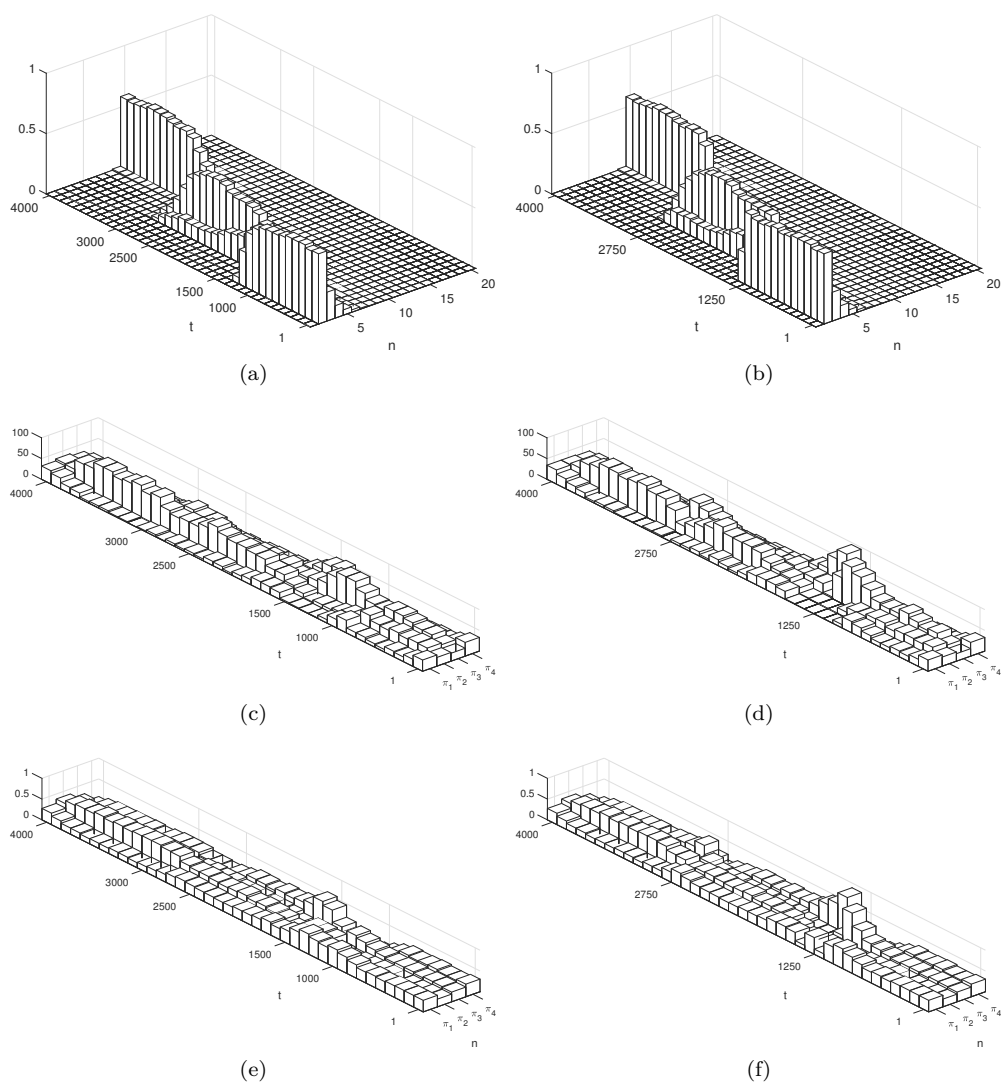
Tablica 9.39: Uśrednione miary względnej entropii oraz uśrednione kwadraty błędów oszacowań parametrów przy zastosowaniu zmodyfikowanego kryterium końcowego błędu predykcji (MFPE*) oraz podejścia bayesowskiego (B) do wyboru rzędu modelu oraz pasma estymacji w procedurze uśredniania modeli dla sygnału o długości $N = 8000$ próbek.

n_{\max}	d_{RER}				d_{MCE}			
	Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne		Zmiany łagodne		Zmiany gwałtowne	
	MFPE*	B	MFPE*	B	MFPE*	B	MFPE*	B
1	2,4040	2,3317	2,4632	2,3920	63,1618	63,1327	65,4727	65,4434
2	0,5456	0,5556	0,5632	0,5759	46,1354	46,1924	48,2001	48,2609
3	0,3391	0,3447	0,3505	0,3579	32,3796	32,2843	33,9897	33,8783
4	0,2345	0,2326	0,2419	0,2413	21,0720	20,9158	22,2547	22,0789
5	0,1048	0,1011	0,1072	0,1062	11,0876	10,9777	11,8539	11,8116
6	0,0974	0,0929	0,0996	0,0978	11,9872	11,8701	12,7711	12,7404
7	0,0918	0,0868	0,0937	0,0912	10,9722	10,8479	11,7020	11,6478
8	0,0737	0,0677	0,0745	0,0707	3,4020	3,2114	3,6970	3,4841
9	0,0639	0,0577	0,0641	0,0598	4,8216	4,6108	5,2215	5,0179
10	0,0503	0,0439	0,0501	0,0450	1,7059	1,5151	1,8492	1,6312
11	0,0506	0,0440	0,0503	0,0452	1,7297	1,5364	1,8747	1,6550
12	0,0507	0,0441	0,0505	0,0453	1,7438	1,5488	1,8917	1,6703
13	0,0508	0,0442	0,0506	0,0453	1,7537	1,5573	1,9027	1,6800
14	0,0508	0,0442	0,0506	0,0453	1,7588	1,5622	1,9079	1,6855
15	0,0508	0,0442	0,0506	0,0454	1,7632	1,5658	1,9125	1,6894
16	0,0509	0,0442	0,0506	0,0454	1,7653	1,5680	1,9146	1,6918
17	0,0509	0,0442	0,0506	0,0454	1,7661	1,5688	1,9154	1,6925
18	0,0509	0,0442	0,0506	0,0454	1,7667	1,5694	1,9160	1,6932
19	0,0509	0,0442	0,0507	0,0454	1,7671	1,5697	1,9164	1,6936
20	0,0509	0,0442	0,0507	0,0454	1,7672	1,5699	1,9166	1,6937

Wyniki przedstawione w tabelach 9.37-9.39 pokazują, że podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, bayesowskie podejście do wyboru rzędu i pasma estymacji zwykle sprawdza się lepiej niż wybór konkretnej wartości pasma estymacji za pomocą zmodyfikowanego kryterium końcowego błędu predykcji MFPE*. Otrzymane rezultaty pokazują również, że z wyjątkiem śledzenia zmian parametrów w scenariuszach testowych dla sygnału o długości $N = 2000$ próbek, stosowanie bayesowskiego podejścia do wyboru rzędu oraz pasma estymowanego modelu daje najlepsze rezultaty spośród zestawionych metod, zarówno w przypadku estymacji widmowej gęstości mocy, jak i śledzenia zmian parametrów.

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, zwiększenie maksymalnego rzędu estymowanego modelu nie wpływa znacząco ani na jakość estymacji widmowej gęstości mocy ani na jakość śledzenia zmian parametrów procesu.

Rysunek 9.18 przedstawia uśrednione histogramy wartości współczynników wiarygodności rzędu estymowanego modelu, wartości pasm estymacji wybranych na podstawie kryterium MFPE* oraz wartości współczynników wiarygodności pasma estymacji w procesie równoległej estymacji. Wyniki zostały przedstawione zarówno dla scenariusza łagodnych jak i gwałtownych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 4000$ próbek. Wyniki zostały lokalnie uśrednione po 100 sąsiadujących próbkach.

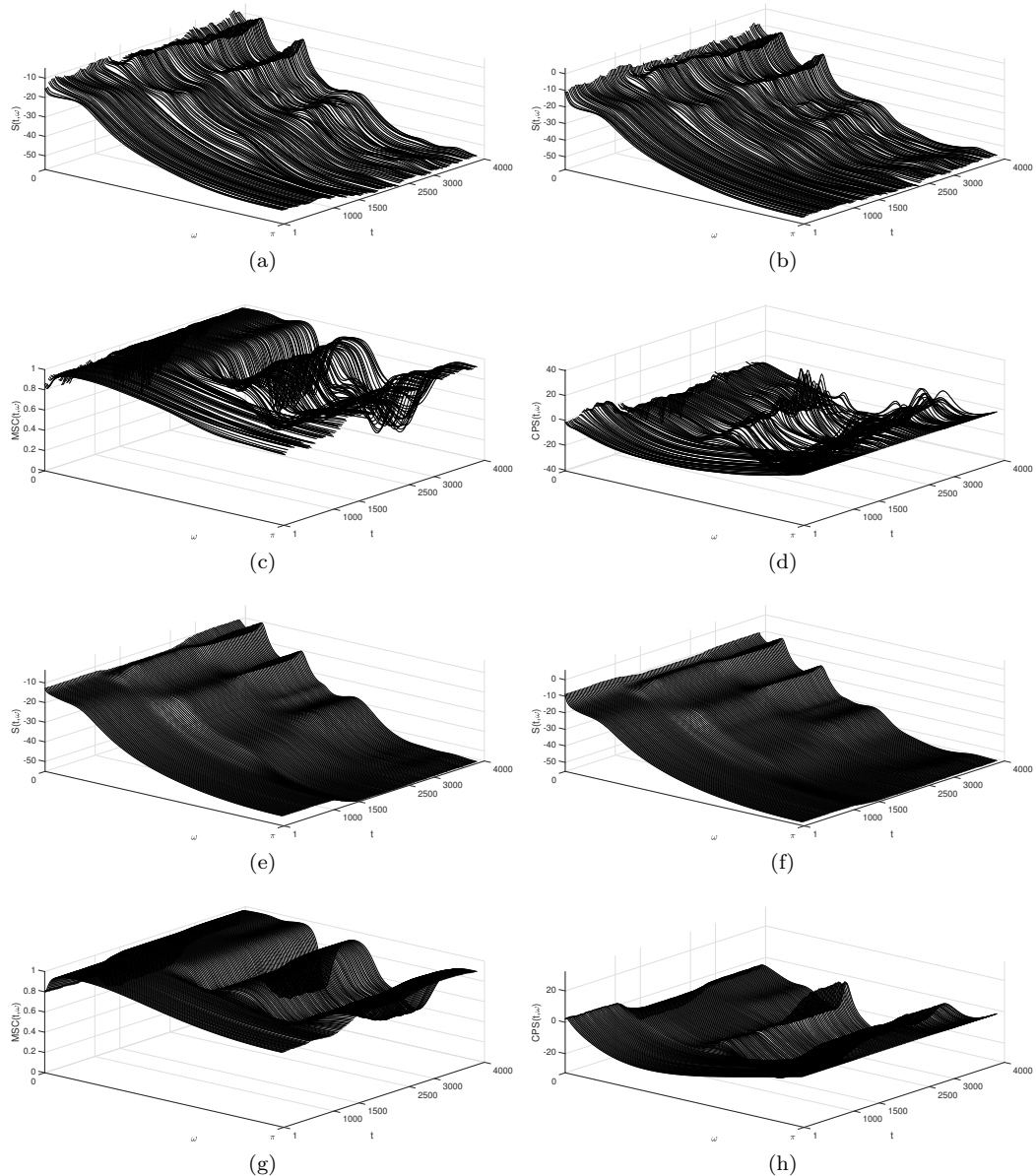


Rysunek 9.18: Uśrednione histogramy (a-b) wartości współczynników wiarygodności rzędu estymowanego modelu, (c-d) wartości pasm estymacji wybranych na podstawie kryterium MFPE* oraz (e-f) wartości współczynników wiarygodności pasma estymacji w procesie równoległej estymacji dla scenariusza (a,c,e) łagodnych i (b,d,f) gwałtownych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 4000$ próbek.

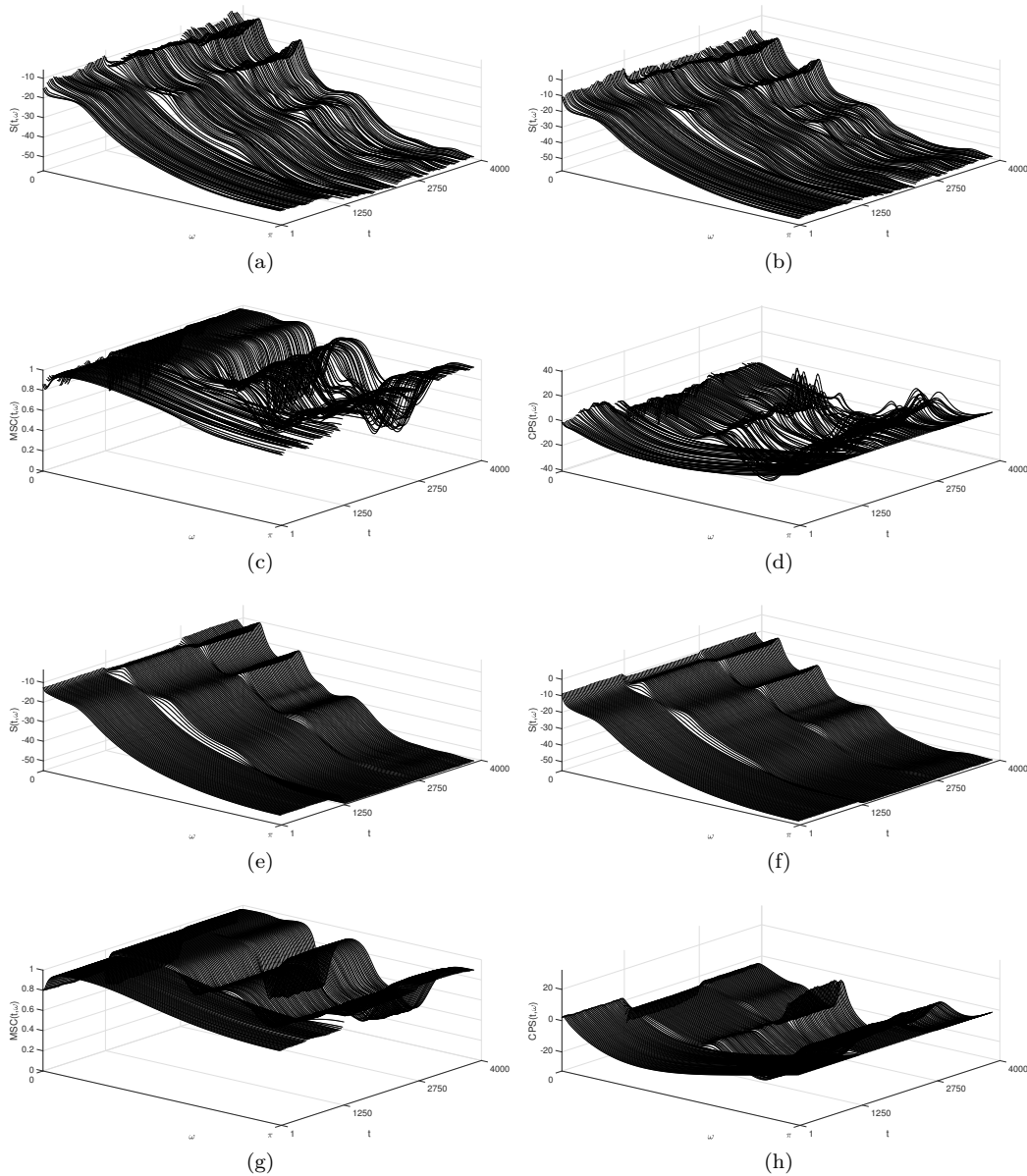
Uśrednione histogramy wartości współczynników wiarygodności rzędu estymowanego modelu potwierdzają zadowalające działanie zaproponowanej metody w obu scenariuszach testowych. Po-

dobnie jak w przypadku jednowymiarowym, w każdej chwili czasu największą wartość przyjmuje zwykle współczynnik odpowiadający rzeczywistej wartości rzędu modelu.

Na rysunkach 9.19 oraz 9.20 przedstawiono widmowe gęstości mocy estymowane za pomocą metody opartej na bayesowskim podejściu do wyboru rzędu estymowanego modelu i pasma estymacji w obu scenariuszach testowych dla sygnału o długości $N = 4000$ próbek. Zestawiono oszacowania widmowej gęstości mocy kanału pierwszego, kanału drugiego oraz oszacowanie widma amplitudowego i fazowego.



Rysunek 9.19: Widmowa gęstość mocy estymowana za pomocą procedury opartej na bayesowskim podejściu do wyboru rzędu estymowanego modelu i pasma estymacji w scenariuszu łagodnych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 4000$ próbek. (a-d) Wyniki dla pojedynczej realizacji procesu oraz (e-h) wyniki uśrednione po 100 niezależnych realizacjach. Widmowa gęstość mocy (a,e) pierwszego i (b,f) drugiego kanału oraz widmo (c,g) amplitudowe i (d,h) fazowe koherencji.



Rysunek 9.20: Widmowa gęstość mocy estymowana za pomocą procedury opartej na bayesowskim podejściu do wyboru rzędu estymowanego modelu i pasma estymacji w scenariuszu gwałtownych zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 4000$ próbek. (a-d) Wyniki dla pojedynczej realizacji procesu oraz (e-h) wyniki uśrednione po 100 niezależnych realizacjach. Widmowa gęstość mocy (a,e) pierwszego i (b,f) drugiego kanału oraz widmo (c,g) amplitudowe i (d,h) fazowe koherencji.

Podsumowanie

Otrzymane wyniki przeprowadzonych testów symulacyjnych pokazały, że zaproponowany dwukierunkowy algorytm drabinkowy z zapominaniem wykładniczym oraz zaproponowanym kryterium łącznego adaptacyjnego wyboru rzędu estymowanego modelu i pasma estymacji umożliwia uzyskanie lepszych oszacowań widmowej gęstości mocy niestacjonarnych sygnałów stochastycznych, w porównaniu do lewostronnych i dwukierunkowych algorytmów estymacji, w których rząd i pasmo estymacji wybierane są przez użytkownika i nie podlegają adaptacji. Przeprowadzone symulacje pokazały również, że zaproponowana bayesowska metoda estymacji, oparta na uśrednianiu modeli autoregresyjnych otrzymanych dla różnych rzędów oraz różnych pasm estymacji, daje lepsze rezultaty niż klasyczne podejście, oparte na wyborze konkretnej wartości rzędu estymowanego modelu oraz pasma estymacji przy zastosowaniu kryterium końcowego błędu predykcji. Badania pokazały, że zaproponowane metody sprawdzają się zarówno w warunkach łagodnych jak i gwałtownych zmian wartości parametrów sygnału.

Otrzymane rezultaty pokazały, że w wariancie jednowymiarowym procedura uśredniania oszacowań współczynników autokorelacji lepiej nadaje się do estymacji widmowej gęstości mocy niż procedura uśredniania oszacowań współczynników odbicia (tabele 9.1-9.6). Zwykle, najlepsze rezultaty otrzymano, gdy zastosowano adaptacyjną metodę wyboru pasma i rzędu estymowanego modelu opartą na kryterium końcowego błędu predykcji (FPE). Tylko w dwóch przypadkach (tabele 9.3 oraz 9.4) najlepsze wyniki uzyskano stosując kryterium PE. Istotny jest fakt, iż w każdym z analizowanych przypadków, bez względu na to, czy wykorzystana została procedura uśredniania oszacowań współczynników autokorelacji, czy oszacowań współczynników odbicia, metoda oparta na kryterium FPE bądź PE daje znacznie lepsze rezultaty niż którykolwiek z estymatorów lewostronnych lub dwukierunkowych.

Wyniki przedstawione w tabelach 9.7-9.12 świadczą o tym, że w wariancie jednowymiarowym do śledzenia zmian wartości parametrów sygnału lepiej nadaje się procedura uśredniania oszacowań współczynników odbicia. Dwukierunkowe algorytmy wykorzystujące procedurę uśredniania oszacowań współczynników odbicia dają zwykle lepsze rezultaty niż ich odpowiedniki wykorzystujące procedurę uśredniania oszacowań współczynników autokorelacji. Wyjątek stanowią algorytmy o pasmie estymacji π_3 zastosowane do analizy sygnałów o łagodnych zmianach parametrów i długościach odpowiednio $N = 2500$ oraz $N = 5000$ próbek (tabele 9.7 oraz 9.8). Analizując wyniki, nie można jednoznacznie stwierdzić, które kryterium daje lepsze rezultaty śledzenia zmian parametrów. Czasami lepiej sprawdza się metoda oparta na kryterium FPE (tabele 9.11 oraz 9.12), a czasami metoda oparta na kryterium PE (tabele 9.8 oraz 9.9). Podobnie jednak jak w przypadku estymacji widmowej gęstości mocy, metody adaptacyjnego wyboru pasma i rzędu estymacji oparte na kryteriach FPE i PE dają znacznie lepsze wyniki, niż którekolwiek z zestawionych algorytmów lewostronnych oraz dwukierunkowych.

Wyniki otrzymane dla strategii mieszanych (tabele 9.13-9.15) nie pozwalają jednoznacznie stwierdzić, która strategia daje najlepsze rezultaty. Decydując się na zastosowanie jednej z nich warto zauważyć, że w przypadku estymacji widmowej gęstości mocy otrzymane wyniki nie różnią się od siebie w znaczący sposób. Z kolei w przypadku śledzenia zmian parametrów, otrzymane wyniki dla strategii mieszanych różnią się dość istotnie.

Wyniki zawarte w tabelach 9.34-9.36 pokazują, że zarówno dokładność oszacowania widmowej gęstości mocy, jak dokładność śledzenia zmian parametrów analizowanego procesu jednowymiarowego mogą zostać poprawione przy pomocy bayesowskiego podejścia do wyboru rzędu estymowanego modelu i pasma estymacji. Otrzymane rezultaty pokazują przewagę metody bayesowskiej opartej na kryterium FPE* nad metodą opartą na kryterium FPE w każdym z rozważanych przypadków. Dodatkowo, dokładność estymacji może zostać poprawiona po zastosowaniu bayesowskiego podejścia nie tylko do wyboru rzędu estymowanego modelu, ale także do wyboru pasma estymacji. Wyniki w tabelach pokazują, że metoda ta daje gorsze rezultaty tylko w przypadku śledzenia zmian wartości parametrów, w wariancie ich gwałtownych zmian sygnałów o długościach $N = 5000$ oraz $N = 10000$ (tabele 9.35 oraz 9.36).

Wyniki przedstawione w tabelach 9.22-9.33 pokazują, że zastosowanie kryterium MFPE w procesie równoległej estymacji zwykle sprawdza się lepiej niż tworzące strukturę równoległą jednokierunkowe oraz dwukierunkowe algorytmy estymacji bez adaptacyjnego mechanizmu wyboru rzędu estymowanego modelu oraz pasma estymacji. Przeprowadzone testy pokazały, że podobnie jak w przypadku jednowymiarowym wielowymiarowa wersja metody opartej na bayesowskim podejściu do wyboru pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu daje lepsze rezultaty niż podejście oparte na wyborze konkretnych wartości tych wielkości przy zastosowaniu wielowymiarowej wersji kryterium końcowego błędu predykcji. Symulacje potwierdziły skuteczność zaproponowanych metod zarówno w scenariuszu łagodnych, jak i gwałtownych zmian parametrów.

Badania pokazały, że metoda wykorzystująca kryterium MFPE oparta na uśrednianiu oszacowań macierzy współczynników autokorelacji lepiej nadaje się zarówno do estymacji widmowej gęstości mocy jak i do śledzenia zmian parametrów procesu, niż metoda wykorzystująca kryterium MFPE oparta na uśrednianiu oszacowań macierzy współczynników odbicia.

Rezultaty zestawione w tabelach 9.37-9.39 pokazują, że podobnie jak w przypadku jednowymiarowym dokładność estymacji widmowej gęstości mocy oraz dokładność śledzenia zmian parametrów procesu wielowymiarowego mogą zostać poprawione za pomocą metody opartej na bayesowskim podejściu do wyboru rzędu estymowanego modelu i pasma estymacji. Wyniki pokazują przewagę podejścia bayesowskiego nad adaptacyjnym wyborem rzędu estymowanego modelu i pasma estymacji za pomocą kryterium MFPE w prawie każdym z rozważanych przypadków. Wyjątek stanowi jedynie procedura śledzenia zmian parametrów procesu dla sygnału o długości $N = 2000$ próbek zarówno w scenariuszu łagodnych, jak i gwałtownych zmian parametrów.

Rozdział 10

Zakończenie

W niniejszej rozprawie przedstawiono skuteczne metody estymacji widmowej gęstości mocy lokalnie stacjonarnych procesów stochastycznych.

Opracowane rozwiązania, takie jak dwukierunkowy algorytm drabinkowy z zapominaniem wykładniczym czy metoda oparta na uśrednianiu modeli umożliwiają precyzyjną estymację zarówno w przypadku łagodnych jak i gwałtownych zmian wartości parametrów analizowanego sygnału. Przedstawione metody zostały także rozszerzone na przypadek wielowymiarowy, dzięki czemu mogą być stosowane np. do analizy sygnałów zarejestrowanych w wersji stereofonicznej poprzez łączną analizę lewego i prawego kanału. Zastosowane metody łącznego wyboru optymalnych wartości pasma estymacji i rzędu estymowanego modelu pozwalają osiągnąć zadowalające wyniki w przypadku, gdy stopień niestacjonarności analizowanego sygnału zmienia się w czasie.

Otrzymane wyniki badań potwierdzają jednoznacznie tezę rozprawy dowodząc, że zastosowanie metod adaptacyjnego wyboru rzędu modelu autoregresyjnego oraz pasma estymacji stosowanego w procesie jego identyfikacji umożliwia zwiększenie dokładności parametrycznej oceny widma chwilowego modelowanego procesu niestacjonarnego.

Dodatek A

Rekurencyjne algorytmy estymacji

A.1 Wyprowadzenie algorytmu RLS (6.11)-(6.13)

Estymator najmniejszych kwadratów (6.8):

$$\hat{\theta}_n(t) = \left[\sum_{i=1}^t \varphi_n(i) \varphi_n^T(i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^t y(i) \varphi_n(i) \right], \quad (\text{A.1})$$

może zostać przedstawiony w postaci rekurencyjnej [28]. Stosując oznaczenia:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) &= \sum_{i=1}^t \varphi_n(i) \varphi_n^T(i), \\ \mathbf{q}(t) &= \sum_{i=1}^t y(i) \varphi_n(i), \end{aligned}$$

można zauważyć, że

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) &= \mathbf{Q}(t-1) + \varphi_n(t) \varphi_n^T(t), \\ \mathbf{q}(t) &= \mathbf{q}(t-1) + y(t) \varphi_n(t). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Podstawiając zależności (A.2) do wzoru (A.1) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_n(t) &= \mathbf{Q}^{-1}(t) \mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}^{-1}(t) [\mathbf{q}(t-1) + y(t) \varphi_n(t)] \\ &= \mathbf{Q}^{-1}(t) [\mathbf{Q}(t-1) \hat{\theta}_n(t-1) + y(t) \varphi_n(t)] \\ &= \mathbf{Q}^{-1}(t) \left[[\mathbf{Q}(t) - \varphi_n(t) \varphi_n^T(t)] \hat{\theta}_n(t-1) + y(t) \varphi_n(t) \right] \\ &= \mathbf{Q}^{-1}(t) \left[\mathbf{Q}(t) \hat{\theta}_n(t-1) + \varphi_n(t) [y(t) - \varphi_n^T(t) \hat{\theta}_n(t-1)] \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Stosując notację:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}^{-1}(t),$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi_n^T(t) \hat{\theta}_n(t-1), \quad (\text{A.4})$$

wzór (A.3) przyjmuje postać:

$$\hat{\theta}_n(t) = \hat{\theta}_n(t-1) + \mathbf{P}(t)\varphi_n(t)\varepsilon(t). \quad (\text{A.5})$$

W dalszych rozważaniach wykorzystany zostanie wzór Shermana-Morrisona [43]. Jeżeli \mathbf{A} jest macierzą o wymiarach $n \times n$, a \mathbf{x} jest wektorem o wymiarach $n \times 1$, to wzór Shermana-Morrisona przyjmuje postać

$$\left[\mathbf{A} + \mathbf{x}\mathbf{x}^T\right]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{x}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}}, \quad (\text{A.6})$$

przy założeniu, że wszystkie odwrotności macierzy istnieją oraz spełniony jest warunek:

$$1 + \mathbf{x}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} \neq 0.$$

Stosując wzór Shermana-Morrisona do obliczenia odwrotności macierzy regresji, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \mathbf{Q}^{-1}(t) = \left[\mathbf{Q}(t-1) + \varphi_n(t)\varphi_n^T(t)\right]^{-1} \\ &= \left[\mathbf{P}^{-1}(t-1) + \varphi_n(t)\varphi_n^T(t)\right]^{-1} \\ &= \mathbf{P}(t-1) - \frac{\mathbf{P}(t-1)\varphi_n(t)\varphi_n^T(t)\mathbf{P}(t-1)}{1 + \varphi_n^T(t)\mathbf{P}(t-1)\varphi_n(t)}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Zależności (A.4), (A.5) oraz (A.7) stanowią opis rekurencyjnego algorytmu najmniejszych kwadratów (RLS) [28].

Formuła pozwalająca obliczyć wariancję szumu tworzącego (6.9):

$$\hat{\rho}_n(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \left[y(i) - \varphi_n^T(i)\hat{\theta}_n(t) \right]^2,$$

również może zostać przedstawiona w postaci rekurencyjnej [28]. Stosując oznaczenia

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_n(t) &= \frac{s(t)}{t}, \\ s(t) &= \sum_{i=1}^t \left[y(i) - \varphi_n^T(i)\hat{\theta}_n(t) \right]^2, \end{aligned}$$

wielkość $s(t)$ można przedstawić jako

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{i=1}^t y^2(i) - 2\hat{\theta}_n^T(t) \sum_{i=1}^t y(i)\varphi_n(i) + \hat{\theta}_n^T(t) \sum_{i=1}^t \left[\varphi_n^T(i)\varphi_n(i) \right] \hat{\theta}_n(t) \\ &= \sum_{i=1}^t y^2(i) - 2\hat{\theta}_n^T(t)\mathbf{q}(t) + \hat{\theta}_n^T(t)\mathbf{P}^{-1}(t)\hat{\theta}_n(t). \end{aligned}$$

Wykorzystując zależność $\hat{\theta}_n(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{q}(t)$ można otrzymać:

$$s(t) = \sum_{i=1}^t y^2(i) - \hat{\theta}_n^T(t)\mathbf{P}^{-1}(t)\hat{\theta}_n(t).$$

Można zauważyć, że

$$s(t) - s(t-1) = y^2(t) + \hat{\theta}_n^T(t-1)\mathbf{P}^{-1}(t-1)\hat{\theta}_n(t-1) - \hat{\theta}_n^T(t)\mathbf{P}^{-1}(t)\hat{\theta}_n(t). \quad (\text{A.8})$$

Wykorzystując formułę (A.5) oraz

$$\mathbf{P}^{-1}(t) = \mathbf{P}^{-1}(t-1) + \varphi_n(t)\varphi_n^T(t),$$

można pokazać, że

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n^T(t)\mathbf{P}^{-1}(t)\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(t) &= \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n^T(t-1)\mathbf{P}^{-1}(t-1)\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-1) \\ &+ \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n^T(t-1)\varphi_n(t)\varphi_n^T(t)\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-1) \\ &+ \varphi_n^T(t)\mathbf{P}(t)\varphi_n(t)\varepsilon^2(t) + 2\varphi_n^T(t)\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-1)\varepsilon(t). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Wykorzystując zależność

$$\varphi_n^T(t)\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-1) = y(t) - \varepsilon(t)$$

oraz łącząc wzory (A.8) i (A.9) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} s(t) &= s(t-1) + \left[1 - \varphi_n^T(t)\mathbf{P}(t)\varphi_n(t)\right] \varepsilon^2(t) \\ &= s(t-1) + \frac{\varepsilon^2(t)}{1 + \varphi_n^T(t)\mathbf{P}(t-1)\varphi_n(t)}. \end{aligned}$$

A.2 Wyprowadzenie wielowymiarowej wersji algorytmu RLS (6.34)

Estymator najmniejszych kwadratów (6.33):

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(t) = \left[\sum_{i=1}^t \boldsymbol{\Psi}_n(i)\boldsymbol{\Psi}_n^T(i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^t \boldsymbol{\Psi}_n(i)\mathbf{y}(i) \right], \quad (\text{A.10})$$

może zostać przedstawiony w postaci rekurencyjnej. Stosując oznaczenia:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) &= \sum_{i=1}^t \boldsymbol{\Psi}_n(i)\boldsymbol{\Psi}_n^T(i), \\ \mathbf{q}(t) &= \sum_{i=1}^t \boldsymbol{\Psi}_n(i)\mathbf{y}(i), \end{aligned}$$

można zauważyć, że

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) &= \mathbf{Q}(t-1) + \boldsymbol{\Psi}_n(t)\boldsymbol{\Psi}_n^T(t), \\ \mathbf{q}(t) &= \mathbf{q}(t-1) + \boldsymbol{\Psi}_n(t)\mathbf{y}(t). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Podstawiając zależności (A.11) do wzoru (A.10) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(t) &= \mathbf{Q}^{-1}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}^{-1}(t) [\mathbf{q}(t-1) + \boldsymbol{\Psi}_n(t)\mathbf{y}(t)] \\ &= \mathbf{Q}^{-1}(t) [\mathbf{Q}(t-1)\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-1) + \boldsymbol{\Psi}_n(t)\mathbf{y}(t)] \\ &= \mathbf{Q}^{-1}(t) \left[[\mathbf{Q}(t) - \boldsymbol{\Psi}_n(t)\boldsymbol{\Psi}_n^T(t)] \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-1) + \boldsymbol{\Psi}_n(t)\mathbf{y}(t) \right] \\ &= \mathbf{Q}^{-1}(t) \left[\mathbf{Q}(t)\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-1) + \boldsymbol{\Psi}_n(t) [\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\Psi}_n^T(t)\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-1)] \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Stosując notację:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}^{-1}(t),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\Psi}_n^T(t)\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-1), \quad (\text{A.13})$$

wzór (A.12) przyjmuje postać:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(t) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-1) + \mathbf{P}(t)\boldsymbol{\Psi}_n(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t). \quad (\text{A.14})$$

Wykorzystując wzór Shermana-Morrisona-Woodbury'ego, macierz $\mathbf{P}(t)$ przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \mathbf{Q}^{-1}(t) = \left[\mathbf{Q}(t-1) + \boldsymbol{\Psi}_n(t)\boldsymbol{\Psi}_n^T(t) \right]^{-1} \\ &= \left[\mathbf{P}^{-1}(t-1) + \boldsymbol{\Psi}_n(t)\boldsymbol{\Psi}_n^T(t) \right]^{-1} \\ &= \mathbf{P}(t-1) - \mathbf{P}(t-1)\boldsymbol{\Psi}_n(t) \left[\mathbf{I}_m + \boldsymbol{\Psi}_n^T(t)\mathbf{P}(t-1)\boldsymbol{\Psi}_n(t) \right]^{-1} \boldsymbol{\Psi}_n^T(t)\mathbf{P}(t-1). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Zależności (A.13), (A.14) oraz (A.15) stanowią opis wielowymiarowej wersji rekurencyjnego algorytmu najmniejszych kwadratów.

Dodatek B

Zawartość dołączonej płyty CD

Do pracy załączono płytę CD, na której znajduje się rozprawa doktorska w wersji elektronicznej.

Bibliografia

- [1] Akaike H., *A new look at the statistical model identification*. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 19, pp. 716–723, 1974.
- [2] Akaike H., *Autoregressive model fitting for control*. Ann. Inst. Statist. Math., vol. 23, pp. 163–180, 1971.
- [3] Akaike H., *On entropy maximization principle*. Applications of Statistics, P.R. Krishnaiah, Ed., Amsterdam. The Netherlands: North-Holland, pp. 27-41, 1977.
- [4] Akaike H., *Fitting autoregressive models for prediction*. Ann. Inst. Statist. Math., vol. 21, pp. 243-247, 1969.
- [5] Boashash B., *Time-frequency signal analysis, the choice of a method and its applications*. Proceedings of the SPIE, Volume 975, pp. 164-185, 1988.
- [6] Burg J. P., *Maximum entropy spectral analysis*. Ph. D. Thesis Dissertation, Dept. of Geophysics, Stanford University, Stanford , CA, 1975.
- [7] Ciolek M., Niedźwiecki M., *Detection of impulsive disturbances in archive audio signals*. Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process (ICASSP), pp. 671-675, 2017.
- [8] Dahlhaus R., *Fitting time series models to nonstationarity processes*. The Annals of Statistics vol. 25, No. 1, pp. 1-37, 1997.
- [9] Dahlhaus R., *Local inference for locally stationary time series based on the empirical spectral measure*. J. Econometrics, vol. 151, pp. 101–112, 2009.
- [10] Dahlhaus R., *Locally stationary processes*. Handbook Statist., vol. 25, pp. 1–37, 2012.
- [11] Dahlhaus R. Giraitis L., *On the optimal segment length for parameter estimates for locally stationary time series*. J. Time Series Anal., vol. 19, pp. 629–655, 1998.
- [12] Friedlander B., *Lattice filters for adaptive processing*. Proc. IEEE vol. 70, pp. 829-867, 1982.
- [13] Friedlander B., *Lattice methods for spectral estimation*. Proc. IEEE vol. 70, pp. 990-1017, 1982.
- [14] Friedlander B., Lee L., Morf M., *Recursive Least Squares Ladder Estimation Algorithms*. IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Proc. vol. 29, pp. 627-641, 1981.
- [15] Ferrante A., Masiero C., and Pavon M., *Time and spectral domain relative entropy: A new approach to multivariate spectral estimation*. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 57, pp. 2561–2575, 2012.
- [16] Goldenshluger A., Nemirovski A., *On spatial adaptive estimation of nonparametric regression*. Math. Meth. Statistics, vol. 6, pp. 135-170, 1997.



- [17] Gray R.M., Buzo A., Gray A.H., and Matsuyama Y., *Distortion measures for speech processing*. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process, vol. 28, pp. 367–376, 1980.
- [18] Kay S. M., *Modern Spectral Estimation: Theory and Applications*. Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 1988.
- [19] Loynes R. M., *On the concept of spectrum for nonstationary processes*. J. R. Statist. Soc. B, vol. 30, pp. 1–30, 1968.
- [20] Lütkepohl H., *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. New York: Springer-Verlag, 2005.
- [21] Ma J. L., Ding R., *Recursive computational formulas of the least squares criterion functions for scalar system identification*. Applied Mathematical Modelling, 38(1):1–11, 2014.
- [22] Martin M., Flandrin P., *Wigner-Ville spectral analysis of nonstationary processes*. IEEE Trans. Acoust. Speech Sign. Process, vol. 33, pp. 1461–1470, 1985.
- [23] Meller M., Niedźwiecki M., Chojnacki, D., *Multivariate autoregressive spectrum estimation of locally stationary processes with model averaging and bandwidth adaptation*. Technical report WETI/KSA/2018/1, 2018.
- [24] Meller M., Niedźwiecki M., Chojnacki, D., Lasota A. *On autoregressive spectrum estimation using the model averaging technique*. Proc. 56th Conf. on Decision and Contr., CDC, Melbourne, Australia, pp. 3600–3605, 2017.
- [25] Miller S. L., Childers D. G., *Probability and Random Processes With Applications to Signal Processing and Communications*. Academic Press, Elsevier, 2004.
- [26] Niedźwiecki M., *Bayesian-like autoregressive spectrum estimation in the case of unknown process order*. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 30, pp. 950–961, 1985.
- [27] Niedźwiecki M., *Identification of nonstationary stochastic systems using parallel estimation schemes*. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 35, pp. 329–334, 1990.
- [28] Niedźwiecki M., *Identification of Time-varying Processes*. New York: Wiley, 2000.
- [29] Niedźwiecki M., *On the localized estimators and generalized Akaike's criteria*. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 29, pp. 970–983, 1984.
- [30] Niedźwiecki M., *Multiple-model approach to finite memory adaptive filtering*. IEEE Trans. Signal Process., vol. 40, pp. 470–474, 1992.
- [31] Niedźwiecki M., Ciolek M., *Identification of nonstationary multivariate autoregressive processes – Comparison of competitive and collaborative strategies for joint selection of estimation bandwidth and model order*. Digital Signal Processing, vol. 78, pp. 72–81, 2018.
- [32] Niedźwiecki M., Chojnacki D., *Identification of nonstationary processes using noncausal bidirectional lattice filtering*. Proceedings of International conference on Time Series and Forecasting ITISE 2018, Grenada, Hiszpania, str. 741 – 752, 2018 (rozszerzona wersja tego artykułu ukaże się w *Theory and Applications of Time Series Analysis - Selected Contributions from ITISE 2018*, O. Valenzuela, F. Rojas, H. Pomares, I. Rojas Eds., Springer 2019).
- [33] Niedźwiecki M., Gackowski S. *On noncausal weighted least squares identification of nonstationary stochastic systems*. Automatica vol. 47, pp. 2239–2245, 2011.
- [34] Niedźwiecki M., Meller M., Chojnacki, D., *Lattice filter based autoregressive spectral analysis with joint model order and estimation bandwidth adaptation*. Proc. 56th Conf. on Decision and Contr., CDC, Melbourne, Australia, pp. 4618–4625, 2017.

- [35] Niedźwiecki M., Meller M., Chojnacki, D., *Lattice filter based multivariate autoregressive spectral estimation with joint model order and estimation bandwidth adaptation*. Artykuł przyjęty do druku w IEEE Transactions on Automatic Control.
- [36] Preumont A., *Random Vibration and Spectral Analysis*. Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [37] Rawat T. K., *Digital Signal Processing*. Oxford University Press, 2015.
- [38] Rissanen J., *Modeling by shortest data description*. Automatica vol. 14, pp. 465-471, 1978.
- [39] Schwarz G., *Estimating the dimension of a model*. The Annals of Statistics vol. 6, No. 2, pp. 461-464, 1978.
- [40] Soderstrom T. and Stoica P., *System Identification*. Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 1988.
- [41] Stanković L., *Performance analysis of the adaptive algorithm for bias-to-variance tradeoff*. IEEE Trans. Signal Process., vol. 52, pp. 1228–1234, 2004.
- [42] Stoica P. and Moses R., *Spectral analysis of signals*. Prentice Hall, Upper Saddle River NJ, 2005.
- [43] Tylavsky D., Sohie G., *Generalization of the matrix inversion lemma*. Proceedings of the IEEE 74 (7), pp. 1050-1052, 1986.
- [44] Takagi T., Taniguchi M., Suzuki S., *Weber-Fechner Law in Road Traffic Flow*. Proceedings of SICE Annual Conference, pp. 1056-1061, 2012.
- [45] Yule G. U., *On the method of investigating periodicities in disturbed series with special references to Wolfer's sunspot numbers*. Phil. Trans. R. Soc. London, vol. A226, pp. 267-298, 1927.