

Układy dynamiczne w analizie zachowania się geosyntetyków w kolejowych konstrukcjach inżynierskich

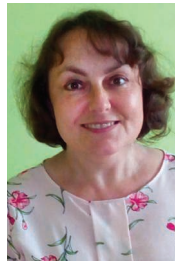
Dynamic systems for the analysis of the behavior of geosynthetics in railway engineering structures



Eligiusz Mieloszyk

Prof. Dr hab. inż.

Politechnika Gdańska, Wydział
Inżynierii Lądowej i Środowiska



Anita Milewska

Dr

Politechnika Gdańska, Wydział
Inżynierii Lądowej i Środowiska



Sławomir Grulkowski

Dr inż.

Politechnika Gdańska, Wydział
Inżynierii Lądowej i Środowiska

slawi@pg.edu.pl

Streszczenie: W analizie współpracy geosyntetyków z elementami konstrukcji inżynierskiej możemy je traktować jako membrany sprężyste lub powłoki posadowione na różnych rodzajach podłoża. Modelowanie układu rzeczywistego oznacza jego idealizację pod kątem uwzględnienia tych cech ośrodka i jego elementów, które wydają się najistotniejsze z punktu widzenia analizowanego problemu. Zbudowany zostanie model fizyczny, a następnie matematyczny przedstawiony w postaci uogólnionego układu dynamicznego. W tym opisie wykorzystuje się różne operatory. Prowadzą one do układów ciągłych o parametrach rozłożonych. Rozpoczynając od opisu z wykorzystaniem układów dynamicznych ciągłych można przejść do układów dynamicznych dyskretnych. Pozwala na to teoria uogólnionych układów dynamicznych, poprzez wykorzystanie innych operatorów. Takie podejście umożliwia prowadzenie analizy problemu z wykorzystaniem sygnałów ciągłych i dyskretnych. Otrzymane wyniki pozwalają też wyznaczać odpowiedzi analizowanych układów metodami analitycznymi, numerycznymi lub hybrydowymi.

Słowa kluczowe: Geosyntetyki; Układy dynamiczne; Nieklasyczny rachunek operatorów

Abstract: While interacting with the elements of the engineering structures, geosynthetics can be treated as elastic membranes or shells placed on different types of foundation. Modeling of the real system takes into account the most important properties of the system and its elements. We will develop a physical and mathematical model in a form of generalized dynamic system. The mathematical description will use different operators leading to a continuous distributed system. The modeling will be further modified by development of discrete dynamic systems, which is enabled by the theory of generalized dynamic systems. This approach allows for the analysis of the problem with continuous and discrete signals. The results will show the response of the analyzed systems with analytic, numerical or hybrid methods.

Keywords: Geosynthetics; Dynamic systems; Non-classical operational calculus

Do opisu (modelowania) wielu układów fizycznych, mechanicznych wykorzystywane są układy dynamiczne ciągłe i dyskretne o parametrach skupionych i rozłożonych, stacjonarne i niestacjonarne. Szerokie możliwości tej teorii, a przede wszystkim teorii uogólnionych układów dynamicznych pozwalają zastosować je w analizie zachowania się geosyntetyków w kolejowych konstrukcjach inżynierskich poprzez wykorzystanie specjalnych operacji różniczkowych lub różnicowych oraz odpowiedniego kształtu endomorfizmów [13]. Wszystkie te zabiegi, co istotne, mają matematyczne uzasadnienie i w związku z tym ich zastosowanie jest uprawnione, o czym przekonamy się dalej. Geosyntetyki, czyli geowłókny, geotkaniny, geo-

siatki, geomembrany, geowłókniny itp. są powszechnie stosowane w budownictwie, w tym przy budowie, modernizacji i remontach linii kolejowych zgodnie z wytycznymi zawartymi między innymi w [17]. Dobrze zbudowana droga szynowa to droga nie podlegająca przypadkowym, niekontrolowanym odkształceniom. Zwiększenie nośności poszczególnych warstw gruntu tworzących budowlę ziemną ma szczególne znaczenie w budowie dróg kolejowych.

Wspólną cechą geotekstyliów, geotkanin i geomembran jest brak sztywności na zginanie. Ich właściwości mechaniczne zależą od sposobu wykonania, użytych materiałów oraz sposobów zakotwienia. Często zastosowane geosyntetyki w budowlach mają

wielowarstwowe ułożenie (rys. 1).

Takie wielowarstwowe stosowanie geosyntetyków jest korzystne. Świadczą o tym badania przeprowadzone w aparacie trójosiowego ścinania próbek gruntu (rys. 2).

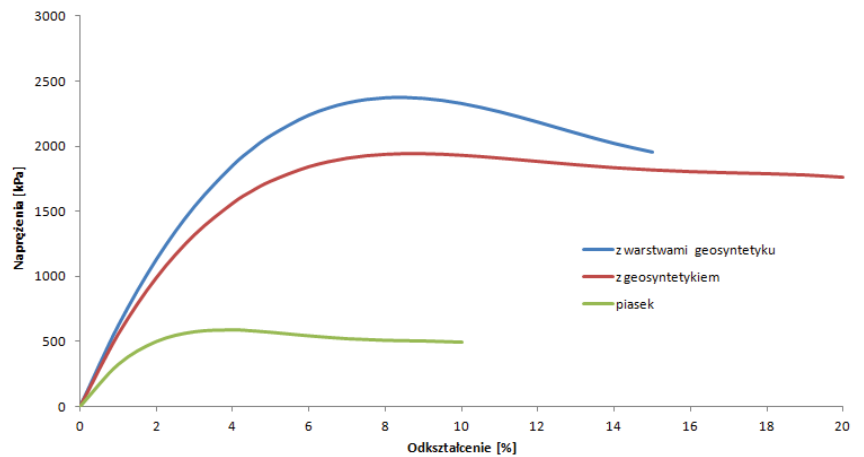
W przekroju drogi kolejowej ta wielowarstwowość przedstawiona jest na rys. 3. Z powyższego wynika, że każda kolejna warstwa posiada inne warunki obciążenia i współpracy. Zilustrowano to schematycznie na rys. 4.

Charakter analogowy analizowanego problemu

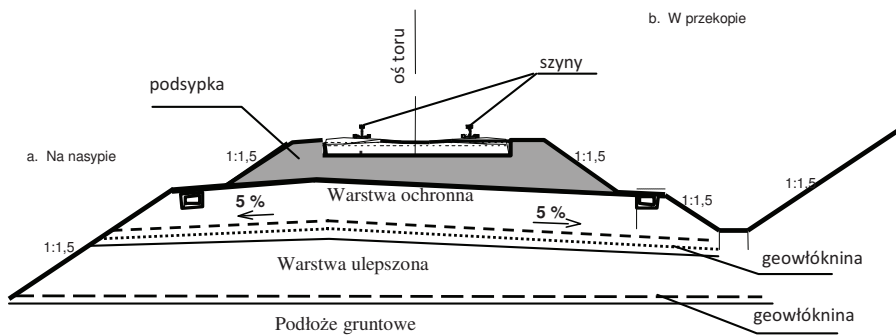
W wielu przypadkach w analizie współpracy geosyntetyków z podłożem i elementami konstrukcji inżynierskiej (np. z podtorzem) możemy



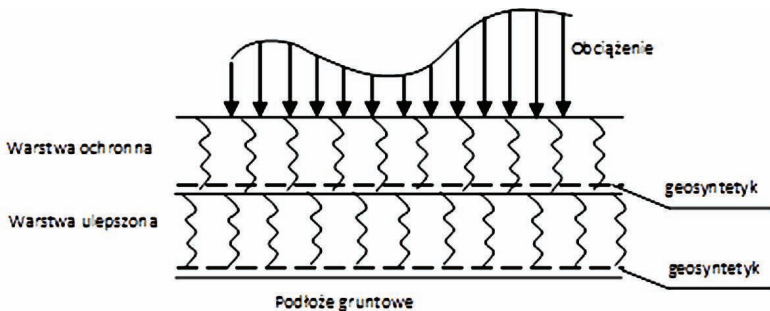
1. Wielowarstwowe ułożenie geosyntetyków w nasypie



2. Charakterystyka wyników testu przeprowadzonego w aparacie trójosiowego ścinania dla próbek gruntu o różnych zawartościach geosyntetyku opracowany na podstawie [5] przy $\sigma_3 = 100$ kPa



3. Przykładowy schemat ułożenia geosyntetyków w przekroju drogi kolejowej [11]



4. Przykładowy schemat obciążeń (obciążeń zastępczych) warstw drogi kolejowej [11]

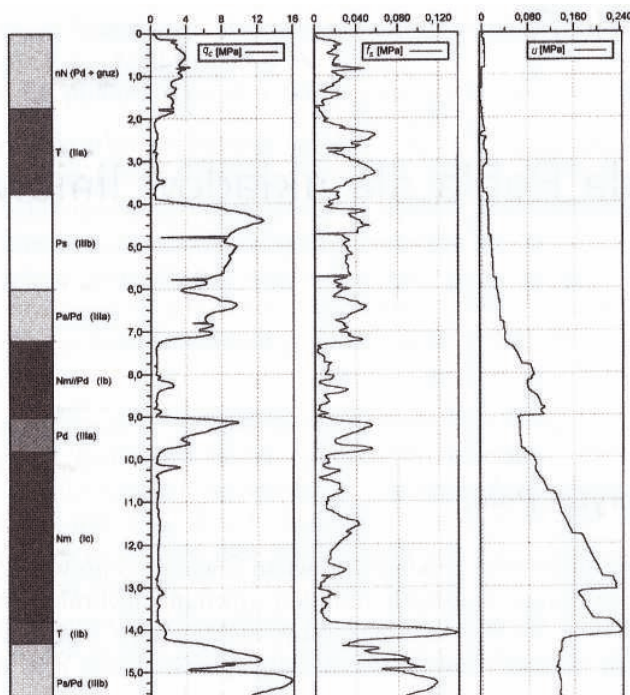
wybrane geosyntetyki traktować jako membrany sprężyste lub powłoki posadowione na różnych rodzajach podłoża. np. typu Winklera, Eulera, Pasternaka, Kerra, bowiem modelowanie układu rzeczywistego oznacza jego idealizację pod kątem uwzględnienia tych cech ośrodka, które wydają się najistotniejsze z punktu widzenia analizowanego problemu. Zbudowany model fizyczny, a następnie matematyczny przedstawiony jest zwykle w postaci szczególnych przypadków uogólnionych układów dynamicznych [13]. W tym szczególnym opisie teoria uogólnionych układów dynamicznych [13] dopuszcza wykorzystanie operatora Laplace'a Δ , a dalej z jego pomocą operatora d'Alemberta \square Podobnie jak

plyta na podłożu gruntowym (podłożu sprężystym) opisywana jest z wykorzystaniem bilaplasjanu [16].

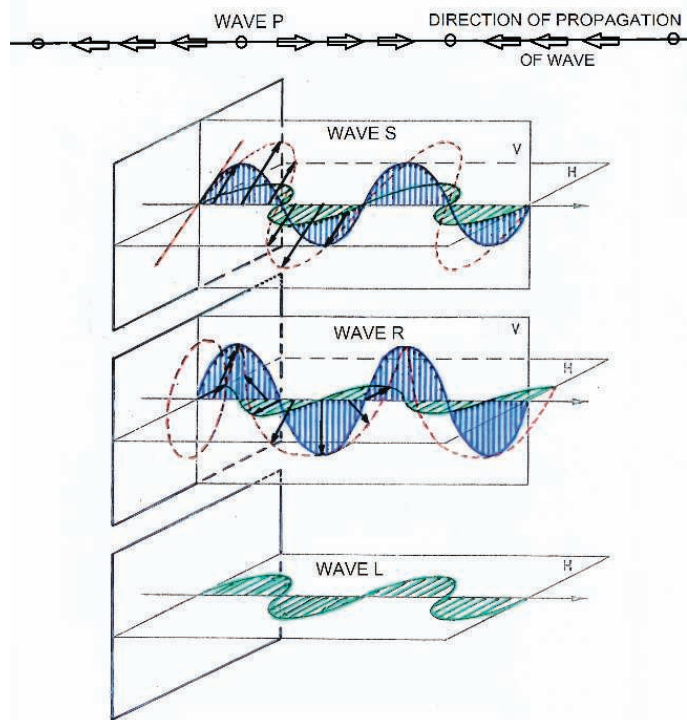
Analogicznie (w sensie problemów różniczkowych) modeluje się układy płytowe, czy fundamenty [8], fundamenty płytowo - palowe [6,15, 18, 21] dobierając odpowiednie parametry układu z uwzględnieniem parametrów podłoża gruntowego [19]. Na płytach, na fundamentach płytowo - palowych także posadowione są linie kolejowe, linie tramwajowe, rurociągi, drogi startowe. W tych przypadkach także wykorzystuje się geosyntetyki. W [4] autorzy wykorzystują w modelowaniu podłożu sprężyste do oceny wpływu nierównomiernego osiadania dna zbiornika na rozkład sił wewnątrz-

nych w jego dnie. Jest to istotne dla określania awaryjności dużych zbiorników [1]. Takie koncepcje wykorzystuje się przy analizie wzajemnego oddziaływania w układzie pojazd kolejowy - tor - podtorze - podłoże gruntowe łącznie z ich eksperymentalną weryfikacją [14], także przez wcześniejsze rozpoznanie podłoża gruntowego np. z wykorzystaniem sondowania [7] i określenie jego parametrów z wykorzystaniem metody CPT bez pomiaru ciśnienia wody w porach gruntu lub metody CPTU z pomiarem ciśnienia wody w porach gruntu. Wyniki sondowania mogą być przedstawione za pomocą odpowiednich wykresów (rys. 5). Na wykresach rejestrowane są: opór na stożku sondy q_c , tarcie na tulei ciernej f_c , ciśnienie wody w porach gruntu u .

W przypadku linii kolejowych wpływ na zachowanie się konstrukcji mają drgania, które są wywołane przez ruch pociągów i zależą między innymi od ich prędkości. Po przekroczeniu tzw. prędkości krytycznej drgania toru i podtorza znacznie zwiększają się i gwałtownie narastają trwałe odkształcenia toru [3]. Decydują o tym rozchodzące się drgania (fale), które są pewnego rodzaju perturbacjami w polu prędkości, przemieszczającymi się w ośrodku przyjmując różne formy i prędkości. Decydujące są tu fale sprężyste. Są to fale mechaniczne, które rozchodzą się w ośrodku sprężystym jakim jest podtorze i dalej przechodzą do otoczenia w wyniku działania sił związanych z odkształceniami objętości i postaci elementów całego



5. Przykładowy wynik badań CPTU w wybranym punkcie (węzle) sondowania [9]



6. Fale P, S, R, L [12]

ośrodka. Obiektami zewnętrznymi powodującymi owe odkształcenia są przejeżdżające pojazdy szynowe, które są źródłami fal, a na ich generowanie ma też wpływ geometria i stan toru.

Rozchodzenie się fal sprężystych w podtorzu, w gruncie polega tu na wzbudzeniu cząstek ośrodka coraz bardziej odległych od źródła fal. Fale sprężyste (rys. 6) można podzielić na fale objętościowe rozchodzące się w gruncie i powietrzu (hałas) oraz fale powierzchniowe rozchodzące się wzdłuż powierzchni rozdzielających ośrodki o różnych właściwościach, w tym fale rozchodzące się na powierzchni gruntu.

Fale objętościowe podłużne P docierają do rejestratora drgań, do odbiornika jako pierwsze. Fale te powodują odchylenie drgania w kierunku równoległym do kierunku rozchodzenia się fal. Powodują ściskanie i rozciąganie ośrodka i rozchodzą się z prędkością c_L .

Fale objętościowe poprzeczne S docierają ze źródła do rejestratora drgań po fali P i mają prędkość c_S . Prędkość fal P i S zależy od wielkości parametrów sprężystych ośrodka i wraz ze zmianą tych parametrów prędkości te mogą różnić się znacznie, a szczególnie zmiany te mogą być związane

np. ze wzrostem głębokości w gruncie [12].

Fale powierzchniowe: fale Rayleigha R i Love'a L mają długie okresy i zmienne amplitudy, przy czym amplituda ich drgań maleje wykładniczo wraz ze wzrostem głębokości.

Powierzchniowe fale Rayleigha R, których prędkość zależy od ich częstotliwości, rozchodzą się poziomo i wywołują zarówno pionowe, jak i poziome, lecz nie często poprzeczne ruchy powierzchni gruntu (rys. 6). Przy czym pionowe i poziome składowe są przeciwne w fazie tak, że ruch cząstek jest eliptyczny – odbywa się po elipsie zorientowanej pionowo i która jest prostopadła do kierunku biegu fali. Pod wpływem tych drgań ziarna gruntu poruszają się po torach zbliżonych do elips, grunt zaś ulega silnemu rozluźnieniu. Fale Love'a L rozchodzą się również poziomo, przy czym wywołują poprzeczne, poziome ruchy cząstek (rys. 6).

Z tego wynika, że w wielu przypadkach konieczne jest wzmocnienie podtorza, w tym z wykorzystaniem geosyntetyków. Porównanie skuteczności niektórych wzmocnień podłoża dla linii dużej prędkości przedstawiono np. w [20].

Uogólnione układy dynamiczne w nieklasycznym rachunku operatorów i ich zastosowanie

Uogólnione układy dynamiczne [13] pojęciowo związane są z nieklasycznym rachunkiem operatorów, który bazuje na trzech liniowych operacjach S , s , T i dwóch przestrzeni liniowych L^1 , L^0 . Zakładamy, że $L^1 \subset L^0$, $S: L^1 \rightarrow L^0$, $T: L^0 \rightarrow L^1$, $s: L^1 \rightarrow \text{Ker} S$ oraz dodatkowo, że $ST = \text{id}$, $TS = \text{id} - s$. Własności operacji S , T , s i ich różne reprezentacje można znaleźć w [2, 10, 13]. Co istotne: wspomniane operacje mogą być definiowane w dziedzinie ciągłej albo dyskretnej i wtedy prowadzą one odpowiednio do opisu z wykorzystaniem równań różniczkowych, różnicowych, bądź ich układów. W związku z tym mogą być wykorzystywane do opisu i analizy uogólnionych układów dynamicznych [13]. Takie podejście prowadzi do uogólnionego wzoru Taylora postaci

$$x = sx + TsSx + T^2sS^2x + \dots \\ \dots + T^{n-1}sS^{n-1}x + T^n sS^n x \quad (1)$$

gdzie $x \in L^n \{x \in L^{n-1} : Sx \in L^{n-1}\}$.

Uwaga! W ostatnim wzorze x nie oznacza współrzędnej punktu, lecz element dowolnej przestrzeni liniowej L^n zdefiniowanej wcześniej. Pokazuje to ogólność wzoru (1).

Okazuje się, że do analizy naszego problemu należy przyjąć jako operację S operator Laplace'a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

lub operator d'Alemberta

$$\square = \Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

i dobrać do nich operacje T i s .

Uwaga! W przypadku $n=2$ operator Laplace'a redukuje się do postaci

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

natomiast dla $n=1$ otrzymujemy tylko operację

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

i to zmienia równanie różniczkowe modelu [11]. W przypadku operacji

$$\square \quad (n=3) \text{ operacje } T \text{ i } s \text{ określone są odpowiednio wzorami}$$

$$T\{f(P, t)\} = \left\{ -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{Af(P_0, t)}{d(P, P_0)} d\Omega \right\}, \quad (2)$$

$$s\{u(P, t)\} = \left\{ \frac{1}{4\pi} \iiint_{\sigma} \left[\frac{1}{d(P, P_0)} A \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) - \right. \right.$$

$$\left. - Au \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{d(P, P_0)} \right) + \frac{1}{ad(P, P_0)} A \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \frac{\partial d(P, P_0)}{\partial n} \right] d\sigma \right\} \quad (3)$$

gdzie: $L^0 = C(\Omega \times \langle 0, \infty \rangle)$, $L^1 = C^3(\Omega \times \langle 0, \infty \rangle)$, operacja A jest podstawieniem za t wartości $t - (d(P, P_0)/a)$ i $a \neq 0$ jest stałą charakteryzującą układ zastępczy

$$d(P, P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

$\frac{\partial}{\partial n}$ oznacza pochodną normalną, σ jest brzegiem zbioru Ω .

W każdej z opisywanych sytuacji w modelowaniu matematycznym występuje równanie różniczkowe cząstkowe $\square u = f(x, y, z, t)$. W naszym przypadku opisuje ono układ zastępczy, w którym stała a charakteryzuje odpowiednio podłoże (podbudowę) z geosyntetykami, natomiast $f(x, y, z, t)$ charakteryzuje ciągłe obciążenie zastępcze. Wielkości te, muszą być wyznaczone empirycznie [7, 14, 17], w tym laboratoryjnie z wykorzystaniem aparatu trójosiowego lub aproksymowane przez parametry elementów składowych układu (rys. 3 i 4), które w modelu mogą być traktowane jako połączone szeregowo lub równolegle

i mogą tworzyć zastępczy układ dynamiczny [13].

Oczywiście x, y, z są współrzędnymi punktu $P \in \Omega$ w chwili t , a u jest funkcją odpowiedniej klasy w zbiorze $\Omega \times \langle 0, \infty \rangle$ i oznacza ugięcie (przemieszczenie, zmianę położenia punktów P). W naszym modelu wystarczy, że Ω jest graniastostupem lub szczególności prostopadłością o odpowiednich wymiarach. Korzystając ze wzorów (1), (2), (3) możemy zapisać

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u(P, t) = \\ &= \left\{ \frac{1}{4\pi} \iiint_{\sigma} \left[\frac{1}{d(P, P_0)} A \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) - \right. \right. \\ &- Au \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{d(P, P_0)} \right) + \frac{1}{ad(P, P_0)} \cdot \\ &\cdot A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \frac{\partial d(P, P_0)}{\partial n} \left. \right] d\sigma \right\} + \\ &+ \left\{ -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{Af(P_0, t)}{d(P_0, t)} d\Omega \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

czyli określić wartości funkcji u w leżącym wewnątrz obszaru Ω punkcie P w chwili t .

Ze wzoru (4) wynika, że jeżeli u_1 jest odpowiedzią układu swobodnego $u = 0$, tzn. jest falą sferyczną, natomiast u_2 jest odpowiedzią układu nieswobodnego z wymuszeniem (obciążeniem) $f(x, y, z, t)$, to odpowiedź u tego układu można przedstawić w postaci $u = u_1 + u_2$. Jeżeli obciążenie zastępcze $f \in Ker^n$, to zgodnie ze wzorem (1) możemy zapisać:

$$u(P, t) = su + Ts f + T^2 s^2 f + \dots + T^{n-1} s^{n-1} f,$$

gdzie T i s są określone odpowiednio wzorami (2) i (3).

Jak pokazano w [11] zmiana położenia punktów analizowanego podłoża, a w tym punktów z geosyntetyków może być szacowana przez fale sferyczne (funkcje sferyczne).

Uwaga! Wykorzystane układy dynamiczne można analizować też w przestrzeni wyników [13], która jest bogatsza w elementy niż przestrzeń wyjściowa.

Własności rozwiązań (4) [11] uprawniają do wykorzystania przedstawionych opisów matematycznych do modelowania zmian położenia punktów analizowanego obszaru Ω ,

a w szczególności interesujących nas punktów $(x, y, g(x, y))$ geosyntetyków, gdzie $z = g(x, y)$ jest równaniem powierzchni geosyntetyku, a (x, y) należą do zbioru $D \subset R^2$, który jest rzutem Ω na płaszczyznę XOY układu współrzędnych i punktów leżących w warstwach położonych dostatecznie blisko powierzchni geosyntetyku.

W celu przeprowadzenia identyfikacji modelu trzeba przeprowadzić badania eksperymentalne wykorzystując eksperyment czynny, bierny lub mieszany i przeprowadzić walidację modelu.

Dyskretyzacja problemu i układ dynamiczny dyskretny

Niech

$$x = i\Delta x; y = j\Delta y; z = k\Delta z; t = l\Delta t$$

gdzie $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$ są odpowiednio przyrostami zmiennych x, y, z, t oraz

$$\begin{aligned} u_{i,j,k,l} &= u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, l\Delta t), f_{i,j,k,l} = \\ &= u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, l\Delta t) \end{aligned}$$

Zastępując pochodne cząstkowe ich ilorazami różnicowymi i wprowadzając w przestrzeni czterowskaźnikowych sygnałów dyskretnych operacje

$$S_1 u_{i,j,k,l} = u_{i+1,j,k,l}$$

$$S_2 u_{i,j,k,l} = u_{i,j+1,k,l}$$

$$S_3 u_{i,j,k,l} = u_{i,j,k+1,l}$$

$$S_4 u_{i,j,k,l} = u_{i,j,k,l+1}$$

albo

$$S_1 u_{i,j,k,l} = u_{i+1,j,k,l} - u_{i,j,k,l}$$

$$S_2 u_{i,j,k,l} = u_{i,j+1,k,l} - u_{i,j,k,l}$$

$$S_3 u_{i,j,k,l} = u_{i,j,k+1,l} - u_{i,j,k,l}$$

$$S_4 u_{i,j,k,l} = u_{i,j,k,l+1} - u_{i,j,k,l}$$

możemy analizowane układy dynamiczne ciągłe zastąpić dyskretnymi układami dynamicznymi o parametrach rozłożonych, które można wykorzystać do badania w dziedzinie czterowskaźnikowych sygnałów dyskretnych lub do numerycznego wyznaczania ich odpowiedzi.

Podsumowanie

Przedstawiono metodę analizy problemu z wykorzystaniem nieklasycznego rachunku operatorów i uogól-

nionych układów dynamicznych.

Ogólnie przyjęty aparat matematyczny pokazuje szerokie możliwości tworzenia jednolitych opisów problemów inżynierskich w różnych dziedzinach: ciągłej i dyskretnej.

Wykorzystując wzór (4) można prowadzić analizę ilościową i jakościową problemu, po przeprowadzeniu identyfikacji, kalibracji i walidacji modelu, najlepiej z wykorzystaniem badań in situ w celu określenia parametrów układu zastępczego.

Wielkości $u(x, y, z, t)$ można wyznaczać numerycznie, a także z wykorzystaniem metod hybrydowych na bazie wzoru (4) lub wykorzystując układy dynamiczne dyskretno o parametrach rozłożonych przybliżające dany układ dynamiczny ciągły.

Otrzymane zależności można wykorzystywać do badań symulacyjnych i eksperymentalnych.

Wspomniane modele analogowe można wykorzystywać do określania awaryjności, niezawodności systemów transportowych, ich elementów oraz wykorzystywać do planowania ich napraw bieżących i głównych.

Analizę problemu dodatkowo komplikuje wzajemne oddziaływanie poszczególnych elementów konstrukcji, przykładowo nawierzchni kolejowej, podtorza z geosyntetykami i podłoża gruntowego. Wyjściem z tej sytuacji jest wykorzystanie układów analogowych i zastępczych. ◀

Materiały źródłowe

[1] American Petroleum Institute. API 653. Tank inspection, repair, alteration and reconstruction. Washington, 2005.

[2] Bittner R. Operational calculus in linear spaces. *Studia Mathematica*, 1961, 20(1), 1-18.

[3] Hall L. Simulations and analyses of train - induced ground vibrations. A comparative study of two- and three-dimensional calculations with actual measurements (Dissertation). Division of Soil & Rock Mechanics, Department of Civil & Environmental Engineering, Royal Institute of Technology, Stoc-

kholm, Sweden, April 2000.

[4] Hamdan M.N., Abuzeid O., Al-Salaymeh A. Assessment of an edge type settlement of above ground liquid storage tanks using a simple beam model. *Applied Mathematical Modelling*, 2007, 31(11), 2461-2474.

[5] Latha M.G., Murthy V.S. Effects of reinforcement form on the behavior of geosynthetic reinforced sand. *Geotextiles and Geomembranes*, 2007, 25(1), 23-32.

[6] Liang F.-Y., Chen L.-Z., Shi X.-G. Numerical analysis of composite piled raft with cushion subjected to vertical load. *Computers and Geotechnics*, 2003, 30(6), 443-453.

[7] Lunne P., Robertson P., Powell J. Cone penetration testing in geotechnical practice. Blackie Academic & Professional, London, 1997, 312.

[8] Meyer Z. Obliczenia inżynierskie osiadania fundamentów. ZAPOL Publishing, Szczecin, 2012.

[9] Mieloszyk E., Milewska A., Abramski M. Pale CFGFRPT i ich zastosowanie w budowlach/obiektach offshore (maszynopis).

[10] Mieloszyk E. Application of non-classical operational calculus to solving some boundary value problem. *Integral Transforms and Special Functions*, 2000, 9(4), 287-292.

[11] Mieloszyk E., Grulkowski S. Generalized Taylor formula and shell structures for the analysis of the interaction between geosynthetics and engineering structures of transportation lines. W: Pietraszkiewicz W., Witkowski W. (red.) *Shell Structures: Theory and Applications*, vol. 4, Taylor & Francis, Londyn, 2018, 561-564.

[12] Mieloszyk E., Milewska A., Grulkowski S. Elastic waves in the railroad track substructures and its surroundings analyzed with non-classical operational methods. 5th International Conference on Road and Rail Infrastructure, W: Stjepan Lakusić (red.) *Road and rail infrastructure V*, Department of Transportation, Faculty of Civil Engineering, University of Zagreb, Zagreb, 2018, 1195-1201.

[13] Mieloszyk E., Nieklasyczny rachunek operatorów w zastosowaniu do uogólnionych układów dynamicznych. Instytut Maszyn Przepływowych, Polska Akademia Nauk, 2008.

[14] Moravčík M. Experimental investigation of the vehicle – rail interaction. Third International Conference on Traffic Effects On Structures and Environment - TESE'94, Vol. 1, Sept. 1994.

[15] Nguyen D.D.C, Jo S.-B., Kim, D.-S. Design method of piled-raft foundations under vertical load considering interaction effects. *Computers and Geotechnics*, 2013, 47, 16-27.

[16] Pietrzak J., Rakowski G., Wrześniowski K. Macierzowa analiza konstrukcji. Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa-Poznań, 1979, 357.

[17] PKP Polskie Linie Kolejowe S.A. Warunki techniczne utrzymania podtorza kolejowego. Id-3, Załącznik do zarządzenia Nr 9/2009 Zarządu PKP Polskie Linie Kolejowe S.A. z dnia 4 maja 2009 r., PKP Polskie Linie Kolejowe S.A. Centrala - Biuro Dróg Kolejowych, 2009.

[18] Randolph M.F., Clancy P. An approximate analysis procedure for piled raft foundations. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1993, 17(12), 849-869.

[19] Wiłun Z. Zarys geotechniki. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2005, 724.

[20] Woldringh R. F., New B. M. Embankment design for high speed trains on soft soils. Barends i in. (red.) *Geotechnical engineering for transportation infrastructure*, Balkema, Rotterdam, 1999.

[21] Yamashita K., Yamada T., Hamada J. Investigation of settlement and load sharing on piled rafts by monitoring full-scale structures. *Soils and Foundations*, 2011, 51(3), 513-532.