

# Analiza numeryczna i analityczna przekrycia w kształcie powłoki synklastycznej o podstawie kwadratowej

Dr hab. inż. Andrzej Ambroziak, prof. uczelni, mgr inż. Krzysztof Piątkowski,  
Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska, Politechnika Gdańska

## 1. Wprowadzenie

Przekrycia cienkościenne umożliwiają osiągnięcie znacznych rozpiętości. Powłoka jest konstrukcją powierzchniową zakrzywioną o nieznacznej grubości w stosunku do pozostałych wymiarów. Powłoki cienkościenne podzielić można na dwie zasadnicze grupy:

- jednokrzywiznowe – mają tylko jedną krzywiznę niezerową, a w każdym punkcie można poprowadzić prostą leżącą na powierzchni środkowej, np. powierzchnia paraboliczna;
- dwukrzywiznowe – mają dwie niezerowe krzywizny, które w zależności od znaku dzielą się na: synklastyczne – obydwie krzywizny są jednakowego znaku (przykład powłoki dwukrzywiznowej synklastycznej o kształcie paraboloidy eliptycznej); antyklastyczne – obydwie krzywizny są różnego znaku (przykład powłoki w kształcie paraboloidy hiperbolicznej).

Z szerokiej grupy pozycji bibliograficznych dotyczących przekryć cienkościennych należy zwrócić uwagę na następujące pozycje: Csonka [1], Flugge [2], Kobiak i Stachurski [3] oraz Grabiec [4]. Csonka [1] opisuje w swojej książce podstawy teoretyczne do obliczania powłok oraz podaje praktyczne zalecenia oraz proste przykłady stosowania teorii błonowej do różnych typów powłok. Flugge [2] opisuje podstawy liniowej teorii cienkich powłok sprężystych. Przedstawia ogólne podstawy teorii błonowej i zgięciowej. Opisywana teoria zgięciowa obejmuje wyłącznie

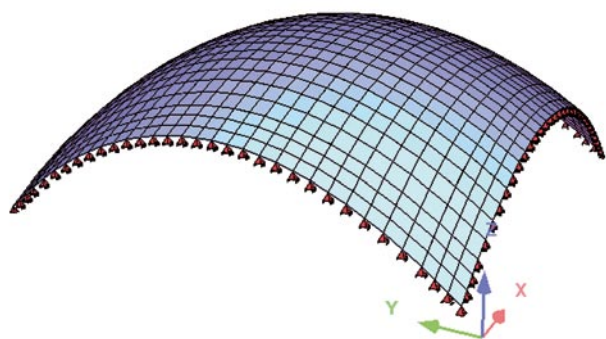
powłoki walcowe i obrotowo symetryczne. W odróżnieniu od poprzedniej pozycji [1] bardziej szczegółowo potraktowany został problem wyboczenia powłok walcowych i kulistych. Kobiak i Stachurski [3] opracowali obszerny zbiór informacji na temat zasad obliczania, wymiarowania i konstruowania przekryć cienkościennych z licznymi przykładami obliczeń powłok wraz z przykładami rzeczywistych konstrukcji. Opisują praktyczne zalecenia do projektowania i wykonawstwa przekryć powłokowych. Grabiec [4] przedstawił metody oszacowania momentów zginających w strefie brzegowej oraz sprawdzenia stateczności powłokowych konstrukcji cienkościennych. Opisał także metody obliczeń powłoki wypukłej o podwójnej krzywiznie o rzucie kwadratowym i prostokątnym.

Powłokowe przekrycia dwukrzywiznowe o podstawie prostokątnej stosowano głównie jako konstrukcje dachu dużych hal. Przykładami takich obiektów mogą być:

- przekrycie dachu fabryki Dunlop – powłoka monolityczna z otworami stanowiącymi doświetlenie wnętrza hali wyburzona w 2001 roku; wymiary powłoki w rzucie wynosiły w przybliżeniu 25,0x20,0 m, grubość powłoki była zmienna od 7,60 cm do 8,90 cm, brzegi powłoki podparte na dźwigarach łukowych, patrz [7],
- budynek ośrodka badawczego szwajcarskiego przedsiębiorstwa Gips Union SA – powłoka żelbetowa o podstawie prostokątnej oparta bezpośrednio na fundamencie powstała w roku 1968 w Szwajcarii [5],
- siedziba firmy SICLI w Genewie – cienka powłoka żelbetowa stanowi przekrycie budynku biurowego, powstał w latach 1969–1970 w Szwajcarii, patrz [6].

## 2. Opis analizowanej konstrukcji

Przedmiotem analizy numerycznej jest cienkościenne przekrycie (rys. 1) w kształcie powłoki synklastycznej o podstawie kwadratowej o wymiarach 45,0x45,0 m. Założona wysokość powłoki w środku odcinka brzegowego to 9,0 m. Przyjęta wstępnie grubość powłoki to 10,0 cm. Projektuje się, iż brzeg powłoki usztywniony będzie łukiem żelbetowym o szerokości przekroju  $b = 30,0$  cm i wysokości  $h = 50,0$  cm. W obliczeniach konstrukcji przekrycia uwzględniono



Rys. 1. Model numeryczny przekrycia w kształcie powłoki synklastycznej o podstawie kwadratowej

obciążenia stałe – ciężar własny, ciężar warstw wykończeniowych i wyposażenia, obciążenia zmienne – technologiczne, obciążenie śniegiem, oddziaływanie wiatru.

W dalszej części artykułu dokonano przedstawienia obliczeń analitycznych powłoki według teorii błonowej. Wpływ momentów oszacowano na podstawie zaleceń literatury. Wyniki obliczeń analitycznych porównano z wynikami uzyskanymi z programu bazującego na metodzie elementów skończonych (MES). W obu przypadkach obliczeń analitycznych i MES przyjęto stałe pionowe obciążenie  $g_0 = 10 \text{ kN/m}^2$ , które posłużyło porównaniu uzyskanych wyników i analizy zbieżności modelu konstrukcji.

### 3. Analiza analityczna

Analizę analityczną przeprowadzono przy następujących założeniach: grubość powłoki jest mała w porównaniu do wymiarów w planie, naprężenia normalne są równomiernie rozłożone po grubości, a ich wypadkowa leży na powierzchni środkowej; ugięcia powłoki są małe w porównaniu do jej grubości; punkty przed odkształceniem leżą na prostej prostopadłej do powierzchni środkowej, a po odkształceniu znajdują się na prostej prostopadłej do odkształconej powierzchni środkowej; naprężenia normalne działające prostopadle do powierzchni środkowej są pomijalnie małe. Równanie powierzchni środkowej przekrycia w kształcie powłoki synklastycznej o podstawie kwadratowej przyjęto jako:

$$z = f(x,y) = [(x^2 + A)(y^2 + A) - A^2]k \quad (1)$$

gdzie:  $h_0$  – największa wysokość powłoki,  $a$  – połowa rozpiętości powłoki w rzucie poziomym,  $A$  – niezany parametr ( $A > 0$ ) oraz

$$k = \frac{h_0}{a^4 + 2a^2A} \quad (2)$$

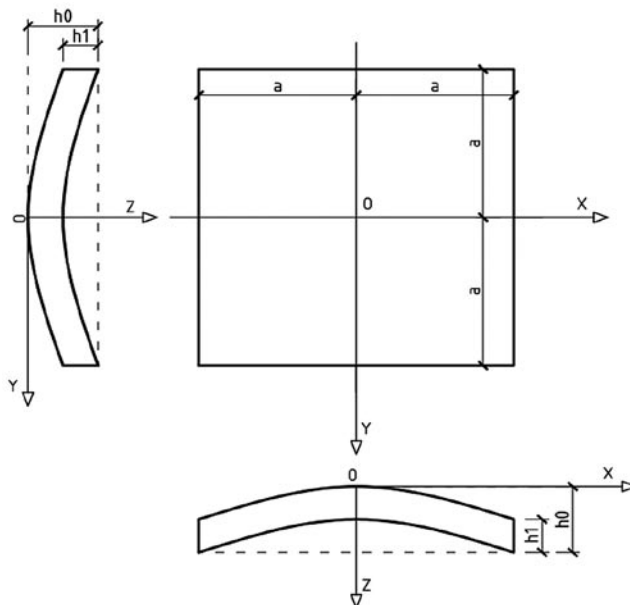
Podstawowe oznaczenia oraz układ współrzędnych  $x, y, z$  przedstawiono na rysunku 2.

Równanie różniczkowe powłoki w stanie błonowym obciążonej siłami pionowymi ma postać:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} - 2 \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} \frac{\delta^2 F}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} + g_z(x,y) = 0 \quad (3)$$

gdzie:  $z(x,y)$  – funkcja kształtu powierzchni środkowej powłoki,  $F(x,y)$  – funkcja naprężeń,  $g_z(x,y)$  funkcja obciążenia pionowego (założono stałe obciążenie pionowe  $g_z = g_0 = const$ ).

Metoda obliczeniowa polega na znalezieniu funkcji naprężeń  $F$ , która spełniałaby powyższe równanie różniczkowe oraz warunki geometryczne kształtu powłoki i rozkładu obciążenia (kształt powłoki nie jest narzucony). Zarówno funkcja



Rys. 2. Podstawowe oznaczenia oraz przyjęty układ współrzędnych

kształtu powłoki  $z$  oraz funkcja naprężeń  $F$  są uzależnione od pewnych niezanych parametrów –  $A, B, C$ .

Do obliczeń tego typu powłoki zastosowano funkcję naprężeń opisaną wzorem:

$$F(x,y) = [B(x^4 - a^4)(y^4 - a^4) + (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)]C \quad (4)$$

Konstrukcja podparcia brzegu powłoki stanowi łuk brzegowy leżący w płaszczyźnie pionowej. Łuk jest wiotki na zgięcie – nie stawia oporu siłom bocznym, dlatego nie powstają siły normalne na brzegu powłoki. Łuk przejmuje siły styczne  $n_{xy}, n_{yx}$ . Na odcinkach brzegowych muszą być spełnione dwa warunki:

$$1^\circ \quad n_y = \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} = 0 \quad \text{dla } y = \pm a \wedge x \in [-a; a] \quad (5)$$

$$2^\circ \quad n_x = \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} = 0 \quad \text{dla } x = \pm a \wedge y \in [-a; a] \quad (6)$$

zatem otrzymujemy:

$$n_y = \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} = [12B(y^4 - a^4)x^2 + 2(y^2 - a^2)]C = [12B(a^4 - a^4)x^2 + 2(a^2 - a^2)]C = 0 \quad \text{dla } x \in [-a; a] \quad (7)$$

$$n_x = \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} = [12B(x^4 - a^4)y^2 + 2(x^2 - a^2)]C = [12B(a^4 - a^4)y^2 + 2(a^2 - a^2)]C = 0 \quad \text{dla } y \in [-a; a] \quad (8)$$

Na podstawie równania przy założeniu  $g_z = const$  i wyznaczeniu stosownych pochodnych otrzymujemy:

$$2k(y^2 + A) \cdot [12B(x^4 - a^4)y^2 + 2(x^2 - a^2)]C - 2 \cdot 4kxy \cdot 4Cx(4Bx^2y^3 + y) + 2k(x^2 + A) \cdot [12B(y^4 - a^4)x^2 + 2(y^2 - a^2)]C = -g_0 \quad (9)$$

W celu wyznaczenia parametry  $A, B, C$  utworzono układ równań z zależności opisanych dla charakterystycznych punktów  $(0, 0), (a, 0), (a, a)$ . Otrzymujemy, dla punktu  $x = 0, y = 0$ :

$$8kAa^2C = g_0 \quad (10)$$

dla punktu  $x = a, y = 0$ :

$$(2ka^2 + 2kA) \cdot (-12Ba^6 - 2a^2)C = -g_0 \quad (11)$$

dla punktu  $x = a, y = a$ :

$$C(-128ka^8B - 32ka^4) = -g_0 \quad (12)$$

Otrzymujemy ostatecznie:

$$A = 5,89293 a^2, B = 0,11831 \cdot a^{-4}, C = 0,27121 \cdot \frac{g_0}{h_0}$$

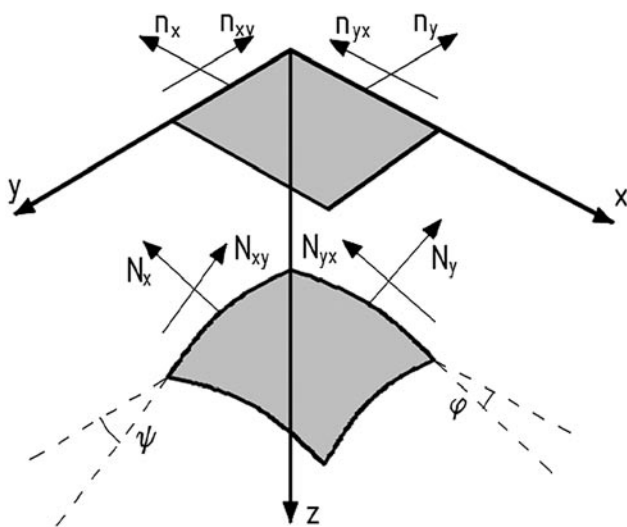
**Siły zrzuwane na płaszczyznę poziomą**

Dotychczasowe obliczenia dotyczyły sił w płaszczyźnie zrzuwanej na płaszczyznę poziomą. Konwencję sił zrzuwanych oraz sił w płaszczyźnie środkowej powłoki przedstawiono na rysunku 3. Przedstawiono również oznaczenia kątów nachylenia osi  $x, y$ . Poniższe zależności pozwalają na wyliczenie sił zrzuwanych na płaszczyznę poziomą:

$$n_x = \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} = [12B(x^4 - a^4)y^2 + 2(x^2 - a^2)]C \quad (13)$$

$$n_y = \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} = [12B(y^4 - a^4)x^2 + 2(y^2 - a^2)]C \quad (14)$$

$$n_{xy} = n_{yx} = -\frac{\delta^2 F}{\delta x \delta y} = -4Cx(4Bx^2y^3 + y) \quad (15)$$



**Rys. 3.** Konwencja sił zrzuwanych oraz siły w płaszczyźnie środkowej powłoki

**Siły przekrojowe w powłoce**

Bazując na oznaczeniach przedstawionych na rysunku 3 oraz wykorzystując znane zależności trygonometryczne wyznaczono wzory na siły w powłoce:

$$N_x = n_x \frac{\cos \psi}{\cos \phi}, N_y = n_y \frac{\cos \phi}{\cos \psi}, N_{xy} = n_{xy} \quad (16)$$

gdzie:

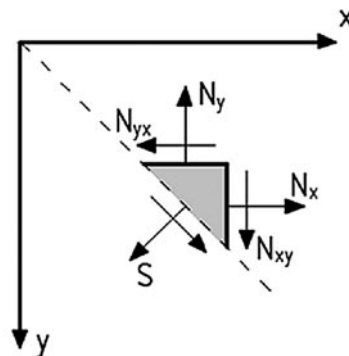
$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2}}, \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2}} \quad (17)$$

Siły  $S$  skierowane są prostopadle do przekątnej rzutu podstawy powłoki (patrz rys. 4). Wykorzystując symetrię układu o podstawie kwadratowej, siły  $S$  wyrażone są zależnością:

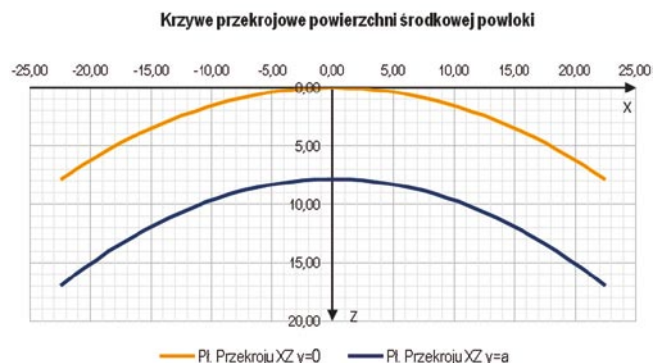
$$S = N_x - N_{xy} \quad (18)$$

Przy wykorzystaniu arkusza kalkulacyjnego sporządzono krzywą przekrojową (rys. 5) w środku rozpiętości powłoki (płaszczyzna przekroju  $XZ, y = 0$ ) oraz na brzegu (płaszczyzna przekroju  $XZ, y = a$ ). Widok powłoki po naniesieniu obliczonych współrzędnych oraz połączeniu punktów linią prostą przedstawiono na rysunku 6.

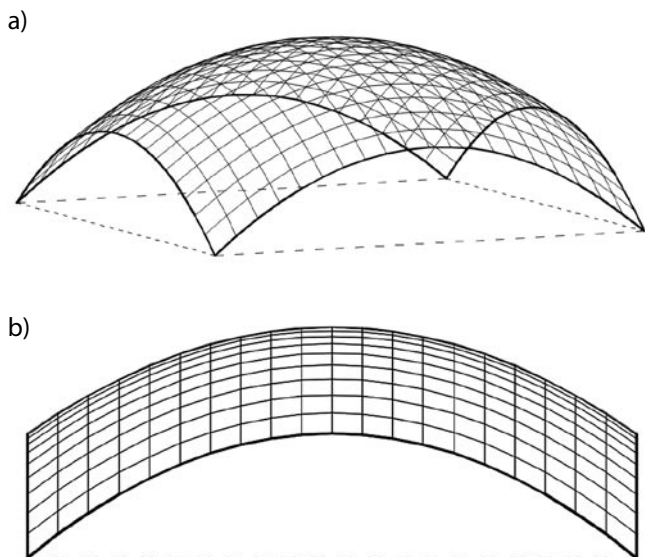
Na podstawie zaprezentowanych powyżej wzorów dokonano wyznaczenia wartości sił wewnętrznych w punktach charakterystycznych. Wyniki zestawiono tabelarycznie



**Rys. 4.** Konwencja sił normalnych  $N$  oraz sił  $S$  prostopadłych do przekątnej rzutu podstawy powłoki



**Rys. 5.** Krzywe przekrojowe w środku rozpiętości powłoki oraz na brzegu



Rys. 6. Widok powłoki: a) widok w przestrzeni, b) widok z przodu

w tabelach 1-6. Wyniki zostały zaprezentowane dla dodatkowej ćwiartki układu współrzędnych powłoki (współrzędne  $0 \leq x \leq 22,5$  [m] oraz  $0 \leq y \leq 22,5$  [m]). Wartości sił wyznaczono dla przyjętego obciążenia pionowego  $g_0 = 10$  kN/m<sup>2</sup>.

#### 4. Analiza numeryczna

Model numeryczny stworzono przy wykorzystaniu oprogramowania Sofistik. W pierwszym kroku wygenerowano za pomocą arkusza kalkulacyjnego współrzędne oraz zastosowano funkcję `_3DFACES` w programie AutoCAD do stworzenia powierzchni w trójwymiarowej przestrzeni. Widok wygenerowanych powierzchni, które posłużą do stworzenia modelu MES, przedstawiono na rysunku 7.

Powierzchnie powłoki, wygenerowane w programie AutoCAD, zaimportowano do programu Sofistik i przekształcono w elementy powierzchniowe. Na krawędzi powłoki zastosowano liniowe podpory przegubowo przesuwne.

Tabela 1. Wartości sił zrzutowanych  $n_x$

Y \ X	0,00	2,25	4,50	6,75	9,00	11,25	13,50	15,75	18,00	20,25	22,50
0,00	-161,53	-159,91	-155,07	-146,99	-135,68	-121,15	-103,38	-82,38	-58,15	-30,69	0,00
2,25	-162,68	-161,06	-156,21	-148,13	-136,80	-122,22	-104,38	-83,25	-58,83	-31,08	0,00
4,50	-166,12	-164,50	-159,65	-151,54	-140,15	-125,45	-107,37	-85,87	-60,86	-32,27	0,00
6,75	-171,85	-170,23	-165,37	-157,23	-145,74	-130,82	-112,36	-90,22	-64,24	-34,24	0,00
9,00	-179,88	-178,26	-173,39	-165,19	-153,56	-138,35	-119,35	-96,32	-68,98	-37,00	0,00
11,25	-190,20	-188,58	-183,69	-175,43	-163,62	-148,02	-128,33	-104,16	-75,07	-40,55	0,00
13,50	-202,81	-201,19	-196,28	-187,94	-175,91	-159,85	-139,31	-113,75	-82,52	-44,89	0,00
15,75	-217,71	-216,09	-211,16	-202,72	-190,43	-173,82	-152,28	-125,08	-91,32	-50,01	0,00
18,00	-234,91	-233,29	-228,34	-219,78	-207,19	-189,95	-167,25	-138,14	-101,48	-55,93	0,00
20,25	-254,41	-252,78	-247,80	-239,12	-226,18	-208,22	-184,22	-152,96	-112,99	-62,63	0,00
22,50	-276,19	-274,57	-269,55	-260,73	-247,41	-228,64	-203,18	-169,51	-125,85	-70,12	0,00

Tabela 2. Wartości sił zrzutowanych  $n_y$

Y \ X	0,00	2,25	4,50	6,75	9,00	11,25	13,50	15,75	18,00	20,25	22,50
0,00	-161,53	-162,68	-166,12	-171,85	-179,88	-190,20	-202,81	-217,71	-234,91	-254,41	-276,19
2,25	-159,91	-161,06	-164,50	-170,23	-178,26	-188,58	-201,19	-216,09	-233,29	-252,78	-274,57
4,50	-155,07	-156,21	-159,65	-165,37	-173,39	-183,69	-196,28	-211,16	-228,34	-247,80	-269,55
6,75	-146,99	-148,13	-151,54	-157,23	-165,19	-175,43	-187,94	-202,72	-219,78	-239,12	-260,73
9,00	-135,68	-136,80	-140,15	-145,74	-153,56	-163,62	-175,91	-190,43	-207,19	-226,18	-247,41
11,25	-121,15	-122,22	-125,45	-130,82	-138,35	-148,02	-159,85	-173,82	-189,95	-208,22	-228,64
13,50	-103,38	-104,38	-107,37	-112,36	-119,35	-128,33	-139,31	-152,28	-167,25	-184,22	-203,18
15,75	-82,38	-83,25	-85,87	-90,22	-96,32	-104,16	-113,75	-125,08	-138,14	-152,96	-169,51
18,00	-58,15	-58,83	-60,86	-64,24	-68,98	-75,07	-82,52	-91,32	-101,48	-112,99	-125,85
20,25	-30,69	-31,08	-32,27	-34,24	-37,00	-40,55	-44,89	-50,01	-55,93	-62,63	-70,12
22,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00



**Tabela 3.** Wartości sił  $N_x$

Y \ X	0,00	2,25	4,50	6,75	9,00	11,25	13,50	15,75	18,00	20,25	22,50
0,00	-161,53	-160,30	-156,57	-150,17	-140,85	-128,28	-112,04	-91,65	-66,57	-36,22	0,00
2,25	-162,28	-161,06	-157,34	-150,96	-141,67	-129,10	-112,84	-92,39	-67,17	-36,59	0,00
4,50	-164,53	-163,32	-159,65	-153,33	-144,09	-131,55	-115,23	-94,58	-68,96	-37,69	0,00
6,75	-168,22	-167,04	-163,44	-157,23	-148,09	-135,58	-119,16	-98,19	-71,91	-39,49	0,00
9,00	-173,28	-172,14	-168,64	-162,57	-153,56	-141,10	-124,55	-103,13	-75,94	-41,95	0,00
11,25	-179,62	-178,52	-175,16	-169,27	-160,42	-148,02	-131,30	-109,32	-80,99	-45,03	0,00
13,50	-187,13	-186,09	-182,89	-177,21	-168,56	-156,23	-139,31	-116,67	-86,98	-48,69	0,00
15,75	-195,70	-194,73	-191,71	-186,28	-177,86	-165,61	-148,47	-125,08	-93,84	-52,87	0,00
18,00	-205,21	-204,32	-201,50	-196,36	-188,21	-176,07	-158,67	-134,44	-101,48	-57,53	0,00
20,25	-215,56	-214,75	-212,17	-207,35	-199,50	-187,48	-169,84	-144,70	-109,85	-62,63	0,00
22,50	-226,64	-225,93	-223,61	-219,15	-211,64	-199,78	-181,88	-155,78	-118,90	-68,16	0,00

**Tabela 4.** Wartości sił  $N_y$

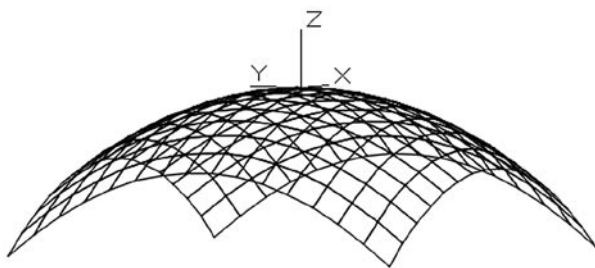
Y \ X	0,00	2,25	4,50	6,75	9,00	11,25	13,50	15,75	18,00	20,25	22,50
0,00	-161,53	-162,28	-164,53	-168,22	-173,28	-179,62	-187,13	-195,70	-205,21	-215,56	-226,64
2,25	-160,30	-161,06	-163,32	-167,04	-172,14	-178,52	-186,09	-194,73	-204,32	-214,75	-225,93
4,50	-156,57	-157,34	-159,65	-163,44	-168,64	-175,16	-182,89	-191,71	-201,50	-212,17	-223,61
6,75	-150,17	-150,96	-153,33	-157,23	-162,57	-169,27	-177,21	-186,28	-196,36	-207,35	-219,15
9,00	-140,85	-141,67	-144,09	-148,09	-153,56	-160,42	-168,56	-177,86	-188,21	-199,50	-211,64
11,25	-128,28	-129,10	-131,55	-135,58	-141,10	-148,02	-156,23	-165,61	-176,07	-187,48	-199,78
13,50	-112,04	-112,84	-115,23	-119,16	-124,55	-131,30	-139,31	-148,47	-158,67	-169,84	-181,88
15,75	-91,65	-92,39	-94,58	-98,19	-103,13	-109,32	-116,67	-125,08	-134,44	-144,70	-155,78
18,00	-66,57	-67,17	-68,96	-71,91	-75,94	-80,99	-86,98	-93,84	-101,48	-109,85	-118,90
20,25	-36,22	-36,59	-37,69	-39,49	-41,95	-45,03	-48,69	-52,87	-57,53	-62,63	-68,16
22,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

**Tabela 5.** Wartości sił  $n_{xy}$   $N_{xy}$

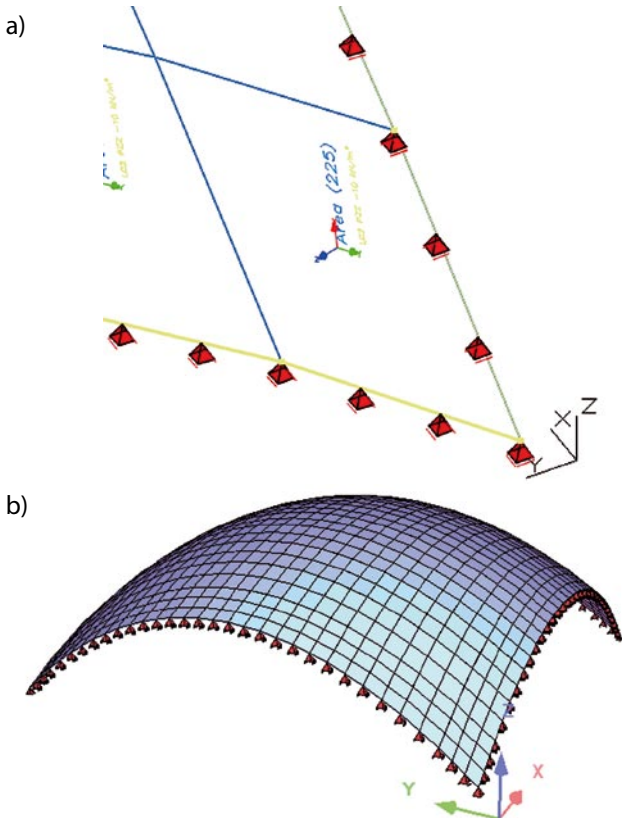
Y \ X	0,00	2,25	4,50	6,75	9,00	11,25	13,50	15,75	18,00	20,25	22,50
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2,25	0,00	-3,23	-6,46	-9,70	-12,93	-16,17	-19,42	-22,67	-25,92	-29,19	-32,46
4,50	0,00	-6,46	-12,93	-19,42	-25,92	-32,46	-39,03	-45,65	-52,32	-59,04	-65,83
6,75	0,00	-9,70	-19,42	-29,19	-39,03	-48,97	-59,04	-69,26	-79,65	-90,24	-101,05
9,00	0,00	-12,93	-25,92	-39,03	-52,32	-65,83	-79,65	-93,81	-108,39	-123,43	-139,01
11,25	0,00	-16,17	-32,46	-48,97	-65,83	-83,15	-101,05	-119,63	-139,01	-159,31	-180,64
13,50	0,00	-19,42	-39,03	-59,04	-79,65	-101,05	-123,43	-147,01	-171,98	-198,53	-226,86
15,75	0,00	-22,67	-45,65	-69,26	-93,81	-119,63	-147,01	-176,29	-207,76	-241,76	-278,58
18,00	0,00	-25,92	-52,32	-79,65	-108,39	-139,01	-171,98	-207,76	-246,84	-289,67	-336,72
20,25	0,00	-29,19	-59,04	-90,24	-123,43	-159,31	-198,53	-241,76	-289,67	-342,93	-402,21
22,50	0,00	-32,46	-65,83	-101,05	-139,01	-180,64	-226,86	-278,58	-336,72	-402,21	-475,94

**Tabela 6.** Wartości sił  $S$ , normalnych do przekątnej

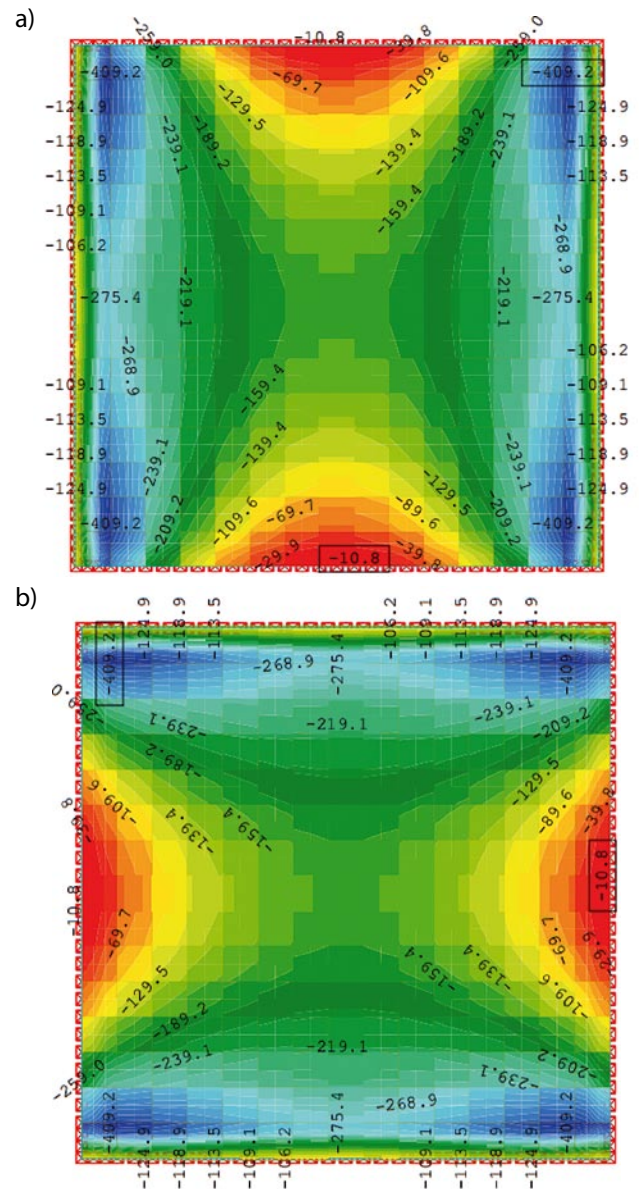
Y \ X	0,00	2,25	4,50	6,75	9,00	11,25	13,50	15,75	18,00	20,25	22,50
0,00	-161,53	-160,30	-156,57	-150,17	-140,85	-128,28	-112,04	-91,65	-66,57	-36,22	0,00
2,25	-162,28	-157,83	-150,88	-141,27	-128,73	-112,93	-93,43	-69,72	-41,25	-7,40	32,46
4,50	-164,53	-156,86	-146,72	-133,92	-118,17	-99,10	-76,20	-48,93	-16,65	21,36	65,83
6,75	-168,22	-157,34	-144,02	-128,04	-109,05	-86,60	-60,12	-28,93	7,74	50,75	101,05
9,00	-173,28	-159,21	-142,72	-123,54	-101,25	-75,27	-44,90	-9,32	32,45	81,48	139,01
11,25	-179,62	-162,35	-142,70	-120,30	-94,59	-64,87	-30,25	10,30	58,01	114,27	180,64
13,50	-187,13	-166,68	-143,86	-118,17	-88,91	-55,18	-15,87	30,34	84,99	149,84	226,86
15,75	-195,70	-172,06	-146,06	-117,02	-84,05	-45,99	-1,45	51,21	113,93	188,89	278,58
18,00	-205,21	-178,39	-149,19	-116,71	-79,82	-37,06	13,30	73,32	145,36	232,14	336,72
20,25	-215,56	-185,57	-153,13	-117,11	-76,06	-28,18	28,69	97,05	179,82	280,30	402,21
22,50	-226,64	-193,47	-157,77	-118,10	-72,63	-19,14	44,98	122,80	217,83	334,05	475,94



**Rys. 7.** Widok na utworzone powierzchnie w programie AutoCAD

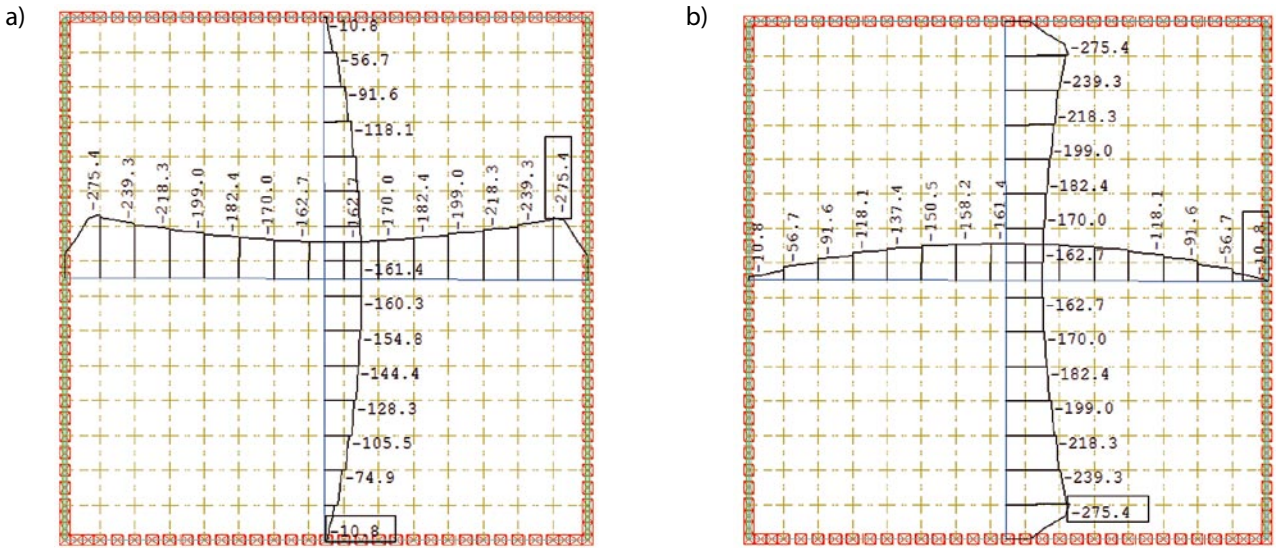


**Rys. 8.** Widok: a) na podpory w okolicy naroża powłoki, b) ogólny na model MES

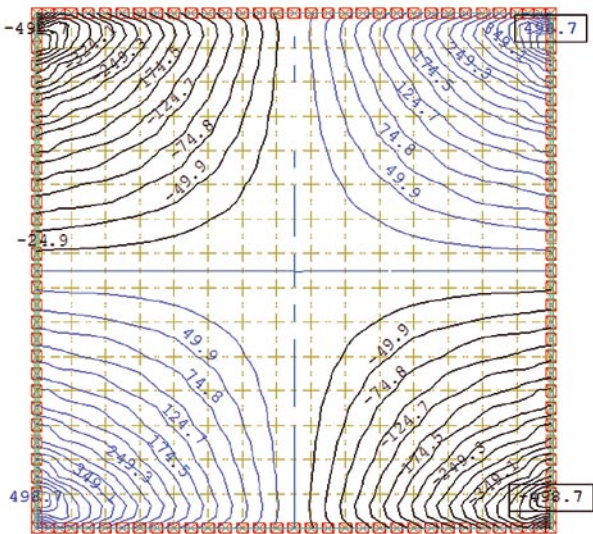


**Rys. 9.** Mapa sił membranowych a)  $n_{yy}$ , b)  $n_{xx}$





Rys. 10. Wartości sił membranowych w osiach symetrii: a)  $n_{yy}$ , b)  $n_{xx}$

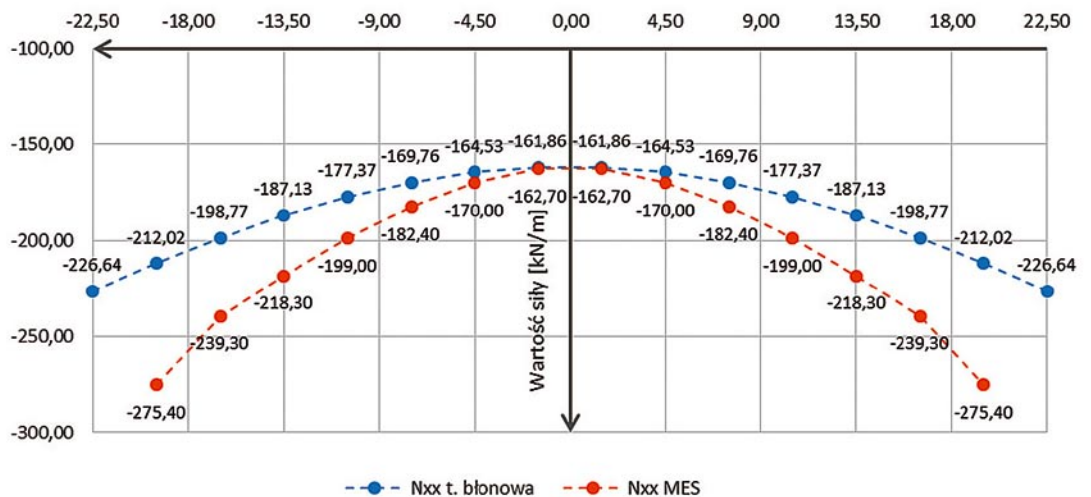


Rys. 11. Izolinie oraz wartości sił stycznych  $n_{xy}$

Na krawędzi  $Y$  umożliwiono przesuw w kierunku  $X$ , natomiast na krawędzi  $X$  umożliwiono przesuw w kierunku  $Y$ . Zablockowano przesuw w kierunku osi  $Z$ . Elementy powierzchniowe wraz z lokalnymi układami współrzędnych oraz widok na zastosowane podpory liniowe na krawędziach powłoki przedstawiono na rysunkach 8a i 8b.

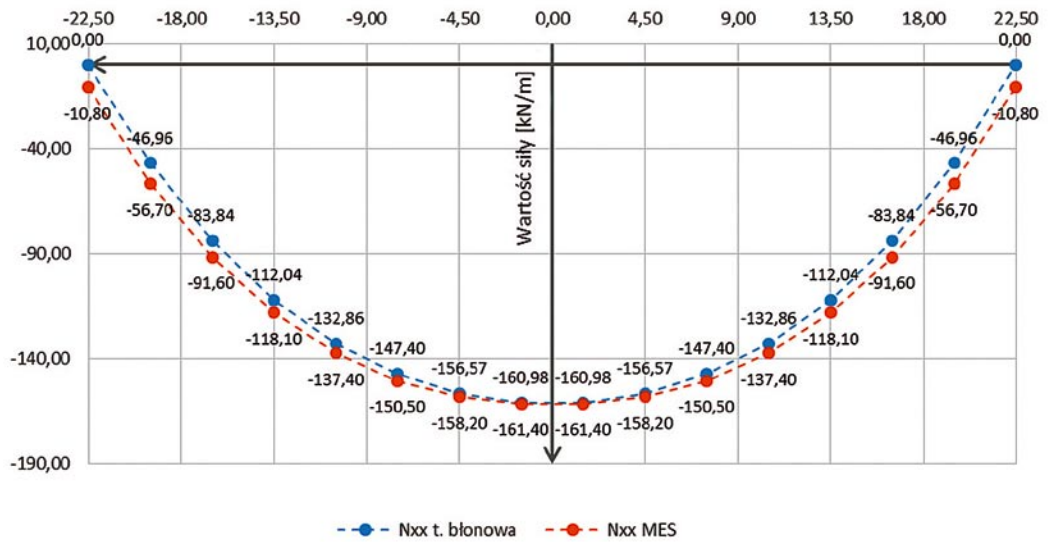
W dalszym kroku obciążono powłokę obciążeniem równomiernie rozłożonym pionowym o wartości  $g_0 = 10 \text{ kN/m}^2$ . Obciążenie zostało przyłożone dla każdego elementu powierzchniowego na kierunku globalnym  $Z$ . Obliczenia numeryczne przeprowadzono z wykorzystaniem oprogramowania Sofistik. Widok ogólny na model MES przedstawiono na rysunku 8b. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń wygenerowano mapy (rys. 9) i przekroje (rys. 10) sił membranowych w powłoce.

Izolinie i wartości sił stycznych w powłoce przedstawiono na rysunku 11. W kolejnym kroku sporządzono wykresy prezentujące wyniki uzyskane w drodze obliczeń

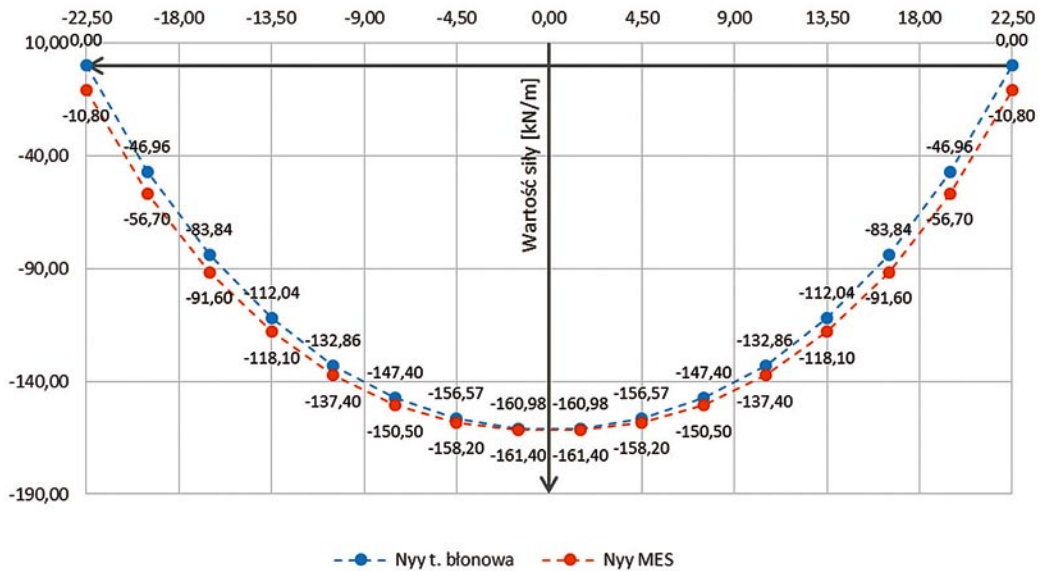


Rys. 12. Wartości sił  $N_{xx}$  według obliczeń teorii błonowej i MES – na kierunku  $Y$

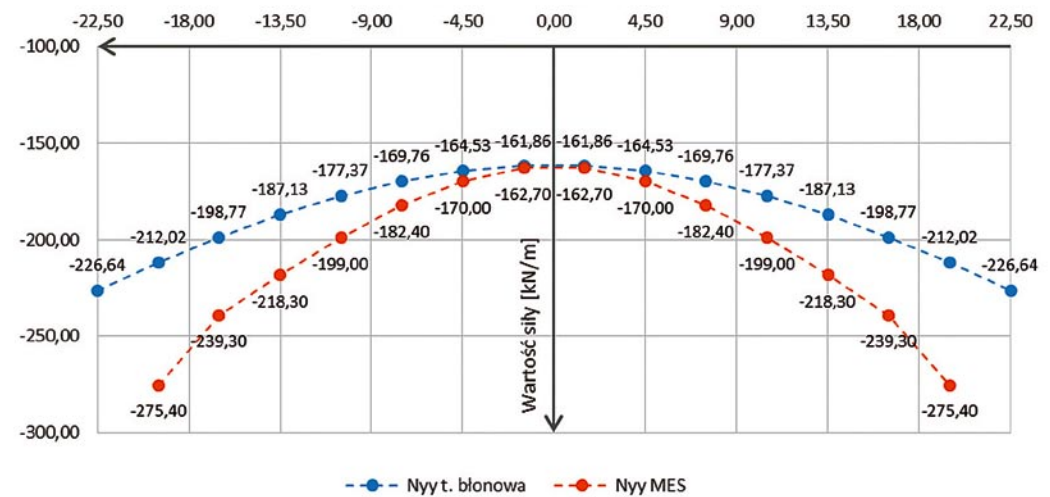
**Rys. 13.** Wartości sił  $N_{xx}$  według obliczeń teorii błonowej i MES – na kierunku X



**Rys. 14.** Wartości sił  $N_{yy}$  według obliczeń teorii błonowej i MES – na kierunku Y

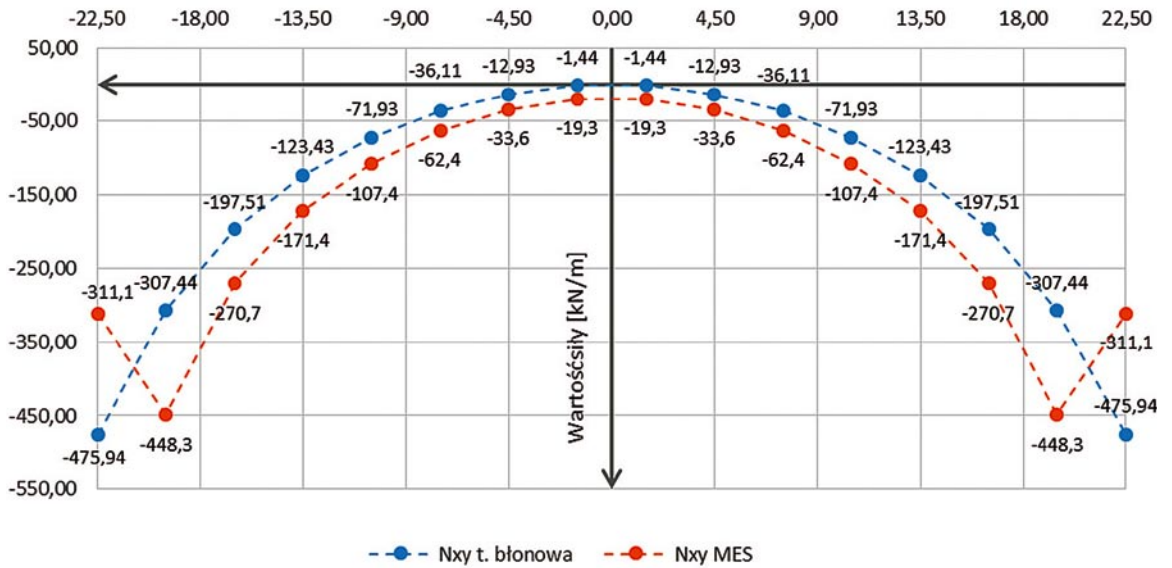


**Rys. 15.** Wartości sił  $N_{yy}$  według obliczeń teorii błonowej i MES – na kierunku X

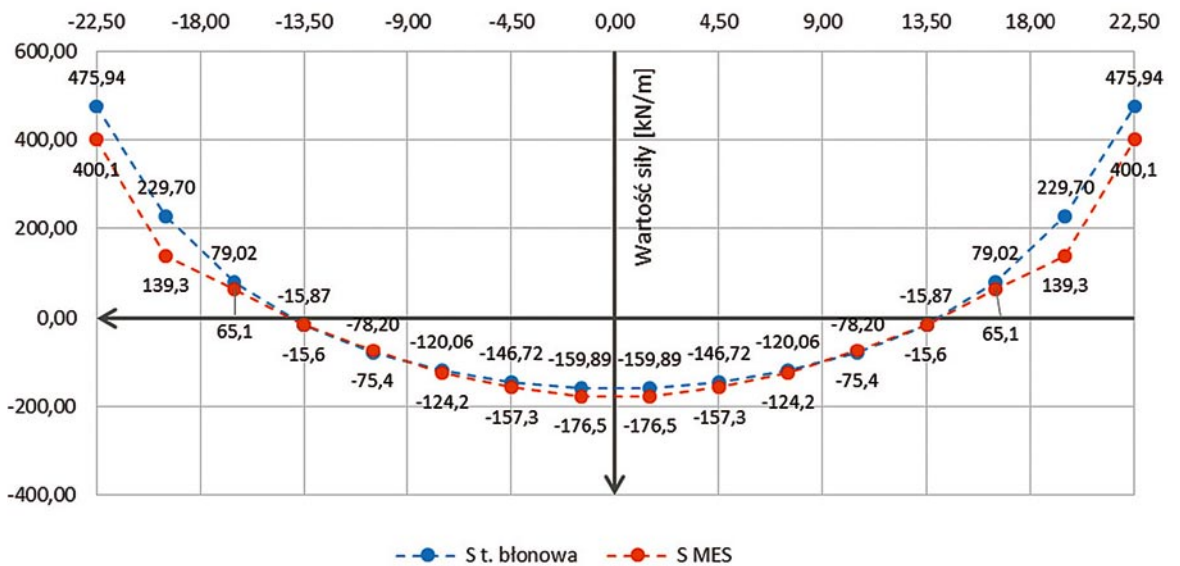




**Rys. 16.**  
Wartość sił stycznych  $N_{xy}$  według teorii błonowej i MES



**Rys. 17.**  
Wartości sił normalnych do przekątnej powłoki



analitycznych według teorii błonowej (bez momentowej) oraz obliczeń przy zastosowaniu komputerowej analizy MES (rys. 12–17).

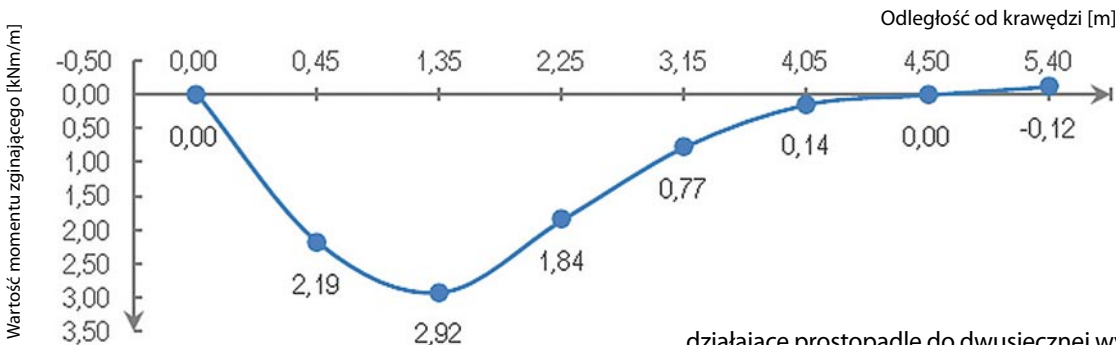
Niezbędne jest oszacowanie maksymalnego momentu zginającego w strefie brzegowej powłoki. Obliczenia maksymalnego momentu zginającego w strefie brzegowej powłoki dokonano na podstawie procedury opisanej przez Grabca [4]. Wyznaczenie momentów zginających sprowadza się do obliczenia współczynnika  $\lambda$  i przyjęcia współczynnika  $k_M$  zależnego od strzałki powłoki oraz jej grubości, według poniższych wzorów:

$$\lambda = 1,17 \sqrt{\frac{h_0}{t}} = 1,17 \sqrt{\frac{17,0}{0,10}} \approx 15 \quad (19)$$

$$M = 4qa^2k_M \quad (20)$$

**Tabela 7.** Współczynniki  $k_M$  oraz wartości momentów zginających

Odległość od brzegu powłoki x [m]	Współczynnik $k_M$ dla $\lambda=15$	Moment zginający M [kNm/m]
0,00	0,0000	0,00
0,45	0,0108	2,19
1,35	0,0144	2,92
2,25	0,0091	1,84
3,15	0,0038	0,77
4,05	0,0007	0,14
4,50	0,0000	0,00
5,40	-0,0006	-0,12



Rys. 18. Odległość od krawędzi momentu zginającego w strefie brzegowej powłoki

## 5. Podsumowanie

Wartości siły ściskającej w środku powłoki nie różnią się znacznie między sobą w zależności od porównywanego modelu (tab. 8), natomiast znaczące różnice pojawiają się w strefie brzegowej. Rozpatrując kierunek równoległy w modelu teoretycznym, zarówno dla obliczeń analitycznych jak i numerycznych, uzyskano zbliżone rezultaty, dla obliczeń numerycznych siła jest o 22% większa od wartości teoretycznej. Wprowadzenie konstrukcji wsporczej sprawia, że brzeg powłoki ma pewną podatność w kierunku pionowym, przez co zwiększeniu ulegają siły ściskające w tym miejscu powłoki.

Siły styczne  $N_{xy}$  mają zbliżone wartości w narożu oraz w strefie brzegowej. W przypadku modeli numerycznych napotyka się problem koncentracji sił i naprężeń w punktach narożnych. Tak zwane „piki” wartości sił utrudniają odczytanie właściwych wartości. Zastosowanie fazowania naroży pozwala na zredukowanie ich wpływu na uzyskane wyniki (patrz tabela 8). Zastosowanie podpory liniowej pozwoliło na zredukowanie wartości sił w narożach. W analizie teoretycznej siła normalna  $N_{yy}$  w strefie podporowej wynosi 0,0 kN, co nie jest zgodne z rzeczywistą pracą konstrukcji. Według [3] strefę narożną wystarczy zaprojektować na siły

działające prostopadle do dwusiecznej wychodzącej z naroża. W analizie teoretycznej posłużono się metodami przybliżonymi do oszacowania momentów zginających oraz obciążenia konstrukcji wsporczej. Dokonano oszacowania reakcji poziomej  $H$  (siły rozporu konstrukcji), która znacząco nie odbiega od wartości uzyskanych w modelu numerycznym.

Podsumowując, można stwierdzić, że przedstawiona analiza numeryczna nie wyczerpuje listy problemów dotyczących obliczeń cienkościennych przekryć. Mimo to autorzy mają nadzieję, że zainspiruje to może szersze grono odbiorców do bliższego zapoznania się z prezentowanym w artykule przekryciami w kształcie powłoki synklastycznej o podstawie kwadratowej.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] Csonka P., Powłoki cienkie stan błonowy, Wydawnictwo Arkady, Warszawa, 1969
- [2] Flugge W., Powłoki. Obliczenia statyczne, Wydawnictwo Arkady, Warszawa, 1972
- [3] Kobiak J., Stachurski W., Konstrukcje żelbetowe. Tom 4, Wydawnictwo Arkady, Warszawa, 1991
- [4] Grabiec K., Żelbetowe konstrukcje cienkościenne, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1999
- [5] <http://www.anc-d.u-fukui.ac.jp/~ishikawa/Aloss/data/shell/Catalog/Gips%20Union%20SA.htm>
- [6] <https://www.pavillonsicli.ch/>
- [7] <https://c20society.org.uk/lost-modern/brynmaur-rubber-factory-gwent-wales/>

Tabela 8. Wyniki obliczeń analitycznych i numerycznych dla obciążenia pionowego 10,0 kPa

Wielkość z obliczeń do porównania	Obliczenia analityczne	Model nr 1 powłoki swobodnie podpartej na krawędziach	Model nr 2 uwzględniający podparcie na łuku żelbetowym (konstrukcja o sfazowanych narożach)	Model nr 3 uwzględniający podparcie na łuku żelbetowym (bez sfazowanych naroży)
Siła $N_{yy}$ w środku powłoki	-161,53	-161,40	-161,43	-161,46
Siła $N_{yy}$ na brzegu (równoległe do brzegu)	-226,64	-275,40	-462,28	-610,88
Siła $N_{yy}$ na brzegu (prostopadle do brzegu)	0,00*	-10,80	-14,55	-7,09
Siła $N_{xy}$ blisko naroża	-475,94	-498,70	-493,83	-484,56
Siła $N_{xy}$ na brzegu	-32,46	-24,90	-23,09	-28,78
Siła $N_{yy}$ w narożu	0,00	-450,7	-3726,00	-4516,63
Reakcja pozioma $H$ na podporze	4420,00**	4856,60	4450,00	4371,10

\* – siła o wartości 14,5 kN osiągnięta zostaje w odległości 85 cm od brzegu powłoki

\*\* – wartość oszacowana