

# Analiza numeryczna i wymiarowanie stropu kablobetonowego

Dr hab. inż. Andrzej Ambroziak, prof. uczelni, mgr inż. Anna Krystyna Błochowiak,  
Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska, Politechnika Gdańska

## 1. Wprowadzenie

Projektowanie jak i wykonawstwo sprężonych obiektów budowlanych można zaliczyć do grupy robót specjalistycznych wymagających zarówno odpowiedniego przygotowania technicznego, jak i zastosowania odpowiednich materiałów i urządzeń wraz z koniecznością utrzymania właściwego poziomu jakości wykonywanych robót. Przed wprowadzeniem do praktyki inżynierskiej konstrukcji sprężonych projektanci wykorzystywali inne sposoby projektowania elementów o znacznych rozpiętościach lub obciążeniu poprzez zmianę schematu statycznego, kształtu lub rozpiętości projektowanego elementu (obiektu budowlanego) lub/albo zastosowanie większego przekroju poprzecznego. Z szerokiej grupy pozycji bibliograficznych dotyczących konstrukcji sprężanych należy zwrócić uwagę na następujące pozycje: Kaufmann i inni [1], Libby [2], Gerwick [3], Nawy [4], Hewson [5], Ajdukiewicz i Mames [6] oraz Kanuff [7]. Tematyka współczesnych i nietypowych rozwiązań kablobetonowych konstrukcji sprężanych omawiana jest m.in. przez Szydłowskiego [8, 9] i Hulimka [10].

Sprężanie stosuje się w wielu różnych typach konstrukcji budowlanych, co spowodowało, że istnieje kilka metod sprężania, różniących się od siebie z punktu widzenia technologii wykonania. Metody te można podzielić na trzy poniższe grupy (m.in. [6]).

- Sprężanie za pomocą cięgien, polegające na wzdłużnym naciągu wybranego typu zbrojenia stalowego (druty, spłoty, pręty, kable) lub niemetalicznego (pręty lub kable z włókien szklanych, węglowych lub aramidowych) i kotwienia tych cięgien na ich końcach.

Cięgna te poddaje się naciągowi:

- przed zabetonowaniem elementu, w oparciu o silną konstrukcję zewnętrzną – strunobeton,
- po zabetonowaniu, w oparciu o stwardniały beton samego sprężanego elementu – kablobeton.

- Sprężanie bez cięgien, polegające na wywołaniu reakcji między masywnymi zewnętrznymi oporami a sprężanym elementem za pomocą pras, klinów lub ekspansji betonu.

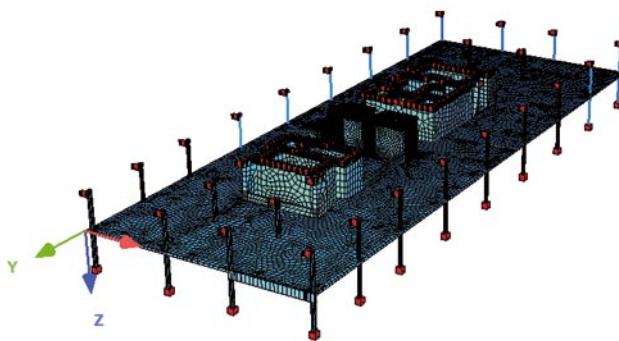
- Sprężanie przez zabiegi specjalne, za pomocą cięgien rozciąganych sposobami odmiennymi niż wzdłużny naciąg w metodach grupy pierwszej.

Sprężone przekroje betonowe są poddane głównie naprężeniom ściskającym, co daje możliwość dobrego wykorzystania w takich konstrukcjach betonów wysokich wytrzymałości. Prowadzi to do zmniejszania przekrojów poprzecznych, a co za tym idzie – ciężaru własnego konstrukcji.

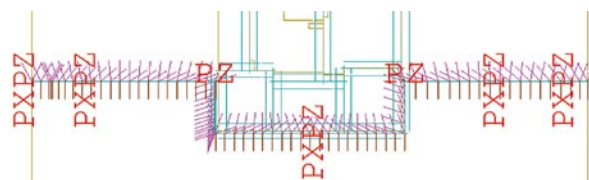
## 2. Opis konstrukcji

W niniejszej pracy szczegółowej analizie poddany jest strop żelbetonowy kablobetonowy kondygnacji budynku biurowo-usługowego zaprojektowany w układzie płytowo-słupowym. Płyta stropowa jest dylatowana w części środkowej (dylatacja dzieli ją na płyty C1 oraz C2 – rysunki 1, 2). W konstrukcji zostały użyte dwa rodzaje trzpieni dylatacyjnych: podwójne trzpienie dylatacyjne pracujące w kierunku podłużnym oraz podwójne trzpienie dylatacyjne pracujące w kierunku podłużnym i poprzecznym.

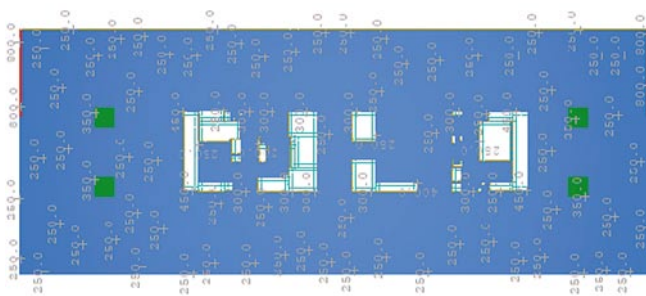
Zastosowano żelbetonowe słupy okrągłe oraz ściany żelbetonowe o zróżnicowanych grubościach. Przyjęte wymiary konstrukcji (rys. 1): długość płyty C1 – 35,5 m; długość płyty C2 – 27,4 m; szerokość płyty stropowej – 23,75 m; grubość płyty stropowej – 0,25 m; średnica słupów wewnętrznych – 0,8 m; grubość głowic nad słupami wewnętrznymi – 0,35 m; wymiary



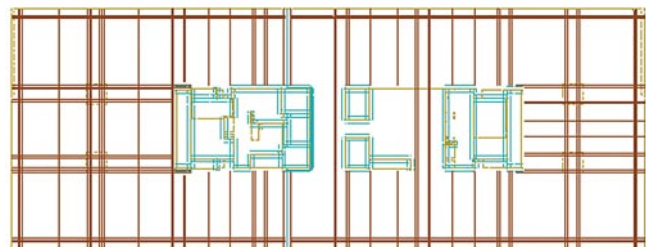
Rys. 1. Model obliczeniowy konstrukcji z zastosowaną siatką ES



Rys. 2. Dylatacja konstrukcyjna



Rys. 3. Przyjęte grubości elementów konstrukcyjnych



Rys. 4. Układ kabli sprężających dla części C stropu typowej kondygnacji

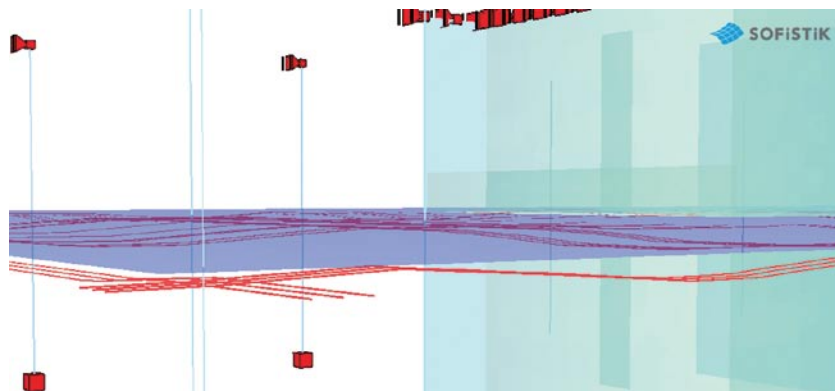
głowic nad słupami wewnętrznymi – 2,0x2,0 m; średnica słupów zewnętrznych – 0,6 m; grubości ścian – 0,25 m, 0,3 m, 0,4 m, 0,45 m; wysokość słupów oraz ścian – 3,71 m.

W konstrukcji zostały użyte następujące materiały: beton C30/37, stal zbrojeniowa  $f_{yk}=500$  MPa oraz stal sprężająca o niskiej relaksacji i wysokiej wytrzymałości  $f_{pk}=1860$  MPa. Zastosowano 7-drutowe sploty o średnicy 15,7 mm. Materiały te są zgodne z normą EN 1992-1-1 Eurocode 2 [11], zaimplementowaną w bazie materiałów programu SOFiSTiK.

### 3. Model obliczeniowy

Model numeryczny analizowanej konstrukcji został wykonany w programie komputerowym SOFiSTiK (patrz m.in. Chróścielewski i inni [12]). Do zamodelowania płyty stropowej, głowic oraz ścian zastosowano elementy skończone typu QUAD (elementy powłokowe), które są elementami czterowęzłowymi w przestrzeni trójwymiarowej. W każdym węźle elementy te mają 6 stopni swobody (trzy translacyjne oraz trzy rotacyjne stopnie swobody). Do zamodelowania słupów użyto elementów belkowych typu BEAM, które są elementami jednowymiarowymi rozpostartymi między dwoma węzłami w przestrzeni trójwymiarowej mającymi tak jak elementy typu QUAD 6 stopni swobody w węźle. Elementom typu QUAD i BEAM nadano odpowiednie grubości i przekroje, wykorzystując komendy wewnętrzne programu (rys. 3).

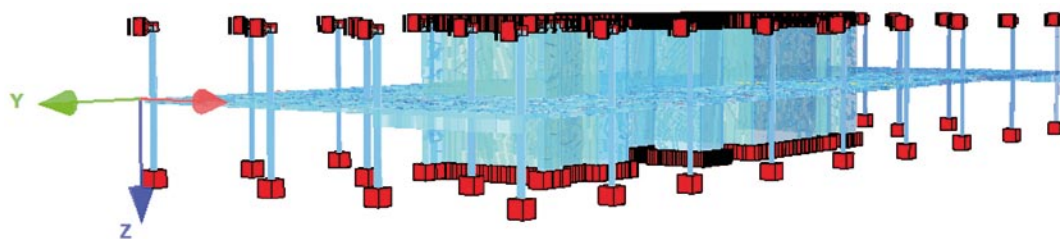
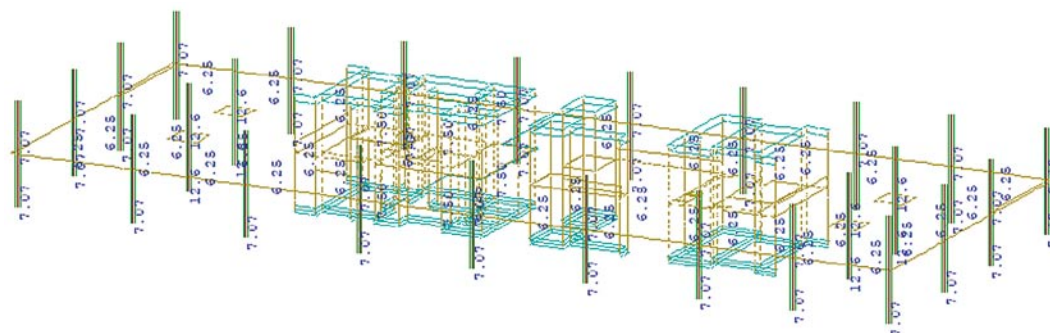
Rys. 5. Wizualizacja tras kabli sprężających fragmentu analizowanej konstrukcji



W celu uwzględnienia rzeczywistej sztywności elementów podpierających zachowano w modelu słupy oraz ściany nośne z kondygnacji poniżej i powyżej stropu. Właściwości materiałowe oraz przekroje konstrukcji zostały zdefiniowane w module AQUA. Program ten oblicza parametry statyczne oraz wytrzymałościowe wprowadzanych przekrojów poprzecznych. Następnie ww. elementom nadano siatkę elementów skończonych za pomocą modułu SOFiMSHC.

W programie SOFiSTiK sprężenie obliczane jest dokładną wersją obciążeń równoważnych (m.in. [13, 14]). Obciążenia od poszczególnych cięgien rozpatrywane są w układzie lokalnym, który stanowi pewien odcinek belki sprężonej lub obszaru elementu powierzchniowego. Metoda ta polega na podziale trasy kabli na odcinki o małej długości i stałej krzywiznie. Na każdym takim odcinku w punktach referencyjnych przykładane są składowe normalne i styczne do trasy kabla. Siły te sprowadza się do osi bezwładności belki lub powłoki, wyliczając składowe poziome działające w osi, składowe działające prostopadle do osi oraz momenty zginające od mimośrodów siły poziomej. Algorytm metody umożliwi modelowanie strat siły sprężającej na długości kabla i dokładne określenie jej wpływu na wzbudzone siły wewnętrzne. W punktach zakotwień cięgien przykładane są siły skupione poziome, pionowe oraz momenty zginające, wynikające z docisku bloku oporowego zakotwienia do betonu (m.in. [15]). Takie obciążenia zastępcze przykładane są do belki lub panelu powierzchniowego jako jeden ze schematów obciążeń zewnętrznych konstrukcji. Rozwiązanie statyki tak obciążonego układu można przeprowadzić w module ASE.

Modelowanie sprężenia zostało przeprowadzone w kreatorze TENDON w wersji graficznej. Wybrano system sprężania z bazy programu zgodny z systemem zastosowanym w projekcie wykonawczym. Przed wprowadzeniem tras kabli sprężających wprowadzono linie referencyjne (odniesienia), do których dowiązywano trasy poszczególnych cięgien. Następnie na długości płyty wprowadzono punkty pozycyjne, w których definiowane są punkty charakterystyczne przebiegu trasy kabli. Układ kabli sprężających dla części C stropu typowej kondygnacji został przedstawiony na rysunku 4. Natomiast wizualizację tras kabli sprężających fragmentu analizowanej konstrukcji przedstawiono na rysunku 5.

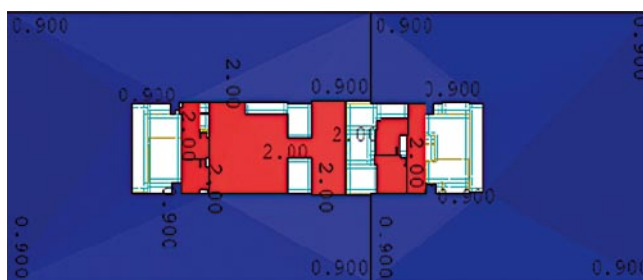
**Rys. 6.** Schemat statyczny konstrukcji

**Rys. 7.** Obciążenie ciężarem własnym konstrukcji – SOFISTiK Wingraf


W module TENDON są zawarte następujące modele kabli sprężających: wewnętrzne z przyczepnością lub z poślizgiem oraz ciężna zewnętrzne. W prezentowanym modelu numerycznym zastosowano kable wewnętrzne z przyczepnością. Geometria trasy kabla może być opisana na kilka sposobów: linią łamaną (poligonalną) z wyokrągleniem w miejscu dewiatorów, krzywą wielomianową i potęgową (splajn), linią prostą lub prostą odcinkową. W danym przypadku zastosowano sposób linii typu splajn. System generuje geometrię trasy ciężna w postaci funkcji ciągłej na podstawie wprowadzonych parametrów wejściowych (np. kątów nachylenia stycznych do trasy) i punktów przebiegu ciężna. Geometrię ciężna określa się poprzez wprowadzenie głównie następujących danych: numeru linii odniesienia, numeru linii (typu splajn, prostej lub łamanej) trasy kabla, numeru systemu sprężenia, współrzędnych na długości elementu skończonego, w których zlokalizowane są punkty wymuszonego przebiegu kabla, mimośrodów przebiegu trasy kabla względem linii referencyjnej w płaszczyźnie poziomej i pionowej ( $u$ ,  $v$ ), minimum trzech charakterystycznych punktów wymuszonego przebiegu trasy ciężna, typu zakotwienia na końcach ciężna (bierne, czynne, łącznik). W kolejnym etapie określa się właściwości charakteryzujące proces sprężenia ciężien: sposób naciągu kabla (z lewej, z prawej, obustronnie), etapy sprężania (naciąg, poślizg, zwolnienie, doprężanie). Program automatycznie wykonuje obliczenia strat doraźnych sprężenia według procedury zawartej w normach i uwzględnia je w obciążeniu zastępczym od ciężna (m.in. [15]). Dylatację konstrukcyjną budynku zamodelowano za pomocą funkcji programu: *line constraint* – elementu strukturalnego o nieskończonej sztywności, który tworzy pomiędzy dwoma liniami strukturalnymi ograniczenie. Innymi słowy, jest to sprężenie łączące dwie części stropu rozdzielone dylatacją konstrukcyjną. W miejscu, gdzie występują trzpień, które pozwalają na przesuw podłużny, zastosowano pełen przegub oraz zablokowano przesuwu na globalnych

kierunkach Z (trzpień jest podporą na kierunku pionowym) oraz X (trzpień nie ma możliwości przesuwu w kierunku poprzecznym). W przypadku pozostałych trzpień również zastosowano pełen przegub. Natomiast, w przypadku przemieszczeń, zablokowano tylko te na kierunku Z, gdyż dany trzpień ma możliwość przesuwu zarówno w kierunku podłużnym, jak i poprzecznym. Zastosowane sprężenie, tj. blokady przemieszczeń i obrotów, przedstawiono na rysunku 2.

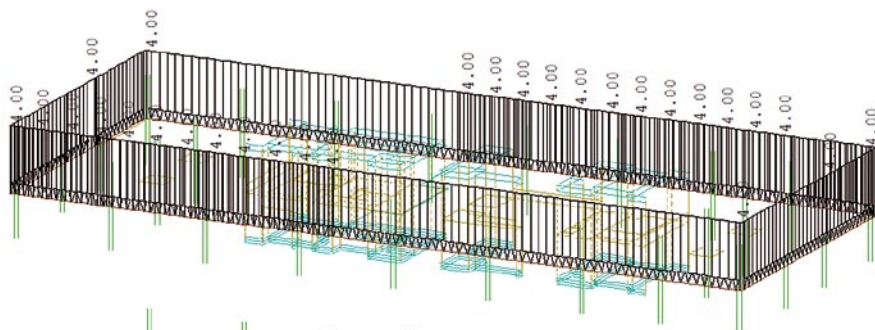
Schemat statyczny analizowanej konstrukcji przedstawiono na rysunku 6. Ściany żelbetowe są podparte liniowo – ściany niższej kondygnacji są utwierdzone, tzn. mają zablokowane wszystkie przesuwu oraz rotacje, a ściany wyższej kondygnacji mają zablokowane przesuwu na kierunkach X i Y oraz obroty na wszystkich kierunkach. Słupy zostały podparte punktowo – słupy niższej kondygnacji zostały utwierdzone, natomiast słupom wyższej kondygnacji umożliwiono przesuw pionowy. Obciążenie ciężarem własnym zostało w modelu przyłożone automatycznie za pomocą odpowiednich komend w programie SOFISTiK na podstawie przekrojów poprzecznych, długości elementów i globalnych wymiarów schematu statycznego oraz ciężarów właściwych materiałów konstrukcyjnych. Schemat obciążenia ciężarem własnym przedstawiono na rysunku 7.

Obciążenia stałe zostały przyłożone do powierzchni płyty. Schemat obciążeń stałych przedstawiono na rysunku 8. W modelu zastosowano obciążenia przyłożone liniowo

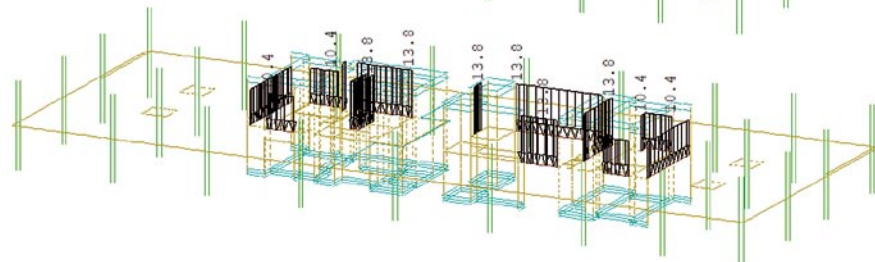

**Rys. 8.** Obciążenia stałe – SOFISTiK Wingraf



**Rys. 9.** Obciążenie fasadą  
– SOFiSTiK Wingraf



**Rys. 10.** Obciążenie od ścian murowanych  
– SOFiSTiK Wingraf



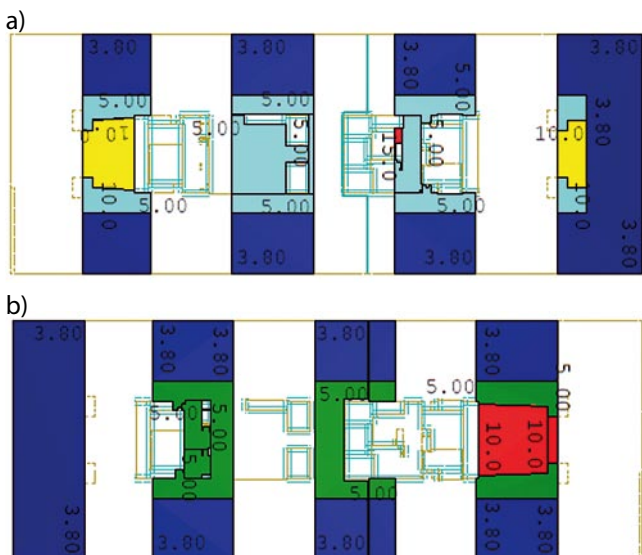
pochodzące od: obciążenia fasadą szklano-aluminiową oraz obciążeniem od ścian murowanych. Schemat tych obciążeń przedstawiono kolejno na rysunkach 9 i 10.

Obciążenia zmienne przyłożono pasmowo – na co drugie pasmo w dwóch kierunkach (m.in. [16, 17]). Dwa przypadki obciążenia przyłożonego na pasma na kierunku X przedstawiono na rysunku 11, natomiast dwa przypadki obciążenia przyłożonego na pasma na kierunku Y – na rysunku 12. Dla zadanych w powyższy sposób obciążeń zmiennych zdefiniowano sześć następujących kombinacji:

- 1)  $\gamma_{Q,1} \cdot Q_1$ ;      2)  $\gamma_{Q,1} \cdot Q_2$ ;      3)  $\gamma_{Q,1} \cdot Q_1 + \gamma_{Q,1} \cdot Q_2$ ;
- 4)  $\gamma_{Q,1} \cdot Q_3$ ;      5)  $\gamma_{Q,1} \cdot Q_4$ ;      6)  $\gamma_{Q,1} \cdot Q_3 + \gamma_{Q,1} \cdot Q_4$ .

#### 4. Wyniki obliczeń i wymiarowanie

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń numerycznych otrzymano wyniki sił wewnętrznych oraz przemieszczeń i zarysowań konstrukcji płyty stropowej. Przyjęcia

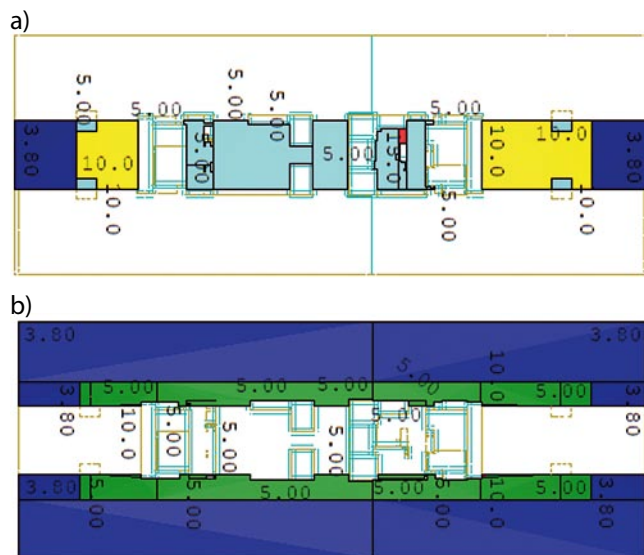


**Rys. 11.** Obciążenie zmienne na pasmach na kierunku X: a)  $Q_1$ , b)  $Q_2$

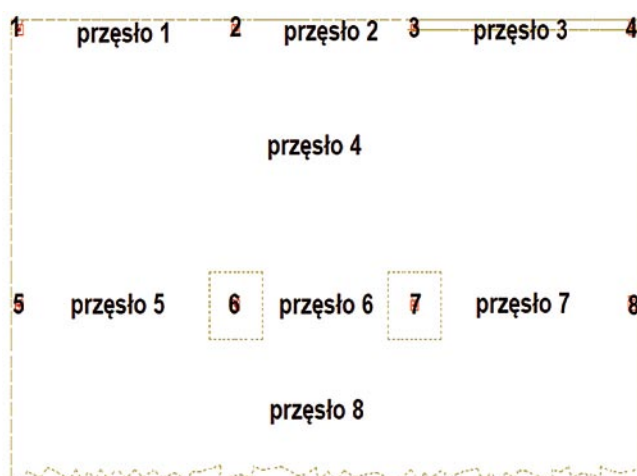
ostatecznej siatki ES, przedstawionej na rysunku 1, dokonano na podstawie przeprowadzonej analizy zbieżności podziału konstrukcji na elementy skończone. W dalszej części pracy przedstawione zostaną wyniki obliczeń i wymiarowania dla wybranego fragmentu płyty stropowej zgodnie z numeracją pręseł oraz słupów przedstawionych na rysunku 13.

Na podstawie rezultatów obliczeń zwymiarowano płytę stropową ze względu na zginanie. Strop został zwymiarowany ze względu na pracę w dwóch fazach, w których przewiduje się jego pracę:

- **I faza** – całkowite sprężenie przy obciążeniu ciężarem własnym: wymiarowanie zbrojenia na rozciąganie górą w przęśle oraz dołem w strefie słupów;
- **II faza** – dodanie dodatkowych obciążeń stałych i zmiennych: dobór zbrojenia na rozciąganie dołem w przęśle oraz górą w strefie podpór. W tej fazie zostanie uwzględniony najmniej korzystny przypadek przyłożenia obciążenia zmiennego.



**Rys. 12.** Obciążenie zmienne na pasmach na kierunku Y: a)  $Q_3$ , b)  $Q_4$



Rys. 13. Numeracja miejsc, w których odczytano wyniki

**Faza I**

Wykresy ekstremalnych momentów zginających na lokalnych kierunkach  $x$  oraz  $y$ , zgodnych z kierunkami globalnymi  $X$  i  $Y$  przedstawiono na rysunkach 14 oraz 15. Wykresy te są wynikiem obliczeń dla fazy I, tj. dla kombinacji obciążeń ze względu na SGN obliczonej według wzoru:

$$\sum_{j=1} (\gamma_{Gj} \cdot G_{kj}) + \gamma_{P1} \cdot P \quad (1)$$

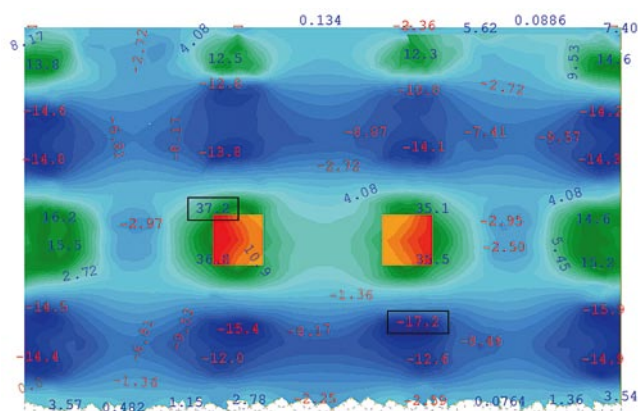
gdzie:

$G_{kj}$  – ciężar własny,  $P$  – siły od sprężania konstrukcji.

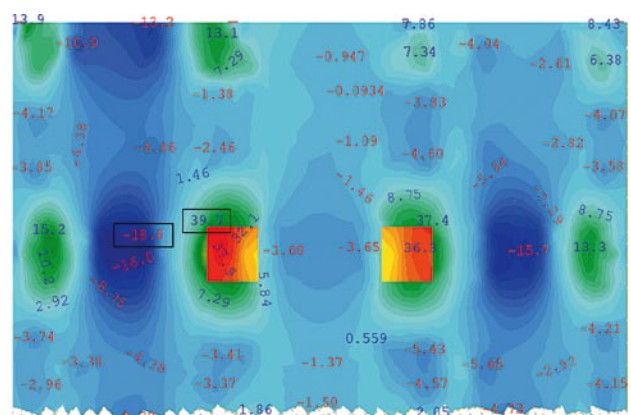
Na podstawie przedstawionych wykresów momentów wyznaczono przekrój zbrojenia ze względu na rozciąganie górą w przęsle oraz na rozciąganie dołem w strefie słupów

**Tabela 1.** Zbrojenie górne dla fazy I

|             |       | Zbrojenie teoretyczne |             |                    |                    | Zbrojenie przyjęte |           |                 |                    |          |       |
|-------------|-------|-----------------------|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------|-----------------|--------------------|----------|-------|
| $M_{sd}$    | $d$   | $\mu_{eff}$           | $\xi_{eff}$ | $A_{s1}$           | $A_{s1,min}$       | $s$                | $\varphi$ | $A_{\varphi}$   | $A_{s1,prov}$      | $\rho_L$ |       |
| kNcm/m      | cm    |                       |             | cm <sup>2</sup> /m | cm <sup>2</sup> /m | cm/m               | cm        | cm <sup>2</sup> | cm <sup>2</sup> /m | %        |       |
| Przęsło 1 x | 1320  | 21,5                  | 0,0013      | 0,001              | 1,41               | 3,242              | 20        | 1,0             | 0,785              | 3,59     | 0,183 |
| Przęsło 1 y | 272   | 20,5                  | 0,0003      | 0,000              | 0,31               | 3,091              | 20        | 1,0             | 0,785              | 3,59     | 0,192 |
| Przęsło 2 x | 94,70 | 21,5                  | 0,0001      | 0,000              | 0,10               | 3,242              | 20        | 1,0             | 0,785              | 2,51     | 0,183 |
| Przęsło 2 y | 13,4  | 20,5                  | 0,0000      | 0,000              | 0,02               | 3,091              | 20        | 1,0             | 0,785              | 2,51     | 0,192 |
| Przęsło 3 x | 261,0 | 21,5                  | 0,0003      | 0,000              | 0,28               | 3,242              | 20        | 1,0             | 0,785              | 2,51     | 0,183 |
| Przęsło 3 y | 71,9  | 20,5                  | 0,0001      | 0,000              | 0,08               | 3,091              | 20        | 1,0             | 0,785              | 2,51     | 0,192 |
| Przęsło 4 x | 686   | 21,5                  | 0,0007      | 0,001              | 0,73               | 3,242              | 20        | 1,0             | 0,785              | 2,51     | 0,183 |
| Przęsło 4 y | 1480  | 20,5                  | 0,0016      | 0,002              | 1,66               | 3,091              | 20        | 1,0             | 0,785              | 2,51     | 0,192 |
| Przęsło 5 x | 1860  | 21,5                  | 0,0019      | 0,002              | 1,99               | 3,242              | 20        | 1,0             | 0,785              | 2,51     | 0,183 |
| Przęsło 5 y | 297   | 20,5                  | 0,0003      | 0,000              | 0,33               | 3,091              | 20        | 1,0             | 0,785              | 3,59     | 0,192 |
| Przęsło 6 x | 368   | 21,5                  | 0,0004      | 0,000              | 0,39               | 3,242              | 20        | 1,0             | 0,785              | 2,51     | 0,183 |
| Przęsło 6 y | 0     | 20,5                  | 0,0000      | 0,000              | 0,00               | 3,091              | 20        | 1,0             | 0,785              | 2,51     | 0,192 |
| Przęsło 7 x | 1570  | 21,5                  | 0,0016      | 0,002              | 1,68               | 3,242              | 20        | 1,0             | 0,785              | 2,51     | 0,183 |
| Przęsło 7 y | 295,0 | 20,5                  | 0,0003      | 0,000              | 0,33               | 3,091              | 20        | 1,0             | 0,785              | 2,51     | 0,192 |
| Przęsło 8 x | 543,0 | 21,5                  | 0,0005      | 0,001              | 0,58               | 3,242              | 20        | 1,0             | 0,785              | 3,59     | 0,183 |
| Przęsło 8 y | 1720  | 20,5                  | 0,0019      | 0,002              | 1,93               | 3,091              | 20        | 1,0             | 0,785              | 3,59     | 0,192 |



Rys. 14. Momenty zginające  $M_{yy}$  (kNm/m) dla fazy I



Rys. 15. Momenty zginające  $M_{xx}$  (kNm/m) dla fazy I

zgodnie z procedurą przedstawioną w dalszej części. Wyniki przedstawiono w tabelach 1 oraz 2.

**Tabela 2.** Zbrojenie dolne dla fazy I

|             |      | Zbrojenie teoretyczne |             |             |                    |                    | Zbrojenie przyjęte |           |                 |                    |          |
|-------------|------|-----------------------|-------------|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------|-----------------|--------------------|----------|
| $M_{sd}$    |      | d                     | $\mu_{eff}$ | $\xi_{eff}$ | $A_{s1}$           | $A_{s1,min}$       | s                  | $\varphi$ | $A_{\varphi}$   | $A_{s1,prov}$      | $\rho_L$ |
| kNcm/m      |      | cm                    |             |             | cm <sup>2</sup> /m | cm <sup>2</sup> /m | cm/m               | cm        | cm <sup>2</sup> | cm <sup>2</sup> /m | %        |
| Podpora 1 x | 1390 | 21,5                  | 0,0014      | 0,001       | 1,49               | 3,242              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,183    |
| Podpora 1 y | 1380 | 20,5                  | 0,0015      | 0,002       | 1,55               | 3,091              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,192    |
| Podpora 2 x | 1310 | 21,5                  | 0,0013      | 0,001       | 1,40               | 3,242              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,183    |
| Podpora 2 y | 1250 | 20,5                  | 0,0014      | 0,001       | 1,40               | 3,091              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,192    |
| Podpora 3 x | 786  | 21,5                  | 0,0008      | 0,001       | 0,84               | 3,242              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,183    |
| Podpora 3 y | 1230 | 20,5                  | 0,0014      | 0,001       | 1,38               | 3,091              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,192    |
| Podpora 4 x | 843  | 21,5                  | 0,0009      | 0,001       | 0,90               | 3,242              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,183    |
| Podpora 4 y | 1460 | 20,5                  | 0,0016      | 0,002       | 1,64               | 3,091              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,192    |
| Podpora 5 x | 1520 | 21,5                  | 0,0015      | 0,002       | 1,63               | 3,242              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,183    |
| Podpora 5 y | 1620 | 20,5                  | 0,0018      | 0,002       | 1,82               | 3,091              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,192    |
| Podpora 6 x | 3970 | 21,5                  | 0,0040      | 0,004       | 4,26               | 3,242              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 4,363              | 0,203    |
| Podpora 6 y | 3720 | 20,5                  | 0,0041      | 0,004       | 4,18               | 3,091              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 4,363              | 0,213    |
| Podpora 7 x | 3740 | 21,5                  | 0,0038      | 0,004       | 4,01               | 3,242              | 18                 | 1,0       | 0,785           | 4,363              | 0,203    |
| Podpora 7 y | 3550 | 20,5                  | 0,0039      | 0,004       | 3,99               | 3,091              | 18                 | 1,0       | 0,785           | 4,363              | 0,213    |
| Podpora 8 x | 1330 | 21,5                  | 0,0013      | 0,001       | 1,42               | 3,242              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,183    |
| Podpora 8 y | 1520 | 20,5                  | 0,0017      | 0,002       | 1,71               | 3,091              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,192    |

**Faza II**

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń i analizy kombinacji przypadków najniekorzystniejsze wartości momentów zginających występują dla następujących kombinacji obciążeń:

$\sum_{j=1} (\gamma_{G,j} \cdot G_{k,j}) + \gamma_{Q,1} \cdot Q_1 + \gamma_{Q,1} \cdot Q_2 + \gamma_{P,1} \cdot P$  – wyniki ekstremalne: moment przęsłowy  $M_{xx}$  przęsła 3, momenty przęsłowe  $M_{yy}$  dla przęseł 3, 4 oraz 8;

$\sum_{j=1} (\gamma_{k,j} \cdot G_{k,j}) + \gamma_{Q,1} \cdot Q_3 + \gamma_{P,1} \cdot P$  – wyniki ekstremalne: momenty przęsłowe  $M_{xx}$  i  $M_{yy}$  dla przęsła 1;

$\sum_{j=1} (\gamma_{k,j} \cdot G_{k,j}) + \gamma_{Q,1} \cdot Q_3 + \gamma_{Q,1} \cdot Q_4 + \gamma_{P,1} \cdot P$  – wyniki ekstremalne: momenty podporowe  $M_{xx}$  oraz  $M_{yy}$  dla podpór 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; moment przęsłowy  $M_{xx}$  dla przęsła 4; momenty przęsłowe  $M_{xx}$  przęseł 2, 5, 6, 7, 8 oraz  $M_{yy}$  dla przęseł 2, 5, 6, 7

gdzie:  $\gamma_{G,j} = 1,35$ ,  $\gamma_{Q,1} = 1,5$ ,  $\gamma_{P,1} = 1,0$ ;  $G_{k,j}$  – obciążenia stałe (ciężar własny, obciążenie od ścian murowanych, obciążenie od fasady, przyjęte obciążenie stałe),  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  – obciążenia zmienne,  $P$  – siły od sprężania konstrukcji.

Na podstawie otrzymanych wartości momentów zginających wyznaczono zbrojenie na zginanie dla fazy II, które przedstawiono w tabelach 3 oraz 4.

**Tabela 3.** Zbrojenie dolne dla fazy II

|             |         | Zbrojenie teoretyczne |             |             |                    |                    | Zbrojenie przyjęte |           |                 |                    |          |
|-------------|---------|-----------------------|-------------|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------|-----------------|--------------------|----------|
| $M_{sd}$    |         | d                     | $\mu_{eff}$ | $\xi_{eff}$ | $A_{s1}$           | $A_{s1,min}$       | s                  | $\varphi$ | $A_{\varphi}$   | $A_{s1,prov}$      | $\rho_L$ |
| kNcm/m      |         | cm                    |             |             | cm <sup>2</sup> /m | cm <sup>2</sup> /m | cm/m               | cm        | cm <sup>2</sup> | cm <sup>2</sup> /m | %        |
| Przęsło 1 x | 7140    | 21,5                  | 0,007       | 0,007       | 7,67               | 3,242              | 9                  | 1,0       | 0,785           | 8,727              | 0,406    |
| Przęsło 1 y | 95,9    | 20,5                  | 0,000       | 0,000       | 0,11               | 3,122              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,192    |
| Przęsło 2 x | 4490    | 21,5                  | 0,004       | 0,005       | 4,79               | 3,257              | 10                 | 1,0       | 0,785           | 7,854              | 0,365    |
| Przęsło 2 y | 1480    | 20,5                  | 0,002       | 0,002       | 1,64               | 3,137              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,192    |
| Przęsło 3 x | 274     | 21,5                  | 0,000       | 0,000       | 0,29               | 3,257              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,183    |
| Przęsło 3 y | 252     | 20,5                  | 0,000       | 0,000       | 0,28               | 3,137              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,192    |
| Przęsło 4 x | 5060    | 21,5                  | 0,005       | 0,005       | 5,43               | 3,242              | 10                 | 1,0       | 0,785           | 7,854              | 0,365    |
| Przęsło 4 y | 6300    | 20,5                  | 0,007       | 0,007       | 7,09               | 3,091              | 10                 | 1,0       | 0,785           | 7,854              | 0,383    |
| Przęsło 5 x | 5900    | 21,5                  | 0,006       | 0,006       | 6,33               | 3,242              | 10                 | 1,0       | 0,785           | 7,854              | 0,365    |
| Przęsło 5 y | -1220,0 | 20,5                  | -0,001      | -0,001      | -1,35              | 3,122              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,192    |
| Przęsło 6 x | 4160    | 21,5                  | 0,004       | 0,004       | 4,44               | 3,257              | 10                 | 1,0       | 0,785           | 7,854              | 0,365    |
| Przęsło 6 y | -1840   | 20,5                  | -0,002      | -0,002      | -2,03              | 3,137              | 20                 | 1,0       | 0,785           | 3,927              | 0,192    |

Ciąg dalszy tabeli 3.

| Zbrojenie teoretyczne |      | Zbrojenie przyjęte |             |                    |                    |       |           |                 |                    |          |       |
|-----------------------|------|--------------------|-------------|--------------------|--------------------|-------|-----------|-----------------|--------------------|----------|-------|
| $M_{sd}$              | d    | $\mu_{eff}$        | $\xi_{eff}$ | $A_{s1}$           | $A_{s1,min}$       | s     | $\varphi$ | $A_{\varphi}$   | $A_{s1,prov}$      | $\rho_L$ |       |
| kNcm/m                | cm   |                    |             | cm <sup>2</sup> /m | cm <sup>2</sup> /m | cm/m  | cm        | cm <sup>2</sup> | cm <sup>2</sup> /m | %        |       |
| Przęsło 7 x           | 5060 | 21,5               | 0,005       | 0,005              | 5,43               | 3,242 | 10        | 1,0             | 0,785              | 7,854    | 0,365 |
| Przęsło 7 y           | 929  | 20,5               | 0,001       | 0,001              | 1,03               | 3,122 | 20        | 1,0             | 0,785              | 3,927    | 0,192 |
| Przęsło 8 x           | 4870 | 21,5               | 0,005       | 0,005              | 5,22               | 3,242 | 10        | 1,0             | 0,785              | 7,854    | 0,365 |
| Przęsło 8 y           | 5760 | 20,5               | 0,006       | 0,006              | 6,48               | 3,091 | 10        | 1,0             | 0,785              | 7,854    | 0,383 |

**Tabela 4.** Zbrojenie górne dla fazy II

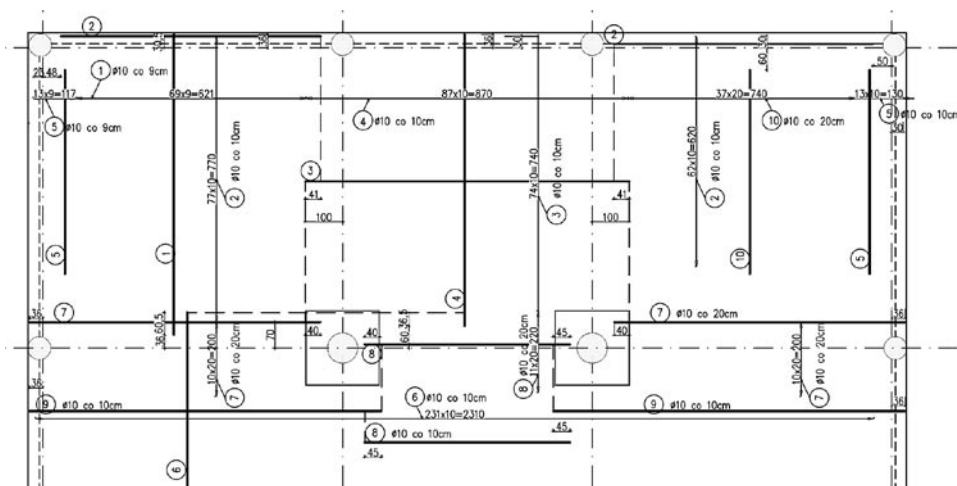
| Zbrojenie teoretyczne |       | Zbrojenie przyjęte |             |                    |                    |       |           |                 |                    |          |       |
|-----------------------|-------|--------------------|-------------|--------------------|--------------------|-------|-----------|-----------------|--------------------|----------|-------|
| $M_{sd}$              | d     | $\mu_{eff}$        | $\xi_{eff}$ | $A_{s1}$           | $A_{s1,min}$       | s     | $\varphi$ | $A_{\varphi}$   | $A_{s1,prov}$      | $\rho_L$ |       |
| kNcm/m                | cm    |                    |             | cm <sup>2</sup> /m | cm <sup>2</sup> /m | cm/m  | cm        | cm <sup>2</sup> | cm <sup>2</sup> /m | %        |       |
| Podpora 1 x           | 14150 | 21,2               | 0,015       | 0,015              | 15,47              | 3,197 | 10        | 1,6             | 2,011              | 20,106   | 0,948 |
| Podpora 1 y           | 14140 | 19,6               | 0,017       | 0,017              | 16,74              | 2,956 | 10        | 1,6             | 2,011              | 20,106   | 1,026 |
| Podpora 2 x           | 15380 | 21,2               | 0,016       | 0,016              | 16,82              | 3,197 | 10        | 1,6             | 2,011              | 20,106   | 0,948 |
| Podpora 2 y           | 11110 | 19,6               | 0,013       | 0,014              | 13,13              | 2,956 | 10        | 1,6             | 2,011              | 20,106   | 1,026 |
| Podpora 3 x           | 10700 | 21,2               | 0,011       | 0,011              | 11,67              | 3,197 | 10        | 1,6             | 2,011              | 20,106   | 0,948 |
| Podpora 3 y           | 14750 | 19,6               | 0,018       | 0,018              | 17,47              | 2,956 | 10        | 1,6             | 2,011              | 20,106   | 1,026 |
| Podpora 4 x           | 5810  | 21,2               | 0,006       | 0,006              | 6,32               | 3,197 | 20        | 1,6             | 2,011              | 10,053   | 0,474 |
| Podpora 4 y           | 15650 | 19,6               | 0,019       | 0,019              | 18,54              | 2,956 | 10        | 1,6             | 2,011              | 20,106   | 1,026 |
| Podpora 5 x           | 11380 | 21,2               | 0,012       | 0,012              | 12,42              | 3,197 | 20        | 1,6             | 2,011              | 10,053   | 0,474 |
| Podpora 5 y           | 14430 | 19,6               | 0,018       | 0,018              | 17,08              | 2,956 | 10        | 1,6             | 2,011              | 20,106   | 1,026 |
| Podpora 6 x           | 20420 | 21,0               | 0,022       | 0,022              | 22,61              | 3,167 | 12        | 2,0             | 3,142              | 26,180   | 1,247 |
| Podpora 6 y           | 22160 | 19,0               | 0,029       | 0,029              | 27,22              | 2,865 | 9         | 2,0             | 3,142              | 34,907   | 1,837 |
| Podpora 7 x           | 20140 | 21,0               | 0,021       | 0,022              | 22,30              | 3,167 | 12        | 2,0             | 3,142              | 26,180   | 1,247 |
| Podpora 7 y           | 21540 | 19,0               | 0,028       | 0,028              | 26,45              | 2,865 | 9         | 2,0             | 3,142              | 34,907   | 1,837 |
| Podpora 8 x           | 12980 | 21,2               | 0,013       | 0,014              | 14,18              | 3,197 | 13        | 1,6             | 2,011              | 15,466   | 0,730 |
| Podpora 8 y           | 16840 | 19,2               | 0,021       | 0,022              | 20,39              | 2,895 | 13        | 2,0             | 3,142              | 24,166   | 1,259 |

Na podstawie przedstawionego wymiarowania zbrojenia można wykonać rysunki zbrojenia dolnego i zbrojenia górnego płyty stropowej (rys.16 i 17). Niezbędnym elementem w pracach projektowych jest sprawdzenie płyty stropowej ze względu na przebicie [18] i zaprojektowanie, jeżeli jest to konieczne, zbrojenia na przebicie oraz dozbrojenie stref zakotwień (czynnych i biernych), które projektuje się indywidualnie według wytycznych zastosowanego systemu.

## 5. Podsumowanie

Projektowanie i wykonawstwo sprężonych konstrukcji jest popularne i stosowane nie tylko w budownictwie kubaturowym,

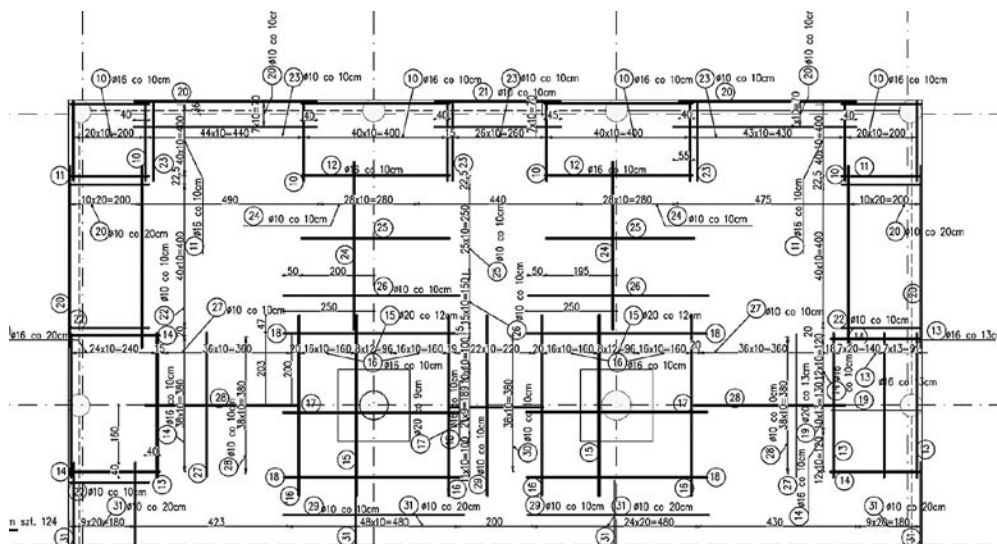
np. w budynkach wysokich [19], lecz także szeroko w budownictwie inżynierskim, np. w konstrukcji mostów zespolonych [20], sprężaniu mostów stalowych [21] itp. Projektanci wykorzystując sprężanie, mogą wykraczać poza typowe rozwiązania (np. zalecane w literaturze wartości stosunku rozpiętości do grubości płyt, m.in. [22]). Na etapie wykonania konstrukcji kablobetonowych wymagany jest odpowiedni nadzór nad



**Rys. 16.** Przykładowy rozkład zbrojenia dolnego w płycie stropowej



**Rys. 17.** Przykładowy rozkład zbrojenia górnego w płycie stropowej



realizacją poszczególnych prac już na etapie montażu osłonek i wciągania splotów, aby nie dochodziło do niepożądanych zmian geometrii tras cięgien, braku możliwości ich naciągu lub poprawnej iniekcji (m.in. [23]). Mimo rozwoju technologii głównym problemem pozostaje nadal korozja stali sprężającej (m.in.

[24]). W niektórych przypadkach przyczyny destrukcji elementów konstrukcji sprężanych spowodowane są zarówno nakładaniem się błędów projektowych, wykonawczych, jak i brakami w utrzymaniu obiektu (m.in. [25]). Naprawa uszkodzonych, niepoprawnie lub wadliwie wykonanych konstrukcji sprężanych jest często trudna, niewykonalna lub ekonomicznie nieuzasadniona i prowadzi w wielu przypadkach do rozbiórki obiektu budowlanego (m.in. [26]), lecz czasami jest możliwa do realizacji i wykonania (m.in. [27]).

Przedstawiona analiza numeryczna i wymiarowanie stropu kablobetonowego nie wyczerpuje zagadnień i problemów, z jakimi spotkać się może projektant tego typu konstrukcji, lecz stanowi wstęp do szerszego zagadnienia dotyczącego obliczeń i wymiarowania stropów kablobetonowych. Autorzy mają nadzieję, że zainspiruje to może szersze grono odbiorców do bliższego zapoznania się z prezentowanymi w pracy konstrukcjami kablobetonowymi.

**BIBLIOGRAFIA**

[1] Kaufman S., Olszak W., Eimer C., Budownictwo Betonowe, tom III, Konstrukcje sprężone, Wydawnictwo Arkady, Warszawa, 1965  
 [2] Libby J. R., Modern Prestressed Concrete: Design Principles and Construction Methods, Springer Science + Business Media, New York, 1990  
 [3] Gerwick B. C. Jr., Construction of Prestressed Concrete Structures, John Wiley & Sons, INC., New York, 1993  
 [4] Nawy E. G., Prestressed concrete: A fundamental approach, Prentice Hall, 1996  
 [5] Hewson N. R., Prestressed Concrete Bridges: Design and Construction, Thomas Telford Limited, London, 2003  
 [6] Ajdukiewicz A., Mames J., Konstrukcje z betonu sprężonego, Stowarzyszenie Producentów Cementu, Kraków, 2008  
 [7] Knauff M., Obliczanie konstrukcji żelazowych według Eurokodu 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2019  
 [8] Szydłowski R., Łabuzek B., Współczesne rozwiązania kablobetonowych konstrukcji sprężonych, XXXIII Ogólnopolskie Warsztaty Pracy Projektanta Konstrukcji, Szczryk, 2018, str. 317–388  
 [9] Szydłowski R., Stropy płytowe sprężone ciągniami bez przyczepności. Teoria, projektowanie, badania, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków, 2019  
 [10] Hulimka J., O stosowanych w Polsce nietypowych rozwiązaniach dachowych dźwigarów kablobetonowych, Przegląd Budowlany 7–8/2019, str. 70–74

[11] CEN. EN 1992-1-1 Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings, 2004  
 [12] Chrościelewski J., Miśkiewicz M., Pyrzowski Ł., Wprowadzenie do modelowania MES w programie SOFISTiK, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, 2016  
 [13] Radomski W., Oleszek R., Mossakowski P., O projektowaniu mostowych konstrukcji kablobetonowych w świetle PN-91/S-10042 i PN-EN 1992-1-1, Drogownictwo 7–8/2013, str. 199–209  
 [14] Machelski C., Modelowanie sprężenia mostów, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, 2010  
 [15] Oleszek R., Modelowanie mostowych konstrukcji sprężonych w środowisku MES SOFISTiK, Mosty 5/2016, str. 38–44  
 [16] Ambroziak A., Grabski M., Sposoby przykładania obciążenia zmiennego na konstrukcję płytowo-słupową (On the methods of live loads application to slab-column structures), Materiały Budowlane 1/2019, str. 80–82, <https://doi.org/10.15199/33.2019.01.15>  
 [17] Starosolski W., Komputerowe modelowanie betonowych ustrojów inżynierskich. Wybrane zagadnienia, t. I i II, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2009  
 [18] Ambroziak A., Grabski M., Analiza porównawcza metod obliczania przebiecia, Materiały Budowlane 17/2019, 52–55, <https://doi.org/10.15199/33.2019.07.08>  
 [19] Płyty sprężone wieżowca Warsaw Spire – nowa iglica Warszawy, Nowoczesne Budownictwo Inżynieryjne 4–5/2015, str. 106–107  
 [20] Lorenc W., Doświadczenia z realizacji sprężenia zewnętrznego konstrukcji mostów zespolonych, Inżynieria i Budownictwo 9/2016, str. 480–484  
 [21] Kasprzak A., Berger A., Nadolny A., Sprężenie zewnętrzne mostów stalowych, Inżynier Budownictwa 9/2015, str. 94–100  
 [22] Szydłowski R., Mieszczak M., Gdzie jest granica smukłości sprężonych płyt stropowych? O projekcie i badaniach stropów sprężonych w budynku Centrum Kulturalno-Artystycznego w Koźenicach, Konferencja Naukowo-Techniczna Konstrukcje Sprężone, Kraków, 2015, str. 1–12  
 [23] Owerko P., Wstęp Problemy związane z zachowaniem odpowiedniej geometrii trasy cięgien, Inżynieria i Budownictwo 9/2016, str. 477–479  
 [24] Madaj A., Mossor K., Korozja stali sprężającej w konstrukcjach kablobetonowych. Przyczyny, skutki, zapobieganie, Archiwum Instytutu Inżynierii Lądowej 26/2018, str. 93–108, <https://doi.org/10.21008/j.1897-40.07.2018.26.08>  
 [25] Jankowiak I., Madaj A., Przyczyny destrukcji wiaduktów drogowych ze sprężonych belek prefabrykowanych na przykładzie estakady miejskiej, Archiwum Instytutu Inżynierii Lądowej 19/2015, str. 75–87  
 [26] Żółtowski K., Binczyk M., Awarie mostu Cłowego w Szczecinie, Materiały Budowlane 1/2018, str. 88–90, <https://doi.org/10.15199/33.2018.01.26>  
 [27] Łukijaniuk B., Naprawy stropów kablobetonowych, XXVII Konferencja Naukowa Awarie Budowlane 2015, str. 641–648