

## PLYNNE PRZESTRAJANIE PASMA FILTRU UŁAMKOWOOPÓŹNIAJĄCEGO Z WYKORZYSTANIEM FUNKCJI SKLEJANYCH

### SPLINE BASED CONTINUOUS BANDWIDTH ADJUSTMENT OF FRACTIONAL DELAY FILTER

**Streszczenie:** Przedstawiona metoda projektowania filtrów ułamkowoopóźniających definiowanych w dziedzinie częstotliwości umożliwia, poza określeniem jego opóźnienia, swobodne sterowanie szerokością pasma. Przechodzenie pasma filtru jest tu realizowane z użyciem funkcji sklejanych trzeciego stopnia, interpolujących współczynniki definiujące charakterystykę częstotliwościową. Zaproponowane rozwiązanie odpowiada użyciu metody okien przesuwanych, stąd użycie tych filtrów pozwala na sterowanie chwilową szerokością pasma w algorytmie zmiany szybkości próbkowania.

**Abstract:** The presented method of frequency domain fractional delay filter designing allows, apart from specifying its delay, for free control of the filter's bandwidth. The bandwidth adjustment of the filter is implemented by means of cubic spline interpolating the coefficients defining the frequency response of the filter. Since the proposed method corresponds to the offset window method, the use of these filters allows for control of the instantaneous bandwidth in the sampling rate conversion algorithm based on proposed variable fractional delay filter.

**Słowa kluczowe:** filtr ułamkowoopóźniający, funkcje sklepane trzeciego stopnia, przestrajanie szerokości pasma, zmiana szybkości próbkowania.

**Keywords:** fractional delay filter, cubic splines, adjustable bandwidth, sampling rate conversion.

## 1. WSTĘP

Niewątpliwą zaletą cyfrowego przetwarzania sygnałów jest możliwość realizacji opóźniania sygnału wiernie zachowującego przebieg sygnału poprzez przechowanie dyskretnych próbek w buforze i przekazanie ich dalej z opóźnieniem. Prosta realizacja takiego opóźnienia jest jednak ograniczona wyłącznie do opóźniania o całkowitą liczbę odstępów próbkowania. Jeżeli konieczne jest zrealizowanie opóźnienia, które przekłada się na niecałkowitą wielokrotność odstępów próbkowania, to konieczne jest zastosowanie cyfrowych filtrów ułamkowoopóźniających (FD – *fractional delay*) [6], które jedynie aproksymują idealne opóźnienie.

W większości tego typu rozwiązań stosuje się pełnopasmowe filtry ułamkowoopóźniające, których zadaniem jest jedynie opóźnienie składowych przetwarzanego sygnału. Jednak w niektórych zastosowaniach pożądane jest, aby taki filtr dodatkowo ograniczał pasmo sygnału. Przykładowo użycie filtrów ułamkowoopóźniających do

zmiany szybkości próbkowania może dodatkowo wymagać ograniczenia pasma sygnału, żeby zredukować zniekształcenia aliasowe. W pracy zaproponowano rozwiązanie pozwalające na swobodne sterowanie szerokością pasma filtrów DFT-VFD (filtrów ułamkowoopóźniających o zmiennym opóźnieniu definiowanych w dziedzinie częstotliwości dyskretniej) ([3], [4], [5]), w którym do realizacji tego zadania wykorzystano funkcje sklepane trzeciego stopnia [7].

## 2. FILTR DFT-VFD O PRZESTRAJANYM OPÓŹNIENIU

Filtr FD o kontrolowanym opóźnieniu (VFD – *variable fractional delay*) jest filtrem aproksymującym transmitancję [6]

$$H_{id}(z) = z^{-\tau_d}, \quad (1)$$

gdzie  $\tau_d = D + d$  jest opóźnieniem całkowitym wyrażonym w odstępach próbkowania [Sa], składającym się z części całkowitej  $D \in \mathbb{Z}$  i ułamkowej  $d \in [-0,5; 0,5)$ . Transmitancja (1) odpowiada następującej idealnej charakterystyce częstotliwościowej

$$H_{id}(f) = \exp(-j2\pi f\tau_d) \quad (2)$$

oraz nierealizowalnej (nieskończonej i nieprzyczynowej) odpowiedzi impulsowej

$$h_{id}[n] = \text{sinc}(n - \tau_d). \quad (3)$$

### 2.1. Filtr DFT-VFD

Nierealizowalność idealnego filtra FD wymusza stosowanie filtrów o skończonej liczbie współczynników, których charakterystyka częstotliwościowa aproksymuje charakterystykę idealną (2). W tej pracy zajmujemy się filtrami FD typu FIR definiowanymi poprzez współczynniki DFT stanowiące próbki ich dyskretniej charakterystyki częstotliwościowej ([1],[4],[5]), która dla nieparzystej długości odpowiedzi impulsowej  $N$  ma postać

$$H_d[k] = R_d^{N-2k} \tilde{H}_d[k], \quad (4)$$

gdzie  $R_d = \exp(j\frac{\pi}{N}\tau_d)$ , a  $\tilde{H}_d[k]$  jest ciągiem próbek zmodyfikowanej charakterystyki

$$\tilde{H}_d[k] = \begin{cases} c_d - js_d, & 0 \leq k \leq \frac{N-1}{2} - p \\ c_d - j\alpha_{\frac{N+1}{2}-k} s_d, & \frac{N-1}{2} - p < k \leq \frac{N-1}{2}, \\ \tilde{H}_d^*[N-k], & \frac{N-1}{2} < k < N \end{cases} \quad (5)$$

gdzie  $c_d = \cos(\pi\tau_d)$  i  $s_d = \sin(\pi\tau_d)$ .

Zauważmy, że charakterystyka (5) jest określona wyłącznie przez  $p$  współczynników  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ), a wysoką dokładność aproksymacji można uzyskać już dla zaledwie trzech współczynników ( $p = 3$ ) [1]. Zestaw współczynników  $\alpha$  optymalny dla danej specyfikacji filtru oraz założonej wielkości parametru  $p$  można znaleźć iteracyjnie ([1], [2]) minimalizując pasmowe kryterium LS [6] w zakładanym paśmie aproksymacji ( $0, f_a$ )

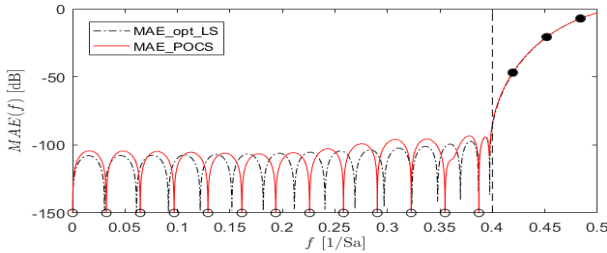
$$LSE(f_a) = \int_{-f_a}^{f_a} MAE(f)^2 df, \quad (6)$$

gdzie

$$MAE(f) = |H_N(f) - H_{id}(f)| \quad (7)$$

jest modułem zespolonego błędu aproksymacji, a  $H_N(f)$  jest zespoloną charakterystyką częstotliwościową  $N$ -próbkowego filtru FD typu FIR.

Przebieg błędu (7) dla przykładowego projektu, z zaznaczonymi punktami charakterystyki w paśmie niespecyfikowanym (przejściowym) wymuszonymi przez współczynniki  $\alpha_i$  pokazano na rys. 1. Zauważmy, że w pozostałych punktach próbkowania  $N$ -punktowej DFT wymuszany jest zerowy błąd aproksymacji. Ograniczenie w (5) liczby współczynników definiujących filtr do zaledwie  $p = 3$  skutkuje widoczną na rys. 1 rozbieżnością pomiędzy otrzymanym rozwiązaniem a rozwiązaniem optymalnym minimalizującym wyłącznie błąd LSE (6).



Rys. 1. Moduł zespolonego błędu aproksymacji filtru FD optymalnego w sensie pasmowego kryterium LS (linia przerywana) dla  $N=31$ ,  $f_a = 0.4$ ,  $d=0.25$  oraz odpowiadającego mu filtru DFT-VFD optymalnego dla  $p=3$  [1]

## 2.2. Odpowiedź impulsowa filtru DFT-VFD

Filtr o charakterystyce (4) można zaimplementować bezpośrednio w dziedzinie DFT, w oparciu o strukturę z próbkowaniem w dziedzinie częstotliwości, lub bezpośrednio w dziedzinie czasu, korzystając z jego odpowiedzi impulsowej uzyskanej metodą okien przesuwanych

$$h_d[n] = \hat{w}(n-d)h_{id}[n], \quad (8)$$

gdzie okno przesuwane

$$\hat{w}(n-d) = \frac{w(n-d)}{\text{sinc}((n-\tau_d)/N)} \quad (9)$$

bazuje na oknie kosinusowym (dla  $N$  parzystego)

$$w_o(n) = \sum_{i=0}^p \beta_i \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{N}(n-D)\right) \quad (10)$$

albo (dla  $N$  nieparzystego)

$$w_e(n) = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \cos\left(\frac{2i\pi}{N}(n-D)\right) \quad (11)$$

o współczynnikach  $\beta_i$  powiązanych ze współczynnikami  $\alpha_i$  charakterystyki (5) następująco

$$\beta_0 = \alpha_1, \quad \beta_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, p-1. \quad (12)$$

Zauważmy, że zależność (8), w której okienkowana jest idealna odpowiedź impulsowa, można przekształcić do zależności

$$h_d[n] = w(n-d)h_{id,a}[n], \quad (13)$$

gdzie okienkujemy bezpośrednio oknem kosinusowym (10) albo (11) odpowiedź impulsową

$$h_{id,a}[n] = \frac{h_{id}[n]}{\text{sinc}((n-\tau_d)/N)} = \text{asinc}_N(n-\tau_d), \quad (14)$$

którą otrzymujemy jako IDFT  $N$  próbek dyskretnej charakterystyki idealnej (2)

$$H_{id,a}[k] = H_{id}(k/N), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (15)$$

Zatem zależność (13) można w dziedzinie DFT wyrazić jako splot kołowy ( $\otimes$ )  $N$ -punktowego widma DFT przesuniętego okna kosinusowego ((10) albo (11)) oraz  $N$ -punktowej zmodyfikowanej charakterystyki (15)

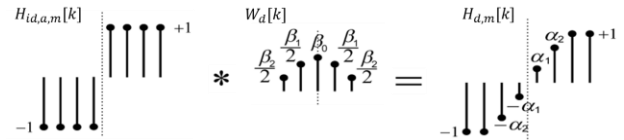
$$\tilde{H}_d[k] = W_d[k] \otimes \tilde{H}_{id,a}[k], \quad (16)$$

co jest alternatywnym opisem zależności (5).

Zauważmy, że składowa rzeczywista charakterystyki  $\tilde{H}_{id,a}[k]$  jest stała i, przy warunku

$$\sum_{i=0}^p \beta_i = 1, \quad (17)$$

splot (16) nie zmienia tej składowej. Z kolei składowa urojona tej charakterystyki zmienia znak po przekroczeniu częstotliwości Nyquista ( $k > N/2$ ) i, w efekcie splotu (16), pojawia się „utemperowane” przejście wokół częstotliwości Nyquista, co zilustrowano na rys. 2.



Rys. 2. Ilustracja zależności (16)

## 2.3. Przeszwanie pasma filtru DFT-VFD

Rozważmy teraz możliwość zmiany szerokości pasma filtru FD przy założeniu, że korzystamy z charakterystyki (5) zdefiniowanej przed niewielką liczbą współczynników modyfikujących jego dyskretną charakterystykę.

Żeby zmienić szerokość pasma filtru FD określonego przez współczynniki  $\alpha$  (lub  $\beta$  (12)) w metodzie okien przesuwanych ((8) lub (13)) wystarczy zastąpić odpowiedź idealnego filtru FD odpowiedzią impulsową jego odpowiednika o ograniczonym paśmie. Odpowiada to zastąpieniu odpowiedzi (14) odpowiedzią

$$h_{id,a,B}[n] = \frac{2B \text{sinc}(2B(n-\tau_d))}{\text{sinc}((n-\tau_d)/N)} = \text{asinc}_{N,B}(n-\tau_d). \quad (18)$$

Należy przy tym pamiętać, że tylko dla unormowanej szerokości pasma

$$B = \frac{N-2\Delta k}{2N}, \quad (19)$$

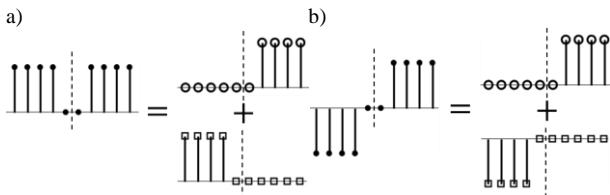
gdzie  $\Delta k$  jest liczbą całkowitą,  $N$ -punktowe DFT tej odpowiedzi ma prostą postać ([3], [4]).

Dla  $\Delta k = 0$  otrzymujemy przypadek omówiony w poprzednim podpunkcie. Zaprojektowane (zawczasu) dla tego wariantu współczynniki  $\alpha$  wykorzystujemy do projektowania filtrów dla pozostałych przypadków uzyskując zmianę szerokości pasma.

Aby określić dyskretną charakterystykę pasmowego filtru FD dla  $\Delta k \neq 0$ , charakterystykę  $H_{id,a,B}[k] = DFT_N\{h_{id,a,B}[n]\}$  dla  $N$  nieparzystego wygodniej jest przedstawić za pomocą charakterystyki zmodyfikowanej

$$\tilde{H}_{id,a,B}[k] = \begin{cases} c_d u_1[k] - j s_d u_1[k], & k \leq \frac{N-1}{2} \\ c_d u_2[k] + j s_d u_2[k], & k > \frac{N-1}{2} \end{cases} \quad (20)$$

gdzie  $u_1[k] = u\left[\frac{N-1}{2} - k - \Delta k\right]$ , a  $u_2[k] = u_1[N-1-k]$ , gdzie  $u[k]$  jest skokiem jednostkowym. Schematycznie zilustrowano to na (rys. 3).



Rys. 3. Ilustracja rozkładu charakterystyki (20) dla jej (a) składowej rzeczywistej i (b) urojonej dla  $\Delta k=1$

Oznacza to, że w zależności (16) operację splotu można rozłożyć na dwa sploty: z przesuniętym skokiem jednostkowym oraz z jego odwróconym w częstotliwości odpowiednikiem (rys. 4). W efekcie splotu  $u_1[k]$  z  $W_d[k]$  otrzymujemy ciąg współczynników

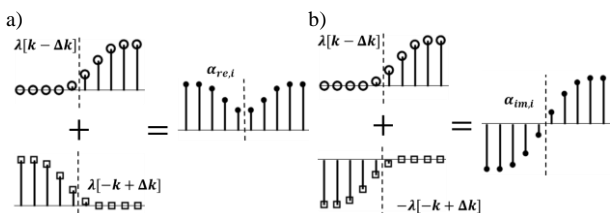
$$\lambda[k] = (1 + \alpha[k])/2 \quad (21)$$

o wartościach w zakresie od 0 do 1, z  $2p$  wartościami różnymi od 0 i 1. W rezultacie dyskretna charakterystyka filtru FD o zmienionej szerokości pasma jest określona przez zmodyfikowaną charakterystykę, która dla  $\Delta k > 0$  w paśmie przepustowym przyjmuje wartości  $c_d - j s_d$ , w paśmie przejściowym przyjmuje od  $p$  do  $2p$  wartości  $\alpha_{re}[k]c_d - j\alpha_{im}[k]s_d$  (rys. 4) oraz w paśmie zaporowym wartości 0. Współczynniki z paśmie przejściowego są powiązane ze współczynnikami  $\lambda$  w następujący sposób

$$\alpha_{re}[k] = \lambda[k - \Delta k] + \lambda[-k + \Delta k] \quad (22)$$

oraz

$$\alpha_{im}[k] = \lambda[k - \Delta k] - \lambda[-k + \Delta k]. \quad (23)$$

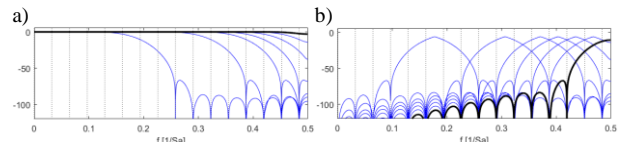


Rys. 4. Ilustracja wyznaczania współczynników (a)  $\alpha_{re}$  (22) oraz (b)  $\alpha_{im}$  (23) na podstawie przesuniętych współczynników  $\lambda$  (21)

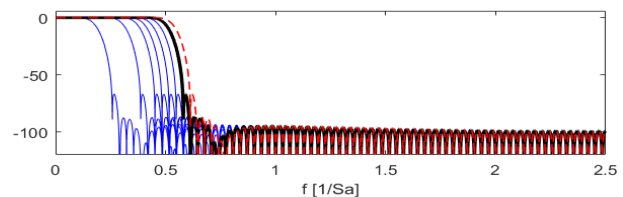
Zauważmy, że dla  $\Delta k \neq 0$  składowa rzeczywista charakterystyki zmodyfikowanej  $\tilde{H}_{id,a,B}[k]$  nie jest stała (rys. 3a) i konieczna jest również modyfikacja składowej rzeczywistej charakterystyki zmodyfikowanej projektowanego filtru (rys. 4a). Dodatkowo dla  $\Delta k < 0$  zamiast pasma zaporowego pojawia się pasmo aliasu, w którym filtr cechuje zmienione wzmocnienie zależne od jego opóźnienia. Filtr taki może mieć jednak praktyczne zastosowanie, np. w przypadku realizacji algorytmu zamiany szybkości próbkowania (SRC – *sampling rate conversion*), gdzie wykorzystując takie filtry można uzyskać poszerzenie pasma przepustowego filtru interpolacyjnego.

Przykładowe charakterystyki pasmowych filtrów FD uzyskanych na podstawie współczynników  $\alpha$  otrzymanych dla pełnopasmowego filtru DFT-VFD o  $N = 31$ ,  $d = 0.25$ ,  $f_a = 0.4$ ,  $p = 2$  dla różnych  $\Delta k$  przedstawiono na rys. 5 (im większe  $\Delta k$  tym węższe jest pasmo filtru – rys. 5a). Optymalne rozwiązanie w zadanym paśmie aproksymacji uzyskano dla  $\alpha_1 = 0.40803$  i  $\alpha_2 = 0.90719$ . Jak widać błąd aproksymacji w paśmie aproksymacji oraz w paśmie przepustowym zachowuje taki sam charakter niezależnie od parametru  $\Delta k$  (rys. 5b).

Ponieważ prezentowana tu metoda projektowania filtrów FD jest powiązana z metodą okien przesuwanych, filtry zbiorcze algorytmów zmiany szybkości próbkowania wykorzystujących te filtry [3] nie wykazują silnych listków w ich paśmie zaporowym (rys. 6), a zmiana szerokości pasma filtrów FD przenosi się na szerokość pasma filtru interpolacyjnego. Jednocześnie, na rys. 6 można zaobserwować efekt poszerzenia pasma zbiorczego filtru interpolacyjnego dla  $\Delta k = -1$ .



Rys. 5. (a) Charakterystyki amplitudowe oraz (b) moduł zespolonego błędu aproksymacji pasmowych filtrów FD dla  $\Delta k=10, 6, 4, 3, 2, 1$  oraz  $0$ ; przypadek dla  $\Delta k=0$  wykreślono pogrubioną linią



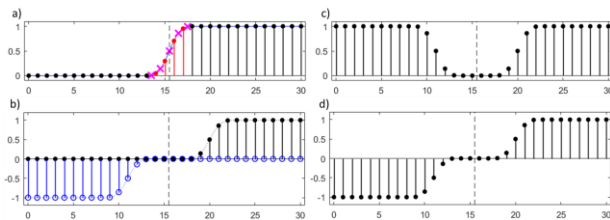
Rys. 6. Charakterystyki amplitudowe filtrów interpolacyjnych dla  $L=7$  krotnej interpolacji realizowanej z użyciem pasmowych filtrów FD dla  $\Delta k=10, 6, 4, 3, 2, 1, 0$  oraz  $-1$ ; przypadek dla  $\Delta k=0$  wykreślono pogrubioną linią, a dla  $\Delta k=-1$  linią przerywaną

### 3. PŁYNNE PRZESTRAJANIE PASMA

Ograniczeniem rozwiązania przedstawionego w poprzednim punkcie jest to, że umożliwia ono tylko skokową zmianę szerokości pasma filtru FD. Wynika to z tego, że prosta postać charakterystyki bazowego zaliasowanego idealnego filtru FD występuje tylko dla całkowitych

tych wartości  $\Delta k$ . Zauważmy jednak, że w prezentowanym w poprzednim punkcie rozwiązaniu zmiana szerokości pasma projektowanego filtra sprowadza się do przesuwania w prawo o  $\Delta k$  pozycji wektora współczynników  $\lambda[k]$  (21) wykorzystywanego do wyznaczania wektorów współczynników  $\alpha_{re}[k]$  (22) oraz  $\alpha_{im}[k]$  (23).

Z tego spostrzeżenia wynika koncepcja zaproponowanej tu metody projektowania filtra FD o płynnie przestrajanej szerokości pasma. Zamiast zakładać, że zmieniamy szerokość pasma idealnego prototypu filtra, próbujemy bazowy wektor w punktach  $k - \Delta k$  dopuszczając niecałkowitą wartość parametru  $\Delta k$ . W tym celu konieczne jest interpolowanie współczynników  $\lambda[k]$  w obszarze zmiany ich wartości z 0 na 1. Uwzględniając płynny charakter zmian tych współczynników rozważmy wykorzystanie funkcji sklejanego trzeciego stopnia (*cubic spline*) [7] do wyznaczania wartości wektora  $\lambda[k - \Delta k]$  znajdujących się pomiędzy wyjściowymi wartościami. Dodatkowo, przy wyznaczaniu współczynników skrajnych segmentów możemy wykorzystać założenie, że wartości tego wektora poza pasmem przejściowym są stałe, równe 0 poniżej tego pasma oraz 1 powyżej. Przykład przebiegu współczynników  $\lambda$  (21) filtra FD w poprzedniego punktu pokazano na rys. 7a, na którym zaznaczono również wartości, które obliczono w oparciu o funkcje sklejaną na potrzeby realizacji filtra dla  $\Delta k = 4.5$ . Z kolei na rys. 7b przedstawiono przebiegi współczynników obliczonych z niecałkowitym przesunięciem:  $\lambda[k - \Delta k]$  oraz  $-\lambda[-k + \Delta k]$ , a na rys. 7c i d obliczone na tej podstawie współczynniki  $\alpha_{re}$  (22) oraz  $\alpha_{im}$  (23).



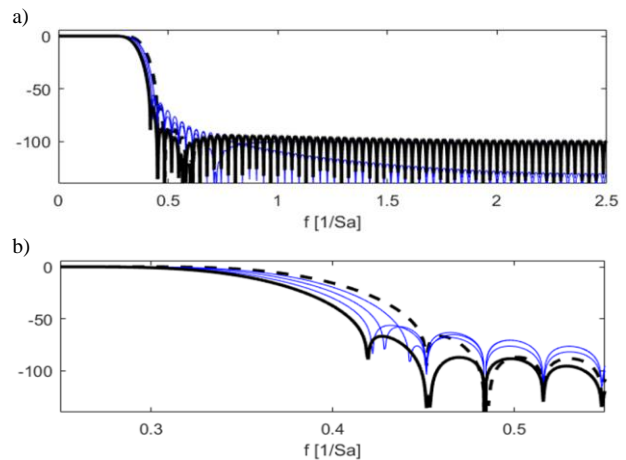
Rys. 7. Ilustracja przepróbkowania współczynników  $\lambda$ . (a) współczynniki  $\lambda$  z zaznaczonymi wartościami, pobieranymi z przesunięciem, (b) współczynniki  $\lambda[k - \Delta k]$  i  $-\lambda[-k + \Delta k]$  oraz (c) współczynniki  $\alpha_{re}$  i (d)  $\alpha_{im}$  dla  $\Delta k = 4.5$

Zbiorcze filtry interpolacyjne dla  $L = 7$  bazujące na pasmowych filtrach FD projektowanych metodą przestrajania szerokości pasma użyciem funkcji sklejanego pokazano na rys. 8. Jak widać udało się uzyskać efekt przestrajania pasma filtra zbiorczego, co potwierdza, że pasmo składowych filtrów FD uległo zmianie. Obserwujemy jednak pewne pogarszanie się charakterystyki wraz ze wzrostem odstrojenia parametru  $\Delta k$  od wartości całkowitej. Jest to koszt uzyskania możliwości prostej realizacji płynnego przestrajania szerokości pasma filtrów FD definiowanych w dziedzinie DFT poprzez niewielką liczbę współczynników  $\alpha$ .

#### 4. PODSUMOWANIE

W pracy zaproponowano metodę projektowania pozwalającą na płynne przestrajanie opóźnienia ułamkowego oraz szerokości pasma filtra FD. Przekłada się to na możliwość płynnego przestrajania szerokości pasma filtra

interpolacyjnego algorytmu SRC realizowanego z użyciem tych filtrów, w tym też poszerzania tego pasma. W efekcie rozwiązanie to umożliwia swobodne dopasowywanie się do bieżących potrzeb i właściwości przepróbkowanego sygnału.



Rys. 8. Charakterystyki amplitudowe filtrów interpolacyjnych dla  $L=7$  krotnej interpolacji realizowanej z użyciem pasmowych filtrów FD dla  $\Delta k=4, 4.25, 4.5, 4.75$  oraz 5; przypadek dla  $\Delta k=5$  wykreślono pogrubioną linią, a dla  $\Delta k=4$  linią przerywaną. (a) pełny zakres pasma filtra interpolacyjnego, (b) powiększony fragment wokół pasma przejściowego

Dalsze prace nad zaproponowanym rozwiązaniem będą ukierunkowane na poszukiwanie innych rozwiązań przepróbkowania współczynników  $\lambda$  pozwalających na zmniejszenie stopnia pogorszenia się jakości filtra FD dla ułamkowych przesunięć i weryfikację czy, i o ile, można poprawić jakość tych filtrów.

#### LITERATURA

- [1] Blok Marek. 2019, „Projektowanie filtra DFT-VFD metodą Hooke-Jeevesa”. Przegląd Telekomunikacyjny i Wiadomości Telekomunikacyjne, 7: 616-619.
- [2] Blok Marek. 2017, „Projektowanie filtrów ułamkoopóźniających reprezentowanych przez współczynniki dyskretnej charakterystyki częstotliwościowej”. Przegląd Telekomunikacyjny i Wiadomości Telekomunikacyjne, 8: 1030-1033.
- [3] Blok Marek, 2015, „Filtry cyfrowe ułamkoopóźniające - projektowanie metodą okien”, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej.
- [4] Blok Marek. 2013, „Filtr ułamkoopóźniający o przestrajanej szerokości pasma realizowany w dziedzinie DFT”, Przegląd Telekomunikacyjny i Wiadomości Telekomunikacyjne, 9: 1141-1150.
- [5] Blok Marek. 2013, “Comments on “Closed Form Variable Fractional Time Delay Using FFT””, IEEE Signal Processing Letters, 20 (8): 747-750.
- [6] Laakso Timo I., Välimäki Vesa, Karjalainen Matti, Laine Unto K.. 1996. “Splitting the unit delay – tools for fractional delay filter design,” IEEE Signal Processing Magazine, 13(1): 30–60.
- [7] McKinley, S., Levine, M. 1998. “Cubic spline interpolation,” College of the Redwoods, 45(1): 1049-1060.