

Grafo-mania, czyli rzecz o grafach i algorytmach

Grafy w Imperium Rzymskim

Joanna Raczek
Wydział Elektroniki,
Telekomunikacji
i Informatyki

Teoria grafów znalazła zastosowanie w sieciach komputerowych, telekomunikacyjnych, transporcie, bioinformatyce, zarządzaniu i w wielu innych dziedzinach. Ale co ma ona wspólnego z Imperium Rzymskim?

Cesarz rzymski Konstantyn I Wielki przeprowadził wiele reform społecznych, ekonomicznych i politycznych w swoim państwie. Ponieważ brakowało funduszy, aby utrzymać silną armię na całym terytorium imperium, Konstantyn wprowadził zasadę, aby każde ważne strategicznie miejsce, w którym nie stacjonuje żaden legion żołnierzy, sąsiadowało bezpośrednio z miejscem, w którym stacjonują co najmniej dwa legiony. Dzięki temu w razie potrzeby legion z miejsca, na którym były co najmniej dwa legiony, mógł się udać szybko do miejsca, w którym nie stacjonował żaden legion.

Czy rzeczywiście był to wymierny zysk w wydatkach na utrzymanie wojska? Przyjrzyjmy się grafowi z rysunku 1. Wierzchołki oznaczają ważne strategicznie miejsca, a krawędź pomiędzy dwoma wierzchołkami oznacza, że reprezentują one miejsca bezpośrednio sąsiadujące.

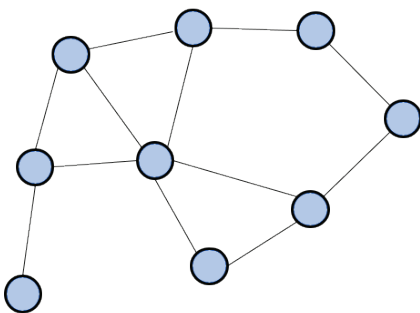
Potrzebujemy dziewięciu legionów, jeśli chcemy, aby w każdym miejscu stacjonował jeden legion, ponieważ graf ma dziewięć wierzchołków. Postępując się jednak pomysłem

cesarza Konstantyna, możemy liczbę legionów zmniejszyć, na przykład do siedmiu, tak jak zostało to przedstawione na rysunku 2.

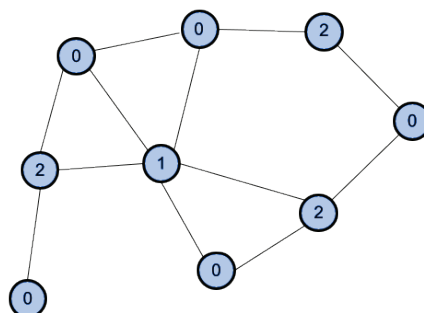
Pojawia się pytanie, jak bardzo możemy zmniejszyć liczbę legionów? Ponieważ graf jest mały, łatwo się przekonać, że mniej niż pięć legionów nie będzie w stanie obronić wszystkich miejsc. Na rysunku 3 przedstawiono jedno z dwóch możliwych rozmieszczeń pięciu legionów spełniające wymagania Konstantyna I.

Dominowaniem rzymskim w grafie nazywamy dowolną funkcję przyporządkowującą każdemu wierzchołkowi grafu liczbę ze zbioru $\{0, 1, 2\}$ tak, aby każdy wierzchołek z przypisanym zerem sąsiadował z co najmniej jednym wierzchołkiem z przypisaną dwójką. **Liczba dominowania** to najmniejsza możliwa liczba legionów użytych (w sumie) przez funkcję dominowania rzymskiego. Dla grafu z rysunku 1 ta liczba wynosi 5.

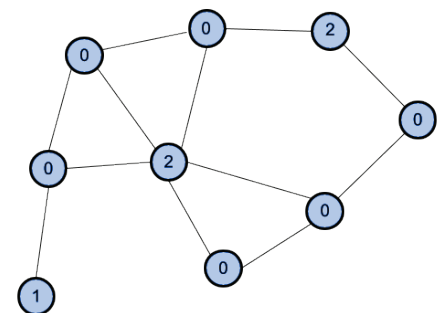
Definicję dominowania rzymskiego w tej postaci po raz pierwszy sformułowali naukowcy z Kanady i USA w 2004 roku. W ogólności wyznaczenie liczby dominowania rzymskiego jest trudne obliczeniowo. Na przykład dla grafów



Rys. 1. Ważne strategiczne miejsca i ich bezpośrednie sąsiedztwa



Rys. 2. Rozmieszczenie siedmiu legionów



Rys. 3. Rozmieszczenie pięciu legionów

planarnych (por. poprzedni odcinek Grafo-manii) jest to problem NP-trudny. Jednak istnieją klasy grafów, dla których można wyznaczyć liczbę dominowania rzymskiego w czasie wielomianowym (np. drzewa).

Konstantyn I Wielki umieścił jedną armię w Rzymie, a drugą w swojej nowej stolicy, obecnym Stambule. Przy takim rozmieszczeniu Brytania nie sąsiadowała bezpośrednio z żadnym z miejsc stacjonowania armii — między nią a Rzymem była jeszcze Galia (rys. 4). Jak z historii wiadomo, to właśnie Brytania była pierwszym obszarem, który Imperium Rzymskie utraciło.

Teoria grafów została sformułowana w języku matematyki dopiero wiele lat po upadku Cesarstwa Rzymskiego, jednak pewne idee teoriografowe istniały i były wykorzystywane przez stulecia (choć nie zawsze konsekwentnie). Warto nie popełniać błędów z historii, lepiej pamiętać o tej gałęzi wiedzy z pogranicza matematyki i informatyki oraz ją stosować.

■ joanna.raczek@pg.edu.pl



rys. 4. Prowincje Imperium Rzymskiego

Źródło: Wikipedia: Jani Niemenmaa – praca własna, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=40753>



Monika Bizewska

Biuro Politechniki Otwartej

Za nami kolejny rok akademicki na Politechnice Wielu Pokoleń

W lutym 2021 roku, po przeszło rocznej przerwie związanej z pandemią COVID-19, Politechnika Wielu Pokoleń wznowiła działalność edukacyjną, oferując zajęcia online dla młodzieży, dorosłych i seniorów. Wsparciem objęto ponad 400 osób.

Uruchomiono łącznie 25 przedmiotów, w tym 4 przedmioty dla seniorów, 5 przedmiotów dla młodzieży klas ponadpodstawowych oraz 16 przedmiotów dedykowanych osobom dorosłym. Niektóre z zajęć cieszyły się tak dużym zainteresowaniem, że odbyło się kilka edycji.

Seniorzy w ramach kursu symultanicznego „Bądź online”, opracowanego przez dr. inż. Krzysztofa Redlarskiego (Wydział Zarządzania i Ekonomii), mogli pozyskać wiedzę na temat tworzenia multimedialnych prezentacji z uwzględnieniem różnych form i narzędzi interakcji, a także poznać środki komunikacji wykorzystywane w rzeczywistym środowisku social media.

W ramach przedmiotu „Negocjacje i manipulacja” dr Beaty Krawczyk-Bryłki (Wydział Zarządzania i Ekonomii) seniorzy wzięli udział