



Imię i nazwisko autora rozprawy: Anna Magdalena Banaś  
Dyscyplina naukowa: Budownictwo

## ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Diagnostyka wibracyjna obiektów mostowych z zastosowaniem czujników rotacji

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Vibrational diagnostics of bridges with use of rotation sensors

Promotor  <i>podpis</i>	Drugi promotor  <i>podpis</i>
Prof. dr hab. inż. Krzysztof Wilde	
Promotor pomocniczy  <i>podpis</i>	Kopromotor  <i>podpis</i>

Gdańsk, rok 2017



*... moim Rodzicom ...*



## Spis treści

1	Wstęp .....	1
1.1	Uwarunkowania ekonomiczne rozwoju mostownictwa w Polsce .....	1
1.2	Przykładowe technologie diagnostyczne stosowane w Polsce .....	4
1.3	Wprowadzenie do aktualizacji modelu w procedurach diagnostycznych .....	6
1.4	Czujniki i technologie pomiarowe stosowane w mostownictwie .....	10
1.5	Cel i zakres pracy .....	15
2	Podstawy teoretyczne .....	17
2.1	Metody redukcji bazy .....	17
2.1.1	Metoda Statyczna Guyana .....	17
2.1.2	Metoda Improved Reduced System (IRS) .....	18
2.1.3	Metoda System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP) .....	19
2.2	Kryteria walidacji postaci drgań własnych .....	20
2.2.1	Modal Assurance Criterion (MAC) .....	20
2.2.2	Modal Scale Factor (MSF) .....	22
2.2.3	Normalised Modal Difference .....	22
2.2.4	Normalized Cross Orthogonality .....	23
2.3	Metody optymalizacji .....	23
2.3.1	Programowanie liniowe .....	25
2.3.2	Programowanie nieliniowe .....	27
2.3.3	Uwarunkowanie zadania .....	41
2.3.4	Uwarunkowanie macierzy .....	42
2.3.5	Zadanie dobrze i źle postawione (ill-posed problem) .....	42
2.4	Aktualizacja przy użyciu częstości i postaci drgań własnych .....	44

2.4.1	Wprowadzenie .....	44
2.4.2	Wrażliwość wartości i wektorów własnych .....	46
2.4.3	Wrażliwość eksperymentalna .....	49
2.4.4	Metody iteracyjne bazujące na parach modalnych .....	50
2.4.5	Macierz wag wartości mierzonych .....	53
2.4.6	Macierz wag aktualizowanych parametrów .....	53
2.4.7	Minimalizacja funkcji kary .....	54
2.5	Definicja macierzy wag .....	55
2.6	Funkcja odpowiedzi częstotliwościowej dla układu o jednym stopniu swobody .....	56
2.7	Funkcja odpowiedzi częstotliwościowej dla układu o wielu stopniach stopniu swobody .....	57
3	Aktualizacja parametrów projektowych na podstawie analiz numerycznych .....	61
3.1	Indeksy uszkodzenia .....	61
3.2	Aktualizacja parametrów projektowych na przykładzie belki swobodnie podpartej ..	66
3.3	Wpływu modyfikacji macierzy wag na procedurę aktualizacji paramentów .....	81
3.4	Wpływu szumu pomiarowego na procedurę aktualizacji paramentów .....	99
3.5	Aktualizacja warunków podporowych i sztywności globalnej modelu .....	103
4	Badania eksperymentalne .....	107
4.1	Aparatura pomiarowa .....	107
4.2	Model eksperymentalny belki swobodnie podpartej .....	109
4.3	Program badań .....	111
4.4	Wyniki badań eksperymentalnych .....	113
4.5	Niepewności pomiarowe .....	118
5	Aktualizacja parametrów projektowych na podstawie badań eksperymentalnych ..	119

---

5.1	Procedura aktualizacji parametrów projektowych na podstawie badań eksperymentalnych .....	119
5.2	Aktualizacja parametrów projektowych na podstawie 6 translacyjnych stopni swobody .....	135
5.3	Aktualizacja parametrów projektowych na podstawie 6 rotacyjnych stopni swobody	142
5.4	Aktualizacja parametrów projektowych na podstawie 6 translacyjnych i 6 rotacyjnych stopni swobody .....	149
6	Badania in situ na obiektach inżynierskich .....	155
6.1	Opis aparatury.....	155
6.2	Kładka nad drogą S8.....	157
6.2.1	Opis obiektu .....	157
6.2.2	Model MES.....	158
6.2.3	Badania in situ .....	159
6.2.4	Wyniki pomiarów .....	160
6.3	Kładka nad trasą Ogińskiego w Bydgoszczy .....	162
6.3.1	Opis obiektu .....	162
6.3.2	Model MES.....	163
6.3.3	Badania in situ .....	164
6.3.4	Wyniki pomiarów .....	166
6.4	Wiadukt Brińskiego w Koninie .....	169
6.4.1	Opis obiektu .....	169
6.4.2	Model MES.....	170
6.4.3	Program badań in situ .....	171
6.4.4	Wyniki pomiarów .....	172
6.5	Podsumowanie wyników pomiarów z użyciem czujników rotacji .....	175
6.6	Kładka nad ulicą Chwarznieńską .....	175

6.6.1	Opis obiektu.....	176
6.6.2	Modele MES .....	176
6.6.3	Program badań in situ .....	179
6.6.4	Wyniki pomiarów .....	181
6.6.5	Analiza modalna .....	183
6.6.6	Aktualizacja modelu MES kładki.....	189
6.7	Wnioski .....	198
7	Podsumowanie .....	201
8	Streszczenie .....	205
9	Abstract .....	207
	Bibliografia .....	209
	Załącznik 1	



# 1 Wstęp

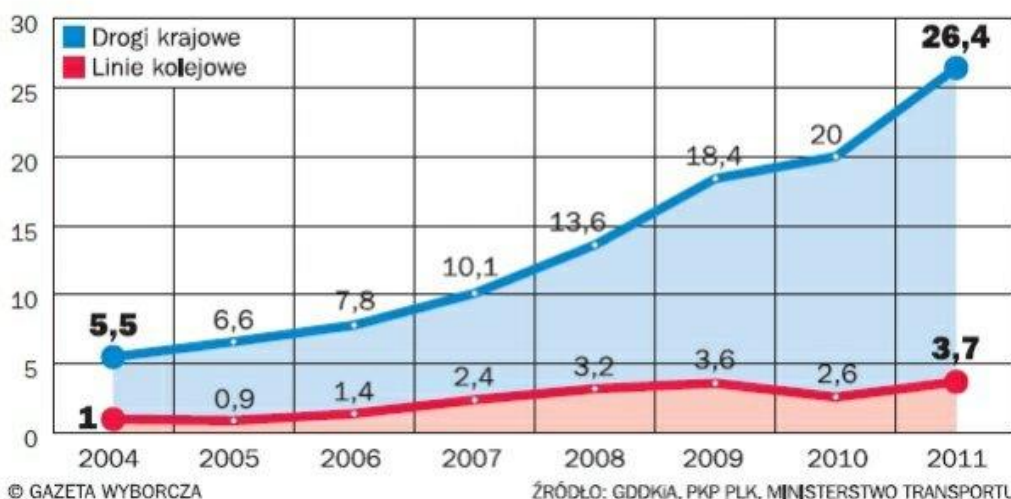
Obiekty mostowe od zawsze uznawane były za cuda inżynierii. Były i są symbolem łączenia. Słowo „most” występuje w wielu kontekstach. W słowniku języka polskiego (słownik PWN) pod tym terminem, opisana jest nie tylko konstrukcja łącząca brzegi znajdujące się nad przeszkodą wodną, ale również przedstawione są pojęcia: „to, co służy porozumieniu między ludźmi o odmiennych poglądach”, a także „urządzenie umożliwiające wymianę danych między dwiema lokalnymi sieciami komputerowymi opartymi na różnych systemach okablowania”, lub „część mózgu zawierająca m.in. ośrodki słuchu i równowagi”.

## 1.1 Uwarunkowania ekonomiczne rozwoju mostownictwa w Polsce

Ostatnie lata w Polsce to czas bardzo szybkiego, na niepotykaną dotychczas skalę, rozwoju infrastruktury, który znacznie unowocześnił i powiększył sieć dróg zarówno kołowych jak i kolejowych. Znaczący wzrost nakładów finansowych na obiekty infrastrukturalne związany jest między innymi z wejściem Polski do Unii Europejskiej jak i organizacją Mistrzostw Europy w Piłce Nożnej Euro 2012 (rysunek 1.1).

### WYDATKI NA DROGI KRAJOWE I LINIE KOLEJOWE OD WEJŚCIA POLSKI DO UE

DANE W MLD ZŁ



Rysunek 1.1 Wydatki na drogi krajowe i linie kolejowe w latach 2004-2011 (źródło: Gazeta Wyborcza rok 2011)

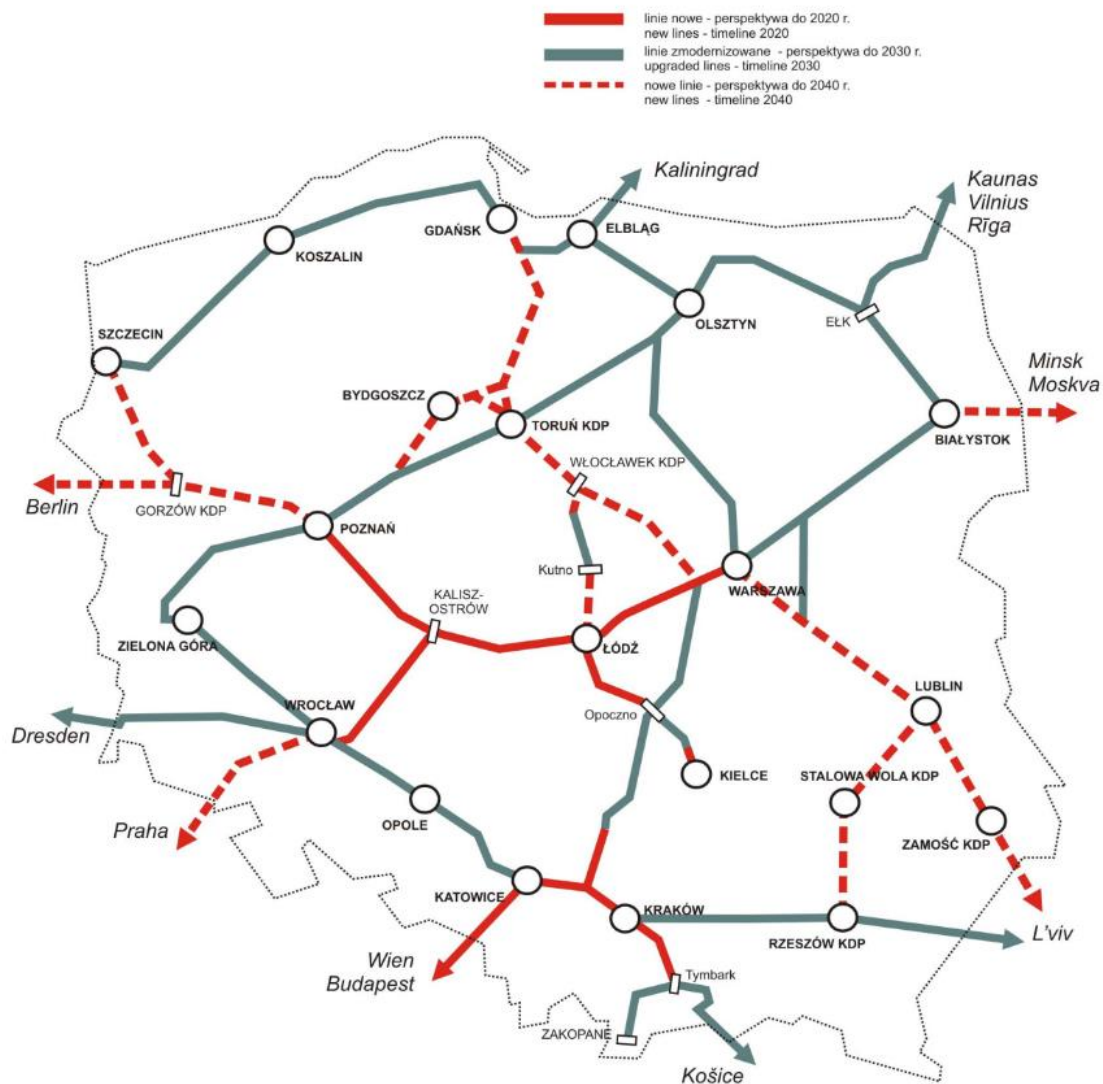
Według stanu na dzień 31 lipca 2015 roku łączna długość sieci dróg ekspresowych i autostrad wynosi 3.041 km, w tym 1.553,2 km autostrad i 1.487,8 km dróg ekspresowych (rysunek 1.2), co stanowi w okresie 2004-2015 wydłużenie ~3-krotne długości autostrad oraz

~6,6-krotne wydłużenie dróg ekspresowych w kraju. Koszty związane z budową dróg ekspresowych i autostrad w okresie 2004 – 2013 wynoszą 140.340.107,70 tysięcy złotych, z czego największe nasilenie tego typu inwestycji miało miejsce w latach 2011-2013. Zwłaszcza lata 2011 i 2012 były szczególne pod względem wysokości nakładów (48.607.295,6 tys. zł) oraz długości oddawanych dróg ekspresowych i autostrad (źródło GDDKiA).



Rysunek 1.2 Sieć autostrad i dróg ekspresowych zrealizowana lub w trakcie realizacji – stan na 31.07.2015 (źródło: GDDKiA)

Główny kierunek rozwoju sieci kolejowych w Polsce w ostatnich latach, koncentruje się na stworzeniu sieci kolejowej charakteryzującej się wysokimi parametrami. Ma to na celu uatrakcyjnienie oferty przewoźników kolejowych, a tym samym wzrost udziału kolei w rynku transportowym. Szansą na stworzenie konkurencyjnej oferty w stosunku do innych przewoźników jest program rozbudowy kolei wysokich prędkości wprowadzony już w życie i mający się zakończyć w roku 2040 (rysunek 1.3).



Rysunek 1.3 Koncepcja sieci kolei dużych prędkości w Polsce do 2040 r (źródło: ministerstwo Infrastruktury)

Nowa sieć dróg nierozzerwalnie wiąże się z powstawaniem nowych obiektów inżynierskich. Bardzo często budowane obiekty mają nie tylko pełnić funkcję użytkową, ale również kształtować krajobraz, pełnić rolę symbolu bądź być miejscem charakterystycznym, które jak znak drogowy ma ułatwiać nawigację (Cywiński & Kido 2000; Flaga & Januszkiewicz 2010; Flaga et al. 2005; Łagoda & Łagoda 2014; Łapko 2010; Salamak & Fross 2010). Nie bez znaczenia jest też forma architektoniczna, która staje się często coraz bardziej wyszukana i oryginalna. Mosty wybudowane w ostatnich latach w Polsce są niejednokrotnie perłami pod względem nie tylko architektury ale również konstrukcji. Wśród nich nie można pominąć: mostu wawotowego im. Jana Pawła II w Gdańsku (Biliszczuk 2003), mostu łukowego przez Dziwną w Wolinie (Filipiuk 2005), podwieszonoego mostu przez Wisłę w Płocku (Biliszczuk 2007), mostu łukowego w Puławach (Grej et al. 2008), najdłuższego w Polsce podwieszonoego Mostu Rędzińskiego (Biliszczuk & Onyks 2012), największego łuku w Toruniu (Wąchalaki & Cywiński 2015), najdłuższego w Europie mostu typu

ekstradosed w Kwidzynie (Filipiuk & Stefanowski 2014), oryginalnego mostu Uniwersyteckiego w Bydgoszczy (Stefanowski & Filipiuk 2015) czy niedawno oddanego do ruchu mostu wantowego w Rzeszowie (Siwowski & Czarnik 2014). Znaczące osiągnięcia zostały dokonane również przy rewitalizacji starych obiektów mostowych. Przykładem jest konstrukcja mostu drogowego przez rzekę Wisłę w Tczewie. Jest to jedna z najstarszych konstrukcji w Polsce, symbol całego Pomorza, będąca obecnie w trakcie wieloetapowych prac remontowych i modernizacyjnych, wyprzedzająca zdecydowanie czas, w którym była wybudowana (Malinowski et al. 2016). W ostatnich latach widać silny trend nie tylko w poszukiwaniu coraz to ciekawszych form konstrukcyjnych, ale również we wprowadzaniu nowoczesnych i nowatorskich materiałów w budownictwie. O dużym sukcesie w tej dziedzinie świadczy wybudowanie kilku obiektów inżynierskich z kompozytów (Zobel et al. 2003; Grotte et al. 2009; Chróścielewski, Klasztorny, et al. 2014; Siwowski et al. 2014).

## 1.2 Przykładowe technologie diagnostyczne stosowane w Polsce

Dążenie do rozwoju, a co za tym idzie stosowanie i wprowadzanie zupełnie nowych technologii w mostownictwie wiąże się z potrzebą poznania pracy rzeczywistej konstrukcji. Prowadzi to do pilnej potrzeby rozwoju szeroko rozumianej diagnostyki obiektów mostowych. W przypadku obiektów mostowych podstawowym elementem monitoringu są narzucone przez prawo budowlane roczne podstawowe oraz pięcioletnie rozszerzone przeglądy (PB 1994). Swym zakresem obejmują one głównie wizualną ocenę stanu technicznego ustroju nośnego, podpór i elementów wyposażenia oraz zalecenia dotyczące dalszej eksploatacji, a w szczególności zalecenia dotyczące zakresu prac przeprowadzanych w ramach bieżącego utrzymania oraz prac remontowych (I1 2005). Na ich podstawie, w przypadku stwierdzenia znaczących nieprawidłowości, można wnioskować o przeprowadzenie przeglądu szczegółowego lub wykonanie ekspertyzy. W przypadku obiektów nowatorskich wskazanym wydaje się uzupełnienie standardowego przeglądu systemem monitoringu technicznego konstrukcji (SHM – *Structural Health Monitoring*) (Sohn et al. 2004; Wenzel 2008; Bień 2010; Wilde 2016). Pojęcie samego monitoringu można traktować wielopoziomowo z uwagi na jego rolę na danym obiekcie inżynierskim (Chróścielewski et al. 2011; Wilde 2014). Do podstawowych, najczęściej stosowanych typów monitoringu obiektów mostowych, zaimplementowanych w ostatnich latach na terenie Polski, można zaliczyć monitoringi podczas budowy (Chróścielewski et al. 2013; Malinowski, Banaś, et al. 2015; Chróścielewski et al. 2016) oraz w trakcie eksploatacji (Malinowski 2003; Biliszczuk et al. 2006; Hildebrand et al. 2009; Onysyk 2011; Barcik & Sieńko 2012; Sieńko 2013; Żółtowski 2015; Klikowicz, Salamak & Łaziński 2016; Klikowicz, Salamak & Poprawa 2016). Dotyczą one jednak zwykle tylko nietypowych konstrukcji mostowych bądź tuneli (Malinowski, Sitarski, et

al. 2015) i obiektów znajdujących się na terenach górniczych (Weseli et al. 2007; Bętkowski et al. 2015). Ciągły monitoring, czy to w fazie budowy czy eksploatacji, daje bardzo dobry i realistyczny obraz pracy konstrukcji. Jednak jego istotną wadą są dodatkowe koszty na etapie budowy oraz późniejszej eksploatacji, które znacząco limitują powszechne użycie tych systemów. Nie bez znaczenia jest także ingerencja systemu w samą konstrukcję, co może być problematyczne zwłaszcza w przypadku istniejących już konstrukcji. W przypadku konstrukcji nowo budowanych systemy monitoringu powinny być projektowane razem z branzami i instalowane już na etapie budowy obiektu. W każdym przypadku należy jednak zapewnić odpowiednią instalację i zabezpieczenie niekiedy bardzo dużej liczby czujników oraz modułów pomiarowych.

Diagnostyczne badania in situ, czy to ciągle cykliczne (monitoring) czy to przeprowadzane sporadycznie bądź okresowo (badania eksperckie lub sprawdzające) (Olaszek 2015) to narzędzia ochrony nowych obiektów nietypowych, nowatorskich i prototypowych, ale także już istniejących konstrukcji. Dostarczają danych o rzeczywistym zachowaniu się konstrukcji, a tym samym na ich podstawie, można wnioskować o ewentualnych uszkodzeniach i usterkach ustroju i jego aktualnej nośności.

Przykładem potrzeby stosowania monitorowania istniejących obiektów jest awaria Mostu Cłowego w Szczecinie, która pokazuje że same przeglądy nie dostarczają niejednokrotnie wystarczających danych do jednoznacznej oceny stanu i nośności obiektu (Żółtowski et al. 2016). Przyczyną awarii mostu była korozja kabli sprężających, która w konsekwencji doprowadziła do zerwania części z nich.

Podobnego typu awaria miała miejsce parę lat wcześniej na jednym ze stalowych łuków kratowych w Gdańsku – Wrzeszczu w ciągu ul. Braci Lewoniewskich (Chróścielewski et al. 2005). Korozja elementów łączących pomost ze ściągami łuku doprowadziła do ich stopniowej degradacji i w konsekwencji do całkowitego zerwania części z nich. Sytuacja była o tyle niebezpieczna, że zagrażała nie tylko nośności samego obiektu i ruchu na nim. Z uwagi na znajdującą się pod spodem trasę kolejową, między innymi linii magistralnej E-65 oraz SKM, mogła doprowadzić do katastrofy kolejowej.

Do zerwania cięgna sprężającego doszło również na przęsłach zalewowych mostu w Kiezmarku w roku 1988 (Malinowski et al. 1988; Kaliński et al. 2004). Zewnętrzne cięgna sprężające kotwione były w płycie pomostu konstrukcji zespolonej. Wody opadowe penetrujące przez kapy chodnikowe i nieszczelności izolacji doprowadziły do ich powolnej korozji, a w konsekwencji do ich zerwania i awarii, którą dziś można by przewidzieć wprowadzając na etapie przeglądów odpowiedni aparat diagnostyczny wspomagający inżyniera.

Niewidoczna na pierwszy rzut oka utrata nośności obiektu, może też być spowodowana jego znacznym wyeksploatowaniem. Można tu przytoczyć przykład sześciu obiektów kolejowych w Bydgoszczy nad ulicą Gdańską (Chróścielewski, Banaś, et al. 2014). Eksploatowane od ponad 100 lat, mimo zaawansowanych ubytków korozyjnych, czy uszkodzeń mechanicznych z powodzeniem przechodziły pozytywnie kolejne przeglądy techniczne. Interwencja w 2012 roku Wojewódzkiego Inspektora Nadzoru i nakaz wykonania ekspertyzy opartej na wynikach uprzednio przeprowadzonego badania obiektu pod próbnym obciążeniem, doprowadziła do natychmiastowego podparcia obiektu i zabezpieczenia przed katastrofą.

O bardzo dużym znaczeniu badań diagnostycznych, w tym odbiorowych, można mówić także w przypadku mostu zespolonego z dźwigarami kratowymi (Olaszek & Łagoda 2011). Obiekt po remoncie przed oddaniem do użytku, został poddany próbnemu obciążeniu. Wykazało ono znaczne nieprawidłowości w pracy samej konstrukcji, które były nie możliwe do wychwycenia przy użyciu tylko technik wizualnych. Znaczne przyrosty mierzonych ugięć w trakcie wprowadzenia próbnego obciążenia, a także brak stabilizacji wyników podczas pełnego obciążenia, wymusiły decyzje o przerwaniu próby. Po przeprowadzonych analizach, przyczyną nieprawidłowej pracy konstrukcji okazało się niewłaściwe wykonanie połączeń ciernych w zaprojektowanych stykach montażowych modernizowanej konstrukcji. Przeprowadzone badania pozwoliły uniknąć awarii czy katastrofy, a na podstawie ich wyników, wykonano projekt naprawczy i w konsekwencji oddano obiekt do eksploatacji zgodnie z pierwotnymi założeniami projektowymi.

Opisane powyżej sytuacje i wiele innych podobnych do nich, często wymagają wzbogaconego systemu diagnostycznego do oceny aktualnego stanu i rzeczywistej nośności konstrukcji oraz wydania decyzji o warunkach dalszej eksploatacji obiektów mostowych. Stwarza to potrzebę poszukiwania nowych narzędzi diagnostycznych, które pozwolą w sposób ciągły lub doraźny na stosunkowo tanie oraz nieinwazyjne ocenianie stanu konstrukcji, bez wyłączenia jej na dłuższy czas z eksploatacji.

### **1.3 Wprowadzenie do aktualizacji modeli w procedurach diagnostycznych**

Większość obecnie znanych procedur diagnostyki nieniszczącej bazuje na modelu numerycznym konstrukcji, który można rozumieć, jako matematyczne i numeryczne procesy, które pozwalają na transformację fizycznego obiektu na model matematyczny (Marwala 2010). Dla takiego modelu, dzięki procedurom numerycznym, możemy oszacować charakterystyki dynamiczne konstrukcji takie jak postaci i częstotliwości drgań własnych (Friswell & Mottershead 1995). Obecnie najczęściej wykorzystywana do tworzenia modeli numerycznych jest Metoda

Elementów Skończonych (MES). Cały proces modelowania numerycznego wiąże się więc z: dyskretyzacją i przyjęciem funkcji kształtu, zbudowaniem macierzy mas i sztywności, wyznaczeniem częstotliwości i postaci drgań oraz funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (Zienkiewicz 1986). Techniki komputerowe, a w tym również Metoda Elementów Skończonych w ostatnich latach przeżywają prawdziwy rozkwit i pozwalają na coraz bardziej precyzyjne modelowanie otaczającej rzeczywistości. Nie zmienia to jednak faktu, że zwykle wyniki obliczeń numerycznych nie są identyczne z wynikami badań eksperymentalnych prowadzonych na rzeczywistej konstrukcji. Przyczyną rozbieżności pomiędzy danymi numerycznymi a eksperymentalnymi mogą być (Friswell & Mottershead 1995):

- ✓ błędy w modelowaniu wywołane na przykład: trudnościami w modelowaniu tłumienia, połączeń śrubowych oraz spawanych czy warunków podporowych;
- ✓ błędy w przyjętym rzędzie modelu, które powstają w wyniku dyskretyzacji modelu numerycznego;
- ✓ błędy w przyjętych parametrach modelu, wynikające na przykład z błędnej identyfikacji paramentów materiałowych;
- ✓ błędy wynikające z pomiarów podczas badań eksperymentalnych.

Zwykle zakłada się, że dane pochodzące z badań eksperymentalnych nie są obciążone błędem. Pociąga to za sobą konieczność dopasowania i zaktualizowania modelu numerycznego, tak aby otrzymane na podstawie jego analizy wyniki były zgodne z wynikami z badań eksperymentalnych. Początek badań nad aktualizacją modeli numerycznych na bazie parametrów dynamicznych sięga lat siedemdziesiątych (Cawley & Adams 1979). Pierwsze prace ukierunkowane były na aktualizację parametrów modelu na podstawie pomierzonych częstotliwości drgań własnych. Takie podejście jednak szybko okazało się niewystarczające z uwagi na bardzo małe zmiany częstotliwości drgań własnych, nawet przy relatywnie bardzo dużych uszkodzeniach konstrukcji (Hong et al. 2002; Kim et al. 2003; Douka et al. 2004; Hirsz & Wilde 2006; Rudzik et al. 2014).

Metody aktualizacji modeli MES są podzielone na dwie zasadnicze grupy:

- ✓ metody bezpośrednie,
- ✓ metody iteracyjne.

Metody bezpośrednie nie wymagają procesu iteracyjnego, a co za tym idzie pozwalają na ograniczenie czasu obliczeń. Model zaktualizowany metodą bezpośrednią pozwala na odwzorowanie wszystkich pomierzonych paramentów, jednak przy jego tworzeniu, pominięte są kwestie związane z sensem fizycznym akutalizowanego obiektu. W związku z tym otrzymane w procesie aktualizacji macierze układu, które nie zawsze są dodatnio określone, nie mają

znaczenia fizycznego i nie można ich odnieść do rzeczywistej zamiany parametrów modelu MES (Maia & Silva 1997).

Metody iteracyjne bazują na zmianie parametrów fizycznych modelu w taki sposób, aby wybrane kryteria zbieżności uzyskanych wyników z danymi pomiarowymi zostały spełnione. Pozwalają one na stworzenie rzeczywistego w sensie fizycznym modelu, którego macierze mas i sztywności mają znaczenie fizyczne.

Zarówno metody bezpośrednie jak i iteracyjne, wykorzystujące funkcje odpowiedzi częstotliwościowej lub parametry dynamiczne konstrukcji, bazują zwykle na kilku podstawowych technikach aktualizacji. Jedną z podstawowych metod aktualizacji opiera się na modyfikacji macierzy układu w celu identyfikacji uszkodzenia. Różnica pomiędzy macierzami zaktualizowanymi a bazowymi pozwala na zlokalizowanie miejsca uszkodzenia. Zwykle w podejściu tym należy sformułować odpowiednią funkcję celu, która jest następnie minimalizowana oraz wybrać odpowiedni algorytm optymalizacji (D'Ambrogio & Zobel 1994; Friswell & Mottershead 1995; Ojalvo & Pilon 1988; Ewins 2000). Kolejną metodą jest metoda macierzy optymalnej. Zwykle klasyfikowana jest ona jako metoda bezpośrednia i wykorzystuje rozwiązanie analityczne, a nie numeryczne (Baruch & Bar-Itzhack 1978; Berman & Nagy 1983; Kabe 1985; Carvalho et al. 2007). Z reguły sformułowana jest w odniesieniu do mnożników Lagrange'a i perturbacji macierzy. Istotną wadą metody, jest to, że zaktualizowany model nie zawsze posiada realne właściwości fizyczne. Kolejną grupą są metody bazujące na wrażliwości. Zakładają one, że dane eksperymentalne są perturbacją danych projektowych oryginalnego modelu numerycznego. Aktualizacja opiera się na obliczeniu pochodnych z paramentów dynamicznych albo z funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (Fox & Kapoor 1968; Ben-Haim & Prells 1993; Lin et al. 1995; Alvin 1997). Metody ustalenia par własnych (postaci i częstotliwości drgań własnych) oparte są na teorii sterowania układów. Konstrukcja będąca obiektem badań zostaje wymuszona w taki sposób, aby jej odpowiedź była z góry ustalona i pozwalała na identyfikację określonych par modalnych. Podczas poszukiwania uszkodzenia w badaniach mierzone są tylko wybrane elementy w celu identyfikacji określonej wielkości własnej układu (Zimmerman & Kaouk 1992; Schultz et al. 1996). Jedną z najbardziej powszechnie stosowanych technik aktualizacji są iteracyjne metody optymalizacji. Mogą one między innymi bazować wprost na minimalizacji różnicy pomiędzy eksperymentalnymi, a numerycznymi postaciami drgań (Schwarz et al. 2007) lub na wrażliwości parametrów modalnych konstrukcji (Bakir et al. 2007; Minshui & Hongping 2008). Inną metodą jest podejście Bayes'a, które opiera się na prawie Bayes'a oraz funkcjach przeprowadzających wnioskowanie statystyczne przy użyciu dowodów lub obserwacji w celu aktualizacji prawdopodobieństwa, że dana hipoteza może być prawdziwa



(Marwala 2009). Metody oparte na prawie Bayes’a z powodzeniem stosowane są również w aktualizacji dużych konstrukcji, w tym mostów (Wong et al. 2006; Zheng et al. 2009). Inną grupą są inteligentne metody obliczeniowe. Bazują one na sztucznej inteligencji i wykorzystują zbiory rozmyte do aktualizacji modeli numerycznych. Również wśród tych metod można znaleźć udane aplikacje do konstrukcji mostowych (Jung & Kim 2009; Liu et al. 2009).

Aktualizacją modeli MES przy użyciu algorytmu iteracyjnego, wykorzystującego częstotliwości i postaci drgań własnych zajmował się również dr inż. Michał Hirsz (Hirsz & Wilde 2004; M. Hirsz & Wilde 2005; Michał Hirsz & Wilde 2005; Hirsz 2008; Hirsz & Wild 2010). Obszar jego zainteresowań koncentrował się głównie na aktualizacji parametrów projektowych płyty swobodnie podpartej z wykorzystaniem wyłącznie translacyjnych stopni swobody mierzonych przy pomocy akcelerometrów. W pracach wykorzystano dwa modele doświadczalne, belki wspornikowej i płyty swobodnie podpartej. Wykonane w niniejszej pracy analizy są kontynuacją prac prowadzonych przez dr. Hirsza i koncentrują się na zastosowaniu czujników rotacji do diagnostyki nieniszczącej, rozwinięciu procedur typowania poprawnych rozwiązań oraz aplikacji technologii diagnostycznej dla rzeczywistych konstrukcjach inżynierskich.

Stosowane metody aktualizacji modeli numerycznych można zróżnicować pod względem danych wykorzystywanych do samej procedury. Eksperymentalne dane dynamiczne wykorzystywane w procedurach aktualizacji mogą być przedstawione w trzech różnych dziedzinach: w dziedzinie czasu, w dziedzinie częstotliwości oraz w dziedzinie czasowo - częstotliwościowej. Dane przedstawione w dziedzinie czasu, pochodzą bezpośrednio z pomiaru i przedstawiają pomierzony sygnał i zmianę jego charakterystyk w czasie (Majumder & Manohar 2003; Qu & Peng 2007; Zimin & Zimmerman 2009). Bardzo często jednak w procedurach aktualizacji dziedzina czasu, konwertowana jest na dziedzinę częstotliwości za pomocą transformaty Fouriera (FFT), która pozwala zaobserwować zmiany w sygnale w zależności od częstotliwości (Fasel et al. 2003; Nelwamondo & Marwala 2006; Lee & Kim 2007). Dziedzina czasu może zostać również przekształcona na dziedzinę czasowo-częstotliwościową poprzez użycie na przykład okienkowej transformaty Fouriera, bądź, na przykład, transformaty Gabora (Huang & Nemat-Nasser 2006; Gökdağ & Kopmaz 2009; Yan et al. 2010). Jest ona stosowana zwykle do elementów o zmiennych charakterystykach dynamicznych z uwagi na to, że pozwala na obserwację zmian częstotliwości sygnału w czasie. Dodatkową kategorią danych, często wykorzystywaną przy poszukiwaniu uszkodzeń konstrukcji, są parametry dynamiczne pozyskane z funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (Marwala 2000). Uzyskane w ten sposób częstotliwości oraz postaci drgań własnych jak również tłumienie konstrukcji są wrażliwe na zmianę parametrów projektowych i tym samym pozwalają na lokalizację uszkodzenia (Chen 2008; Shahdin et al. 2009).

Należy również podkreślić, że przy aktualizacji modeli MES, z uwagi na trudności w modelowaniu, zasadne jest pominięcie aktualizacji połączeń śrubowych bądź spawanych, jak również warunków podporowych. Różnice w wynikach wynikające z tych parametrów mogą być rekompensowane poprzez odpowiednie zaktualizowanie właściwości materiałowych bądź znaczących elementów konstrukcyjnych. Dodatkowo celowe jest założenie, że model pracuje w zakresie liniowo-sprężystym oraz że wpływ tłumienia na konstrukcje jest pomijalnie mały (Mottershead & Friswell 1993; Friswell & Mottershead 1995; Marwala 2010).

Obecnie stosowane techniki aktualizacji coraz częściej wykorzystywane są w budownictwie. Coraz większe potrzeby diagnostyczne nowo wznoszonych konstrukcji mostowych sprawiły, że w ostatnich latach również w tej dziedzinie można było doczekać się wielu obiecujących realizacji (Jaishi & Ren 2007; Živanović et al. 2007; Huang et al. 2008; Minshui & Hongping 2008; Bayraktar et al. 2009; Schlune et al. 2009; Li & Du 2009; Yue & Li 2014; Park et al. 2015; Xiao et al. 2015; Zhong et al. 2016). Rozwój metod numerycznych oraz technik pomiarowych pozwala na przypuszczenie, że w najbliższej przyszłości metody bazujące na aktualizacji modelu MES staną się powszechnie stosowanym narzędziem diagnostycznym.

## **1.4 Czujniki i technologie pomiarowe stosowane w mostownictwie**

Do podstawowych badań diagnostycznych wykonywanych na obiektach mostowych można zaliczyć monitoringi oraz badania pod próbnym obciążeniem. Obiekty mostowe są właściwe jedynymi konstrukcjami budowlanymi w Polsce, które podlegają obowiązkowym próbnym obciążeniom. Zasady i zakres ich przeprowadzania narzucony jest w kilku obowiązujących aktach prawnych i normach: PN-89/S-10050 Obiekty mostowe. Konstrukcje stalowe. Wymagania i badania., PN-99/S-10040 Obiekty mostowe. Konstrukcje betonowe. Wymagania i badania., Zarządzeni nr 47 GDDKiA z dnia 10.08.2011r., Id-16 (D-83) PKP PLK S.A. 2005r., Standardy techniczne PKP PLK 2009. Badania przeprowadzane są zarówno dla nowych obiektów, przed oddaniem ich do eksploatacji, jak również dla obiektów użytkowanych, w celu sprawdzenia lub uzupełniania danych o zachowaniu się konstrukcji. W zależności od rodzaju użytkowego obiektu (drogowy, kolejowy), materiału z którego jest wykonany jak również obowiązującego dla danej konstrukcji aktu prawnego, przeprowadzane badania obejmują swoim zakresem badania wyłącznie statyczne bądź statyczne i dynamiczne.

Podstawowym badaniem podczas próbnych obciążeń jest badanie statyczne, które powinno być pierwszym obciążeniem użytkowym obiektu inżynierskiego. Podczas badań statycznych podstawowymi mierzonymi wartościami są: przemieszczenia, odkształcenia,

osiadania podpór oraz temperatura konstrukcji. Przy pomiarze statycznym odczyty powinny być wykonywane z odpowiednim interwałem czasowym, tak aby możliwe było zarejestrowanie zmian mierzonych wartości, nie ma jednak wymogu ciągłego pomiaru o wysokiej częstotliwości próbkowania. Badania dynamiczne charakteryzują się zwykle dużą zmiennością parametrów w czasie. Podstawowymi mierzonymi wartościami są: przemieszczenia, przyspieszenia oraz odkształcenia. Przebiegi zmienności parametrów powinny być rejestrowane z próbkowaniem sygnału zależnym od spodziewanych częstotliwości sygnału.

Do niedawna najpowszechniej stosowanymi czujnikami do statycznego pomiaru przemieszczeń były czujniki zegarowe z wyświetlaczem analogowym bądź cyfrowym (rysunek 1.4a). Wyposażone są one zwykle w przekładnię zębatą. Ich niewątpliwą zaletą jest brak konieczności podłączania czujników do systemów akwizycji danych, brak okablowania i duża dokładność pomiaru. Największą wadą jest brak automatycznej możliwości rejestrowania pomiarów w czasie i ich przydatność wyłącznie podczas pomiarów statycznych. Drugą grupą powszechnie stosowanych czujników są czujniki indukcyjne (rysunek 1.4b). Ich mechanizm działania wykorzystuje zmianę indukcyjności w zależności od przemieszczeń rdzenia czujnika. Ich największą zaletą jest duża dokładność pomiarów zarówno podczas badań statycznych jak i dynamicznych oraz ciągła rejestracja sygnału w czasie. Wymagają one jednak odpowiedniego systemu akwizycji danych oraz okablowania. Inna grupa czujników służących do pomiaru przemieszczeń są interferometry laserowe (rysunek 1.4c). Umożliwiają one pomiary zarówno w zakresie statycznym jak i dynamicznym Ich największą zaletą w stosunku do czujników zegarowych oraz indukcyjnych jest brak konieczności połączenia czujnika z mierzoną konstrukcją. Do pomiarów statycznych konstrukcji, zarówno w zakresie przemieszczeń jak i osiadań podpór powszechnie wykorzystuje się też przyrządy geodezyjne (rysunek 1.4d). Do najczęściej wykorzystywanych należą niwelatory precyzyjne oraz tachimetry. Ich główną zaletą jest możliwość pomiaru z bardzo dużej odległości. Charakteryzują się one jednak mniejszą dokładnością pomiaru niż wcześniej wymienione grupy czujników. Do rzadziej stosowanych czujników służących do pomiaru przemieszczeń można zaliczyć: czujniki rezystancyjne, czujniki inkrementalne, laserowe czujniki triangulacyjne, radary interferencyjne, przyrządy hydrostatyczne oraz czujniki radiowe.



Rysunek 1.4 Czujniki do pomiaru przemieszczeń a) mechaniczne- zegarowe analogowe i cyfrowe b) indukcyjne c) interferometry laserowe d) geodezyjne- tachimetr

Czujnikami do pomiaru odkształceń o najdłuższej historii, są tensometry elektrooporowe (rysunek 1.5a). Ich zasada działa polega na zmianie oporności, w zależności od wydłużenia tensometru. Mimo swojej długiej historii są one nadal powszechnie stosowane. Ich największą zaletą są małe rozmiary pozwalające na punktowy pomiar odkształcenia. Wymagają one jednak dużego doświadczenia pomiarowego, a ich montaż jest stosunkowo trudny i pracochłonny, wymaga zawsze odpowiedniego przygotowania powierzchni, w tym usunięcia powłok malarskich. Z uwagi na dużą wrażliwość na czynniki środowiskowe, przy wykorzystaniu ich poza laboratorium, wymagają również odpowiedniego zabezpieczenia. Do pomiaru za ich pośrednictwem niezbędne jest również użycie specjalnie przystosowanego systemu akwizycji danych. Inna grupa czujników służących do pomiaru odkształceń to tensometry strunowe (rysunek 1.5b), w których odkształcenie mierzone jest poprzez zmianę częstotliwości drgań umieszczonych wewnątrz nich struny. Do ich istotnych wad należy trudność w montażu, muszą zostać przymocowane do konstrukcji poprzez klejenie bądź spawanie, oraz przydatność głównie do badań statycznych. Inną grupą czujników służących do pomiaru odkształceń, która jest przydatna tylko w przypadku pomiarów statycznych, są ekstensometry mechaniczne – zegarowe (rysunek 1.5c). Ich montaż odbywa się poprzez przyklejenie dwóch płytek tworzących bazę, a następnie każdorazowe przyłożenie ekstensometru. Ich zaletą jest to, że jeden czujnik może być wykorzystany wielokrotnie, nie umożliwią one jednak ciągłego pomiaru w czasie. Do czujników mierzących odkształcenia, które są najprostsze w montażu i nie wymagają ingerencji w powierzchnię konstrukcji są ekstensometry indukcyjne (rysunek 1.5d). Pozwalają one na pomiary zarówno statyczne jak i dynamiczne. Istotną wadą w stosunku do tensometrów elektrooporowych jest zdecydowanie dłuższa baza pomiarowa, która nie umożliwia punktowych pomiarów odkształceń.



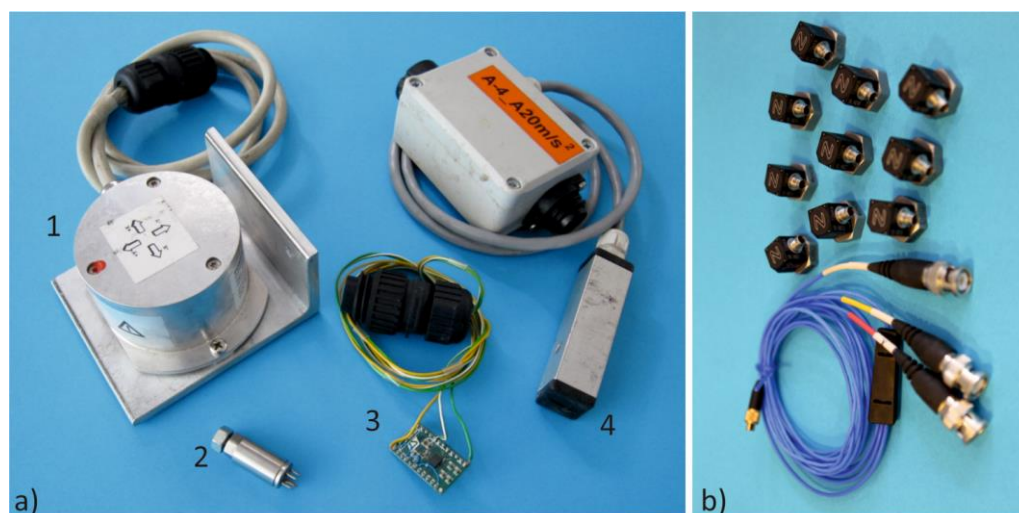
Rysunek 1.5 Czujniki do pomiaru odkształceń a) tensometr elektrooporowy b) tensometr strunowy (źródło: Neostrein) c) ekstensometry mechaniczny d) ekstensometry indukcyjne

Do pomiaru temperatury konstrukcji najczęściej wykorzystywane są czujniki półprzewodnikowe i rezystancyjne. Stosuje się również czujniki termoelektryczne i pirometry.

W przypadku badań dynamicznych poza pomiarami przemieszczeń oraz odkształceń, podstawowym mierzonym parametrem jest przyspieszenie konstrukcji. Pomiary wykonuje się przy użyciu akcelerometrów piezoelektrycznych (rysunek 1.6b), wykorzystujących zjawisko

piezoelektryczne dla przetworzenia zmian kształtu lub sił nań działających na napięcie elektryczne, indukcyjnych (rysunek 1.6a) lub pojemnościowych wykonywanych w technologii MEMS (rysunek 1.6a).

Relatywnie rzadko podczas badań in situ mierzone są kąty obrotu. Najczęściej w tym celu wykorzystuje się laserowe poziomnice – inklinometry (rysunek 1.6a) lub pochyłomierze, które poprzez pomiar kąta obrotu pozwalają na wyznaczenie linii ugięcia przęsła (Olaszek 2015). Z reguły jednak na zakresy pomiarowe mogą one być tylko wykorzystywane do badań statycznych konstrukcji. Mierzą one zależność pomiędzy kątem nachylenia w zależności od zmiany przyspieszenia ziemskiego. Nową, bardzo rzadko stosowaną aczkolwiek niezwykle obiecującą grupą czujników do pomiaru kątów obrotu są żyroskopy typu MEMS (rysunek 1.6a).

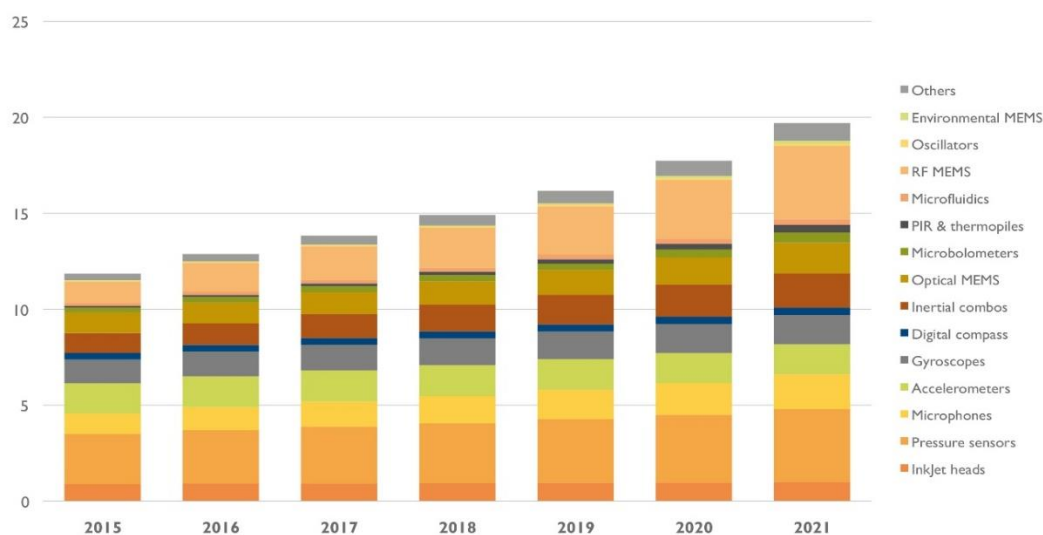


Rysunek 1.6 Czujniki pomiarowe a) 1- inklinometr 2- akcelerometr indukcyjny 3- żyroskop MEMS 4- akcelerometr MEMS w obudowie b) akcelerometry piezoelektryczne

Najbardziej obiecującą gałęzią rozwoju czujników pomiarowych są nowoczesne czujniki MEMS (Micro-Electro-Mechanical Systems). Są to układy łączące w sobie zarówno elementy mechaniczne jak i elektroniczne. Popularnym ich zastosowaniem są akcelerometry, które wypierają stopniowo inne rodzaje czujników do pomiaru przyspieszeń z rynku. Szybko rozwijająca się technologia pozwala również na budowę innych czujników o różnych zastosowaniach takich jak: czujniki do pomiarów środowiskowych, biometrycznych, optycznych itd. (rysunek 1.7). Do największych zalet czujników MEMS należą niewielkie rozmiary, a tym samym bardzo małe masy czujników i ich inercja oraz niskie zużycie surowców na ich produkcję, ale również niski pobór prądu, mała podatność na zmiany temperatury i wibracje oraz łatwa integracja z innymi urządzeniami. Dużą zaletą jest również możliwość tworzenia czujników zintegrowanych, które pozwalają na redukcję ilości podłączeń oraz kabli w systemach pomiarowych. Ich bardzo szybki rozwój związany jest w dużej mierze z potrzebami szeroko pojętej elektroniki. Znajdują one

zastosowanie w sprzęcie elektronicznym codziennego użytku takim jak smartfony, tablety, gry komputerowe czy sprzęt gospodarstwa domowego. Stosowane są również w elektronice samochodowej, lotnictwie oraz górnictwie naftowo-gazowym.

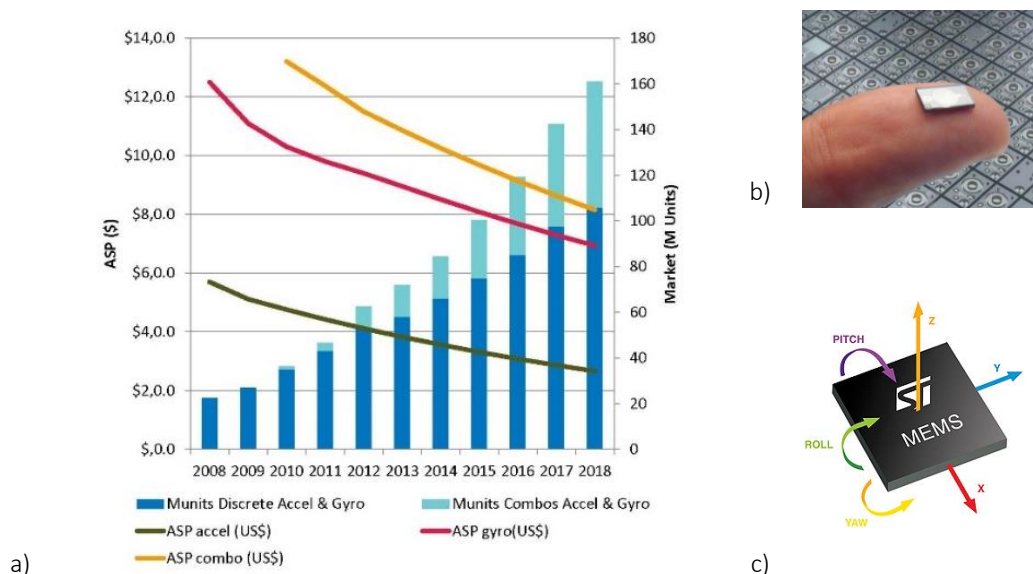
Rozwój akcelerometrów oraz żyroskopów MEMS jest związany także z coraz większą ich miniaturyzacją oraz zwiększaniem możliwości pomiarowych. Prognozy dotyczące rynku związanego ze sprzedażą akcelerometrów, żyroskopów (rysunek 1.9c) oraz czujników zintegrowanych MEMS, zakładają ponad 8-krotny wzrost ich sprzedaży pomiędzy rokiem 2008, a 2018 (rysunek 1.9a). Związane jest to niewątpliwie z ich miniaturyzacją (rysunek 1.9b), ale też stałym spadkiem ich cen. Czujniki typu MEMS niewątpliwie pretendują do miana czujników najbliższej przyszłości.



Rysunek 1.7 Prognozy rozwoju rynku czujników MMS w B(\$) (źródło: Yole Development 2015)



Rysunek 1.8 Przykładowe rodzaje i zastosowanie czujników MEMS (źródło: Yole Development 2015)



Rysunek 1.9 a) Prognozy rozwoju rynku akcelerometrów, żyroskopów oraz czujników zintegrowanych typu MEMS b) przykładowy rozmiar czujnika MEMS c) schemat działania żyroskopu MEMS (źródło: Yole Development 2015)

## 1.5 Cel i zakres pracy

W niniejszej pracy głównymi celami badań naukowych i prac rozwojowych są:

- ✓ rozszerzenie standardowo używanych w diagnostyce translacyjnych stopni swobody o pomiary rotacyjnych stopni swobody mierzonych za pomocą żyroskopów typu MEMS;
- ✓ opracowanie autorskich indeksów ułatwiających detekcję uszkodzeń za pomocą aktualizacji parametrów modelu MES na bazie częstości i postaci drgań własnych;
- ✓ opracowanie autorskich definicji macierzy wag;
- ✓ budowa algorytmu selekcji poprawnych rozwiązań aktualizacji parametrów;
- ✓ aplikacja systemu pomiarowego złożonego z czujników żyroskopowych typu MEMS do diagnostyki konstrukcji mostowych.

Zakres prac obejmuje badania symulacyjne na danych numerycznych i danych eksperymentalnych uzyskanych podczas badań modelu belki swobodnie podpartej oraz rzeczywistego obiektu kładki nad ulicą Chwarznieńską w Gdyni.

W pierwszym etapie badań przeprowadzono aktualizację parametrów na podstawie danych numerycznych dla modelu MES belki swobodnie podpartej. Aktualizowanymi parametrami były sztywności giętne poszczególnych elementów modelu MES belki. Uszkodzenie

skumulowane było poprzez zmniejszenie sztywności giętej o intensywności odpowiednio 1%, 5%, 10% i 15% w elemencie numer 3 lub 5 modelu MES.

Następny etap obejmował badania doświadczalne na modelu belki swobodnie podpartej. Na podstawie częstotliwości i postaci drgań własnych uzyskanych z sygnałów pomiarowych, wykonano aktualizację parametrów modelu MES belki. Uszkodzenie symulowane było poprzez dodanie mas o 3 różnych intensywnościach w elementach 3 lub 5 belki modelowej. Wymuszenie dynamiczne przykładane było w polu 6 i 8 analizowanej belki.

Kolejnym etapem prac było przeprowadzenie badań przy użyciu żyroskopów MEMS na trzech rzeczywistych obiektach inżynierskich: łukowej kładce nad drogą S8, łukowej kładce nad trasą Ogińskiego w Bydgoszczy oraz wiadukcie Brańskiego w Koninie.

Ostatni etap obejmował aktualizację parametrów modelu MES na podstawie badań eksperymentalnych przeprowadzonych na kładce nad ulicą Chwarznieńską w Gdyni. Uszkodzenie symulowane było poprzez dodanie masy w dwóch wybranych polach kładki. Jako wymuszenie dynamiczne używano dwóch wzbudników drgań oraz grupy pieszych.



## 2 Podstawy teoretyczne

### 2.1 Metody redukcji bazy

Metoda Elementów Skończonych (MES) jest powszechnie stosowana w obliczeniach numerycznych obiektów budowlanych. Dynamiczny rozwój mocy obliczeniowej komputerów umożliwił modelowanie konstrukcji i związanych z nią procesów mechanicznych, fizycznych i chemicznych z bardzo dużą dokładnością. Jednak wzrost rozmiaru modelu obliczeniowego powoduje znaczny wzrost nakładów pracy potrzebnych do jego rozwiązania. Ma to bardzo istotne znaczenie zwłaszcza w przypadku zagadnień związanych z analizą dynamiczną, gdzie rozwiązania wymagają złożone układy o bardzo dużej liczbie niewiadomych z całkowaniem równań w domenie czasu. Dostosowanie liczby stopni swobody modelu obliczeniowego jest bardzo często wykonywane w analizach numerycznych bazujących na badaniach eksperymentalnych. W takim wypadku mierzona liczba parametrów jest znacznie mniejsza od liczby stopni swobody modelu obliczeniowego. To samo dotyczy parametrów konstrukcji pozyskiwanych z badań eksperymentalnych i analiz numerycznych, takich jak na przykład częstotliwości drgań własnych, czy postacie drgań własnych. Dlatego analizy związane z porównywaniem i walidacją modeli obliczeniowych na danych pomiarowych rzeczywistych konstrukcji najczęściej bazują na technikach redukcji stopni swobody modelu MES.

Redukcja liczby stopni swobody danego zadania może być wykonana poprzez kondensację macierzy modelu obliczeniowego. Większość metod kondensacji wymaga podziału stopni swobody układu na dwa typy: zasadnicze (master) i zależne (slave). Taki podział pozwala na eliminację nieistotnych dla danej analizy stopni swobody i redukcję modelu numerycznego.

#### 2.1.1 Metoda Statyczna Guyana

Metoda statyczna Guyana (Guyan 1965; Irons 1965) jest jedną z najstarszych i najpopularniejszych metod redukcji bazy dla układów o dużej liczbie stopni swobody. W metodzie tej wektory przemieszczeń i sił, jak również macierze mas i sztywności, zostają tak przeszeregowane aby podzielić je na odrębne podwektory i podmacierze, odnoszące się do zasadniczych i zależnych stopni swobody. Przy założeniu, że tłumienie w układzie jest małe oraz obciążenie przykładowe jest tylko i wyłącznie do zasadniczych stopni swobody można zapisać:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{P}, \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_m \\ \ddot{\mathbf{x}}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_m \\ \mathbf{0}_s \end{Bmatrix}. \quad (2.2)$$

Indeks  $m$  związany jest z zasadniczymi stopniami swobody (master), a indeks  $s$  odnosi się do stopni swobody zależnych (slave).

Jeżeli pominiemy siły bezwładności, które związane są z drugą częścią wektora (slave) możemy zapisać równanie:

$$\mathbf{K}_{sm} \mathbf{x}_m + \mathbf{K}_{ss} \mathbf{x}_s = \mathbf{0}_s. \quad (2.3)$$

Wszystkie zmienne można odnieść tylko do zasadniczych stopni swobody:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_m \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_s \mathbf{x}_m, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Macierz  $\mathbf{T}_s$  nazywamy macierzą transformacji statycznej pomiędzy pełnym wektorem przemieszczeń, a wektorem złożonym tylko z zasadniczych przemieszczeń. W związku z tym macierze zredukowane układu można przedstawić jako:

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{T}_s^T \mathbf{K} \mathbf{T}_s, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{T}_s^T \mathbf{M} \mathbf{T}_s. \quad (2.7)$$

Kondensacja Guyana nie wprowadza żadnego błędu do rozwiązania zagadnień statycznych, oznacza to, że odpowiedź układu uzyskana przy pomocy macierzy zredukowanej jest dokładna tylko dla zerowej częstotliwości wymuszenia. Wraz ze wzrostem częstotliwości wymuszenia błąd wprowadzany do rozwiązania przy pomocy metody redukcji Guyan'a wzrasta.

Przykłady zastosowania metody redukcji Guayan'a można znaleźć w pracach Prakash i Prabhu (1986), Bouhaddi i Fillod (1992), Noor (1994).

### 2.1.2 Metoda Improved Reduced System (IRS)

Metoda IRS została wprowadzona przez O'Callahan'a (1989) jako udoskonalenie redukcji statycznej Guyan'a. Uwzględnienia ona wpływ zależnych sił bezwładności jako sił pseudo - statycznych.

Metoda ta, za cenę przyspieszenia procesu obliczeniowego, zmniejsza dokładność obliczeń i nie pozwala na odwzorowanie w pełni zachowania się niezredukowanej konstrukcji.

Jednak, dla niskich częstotliwości własnych konstrukcji, metoda ta wykazuje znacznie lepszą zgodność niż redukcja statyczna Guyan'a.

Z uwagi na postać macierzy transformacji  $\mathbf{T}_{IRS}$ , macierz sztywności charakteryzuje się większą sztywnością niż macierz zredukowana otrzymana metoda Guyan'a:

$$\mathbf{T}_{IRS} = \mathbf{T}_s + \mathbf{ZMT}_s\mathbf{M}_R^{-1}\mathbf{K}_R, \quad (2.8)$$

gdzie macierze mas  $\mathbf{M}_R$  i sztywności  $\mathbf{K}_R$  to macierze otrzymane przy użyciu redukcji statycznej, macierz  $\mathbf{T}_s$  jest macierzą transformacji stycznej, a macierz  $\mathbf{Z}$  dana jest wzorem:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ss}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Problemem redukcji bazy przy użyciu metody IRS zajmowali się między innymi: Friswell i inni (1995), Friswell i inni (1998), ; Kim i Cho (2008), Li i inni (2008).

### 2.1.3 Metoda System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP)

Zaproponowana przez O'Callahan'a i innych (1989) metoda System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP) w celu zbudowania macierzy transformacji, korzysta z wektorów postaci drgań własnych obliczonych analitycznie dla modelu bez tłumienia. Macierz wektorów własnych podzielona zostaje na część związaną z zasadniczymi stopniami swobody i na część związaną z zależnymi stopniami swobody zgodnie ze wzorem:

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{mm} & \boldsymbol{\phi}_{ms} \\ \boldsymbol{\phi}_{sm} & \boldsymbol{\phi}_{ss} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Macierz transformacji dana jest wzorem:

$$\mathbf{T}_{SEREP} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ \boldsymbol{\phi}_{sm} & \boldsymbol{\phi}_{mm}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

a zredukowane macierze sztywności i mas:

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{T}_{SEREP}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{SEREP}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{T}_{SEREP}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{SEREP}. \quad (2.13)$$

Zaletą metody SEREP jest to, że zachowuje ona takie same częstotliwości drgań własnych jakie ma model niezredukowany. Wyniki otrzymane przy jej użyciu, nie zależą od wyboru stopni swobody. Metoda ta pozwala więc na wybór dowolnych stopni swobody jako zasadniczych.

Wadą metody jest to, że dla każdego modelu wymaga rozwiązania problemu własnego i wyznaczenia macierzy modalnej (Sastry et al. 2003; Das & Dutt 2008).

## 2.2 Kryteria walidacji postaci drgań własnych

Zestawienie par modalnych, czyli częstotliwości i postaci drgań własnych tworzy reprezentację podstawowych dynamicznych właściwości konstrukcji. Postacie drgań mogą być podstawą wielu dalszych analiz, takich jak walidacja czy aktualizacja modeli numerycznych. Umożliwiają one tym samym ocenę stanu konstrukcji, bądź są podstawą analiz diagnostycznych lokalizujących uszkodzenia.

Prowadzenie zaawansowanych analiz, bazujących na porównywaniu charakterystyk dynamicznych wyznaczonych w oparciu o badania eksperymentalne rzeczywistej konstrukcji i charakterystyk otrzymanych w wyniku analiz numerycznych, wymaga zastosowania odpowiednich technik porównawczych. Jednym z bardziej istotnych problemów jest „parowanie” postaci drgań własnych, zarówno pod względem częstotliwości jak i postaci drgań. Dotyczy to zwłaszcza bardziej skomplikowanych konstrukcji, w których niejednokrotnie część postaci drgań może wydawać się podobnych. Drugim istotnym problemem, jest różna skala amplitudy wektorów postaci drgań własnych otrzymywanych z modelu numerycznego i z badań eksperymentalnych.

### 2.2.1 Modal Assurance Criterion (MAC)

Modal Assurance Criterion (MAC) (Allemang & Brown 1982) jest jednym z najpopularniejszych kryteriów porównywania postaci drgań własnych. Jest ono bardzo wrażliwe na duże różnice w postaciach drgań, i relatywnie mało wrażliwe na niewielkie zmiany. Kryterium porównuje tylko wektory postaci drgań co oznacza, że niezbędne jest równocześnie zastosowanie kryterium porównującego częstotliwości drgań własnych.

Kryterium MAC dane jest wzorem:

$$MAC_{ij} = \frac{|\phi_{mi}^T \phi_{aj}|^2}{(\phi_{aj}^T \phi_{aj})(\phi_{mi}^T \phi_{mi})}, \quad (2.14)$$

gdzie:

$\phi_{mj}$  - j-ta postać drgań otrzymana w wyniku badań eksperymentalnych,

$\phi_{aj}$  - j-ta postać drgań otrzymana w wyniku analiz numerycznych.

Wynikiem jest macierz MAC, w której elementy przyjmują wartości pomiędzy zerem (brak zgodności) a jeden (całkowita zgodność). Taka prezentacja pozwala, wraz z porównaniem częstotliwości, na dobranie odpowiednich par modalnych pochodzących z badań eksperymentalnych i z analizy numerycznej. Przy wartości MAC większej od 0,9 przyjmuje się, że zgodność postaci drgań jest duża.

Kryterium MAC jest powszechnie stosowane m.in. przy (Allemang 2003):

- ✓ porównywaniu postaci drgań własnych otrzymanych z badań eksperymentalnych z postaciami otrzymanymi w wyniku analiz numerycznych (porównanie postaci drgań),
- ✓ walidacji modeli obliczeniowych na podstawie danych eksperymentalnych,
- ✓ aktualizacji modeli obliczeniowych na podstawie danych eksperymentalnych,
- ✓ sprawdzaniu spójności/stabilności w algorytmach szacowania parametrów modalnych,
- ✓ kompletowaniu lub rozbudowie eksperymentalnych wektorów postaci drgań własnych,
- ✓ uśrednianiu wektorów postaci drgań,
- ✓ odwzorowywaniu macierzy układu pomiędzy modelem analitycznym a eksperymentalnym,
- ✓ szacowaniu wektora drgań własny otrzymanego na podstawie wymuszeń w różnych miejscach konstrukcji,
- ✓ szacowaniu wektora drgań własnych otrzymanego na podstawie różnych technik identyfikacji z tych samych danych pomiarowych,
- ✓ wykrywaniu uszkodzeń konstrukcji,
- ✓ poszukiwaniach optymalnego rozmieszczenia czujników pomiarowych.

Jedną z istotnych zalet kryterium MAC jest to, że porównanie wektorów postaci drgań może być dokonane zarówno dla modelu niezredukowanego, jak i zredukowanego. Nie wymaga również wyznaczania macierzy mas i sztywności konstrukcji. Kolejną z zalet jest to, że obliczenia mogą być prowadzone również dla zespolonych postaci drgań własnych.

Kryterium MAC zostało wprowadzone razem ze współczynnikiem Modal Scale Factor (MSF).

### 2.2.2 Modal Scale Factor (MSF)

Współczynnik Modal Scale Factor (MSF) (Allemang & Brown 1982) jest współczynnikiem skalującym postać drgań otrzymaną z badań eksperymentalnych w stosunku do postaci otrzymanej z analiz numerycznych. Współczynnik wyraża się wzorem:

$$MSF_i = \frac{\phi_{a_i}^T \phi_{m_i}}{\phi_{m_i}^T \phi_{m_i}}, \quad (2.15)$$

gdzie:

$\phi_{m_j}$  - j-ta postać drgań otrzymana w wyniku badań eksperymentalnych,

$\phi_{a_j}$  - j-ta postać drgań otrzymana w wyniku analiz numerycznych.

Współczynnik MSF uwzględnia wielkość amplitudy porównywanych postaci i różnice fazowe. Różne wielkości amplitudy porównywanych wektorów postaci drgań mogą wynikać z tego, że wektory obliczane na podstawie analiz numerycznych są znormalizowane przez macierze mas, natomiast w przypadku wektorów otrzymanych w wyniku badań eksperymentalnych nie jest dokładnie określony rozkład masy konstrukcji. Dlatego też najczęściej normalizuje się pomierzone postaci drgań w odniesieniu do macierzy mas otrzymanej na podstawie analiz numerycznych.

Współczynnik MSF, nie zawiera danych dotyczących jakości dopasowania porównywanych wektorów, a jedynie określa współczynnik ich skali.

### 2.2.3 Normalised Modal Difference

Kryterium Normalised Modal Difference (NMD) (Waters 1995) jest zdefiniowane przy użyciu kryterium MAC i można je zapisać w postaci:

$$NMD_{ij} = \sqrt{\frac{1 - MAC_{ij}}{MAC_{ij}}}. \quad (2.16)$$

Kryterium NMD przyjmuje wartość 0 przy pełnej zgodności postaci drgań i wartość równą 1 przy braku zgodności postaci drgań własnych.

Kryterium to oblicza średni błąd ze wszystkich stopni swobody porównywanej postaci. Jest ono bardziej wrażliwe na zmiany w postaciach drgań własnych niż MAC.

## 2.2.4 Normalized Cross Orthogonality

Kryterium Normalized Cross Orthogonality (NCO) (Lieven & Waters 1994) bazuje na warunkach ortogonalności wektorów postaci drgań. Kryterium NCO podobnie jak MAC wyznacza związek pomiędzy dwoma dowolnymi wektorami postaci drgań własnych. W przeciwieństwie do kryterium MAC, do wyznaczenia kryterium NCO korzysta się z macierzy mas lub sztywności według wzoru:

$$NCO_{ij} = \frac{|\phi_{mi}^T M \phi_{aj}|^2}{(\phi_{aj}^T M \phi_{aj})(\phi_{mi}^T M \phi_{mi})}, \quad (2.17)$$

lub

$$NCO_{ij} = \frac{|\phi_{mi}^T K \phi_{aj}|^2}{(\phi_{aj}^T K \phi_{aj})(\phi_{mi}^T K \phi_{mi})}, \quad (2.18)$$

gdzie:

$\phi_{mj}$  - postać drgań otrzymana w wyniku badan eksperymentalnych,

$\phi_{aj}$  - postać drgań otrzymana w wyniku analiz numerycznych,

$M$  – macierz mas układu,

$K$  – macierz sztywności układu.

Kryterium NCO może przyjmować wartości od 0 (brak zgodności wektorów postaci drgań) do 1 (pełna zgodność wektorów postaci drgań). Wartość kryterium NCO jest wzmocniona przez macierz mas, co powoduje, że jest ono bardziej wrażliwe na lokalne postaci drgań, którym odpowiada duża energia kinetyczna, niż dla postaci drgań niższego rzędu.

Kryterium NCO może być używane tylko do postaci drgań opisanych liczbami rzeczywistymi, które są znormalizowane przez macierz mas.

## 2.3 Metody optymalizacji

Zgodnie ze słownikiem języka polskiego (słownik PWN) optymalizacja to:

„1. organizowanie jakichś działań, procesów itp. w taki sposób, aby dały jak największe efekty przy jak najmniejszych nakładach

2. poszukiwanie za pomocą metod matematycznych najlepszego, ze względu na wybrane kryterium, rozwiązania danego zagadnienia gospodarczego, przy uwzględnieniu określonych ograniczeń.”

Problemy optymalizacji znane były już w starożytności. Jako jeden z pierwszych znanych przykładów, można przytoczyć poemat Eneida rzymskiego poety Wergiliusza. Opisuje on historię założenia Kartaginy. Założycielom miasta Bogowie postawili jeden z pierwszych problemów optymalizacyjnych. Mieli oni dla ograniczonej długości murów znaleźć optymalną krzywą, taką aby miasto miało jak największą powierzchnię. Później, w czasach nowożytnych, do rozwoju optymalizacji przyczynili się między innymi Newton czy Lagrange. Okres drugiej wojny światowej i prowadzone wtedy działania wojenne miały również wpływ na rozwój optymalizacji. Jednak to rozwój metod komputerowych spowodował, że nastąpił gwałtowny wzrost zainteresowania zadaniami optymalizacji, które bazują na algorytmach numerycznych.

Na chwilę obecną uproszczony podział metod optymalizacji można przedstawić:

- optymalizacja statyczna:
  - ✓ optymalizacja liniowa (programowanie liniowe)
    - metoda simpleksów
    - zagadnienie dualne
  - ✓ -optymalizacja nieliniowa (programowanie nieliniowe)
    - bezgradientowe bez ograniczeń
      - Hooke’a-Jeevesa
      - Rosenbrocka
      - Neldera-Meada
      - Gaussa-Seidla
      - Powella
      - Złotego podziału????
      - Interpolacji kwadratowej??
    - gradientowe bez ograniczeń
      - Gradientu prostego
      - Najszybszego spadku
      - Newtona
      - Gradientu sprzężonego
      - Levenberga-Marquarda
    - gradientowe z ograniczeniami
      - Programowanie kwadratowe
      - Funkcja kary
- optymalizacja dynamiczna
  - metody klasyczne rachunek wariacyjny
  - zasada maksimum
  - programowanie dynamiczne
- algorytmy genetyczne, sieci neuronowe



### 2.3.1 Programowanie liniowe

O problemie programowania liniowego możemy mówić wówczas, gdy zarówno funkcja celu jak i funkcje ograniczeń są funkcjami liniowymi (Szymczak 1998).

Postać standardową problemów programowania liniowego możemy przedstawić jako

$$\min_{\mathbf{x} \in X_d} F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (2.19)$$

$$X_d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : [\mathbf{A}]\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \geq 0\}, \quad (2.20)$$

gdzie

$\mathbf{x}$  - wektor zmiennych niezależnych ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ),

$\mathbf{b}$  - wektor prawych stron ograniczeń ( $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ),

$\mathbf{A}$  - macierz warunków ( $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ),

$\mathbf{c}$  - wektor współczynników funkcji celu ( $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ).

#### 2.3.1.1 Metoda simpleksów

W metodzie simpleksów rozwiązanie znajduje się poprzez poszukiwanie wierzchołków obszaru ograniczeń, tak aby wartość funkcji celu w kolejnym kroku nie była gorsza niż w poprzednim. Simpleksem nazywany jest n-wymiarowym wielościan wypukły mający n+1 wierzchołków. Algorytm metody simpleksów można podzielić na sześć zasadniczych faz (Amborski 2009).

W fazie pierwszej należy przekształcić układ równań do postaci kanonicznej. Oznacza to takie przedstawienie problemu, aby poszukiwane było maksimum/minimum liniowej funkcji celu, której ograniczenia są funkcjami liniowymi równowartościowymi, a prawe strony tych ograniczeń, jak również zmienne niezależne są nieujemne. W tym celu ograniczenia należy podzielić na dwie kategorie: równościowe i nierównościowe. W przypadku gdy w zadaniu istnieją ograniczenia nierównowartościowe do zadania należy wprowadzić zmienne osłabiające do lewych stron ograniczeń i przekształcić je w ograniczenia równowartościowe.

Faza druga polega na zbudowaniu tablicy simpleksu, zawierającej macierz jednostkową, która następnie zostaje wybrana jako macierz bazowa. Jeżeli z macierzy ograniczeń nie można wyodrębnić macierzy jednostkowej do zadania należy wprowadzić zmienne sztuczne i zmodyfikować funkcję celu. Modyfikacja polega na odejmowaniu sumy zmiennych sztucznych

pomnożonych przez dodatni współczynnik  $w$ , który jest co najmniej o rząd większą wartością od współczynnika funkcji celu:

$$F_1(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) - w \sum_{j=n+1}^{n+p} x_j \quad (2.21)$$

W kolejnej, trzeciej fazie należy stworzyć w dolnej części tablicy wiersz różnic i sprawdzić ich wartości. Gdy w wierszu tym nie występują elementy ujemne, zadanie nie ma lepszego rozwiązania i jest to koniec algorytmu. W przeciwnym wypadku należy przejść do fazy czwartej.

W czwartej fazie należy wybrać z macierzy taki wektor kolumnowy, który będzie odpowiadał największej ujemnej różnicy, a następnie wprowadzić go do bazy.

Następnie w fazie piątej należy wytypować wektory usuwany z bazy. Oblicza się w tym celu ilorazy  $x_{io} / x_{ik}$  dla wszystkich dodatnich elementów kolumny i jako wektor usuwany z bazy przyjmuje się ten, którego cechuje najmniejsza wartość ilorazu.

W ostatniej, szóstej fazie należy obliczyć ilorazy kolumnowe i nowy wiersz różnic. Należy zbadać czy w wierszu różnic istnieje jakkolwiek wartość ujemna. Jeżeli tak, należy przekształcić tablicę simpleksów i powrócić do fazy czwartej. W przypadku, gdy wszystkie wartości w wierszu różnic są nieujemne zadanie nie ma lepszego rozwiązania i jest to koniec postępowania.

### 2.3.1.2 Zagadnienia dualne w programowaniu liniowym

Problemowi pierwotnemu programowania liniowego w postaci:

$$\min_{\mathbf{x} \in X_d} F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_{jx} x_j, \quad (2.22)$$

$$X_d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : [\mathbf{A}]\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \geq 0\}, \quad (2.23)$$

odpowiada symetryczny problem dualny programowania liniowego maksymalizacji dualnej funkcji celu  $F_D$  (Szymczak 1998):

$$\max_{\mathbf{y} \in Y_d} F_D(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \quad (2.24)$$

$$Y_d = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : [\mathbf{A}]^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq 0\} \quad (2.25)$$

W zagadnieniach dualnych rozróżniamy również zadania dualne niesymetryczne. W takim wypadku przykładowemu zadaniu programowania liniowego o ograniczeniach równowartościowych postaci:

$$\min_{\mathbf{x} \in X_d} F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_{jx} x_j, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{X}_d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : [\mathbf{A}]\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \geq 0\}, \quad (2.27)$$

odpowiadania niesymetryczne zadanie dualne:

$$\max_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_d} F_D(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{Y}_d = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : [\mathbf{A}]^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq 0\} \quad (2.29)$$

**Twierdzenie o dualności:**

1) Jeżeli jeden z problemów: dualny albo pierwotny ma rozwiązanie optymalne  $\mathbf{x}^*$ , to i drugi je ma  $\mathbf{y}^*$ , przy czym zachodzi równość  $F_p(\mathbf{x}^*) = F_D(\mathbf{y}^*)$ .

2) Jeżeli jeden z problemów nie ma rozwiązania, ze względu na nieograniczoność funkcji celu  $F_p(\mathbf{x}^*) \rightarrow \infty$  lub  $F_D(\mathbf{y}^*) \rightarrow \infty$ , to zbiór rozwiązań drugiego problemu jest pusty.

Na podstawie twierdzeń o dualności można stwierdzić, że możemy wykazać optymalne rozwiązanie problemu przy znajomości rozwiązania dualnego tego problemu.

## 2.3.2 Programowanie nieliniowe

Z programowaniem nieliniowym mamy do czynienia wówczas gdy funkcja celu jest funkcją liniową bądź nieliniową przy ograniczeniach również będących funkcjami dowolnymi (linowymi bądź nieliniowymi).

### 2.3.2.1 Metody bezgradientowe

#### 2.3.2.1.1 Metoda Hooke'a-Jeevesa

Bezgradientowa metoda Hooke'a-Jeevesa wyznacza kierunek za pomocą wykonania sekwencji próbnego kroku o określonej długości w kolejnych kierunkach bazowych. Dla prostokątnego układu współrzędnych kierunki wyznaczają zwykle wersory osi układu współrzędnych (Amborski 2009).

W metodzie tej każdorazowo sprawdzana jest wartość funkcji w danym punkcie, zaczynając od wybranego punktu startowego. Jeżeli wartość funkcji po wykonaniu próbnego kroku jest mniejsza wykonuje się w tym kierunku krok roboczy, w przeciwnym wypadku należy zmienić znak kroku próbnego bądź zredukować wartość kroku próbnego i ponownie obliczyć wartość funkcji w nowym punkcie. Na tej podstawie określa się kierunek opadania funkcji.

Procedurę powtarza się dla każdego kierunku bazowego, a następnie sprawdza się czy został spełniony warunek zakończenia obliczeń, czyli na przykład:

$$|f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_{i+1})| < \varepsilon, \quad (2.30)$$

gdzie  $\varepsilon$  jest ustalonym na początku wykonywania zadania warunkiem zakończenia obliczeń. Jako warunek zakończenia obliczeń można także przyjąć moment, w którym długość kroku próbnego jest mniejsza od przyjętej wartości  $\varepsilon$ . Jeżeli warunek zakończenia obliczeń nie jest spełniony, nowy punkt przyjmuje się jako punkt bazowy i powtarza procedurę.

### 2.3.2.1.2 Metoda Rosenbrock'a

W metodzie Rosenbrock'a poszukujemy minimum funkcji w kolejnych, ortogonalnych kierunkach. Metoda ta podobna jest do metody Hooke'a - Jeevesa, z tą różnicą że w odróżnieniu od metody poprzednio omawianej pozwala ona na obrót układu współrzędnych (Gawrylczyk 2011).

Algorytm metody sprawdza wartość funkcji w punkcie startowym, a następnie wykonuje krok w danym kierunku próbnym. Jeżeli wartość funkcji w tym punkcie jest mniejsza niż w poprzednim to wykonujemy w tym kierunku krok roboczy, w przeciwnym wypadku redukujemy długość kroku bądź wykonujemy krok w kierunku przeciwnym i sprawdzamy wartość funkcji. Procedurę należy powtórzyć dla wszystkich kierunków bazowych, czyli w pierwszym etapie dla wszystkich wektorów osi układu współrzędnych. Jeżeli w tym momencie spełniony jest warunek stopu kończymy algorytm. W przypadku przeciwnym należy obrócić układ współrzędnych, tak aby w bazie kierunków znalazł się kierunek największej poprawy. Za taki kierunek możemy uważać wektor wypadkowy wektorów sum udanych kroków próbnych w poprzednim etapie. Dla obróconego układu należy powtórzyć całą procedurę.

### 2.3.2.1.3 Metoda Neldera – Meada

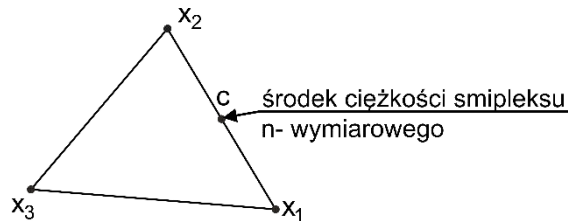
Metoda Neldera – Meada zwana jest również metodą pełzającego simpleksu. Nazwa ta wywodzi się z faktu że każdorazowo przeprowadza się operacje na  $n+1$  punktach, które tworzą simpleks. Znajduje ona zastosowanie dla funkcji nieróżniczkowalnych, ponieważ nie wymaga liczenia pochodnej (Gawrylczyk 2011).

Algorytm metody rozpoczyna się od etapu porządkowania, w którym należy uporządkować  $n+1$  punktów według wartości funkcji w węzłach:

$$f(\mathbf{x}_{n+1}) \geq \dots \geq f(\mathbf{x}_i) \geq \dots \geq f(\mathbf{x}_1). \quad (2.31)$$

Kolejny etap algorytmu to nazywany jest odbiciem. W pierwszej kolejności należy wyznaczyć środek ciężkości punktów (rysunek 2.1) według wzoru:

$$\mathbf{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \quad (2.32)$$

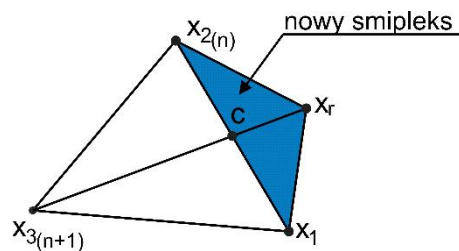


Rysunek 2.1 Etap porządkowania i znajdowanie środka ciężkości punktów dla simpleksu dwu-wymiarowego

Dla płaszczyzny dwuwymiarowej środek ciężkości jest środkiem odcinka, który łączy oba punkty. Następnie należy wyznaczyć punkt próbny, czyli odbicie punktu  $\mathbf{x}_{n+1}$  (rysunek 2.2) według wzoru:

$$\mathbf{x}_r = \mathbf{c} + \alpha(\mathbf{c} - \mathbf{x}_{n+1}), \quad \alpha > 0, \quad (2.33)$$

przy czym  $\alpha$  jest współczynnikiem odbicia.



Rysunek 2.2 Etap odbicia dla simpleksu dwu-wymiarowego

Kolejny etap to zbadanie wartości funkcji w nowym punkcie  $\mathbf{x}_r$ . W zależności od wartości funkcji  $f(\mathbf{x}_r)$  w stosunku do pozostałych wartości funkcji mamy trzy różne warianty postępowania.

W przypadku pierwszym może zaistnieć:

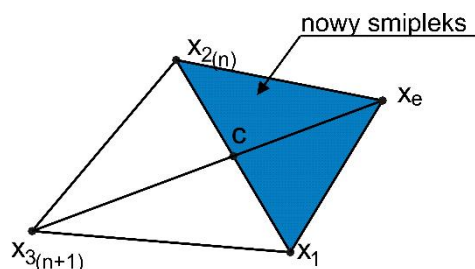
$$f(\mathbf{x}_r) < f(\mathbf{x}_1). \quad (2.34)$$

Oznacza to, że nowy punkt  $\mathbf{x}_r$  jest lepszy od wszystkich punktów w dotychczasowym simpleksie i poszukiwanie rozwiązania w tym kierunku wydaje się być celowe. W takim wypadku dokonujemy ekspansji simpleksu w tym kierunku i obliczamy punkt  $\mathbf{x}_e$  (rysunek 2.3), który zastąpi  $\mathbf{x}_{n+1}$  w nowym simpleksie, korzystając ze wzoru:



$$\mathbf{x}_e = \mathbf{c} + \beta(\mathbf{x}_r - \mathbf{c}), \quad (2.35)$$

gdzie  $\beta$  oznacza współczynnik ekspansji i  $\beta > 0$ .



Rysunek 2.3 Etap ekspansji dla simpleksu dwu-wymiarowego.

Drugą możliwością jest sytuacja gdy:

$$f(\mathbf{x}_n) \geq f(\mathbf{x}_r) \geq f(\mathbf{x}_1), \quad (2.36)$$

czyli nowa wartość funkcji jest wartością pośrednią. W takim wypadku należy wykonać operację odbicia, a więc wyznaczyć nowy simpleks zastępując punkt  $\mathbf{x}_{n+1}$  punktem  $\mathbf{x}_r$  i powrócić do punktu pierwszego algorytmu, czyli szeregowania wartości funkcji w zależności od ich wartości.

Ostatnią możliwością jest sytuacja gdy:

$$f(\mathbf{x}_n) < f(\mathbf{x}_r). \quad (2.37)$$

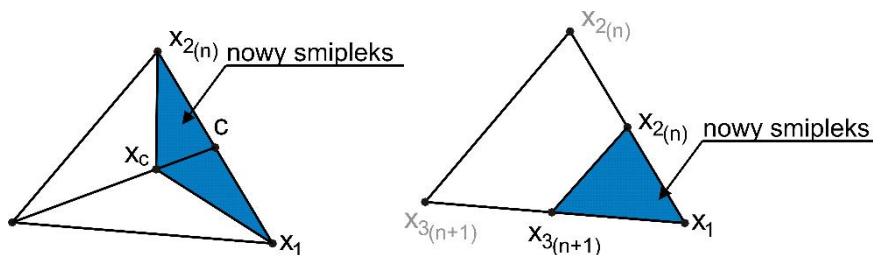
W takim wypadku nowa wartość funkcji jest gorsza od pozostałych i należy wykonać kontrakcję (ściśnięcie simpleksu) w jednym z dwóch kierunków w zależności od wartości funkcji w punkcie  $f_r$  i  $f_{n+1}$ :

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{c} + \gamma(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{c}), \quad \text{gdy } f_r \geq f_{n+1}, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{c} + \gamma(\mathbf{x}_r - \mathbf{c}), \quad \text{gdy } f_r < f_{n+1}, \quad (2.39)$$

przy czym  $\gamma$  jest współczynnikiem kontrakcji o wartościach (0,1). Jeżeli nowy punkt spełnia warunki  $f(\mathbf{x}_e) < f(\mathbf{x}_r)$  oraz  $f(\mathbf{x}_e) < f(\mathbf{x}_{n+1})$  to należy zbudować na tym punkcie nowy simpleks i wrócić na początek algorytmu. W przeciwny wypadku należy powtórzyć operację kontrakcji lub wykonać operację zmniejszenia simpleksu, czyli ściśnięcia całego simpleksu wokół punktu  $\mathbf{x}_1$  o najmniejszej dotychczas wartości funkcji  $f(\mathbf{x}_1)$  (rysunek 2.4). Należy dla  $i$  wierzchołków wyznaczyć nowe współrzędne punktów według wzoru:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_1 + \gamma(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1), \quad i = 2, \dots, n+1. \quad (2.40)$$



Rysunek 2.4 Etap ekspansji i zmniejszenia dla simpleksu dwu-wymiarowego

Często do algorytmu simpleksu Nelder-Meada wprowadzany jest zabieg periodycznej odnowy. Polega on na takim przekształceniu simpleksu, aby jego kształt był regularny. Program wykonuje go wtedy, gdy w jednym kierunku simpleks jest za bardzo rozciągnięty i wydłużony, a w drugim za bardzo ściśnięty.

W metodzie simpleksu Nelder-Meada obliczenia prowadzone są od momentu, aż odległości pomiędzy wierzchołkami simpleksu w pobliżu poszukiwanego minimum osiągną wartość mniejszą od  $\varepsilon$ , które jest deklarowanym na początku zadania warunkiem stopu.

#### 2.3.2.1.4 Metoda Gaussa – Seidla

W metodzie Gaussa-Seidla minimum poszukuje się w ortogonalnych kierunkach bazowych, które tworzą wersory osi układu współrzędnych (Amborski 2009). Rozpoczynając od wyboru punktu startowego obliczamy wartość funkcji i przeprowadzamy minimalizację w kierunku pierwszego wersora. W ten sposób należy dojść do punktu styczności z poziomą, a następnie poszukiwać minimum funkcji w kolejnym kierunku, a więc do punktu styczności z kolejną poziomą. Algorytm należy powtarzać, dla wszystkich kierunków zbioru argumentów, a następnie należy sprawdzić przyjęty na wstępie warunek zakończenia obliczeń, który może być wyrażony jako:

$$|f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_{i+1})| < \varepsilon, \quad (2.41)$$

gdzie  $\varepsilon$  jest ustalonym na początku wykonywania zadania warunkiem zakończenia obliczeń.

Jeżeli warunek nie jest spełniony, nowy punkt przyjmuje się jako punkt bazowy i powtarza procedurę.

#### 2.3.2.1.5 Metoda Powella

Metoda Powella należy do metod kierunków sprzężonych. Oznacza to, że w kolejnych krokach kierunki poszukiwań dobierane są w taki sposób, aby były wzajemnie sprzężone i jak

najszybciej doprowadzały do rozwiązania problemu optymalizacji (Szymczak 1998; Amborski 2009).

### Definicja

Kierunek  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  sprzężony do pozostałych  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$  względem symetrycznej dodatnio określonej macierzy  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  to taki kierunek dla którego:

$$\mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.42)$$

### Twierdzenie

Jeżeli punkt  $\mathbf{b}_1$  jest minimum formy liniowo-kwadratowej:

$$F = \mathbf{e}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (2.43)$$

w kierunku  $\mathbf{d}$  i jeżeli punkt  $\mathbf{b}_2$  jest również minimum w tym samym kierunku (ale z innego punktu startowego), to kierunek łączący te dwa minima  $(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)$  jest sprzężony z kierunkiem  $\mathbf{d}$ .

### Twierdzenie

Jeżeli  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n$  są kierunkami wzajemnie sprzężonymi względem dodatnio określonej macierzy  $\mathbf{A}$  i stanowią bazę danej przestrzeni, to minimum funkcji:

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (2.44)$$

można wyznaczyć w skończonej liczbie iteracji w wyniku minimalizacji tej funkcji wzdłuż każdego z kierunków  $\mathbf{z}_i$  tylko raz.

W metodzie Powella kolejny sprzężony kierunek wyznacza się zgodnie ze wzorem:

$$\mathbf{z}_{n+1} = \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_1\|}, \quad (2.45)$$

gdzie:

$\mathbf{z}_{n+1}$  - jest nowym kierunkiem,

$\mathbf{x}_{n+1}$  - bieżącym punktem minimalizacji,

$\mathbf{x}_1$  - punktem startowym.



Po obliczeniu nowego kierunku, należy sprawdzić czy układ nowych wektorów jest liniowo niezależny. Gdy kierunki są liniowo zależne lub są bliskie kierunkom liniowo zależnym należy zmienić je na układ początkowych wektorów bazy podstawowej.

Metoda Powella ma szereg modyfikacji. Jeden z wariantów tej metody, który pozwala uniknąć sytuacji, kiedy kierunki są wzajemnie liniowo zależne, dopuszcza inną modyfikację bazy. Nowy kierunek sprzężony zostaje tu wstawiony w miejsce kierunku, w którym został wykonany najdłuższy krok, a nie jak w podstawowej metodzie Powella na koniec bazy.

Metoda ta wykorzystywana jest zwykle do funkcji o poziomicach w kształcie wąskich dolin, ponieważ stosunkowo szybko prowadzi do zbieżności.

### 2.3.2.1.6 Metoda Złotego Podziału

Metoda złotego podziału polega na skracaniu badanego przedziału w kolejnych krokach według zależności (Szymczak 1998):

$$\frac{x_{2i} - a_i}{b_i - a_i} = \frac{b_i - x_{1i}}{b_i - a_i} = 0,618, \quad (2.46)$$

gdzie

$a_i$  - lewy koniec przedziału w  $i$ -tej iteracji,

$b_i$  - prawy koniec przedziału w  $i$ -tej iteracji,

$x_{1i}, x_{2i}$  – wewnętrzne punkty podziału odcinka  $(a_i, b_i)$  w  $i$ -tym kroku iteracji.

Przedstawiony powyżej iloraz odwołuje się do zasady złotego podziału, która stosowna była już w czasach starożytnych przy kształtowaniu greckich budowli.

W pierwszym kroku algorytmu należy wyznaczyć wartości funkcji na końcach przedziału oraz sprawdzić, czy długość badanego odcinka nie jest mniejsza od zdefiniowanej na początku dokładności obliczeń. Następnie korzystając z równania (2.46) wyznaczamy wewnętrzne punkty podziału, dla których obliczamy wartość funkcji.

Jeżeli  $f(x_{2i}) > f(x_{1i})$  to przyjmujemy w następnym korku:

$$b_{i+1} = x_{2i}, a_{i+1} = a_i, x_{2(i+1)} = x_{1i} \quad (2.47)$$

i odrzucamy przedział  $(x_{2i}, b_i)$ . Z równania (2.46) obliczamy tylko  $x_{1(i+1)}$ .

W przeciwnym wypadku, czyli gdy  $f(x_{2i}) < f(x_{1i})$  otrzymujemy:

$$a_{i+1} = x_{1i}, b_{i+1} = b_1, x_{1(i+1)} = x_{2i} \quad (2.48)$$

i odrzucamy przedział  $(a_i, x_{1i})$ . Z równania (2.46) obliczamy tylko  $x_{2(i+1)}$ .

Kolejne kroki algorytmu wykonujemy aż do momentu kiedy przedział zostanie zredukowany, tak że jego długość będzie mniejsza od założonej wstępnie dokładności.

### 2.3.2.1.7 Metoda interpolacji kwadratowej

W metodzie interpolacji kwadratowej minimalizowaną funkcję celu  $f(x)$  aproksymujemy funkcją kwadratową  $f_{kwad}(x)$ . Algorytm metody zakłada, że dla trzech punktów  $x_1, x_2, x_3$  obliczamy wartości funkcji celu  $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ . Na podstawie tych wartości, wykorzystując wzór na interpolację Lagrange'a, możemy opisać funkcję kwadratową przechodzącą przez te trzy zadane punkty w postaci (Gawrylczyk 2011):

$$f_{kwad}(x) = \left[ \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} \right] f(a) + \left[ \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} \right] f(b) + \left[ \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \right] f(c). \quad (2.49)$$

Wiedząc że  $f_{kwad}(x)$  jest kwadratowym przybliżeniem  $f(x)$  w przedziale  $\langle x_1, x_3 \rangle$ , można podać współrzędną jej ekstremum w tym przedziale:

$$x_{min} = 0,5 \frac{(b^2 - c^2)f(a) + (c^2 - a^2)f(b) + (a^2 - b^2)f(c)}{(b-c)f(a) + (c-a)f(b) + (a-b)f(c)}. \quad (2.50)$$

Następnym krokiem algorytmu jest zmiana jednego z początkowo wybranych punktów zewnętrznych na  $x_{min}$ . W ten sposób nowe granice przedziału tworzą jeden z punktów początkowych oraz  $x_{min}$ . Punkt wewnętrzny dobierany jest tak, aby wartość funkcji w tym punkcie była mniejsza niż dla punktów granicznych. W ten sposób w kolejnych krokach algorytmu zawęża się przedział aż do momentu, w którym długości przedziału będzie mniejsza od założonej początkowo dokładności obliczeń.

### 2.3.2.2 Metody gradientowe bez ograniczeń

#### 2.3.2.2.1 Metoda gradientu prostego

Metoda gradientu prostego wyznacza kolejne kierunki minimalizacji funkcji na podstawie obliczeń gradientu funkcji w danym punkcie, a więc funkcja celu musi być funkcją różniczkowalną (Amborski 2009).

Pierwszym etapem metody jest obliczenie dla wybranego punktu startowego  $\mathbf{x}_0$ , zarówno wartości funkcji  $f(\mathbf{x}_0)$  w tym punkcie jak i jej gradientu  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$ . Kierunek poszukiwań określa się jako  $\mathbf{d} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}_i)$  i w tym kierunku wykonuje się kolejny krok przechodząc do następnego punktu. Kolejnym etapem jest zbadanie wartości funkcji w nowym punkcie. W przypadku gdy  $f(\mathbf{x}_{n+1}) > f(\mathbf{x}_n)$ , należy zmniejszyć długość kroku i ponownie zbadać wartość funkcji. Jeżeli w kolejnych redukcjach kroku, warunek nie zmienia swojej postaci należy zakończyć działanie algorytmu. Gdy  $f(\mathbf{x}_{n+1}) < f(\mathbf{x}_n)$  należy w nowym punkcie obliczyć wartość gradientu i zbadać warunek stopu czyli czy  $|\mathbf{g}^T \mathbf{g}| < \varepsilon$ , gdzie  $\varepsilon$  jest założoną na początku algorytmu dokładnością wyznaczenia minimum. Gdy warunek jest spełniony kończymy działanie algorytmu. W przeciwnym wypadku należy wykonać krok w kierunku  $\mathbf{d} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}_{n+1})$  i kontynuować działanie algorytmu.

### 2.3.2.2.2 Metoda najszybszego spadku

Metoda najszybszego spadku bazuje na algorytmie zbliżonym do metody gradientu prostego. Różnica w stosunku do poprzednio omawianej metody polega na tym, że kolejne wykonywane kroki w kierunku wyznaczonym przez gradient funkcji nie mają stałej długości, a dobrane są tak aby na danym kierunku osiągnąć minimum badanej funkcji celu (Amborski 2009).

Cechą charakterystyczną metody jest jej „zygzakowaty” charakter. Jest to spowodowane tym, że przez cały przebieg algorytmu metoda bazuje tylko na dwóch prostopadłych do siebie kierunkach poszukiwań.

### 2.3.2.2.3 Metoda Newtona

Metoda Newtona bazuje na aproksymacjach kwadratowych funkcji  $f(\mathbf{x})$  w kolejnych punktach. Cechą charakterystyczną metody jest to, że wymaga ona zarówno obliczeń gradientu (wektora pierwszych pochodnych cząstkowych funkcji) jak i hesjanu (macierz drugich pochodnych funkcji). Algorytm wyznacza kolejne punkty, tak aby gradient aproksymującej funkcji wynosił w tym punkcie zero (Stachurski 2009).

Algorytm metody Newtona rozpoczyna się od przyjęcia punktu startowego  $\mathbf{x}_0$  i przyjęciu numeru kroku  $k = 0$ . Następnie należy obliczyć gradient funkcji i jej hesjan w punkcie i sprawdzić warunek zakończenia obliczeń. Jeżeli nie jest spełniony to należy przejść do

następnego kroku algorytmu, to znaczy wyznaczyć nowy kierunek poszukiwań korzystając z równania:

$$\mathbf{d}_k = -[\nabla^2 f(\mathbf{x}_k)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k). \quad (2.51)$$

Na tym kierunku należy wyznaczyć punkt minimalizujący funkcję celu w kierunku  $\mathbf{d}_k$  w  $k$ -tym kroku i wyznaczyć kolejny punkt według wzoru:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - [\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^k), \quad (2.52)$$

a następnie podstawić  $k = k + 1$  i rozpocząć działanie algorytmu od początku dla nowego punktu startowego.

Metoda Newtona wykazuje dobrą zbieżność w pobliżu poszukiwanego minimum, natomiast daleko od minimum, funkcja zwykle cechuje się wolną zbieżnością lub jej brakiem.

#### 2.3.2.2.4 Metoda gradientu sprzężonego

Metoda ta ma podobne założenia jak metoda najszybszego spadku.

Algorytm metody zakłada przyjęcie wstępnego punktu startowego i warunku stopu kończącego obliczenia. W kolejnym etapie należy wyznaczyć wartość funkcji w punkcie startowym i jej gradient oraz jako kierunek poszukiwań przyjąć (Amborski 2009):

$$\mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k). \quad (2.53)$$

Następnie należy dokonać minimalizacji funkcji celu  $f(\mathbf{x}^k + t\mathbf{d}^k)$  w kierunku  $\mathbf{d}_k$ . W ten sposób otrzymuje się nowy punkt  $\mathbf{x}_{k+1}$  dla którego wyznacza się kolejny sprzężony kierunek poszukiwań:

$$\mathbf{d}_{k+1} = -\nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) + \beta_{k+1} \mathbf{d}_k, \quad (2.54)$$

gdzie:

$$\beta_{k+1} = \frac{\nabla^T f(\mathbf{x}_{k+1})[\nabla^T f(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_k)]}{|\nabla f(\mathbf{x}_k)|^2}. \quad (2.55)$$

W przypadku gdy:

$$|\nabla f(\mathbf{x}^k)| < \varepsilon, \quad (2.56)$$

przy czym  $\varepsilon$  jest przyjętą dokładnością obliczeń, należy zakończyć działanie algorytmu.

W przeciwnym wypadku należy wykonać krok w kierunku  $\mathbf{d}_{k+1}$ , dobrany tak aby osiągnąć minimum na tym kierunku i przejść do następnego punktu, dla którego należy powtórzyć algorytm.

### 2.3.2.2.5 Metoda Levenberga – Marquardta

Metoda Levenberga - Marquardta powstała z połączenia dwóch metod optymalizacji: metody najszybszego spadku i metody Newtona. Algorytm zbudowany jest w ten sposób aby wykorzystywać najkorzystniejsze cechy obu metod, tak więc z dala od minimum funkcji zachowuje się jak metoda najszybszego spadku, blisko minimum zaś zaczyna zachowywać się jak metoda Newtona (Góra 2010).

Algorytm metody zaczyna się od przyjęcia dla numeru iteracji  $k = 1$ , punktu startowego  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$  oraz parametru  $\lambda$ , który decyduje o tym czy posługujemy się metodą podobną do metody Newtona czy najszybszego spadku. Początkowo należy przyjąć parametr  $\lambda$  o stosunkowo dużej wartości. Duża wartość parametru  $\lambda$  sprawia, że metoda wyznaczania minimum zachowuje się podobnie jak metoda najszybszego spadku. Gdy przyjmijemy małą wartość  $\lambda$  metoda zachowuje się podobnie do metody Newtona i zapewnia szybką zbieżność w pobliżu punktu minimalizowanego. Należy również założyć warunek stopu dla metody, który może być sformułowany na przykład jako:

$$\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| < \varepsilon, \quad (2.57)$$

$$\text{lub } \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|^2 < \varepsilon, \quad (2.58)$$

$$\text{lub } \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| < \varepsilon, \quad (2.59)$$

$$\text{lub } |f(\mathbf{x}_{k+1}) - f(\mathbf{x}_k)| < \varepsilon. \quad (2.60)$$

W pierwszym kroku algorytmu obliczamy wartość funkcji w punkcie startowym  $f(\mathbf{x}_0)$ , gradient funkcji w tym punkcie  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$  oraz hesjan funkcji  $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ . Należy także sprawdzić warunek stopu. Jeżeli jest on spełniony to punkt  $\mathbf{x}_0$  jest wynikiem optymalizacji. W przypadku przeciwnym należy wykonać kolejny krok algorytmu.

Kolejnym krokiem jest wyznaczanie punktów próbnych  $\mathbf{x}_p$  według wzoru:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_k - [\nabla^2 f(\mathbf{x}_k) + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k). \quad (2.61)$$

Po wyznaczeniu punktu próbnego należy sprawdzić jego wartość funkcji celu w stosunku do wartości dla poprzedniego punktu.

Jeżeli  $f(\mathbf{x}_p) > f(\mathbf{x}_k)$  należy zwiększyć wartość  $\lambda$   $n$ -krotnie i ponownie wrócić do wzoru (2.61) i wyznaczyć nowy punkt  $\mathbf{x}_p$ .

Jeżeli  $f(\mathbf{x}_p) < f(\mathbf{x}_k)$  należy zmniejszyć wartość  $\lambda$   $n$ -krotnie i przyjąć za następny punkt  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_p$  i wrócić do punktu pierwszego algorytmu.

### 2.3.2.3 Metody optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami

#### 2.3.2.3.1 Metoda Lagrange'a

Metoda ta bazuje na wyprowadzeniu funkcji Lagrange'a i poszukiwaniu jej punktu siodłowego (Amborski 2009).

Dla problemu optymalizacji nieliniowej funkcji celu z ograniczeniami:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}), \quad (2.62)$$

przy ograniczeniach równowartościowych:

$$g_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.63)$$

zapisujemy funkcje Lagrange'a tego problemu w postaci sumy funkcji celu i kombinacji liniowej ograniczeń:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m l_i [b_i - g_i(\mathbf{x})]. \quad (2.64)$$

Jako warunek konieczny istnienia minimum funkcji można zapisać:

$$\frac{df(\hat{\mathbf{x}})}{dx_j} - \sum \frac{dg_i(\hat{\mathbf{x}})}{dx_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.65)$$

więc

$$\frac{dL(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{l}})}{dx_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.66)$$

$$\frac{dL(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{l}})}{dl_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.67)$$

Jest to warunek istnienia punktu siodłowego funkcji  $L(\mathbf{x}, \mathbf{l})$ . Funkcja osiąga w tym punkcie minimum względem zmiennej  $\mathbf{x}$  i maksimum względem zmiennej  $\mathbf{l}$ .

Bardzo często przy rozwiązywaniu zadań optymalizacji, problemowi towarzyszy również zagadnienie dualne. Pozwala to na rozwiązywanie problemów minimalizacji również dla zadań z ograniczeniami nierównościami:

$$\min_{\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}), \quad (2.68)$$

przy ograniczeniach równowartościowych i różnowartościowych:

$$g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.69)$$

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.70)$$

Zadanie bazowe nazywane jest wtedy prymalnym i jako funkcja Lagrange'a ma postać:

$$L(\mathbf{x}, l_E, l_I) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i \in E} l_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j \in I} l_j g_j(\mathbf{x}), \quad (2.71)$$

któremu towarzyszy zadanie dualne tego problemu:

$$\max_{(l_E, l_I)} L_D(l_E, l_I) \quad (2.72)$$

przy ograniczeniach  $l_i \geq 0$ .

### 2.3.2.3.2 Metody funkcji kary

Metody stosowania funkcji kary, można uznać za najbardziej popularne sposoby rozwiązywania zadań optymalizacji nieliniowych z ograniczeniami. Metody te polegają na wyeliminowaniu ograniczeń i włączeniu ich do funkcji celu.

Przykładowy problem optymalizacji można przedstawić w postaci:

$$\min_{\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}), \quad (2.73)$$

przy ograniczeniach:

$$g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.74)$$

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.75)$$

W metodach funkcji kary funkcja celu zostaje zmodyfikowana poprzez dołączenie do niej składnika, który dodaje karę za niespełnienie ograniczeń. Funkcje kary należy dobrać w ten sposób, aby w przypadku gdyby punkt nie spełniał ograniczeń przyjmowała ona wartości większe od zera, a gdy punkt spełniał ograniczenia była równa zero.

Problem minimalizacji funkcji celu wraz z funkcją kary można przedstawić jako:

$$\min_{\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n} (f(\mathbf{x}) + \mu p(\mathbf{x})), \quad (2.76)$$

gdzie

$\mu$  - jest parametrem funkcji kary i  $\mu > 0$

$p(\mathbf{x})$  - jest funkcją kary postaci:

$$p(\mathbf{x}) = \varphi[g_i(\mathbf{x})] + \psi[g_i(\mathbf{x})], \quad (2.77)$$

przy założeniach, że  $\varphi, \psi$  - to funkcje ciągłe takie, że:

$$\varphi(0) = 0, \quad (2.78)$$

$$\varphi(y) > 0 \text{ dla } y \neq 0, \quad (2.79)$$

$$\psi(y) = 0 \text{ dla } y \leq 0, \quad (2.80)$$

$$\psi(y) > 0 \text{ dla } y > 0. \quad (2.81)$$

W metodach z funkcją kary wyróżnić można dwie podstawowe metody:

- ✓ metoda funkcji kary zewnętrznej,
- ✓ metoda funkcji kary wewnętrznej.

Metoda kary zewnętrznej dla punktów wychodzących poza ograniczenie dodaje dodatkową wartość do funkcji celu. W algorytmie metody kary zewnętrznej powszechne jest stosowanie ciągu dodatnich wartości parametru kary, które są rozbieżne do  $+\infty$ .

Algorytm zakłada wybranie na początku kryterium stopu  $\varepsilon$ , wybranie punktu początkowego  $\mathbf{x}_0$ , oraz współczynnika funkcji kary  $\mu > 0$ . Następnie należy rozwiązać zadanie minimalizacji w postaci:

$$\min_{\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n} (f(\mathbf{x}) + \mu p(\mathbf{x})). \quad (2.82)$$

Jeżeli  $\mathbf{x}_{k+1}$  jest rozwiązaniem optymalnym powyższego problemu należy sprawdzić warunek:

$$\mu_k p(\mathbf{x}_{k+1}) < \varepsilon. \quad (2.83)$$

Jeżeli jest on spełniony to kończymy działanie algorytmu. W przeciwnym wypadku należy podstawić  $k = k + 1$ , zwiększyć wielkość parametru kary i wykonać kolejny przebieg algorytmu.

Metoda funkcji kary wewnętrznej jest nazywana inaczej funkcją bariery. Stosuje się ją wyłącznie do ograniczeń nierównowartościowych, ponieważ funkcja kary w tym przypadku zdefiniowana jest tylko w zbiorze punktów dopuszczalnych, a granica nie należy do tego zbioru. W algorytmie tym kara dodawana jest w przypadku zbliżaniu się punktów do brzegów obszaru dopuszczonego.

Algorytm zakłada wybranie na początku kryterium stopu  $\varepsilon$ , wybranie punktu początkowego  $\mathbf{x}_0$ , takiego, że  $g_i(\mathbf{x}_0) < 0$  oraz współczynnika funkcji kary  $\mu > 0$ . Następnie należy rozwiązać zadanie minimalizacji w postaci:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} (f(\mathbf{x}) + \mu p(\mathbf{x})), \quad (2.84)$$



przy ograniczeniach:

$$g_i(\mathbf{x}) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.85)$$

Największym problem jest zabezpieczenie się przed wyjściem poza obszar punktów spełniających warunek  $g_i(\mathbf{x}_0) < 0$ , jak również znalezienie punktu startowego który leży w obszarze dopuszczalnym. Jeżeli  $\mathbf{x}_{k+1}$  jest rozwiązaniem optymalnym powyższego problemu należy sprawdzić warunek:

$$\mu^k p(\mathbf{x}_{k+1}) < \varepsilon. \quad (2.86)$$

Jeżeli jest on spełniony to kończy się działanie algorytmu. W przeciwnym wypadku należy podstawić  $k = k + 1$ , zwiększyć wielkość parametru kary i wykonać kolejny przebieg algorytmu.

### 2.3.3 Uwarunkowanie zadania

**Uwarunkowanie zadania numerycznego (Góra 2012):**

Niech  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  będzie pewną funkcją odpowiednio wiele razy różniczkowalną i niech  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

**Definicja:**

Mówimy, że zagadnienie obliczenia  $f(\mathbf{x})$  jest numerycznie dobrze uwarunkowane, jeżeli niewielkie względne zmiany danych dają niewielkie względne zmiany rozwiązania. Zagadnienia, które nie są numerycznie dobrze uwarunkowane, nazywamy źle uwarunkowanymi.

**Współczynnik uwarunkowania**

Niech  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  będzie pewną funkcją,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  dokładną wartością argumentu, a  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  znanym numerycznym przybliżeniem  $\mathbf{x}$ .

**Definicja:**

Jeżeli istnieje  $\kappa \in \mathbb{R}$  taka, że:

$$\forall \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \quad \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}})\|_{\mathbb{R}^m}}{\|f(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^m}} \leq \kappa \frac{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}}, \quad (2.87)$$

nazywamy ją współczynnikiem uwarunkowania zagadnienia wyliczenia wartości  $f$  (względem zadanych norm).

W sytuacji gdy przybliżenie, znacznie różni się od wartości dokładnej, można przypuszczać, że również wyniki obliczeń będą się znacznie różnić. Kiedy rozwiązywany jest problem z zagadnieniem numerycznie źle uwarunkowanym może zaistnieć sytuacja, że przy niewielkim odchyleniu przybliżenia od wartości dokładnej rozwiązania otrzymamy znaczną różnicę wyników.

### 2.3.4 Uwarunkowanie macierzy

**Twierdzenie** (Góra 2012):

*Współczynnik uwarunkowania odwracalnej macierzy symetrycznej, rzeczywistej jest równy ilorazowi największego i najmniejszego modułu spośród jej wartości własnych.*

$$\kappa = \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|}. \quad (2.88)$$

Jako wskaźnik uwarunkowania zadania optymalizacji funkcji  $f$ , która jest dwukrotnie różniczkowalna rozumiemy stosunek maksymalnej do minimalnej wartości własnej jej macierzy hesjanu, w danym punkcie. Przy zbyt dużym wskaźniku mogą wystąpić problemy obliczeniowe związane z błędami zaokrągleń, które mogą powstać np. przy odwracaniu macierzy hesjanu.

Przykładem źle uwarunkowanej funkcji jest funkcja Rosenbrock'a, zwana również doliną bananową. Nazwa ta pochodzi od kształtu dziedziny, czyli zbiorów poziomicowych w kształcie wysmukłych bananów, tworzącej rodzaj doliny o stromych zboczach. Charakter i przebieg funkcji Rosenbrock'a utrudnia znalezienie jej minimum metodami optymalizacji. Z tego powodu funkcja ta stała się testową funkcją dla algorytmów optymalizacji.

### 2.3.5 Zadanie dobrze i źle postawione (ill-posed problem)

**Definicja** (Regińska 2013):

*Zadanie wyznaczenia rozwiązania równania:*

$$Au = f, \quad A: X \rightarrow Y, \quad X, Y \text{ przestrzenie metryczne}, \quad (2.89)$$

*nazywamy zadaniem dobrze postawionym w sensie Hadamarda na parze przestrzeni  $X, Y$ ,*

*jeśli:*

- ✓  $\forall f \in Y$  istnieje rozwiązanie  $u \in X$
- ✓  $\forall f \in Y$  rozwiązanie jest jednoznaczne
- ✓ rozwiązanie zleży w sposób ciągły od prawej strony, tj.

jeśli  $f, f_n \in Y$  i  $f_n \rightarrow f$  w  $Y$ , to  $u_n \rightarrow u$  w  $X$ ,

gdzie  $u_n$  i  $u$  są rozwiązaniami odpowiednio dla  $f_n$  i  $f$ .

Zadanie nazywamy źle postawionym w sensie Hadamarda na parze przestrzeni  $X, Y$  jeżeli co najmniej jeden z powyższych warunków nie jest spełniony.

W zadaniach optymalizacji często spotyka się z problemem kiedy liczba mierzonych parametrów różni się zasadniczo od liczby niewiadomych parametrów. Zadanie wtedy można opisać układem równań niedookreślonym bądź nadokreślonym.

Z niedookreślonym układem równań mamy do czynienia wtedy kiedy liczba równań jest mniejsza od liczby niewiadomych ( $m < n$ ). Oznacza to w praktyce, że mamy więcej niewiadomych niż danych pomiarowych. Taki układ równań nigdy nie będzie rozwiązany jednoznacznie i będzie miał nieskończenie wiele rozwiązań.

**Twierdzenie:**

Jeżeli macierz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ma rząd  $m$ , układ  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  jest zawsze rozwiązywalny. Dla każdego  $\mathbf{b}$  istnieje wówczas nieskończenie wiele rozwiązań, z których:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{A}^T (\mathbf{AA}^T)^{-1} \mathbf{b}, \quad (2.90)$$

jest tym o najmniejszej normie. Macierz  $\mathbf{A}^T (\mathbf{AA}^T)^{-1}$  nazywana jest przy tym macierzą pseudoodwrotną macierzy  $\mathbf{A}$ .

Nadokreślony układ równań to taki w którym liczba równań jest większa od liczby niewiadomych. W takim przypadku liczba mierzonych parametrów jest większa od liczby niewiadomych ( $m > n$ ). Tak zdefiniowany układ równań może nie mieć żadnego rozwiązania, może być jednoznaczny, czyli mieć tylko jedno rozwiązanie, bądź mieć nieskończenie wiele rozwiązań.

W sytuacji, w której nie ma żadnego rozwiązania, zwykle poszukuje się rozwiązania przybliżonego, traktując zadanie jako aproksymację i poszukując rozwiązania metodą najmniejszych kwadratów.

W zagadnieniach nadokreślonych rozwiązania można zapisać jako:

$$\mathbf{x}_p = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (2.91)$$

## 2.4 Aktualizacja przy użyciu częstości i postaci drgań własnych

### 2.4.1 Wprowadzenie

Badania eksperymentalne i prowadzone pomiary służą poznaniu rzeczywistego zachowania się konstrukcji inżynierskich. Pozwalają one nie tylko na stwierdzenie, czy konstrukcja jest bezpieczna i spełnia założenia projektowe, ale również są narzędziem do tworzenia nowych i lepszych rozwiązań konstrukcyjnych i technologicznych.

Wyniki badań eksperymentalnych są również bezcenną bazą danych służącą do walidacji modelu MES konstrukcji. Zgodność modelu numerycznego z danymi eksperymentalnymi możemy oceniać na kilku poziomach. Ewins (1990, 2000) zaproponował pięć poziomów oceny zgodności:

- ✓ model numeryczny, który odwzorowuje poprawnie parametry modalne konstrukcji takie jak częstotliwości i postacie drgań dla mierzonych stopni swobody w zakresie pomiarowym;
- ✓ model numeryczny, który odwzorowuje wszystkie pomierzone funkcje odpowiedzi częstotliwościowej FRF w zakresie pomiarowym;
- ✓ model numeryczny, który odwzorowuje poprawnie parametry modalne konstrukcji takie jak częstotliwości i postacie drgań dla mierzonych i niemierzonych stopni swobody w zakresie pomiarowym;
- ✓ model numeryczny, który odwzorowuje wszystkie pomierzone funkcje odpowiedzi częstotliwościowej FRF również poza zakresem pomiarowym;
- ✓ model numeryczny, który posiada poprawne właściwości dotyczące rozkładu masy, sztywności i tłumienia i pozwala na otrzymanie poprawnych wszystkich właściwości dynamicznych, również tych niemierzonych.

Spełnienie każdego kolejnego kryterium jest coraz bardziej wymagające. Istnieje kilka prac, między innymi Caesar'a i Peter'a (1987) i Ibrahim'a (1988), które mówią o rozbieżnościach dotyczących zarówno danych pochodzących z modelu analitycznego jak i z danych eksperymentalnych. Głównymi problemami dotyczącymi danych z modelu numerycznego są:

- ✓ poprawne przybliżenie i określenie rzeczywistych warunków podporowych,
- ✓ odpowiednia dyskretyzacja modelu,
- ✓ odpowiednie określenie parametrów fizycznych materiałów,

- ✓ odpowiednie określenie bądź pominięcie tłumienia, lub założenie występowania tłumienia proporcjonalnego,
- ✓ niedokładne modelowanie połączeń,
- ✓ stworzenie modelu MES kompatybilnego z mierzonymi stopniami swobody.

Istnieją jednak również rozbieżności, które wynikają z pomiarów. Do najczęściej spotykanych można zliczyć:

- ✓ małą liczbę pomierzonych stopni swobody, wynikającą z ograniczeń sprzętowych,
- ✓ ograniczoną liczbę pomierzonych postaci drgań,
- ✓ występowanie postaci drgań opisanych liczbami zespolonymi,
- ✓ nieuwzględniane w modelu numerycznym błędy pomiarowe takiej jak szumy i nieliniowości,
- ✓ słaba jakość analizy modalnej,
- ✓ trudności w wymuszeniu bądź identyfikacji niektórych postaci drgań.

Pomimo, pewnych ograniczeń pomiarowych i możliwych z tego powodu błędów danych eksperymentalnych, metody walidacji, korelacji i aktualizacji zwykle zakładają, że dane pomiarowe są poprawne i obciążone relatywnie niewielkimi błędami.

W przypadku, gdy porównujemy model numeryczny z danymi pomiarowymi również możemy odnieść się do kilku poziomów dokładności metod (Maia & Silva 1997):

- ✓ metody porównywania – pozwalają oszacować, czy dane pomiarowe i dane z modelu numerycznego są ze sobą zgodne. Ich zadanie jest ograniczone tylko do podania informacji, która z postaci drgań analitycznych odpowiada której postaci drgań eksperymentalnych, bez wyjaśniania ewentualnych nieścisłości i powodów różnic pomiędzy wynikami;
- ✓ metody lokalizacji – pozwalają określić, w którym miejscu istnieje nieścisłość pomiędzy wynikami, nie dając jednocześnie odpowiedzi z czy powstała ona z powodu zmiany masy, czy sztywności;
- ✓ metody korelacji – pozwalają zlokalizować i określić jakie różnice istniejące pomiędzy modelami zarówno w rozkładzie masy jak i sztywności. Celem tych metod jest otrzymanie modelu, który będzie adekwatnie odwzorowywał wszystkie charakterystyki konstrukcji.

Do jednej z bardziej popularnych metod korelacji należy aktualizacja przy użyciu wrażliwości wektorów i częstotliwości drgań własnych.

## 2.4.2 Wrażliwość wartości i wektorów własnych

Wyprowadzenie wzoru na obliczenie macierzy wrażliwości z uwzględnieniem wektorów własnych zaproponowali Maia i Silva (1997). Jeżeli  $\lambda_{ai}$  i  $\phi_{ai}$  tworzą analityczne rozwiązanie problemu własnego antycznego modelu nietłumionego, to możemy zapisać:

$$[\mathbf{K} - \lambda_{ai} \mathbf{M}] \phi_{ai} = \mathbf{0}, \quad (2.92)$$

gdzie  $i=1,2,\dots,N$  jest numerem częstości drgań własnych.

Można założyć, że  $\theta_j$  jest zestawem  $N_p$  aktualizowanych parametrów, które są przydzielone do zmiennych projektowych modelu analitycznego. Wtedy analityczne pary modalne  $\lambda_{ai}$  i  $\phi_{ai}$  są funkcją  $\theta_j$ .

Jeżeli założymy, że przy użyciu kryterium MAC, eksperymentalne pary modalne  $\lambda_{mi}$ ,  $\phi_{mi}$  udało się połączyć z ich analitycznymi odpowiednikami  $\lambda_{ai}$ ,  $\phi_{ai}$ , to możemy zapisać rozwiązanie eksperymentalnego problemu własnego w postaci szeregu Taylora, w odniesieniu do aktualizowanych parametrów, w formie:

$$\lambda_{mi} = \lambda_{ai} + \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\partial \lambda_{ai}}{\partial \theta_j} \theta_j + \mathbf{O}(\theta_j^2), \quad (2.93)$$

$$\phi_{mi} = \phi_{ai} + \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\partial \phi_{ai}}{\partial \theta_j} \theta_j + \mathbf{O}(\theta_j^2), \quad (2.94)$$

gdzie  $\mathbf{O}(\theta_j^2)$  jest resztą z szeregu Taylora.

Zakładając, że zamiany w aktualizowanych parametrach są małe, eksperymentalne pary modalne można przedstawić jako funkcje liniowe ograniczone do dwóch pierwszych wyrazów:

$$\lambda_{mi} = \lambda_{ai} + \Delta \lambda_i, \quad (2.95)$$

$$\phi_{mi} = \phi_{ai} + \Delta \phi_i, \quad (2.96)$$

gdzie:

$$\Delta \lambda_i \approx \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\partial \lambda_{ai}}{\partial \theta_j} \theta_j, \quad (2.97)$$

$$\Delta \boldsymbol{\phi} \approx \sum_{j=1}^{Np} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_{ai}}{\partial \theta_j} \theta_j. \quad (2.98)$$

Wrażliwość wartości własnych można otrzymać przemnażając równanie (2.92) przez  $\boldsymbol{\phi}_{ai}^T$ :

$$\boldsymbol{\phi}_{ai}^T [\mathbf{K} - \lambda_{ai} \mathbf{M}] \boldsymbol{\phi}_{ai} = 0. \quad (2.99)$$

Różniczkując powyższe równanie względem  $\theta_j$  otrzymujemy:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_{ai}^T}{\partial \theta_j} [\mathbf{K} - \lambda_{ai} \mathbf{M}] \boldsymbol{\phi}_{ai} + \boldsymbol{\phi}_{ai}^T \frac{\partial [\mathbf{K} - \lambda_{ai} \mathbf{M}]}{\partial \theta_j} \boldsymbol{\phi}_{ai} + \boldsymbol{\phi}_{ai}^T [\mathbf{K} - \lambda_{ai} \mathbf{M}] \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_{ai}}{\partial \theta_j} = 0. \quad (2.100)$$

Z uwagi na to, że równanie (2.92) oraz pierwsza i trzecia część równania (2.100) jest równa zero, możemy zapisać:

$$\boldsymbol{\phi}_{ai}^T \frac{\partial [\mathbf{K} - \lambda_{ai} \mathbf{M}]}{\partial \theta_j} \boldsymbol{\phi}_{ai} = 0. \quad (2.101)$$

Rozpisując wyrażenie w środku równania (2.101), z lewej strony równania otrzymujemy:

$$\frac{\partial [\mathbf{K} - \lambda_{ai} \mathbf{M}]}{\partial \theta_j} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial \lambda_{ai}}{\partial \theta_j} \mathbf{M} - \lambda_{ai} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j}. \quad (2.102)$$

Z uwagi na ortogonalność wektorów własnych względem macierzy mas ( $\boldsymbol{\phi}_{ai}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_{ai} = 1$ ) i sztywności ( $\boldsymbol{\phi}_{ai}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_{ai} = \Phi$ ) równanie (2.101) można zapisać w postaci:

$$\boldsymbol{\phi}_{ai}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_j} \boldsymbol{\phi}_{ai} - \frac{\partial \lambda_{ai}}{\partial \theta_j} - \lambda_{ai} \boldsymbol{\phi}_{ai}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \boldsymbol{\phi}_{ai} = 0. \quad (2.103)$$

Ostatecznie wrażliwość wartości własnych można przedstawić w formie:

$$\frac{\partial \lambda_{ai}}{\partial \theta_j} = \boldsymbol{\phi}_{ai}^T \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_j} - \lambda_{ai} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \right] \boldsymbol{\phi}_{ai}. \quad (2.104)$$

Wrażliwość wektorów własnych, zakładając że są one liniowo niezależne, można przedstawić jako liniową kombinację samych wektorów własnych:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_{ai}}{\partial \theta_j} = \sum_{k=1}^N \varphi_{ik}^{(j)} \boldsymbol{\phi}_{ak}. \quad (2.105)$$

Wracając do równania (2.92) i różniczkując je względem  $\theta_j$  otrzymamy:

$$\frac{\partial [\mathbf{K} - \lambda_{ai} \mathbf{M}]}{\partial \theta_j} \boldsymbol{\phi}_{ai} + [\mathbf{K} - \lambda_{ai} \mathbf{M}] \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_{ai}}{\partial \theta_j} = \mathbf{0}. \quad (2.106)$$

Podstawiając równanie (2.105) do równania (2.106) możemy zapisać:

$$\frac{\partial [\mathbf{K} - \lambda_{ai} \mathbf{M}]}{\partial \theta_j} \phi_{ai} + [\mathbf{K} - \lambda_{ai} \mathbf{M}] \sum_{k=1}^N \varphi_{ik}^{(j)} \phi_{ak} = \mathbf{0}, \quad (2.107)$$

lub

$$\sum_{k=1}^N \varphi_{ik}^{(j)} [\mathbf{K} - \lambda_{ai} \mathbf{M}] \phi_{ak} = - \frac{\partial [\mathbf{K} - \lambda_{ai} \mathbf{M}]}{\partial \theta_j} \phi_{ai}. \quad (2.108)$$

Przemnażając równanie (2.108) przez  $\phi_{as}^T$ , przy założeniu że  $s \neq i$  możemy zapisać rozwiązanie w formie:

$$\sum_{k=1}^N \varphi_{ik}^{(j)} \phi_{as}^T [\mathbf{K} - \lambda_{ai} \mathbf{M}] \phi_{ak} = - \phi_{as}^T \frac{\partial [\mathbf{K} - \lambda_{ai} \mathbf{M}]}{\partial \theta_j} \phi_{ai}. \quad (2.109)$$

Ponieważ założono ortogonalność wektorów własnych, lewa strona równania jest równa zero, pomijając przypadek kiedy  $k = s$ :

$$\varphi_{ik}^{(j)} (\lambda_{as} - \lambda_{ai}) = - \phi_{as}^T \frac{\partial [\mathbf{K} - \lambda_{ai} \mathbf{M}]}{\partial \theta_j} \phi_{ai}. \quad (2.110)$$

Rozwijając prawą stronę równania (2.110) otrzymujemy:

$$\varphi_{ik}^{(j)} (\lambda_{ak} - \lambda_{ai}) = - \phi_{ak}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_j} \phi_{ai} + \frac{\partial \lambda_{ai}}{\partial \theta_j} \phi_{ak}^T \mathbf{M} \phi_{ai} + \lambda_{ai} \phi_{ak}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \phi_{ai}. \quad (2.111)$$

W przypadku gdy  $k \neq i$  drugi element prawej strony równania jest równy zero, co pozwala zapisać je w formie:

$$\varphi_{ik}^{(j)} = \frac{-1}{(\lambda_{ak} - \lambda_{ai})} \phi_{ak}^T \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_j} - \lambda_{ai} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \right] \phi_{ai} \quad k \neq i. \quad (2.112)$$

Z równania wynika, że dla  $k = i$  współczynniki  $\varphi_{ik}^{(j)}$  należy policzyć niezależnie.

Różniczkując  $\phi_{ai}^T \mathbf{M} \phi_{ai} = \mathbf{I}$  otrzymujemy:

$$2 \phi_{ai}^T \mathbf{M} \frac{\partial \phi_{ai}}{\partial \theta_j} = - \phi_{ai}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \phi_{ai}. \quad (2.113)$$

Podstawiając do równania (2.113) wyrażenie (2.105) możemy zapisać:

$$2 \phi_{ai}^T \mathbf{M} \sum_{k=1}^N \varphi_{ik}^{(j)} \phi_{ak} = - \phi_{ai}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \phi_{ai}, \quad (2.114)$$

lub

$$2 \sum_{k=1}^N \varphi_{ik}^{(j)} \phi_{ai}^T \mathbf{M} \phi_{ak} = - \phi_{ai}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \phi_{ai}, \quad (2.115)$$



oraz zgodnie z warunkami ortogonalności:

$$\varphi_{ii}^{(j)} = -\frac{1}{2} \phi_{ai}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \phi_{ai}. \quad (2.116)$$

Podsumowując, równania (2.112) i (2.116) możemy zapisać:

$$\varphi_{ik}^{(j)} = \begin{cases} \frac{-1}{(\lambda_{ak} - \lambda_{ai})} \phi_{ak}^T \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_j} - \lambda_{ai} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \right] \phi_{ai}, & \text{dlak} \neq i \\ -\frac{1}{2} \phi_{ai}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \phi_{ai}, & \text{dlak} = i. \end{cases} \quad (2.117)$$

Łącząc równania (2.112), (2.116) i podstawiając je do równania (2.105) otrzymujemy:

$$\frac{\partial \phi_{ai}}{\partial \theta_j} = \sum_{k=1; k \neq i}^N \frac{\phi_{ak} \phi_{ak}^T}{\lambda_{ai} - \lambda_{ak}} \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_j} - \lambda_{ai} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \right] \phi_{ai} - \frac{1}{2} \phi_{ai} \phi_{ai}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \phi_{ai}. \quad (2.118)$$

Ostatecznie macierz wrażliwości wartości i wektorów własnych możemy zapisać w postaci:

$$\mathbf{S}_{(N_c \times N_p)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_{a1}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \lambda_{a1}}{\partial \theta_{N_p}} \\ \frac{\partial \phi_{a1}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \phi_{a1}}{\partial \theta_{N_p}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_{ap}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \lambda_{ap}}{\partial \theta_{N_p}} \\ \frac{\partial \phi_{ap}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \phi_{ap}}{\partial \theta_{N_p}} \end{bmatrix}, \quad (2.119)$$

gdzie  $p$  jest liczbą par modalnych branych do procedury aktualizacji niewiadomych parametrów  $\theta_j$ , a  $N_c = p(N+1)$ .

### 2.4.3 Wrażliwość eksperymentalna

W przypadku gdy istnieją duże rozbieżności pomiędzy wynikami uzyskiwanymi z modeli eksperymentalnych i numerycznych, walidacja szeregów Taylora w równaniu jest źle uwarunkowana i iteracyjna procedura jest podatna na dywergencję. Lin i inni (1995) zaproponował modyfikację metody, która pozwala na otrzymanie poprawnych wyników, nawet w przypadku modeli o dużej rozbieżności pomiędzy wynikami pomiarów a modelami MES.

Osiągnięto to poprzez użycie zarówno analitycznych jak i eksperymentalnych parametrów modalnych w definicji wrażliwości rozwiązania problemu własnego. Równanie (2.103) oraz (2.118) można przedstawić w formie:

$$\frac{\partial \lambda_{ai}}{\partial \theta_j} = \phi_{ai}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_j} \phi_{mi} - \lambda_{mi} \phi_{ai}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \phi_{mi}, \quad (2.120)$$

$$\frac{\partial \phi_{ai}}{\partial \theta_j} = \sum_{k=1; k \neq i}^N \frac{\phi_{ak} \phi_{ak}^T}{\lambda_{mi} - \lambda_{ak}} \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_j} - \lambda_{mi} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \right] \phi_{mi} - \frac{1}{2} \phi_{ai} \phi_{ai}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \phi_{mi}, \quad (2.121)$$

gdzie są  $\lambda_{mi}$  i  $\phi_{mi}$  pomierzonymi parami modalnymi.

#### 2.4.4 Metody iteracyjne bazujące na parach modalnych

Aktualizacja opierająca się na metodach iteracyjnych ma za zadanie poprawić korelację pomiędzy danymi pomierzonymi a danymi pochodzącymi z modelu numerycznego. Korelacja jest determinowana przez funkcję kary, zawierającą w sobie częstości i postacie drań własnych. Z uwagi na charakter funkcji kary, rozwiązanie zwykle wymaga aby problem został zlinearyzowany i zoptymalizowany iteracyjnie. Takie podejście pozwala na dużą dowolność w wyborze parametrów aktualizowanych.

Funkcje kary są zwykle nieliniowymi funkcjami parametrów. Z tego powodu w celu uzyskania zbieżności rozwiązania należy zastosować iteracyjną procedurę. Jeżeli zmiana wartości parametrów pomiędzy następującymi po sobie iteracjami jest mała, istnieje duże prawdopodobieństwo na dobre oszacowanie właściwości dynamicznych modelu.

Pomierzone podczas badań eksperymentalnych pary modalne (kwadraty częstości i postacie drgań) można zgrupować w jednym wektorze. W przypadku gdy założymy brak tłumienia może on być wyrażony jako (Friswell & Mottershead 1995):

$$\mathbf{z}_m = [\lambda_{m1}, \phi_{m1}^T, \lambda_{m2}, \phi_{m2}^T, \dots, \lambda_{mN}, \phi_{mN}^T]^T. \quad (2.122)$$

W modelu numerycznym wektor kwadratów częstości i postaci drgań, odpowiadających danym eksperymentalnym może zostać zapisany w wektorze wartości przewidywanych:

$$\mathbf{z}_a = [\lambda_{a1}, \phi_{a1}^T, \lambda_{a2}, \phi_{a2}^T, \dots, \lambda_{aN}, \phi_{aN}^T]^T. \quad (2.123)$$

Aktualizacja modeli numerycznych przy użyciu postaci i częstości drgań własnych niesie za sobą wiele problemów. Jednym z nich jest fakt, że liczba mierzonych parametrów jest znacznie mniejsza od liczby parametrów uzyskanych z modelu numerycznego. Formuła wektorów par modalnych wymaga, aby liczba częstości i postaci drgań z danych pomiarowych i numerycznych była taka sama. Wektor  $\mathbf{z}_m$  zwykle zawiera tylko kilka par modalnych. Kolejnym

problemem jest to, że liczba stopni swobody modelu numerycznego jest zwykle znacznie większa od liczby punktów pomiarowych. Dlatego model numeryczny wymaga dyskretyzacji zgodnej z planem pomiarów. Rozwiązanie tego problemu ułatwiają też techniki redukcji bazy (rozdział 2.1). W wielu przypadkach postaci drgań uzyskane z modelu numerycznego i z badań eksperymentalnych nie są uporządkowane w tej samej kolejności. Problem parowania postaci drgań można rozwiązać stosując kryterium MAC lub NMD. Gdy w macierzy MAC wartości są zbliżone do 1 lub w macierzy NMD zbliżone do 0 wybrane postaci drgań są odpowiadające. Dopiero połączone w pary postaci drgań mogą zostać użyte w algorytmie aktualizacji parametrów. W przypadku gdy postaci pomierzone i numeryczne są w przeciwnych fazach należy posłużyć się współczynnikiem Modal Scale Factor (MSF).

Sposoby aktualizowania modelu oparte na gradiencie, czyli metodzie funkcji kary, zaproponowane przez Friswell'a i Mottershead'a (1995) pozwalają na zapisanie liniowego przybliżenia w postaci:

$$\delta \mathbf{z} = \mathbf{S}_j \delta \boldsymbol{\theta}, \quad (2.124)$$

gdzie

$\delta \mathbf{z} = \mathbf{z}_m - \mathbf{z}_{aj}$  - jest błędem w pomierzonych parametrach,

$\delta \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_j$  - jest zmianą parametrów,

$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N_p}]^T$  - jest wektorem aktualizowanych parametrów,

$\mathbf{S}_j$  - jest macierzą wrażliwości.

W równaniu (2.124) aktualna wartość parametru po iteracji  $j$  jest wyrażona wektorem  $\boldsymbol{\theta}_j$ , a w wyniku tego oszacowania parametrów otrzymujemy wektor  $\mathbf{z}_{aj}$ . Parametryczny wektor  $\boldsymbol{\theta}$  zawiera „rzeczywiste” parametry, które odzwierciedlają dane pomiarowe, ale przy zastosowaniu procedury iteracyjnej zawiera on oszacowanie parametrów po bieżącej iteracji. Macierz wrażliwości  $\mathbf{S}_j$  zawiera pierwsze pochodne wartości własnych i postaci drgań własnych w odniesieniu do parametrów aktualizacji, obliczone na podstawie oszacowania parametrów  $\boldsymbol{\theta}_j$  w bieżącej aktualizacji.

Spotykane są dwie różne metody rozwiązywania zagadnień z funkcją kary. W pierwszej z nich zakłada się, że wektor aktualizowanych nieznanymi parametrów można uzyskać przez minimalizację pewnej funkcji kary  $J$  względem  $\delta \boldsymbol{\theta}$ . Polega ona na różniczkowaniu funkcji

$J$  w odniesieniu do każdego elementu  $\delta\theta$  i porównaniu otrzymanego wyniku do zera. W drugiej metodzie równanie (2.124) jest traktowane jako ogólne rozwiązanie.

Rozważając rozwiązanie równania metodą najmniejszych kwadratów dla nieznanymi parametrów, otrzymujemy wartości niewiadomych parametrów dla dwóch przypadków:

$$\delta\theta = [\mathbf{S}^T \mathbf{S}]^{-1} \mathbf{S}^T \delta\mathbf{z} \quad \text{dla } N \geq N_p, \quad (2.125)$$

$$\delta\theta = \mathbf{S}^T [\mathbf{S} \mathbf{S}^T]^{-1} \delta\mathbf{z} \quad \text{dla } N \leq N_p, \quad (2.126)$$

lub

$$\theta_{j+1} = \theta_j + [\mathbf{S}_j^T \mathbf{S}_j]^{-1} \mathbf{S}_j^T (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_{aj}) \quad \text{dla } N \geq N_p, \quad (2.127)$$

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \mathbf{S}_j^T [\mathbf{S}_j \mathbf{S}_j^T]^{-1} (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_{aj}) \quad \text{dla } N \leq N_p. \quad (2.128)$$

Pierwszy przypadek (równanie (2.125)) występuje, gdy liczba pomierzonych danych jest większa od liczby aktualizowanych parametrów. W takim wypadku dostarczamy więcej danych niż posiadamy niewiadomych, a zestaw równań jest nadokreślony. W przeciwnym wypadku (równanie (2.126)), posiadamy więcej niewiadomych niż pomierzonych parametrów, a układ równań jest niedookreślony. Do rozwiązania tego problemu można wykorzystać np. mnożniki Lagrange'a lub podobne techniki, tak jak to przedstawiono w równaniu (2.126).

Wynik równania (2.124) można również otrzymać przez minimalizację funkcji kary względem parametrów aktualizowanych:

$$J(\delta\theta) = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.129)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \delta\mathbf{z} - \mathbf{S}\delta\theta, \quad (2.130)$$

jest błędem w przewidywanych danych pomiarowych na podstawie zaktualizowanych parametrów. Po podstawieniu równania (2.130) do (2.129), funkcję kary można zapisać w postaci:

$$J(\delta\theta) = \{\delta\mathbf{z} - \mathbf{S}\delta\theta\}^T \{\delta\mathbf{z} - \mathbf{S}\delta\theta\} = \delta\mathbf{z}^T \delta\mathbf{z} - 2\delta\theta^T \mathbf{S}^T \delta\mathbf{z} + \delta\theta^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \delta\theta \quad (2.131)$$

Wynik aktualizacji parametrów otrzymany z równania (2.131) jest taki sam jak otrzymany z równań (2.125) i (2.126). Aktualne wartości parametrów mogą być otrzymane z równań (2.127) i (2.128).

### 2.4.5 Macierz wag wartości mierzonych

W standardowym przypadku równa waga przykładana jest do wszystkich komponentów pomierzonych danych. W wielu testach dynamicznych otrzymane częstości drgań własnych są szacowane z dokładnością 0,25%, natomiast odpowiadające im postaci z dokładnością 10%. W przypadku gdy nie używamy macierzy wag, równa waga przykładana jest zarówno do częstości jak i postaci drgań własnych. Głównym problemem jest fakt, że wyższe częstotliwości mogą być mierzone z inną dokładności niż niższe. Macierz wag wartości mierzonych  $\mathbf{W}_{\epsilon\epsilon}$  jest zwykle dodatnio określona i diagonalna. W praktyce często macierz wag jest odchyleniem standardowym z mierzonych częstości i postaci drgań. W algorytmie aktualizacji perturbacja nieznanymi parametrów może być wyrażona jako:

$$\delta\theta = [\mathbf{S}^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} \mathbf{S}]^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} \delta\mathbf{z}, \quad (2.132)$$

a aktualizowane parametry:

$$\theta_{j+1} = \theta_j + [\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} \mathbf{S}_j]^{-1} \mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_{aj}). \quad (2.133)$$

### 2.4.6 Macierz wag aktualizowanych parametrów

W wielu przypadkach aktualizowane parametry znacznie się od siebie różnią, na przykład gdy aktualizujemy moduł Young'a oraz wysokość przekroju belki. Z tego powodu zwykle konieczne jest użycie macierzy wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$ . W procedurze aktualizacji, niektóre parametry są określone bardziej dokładnie od innych jak np. sztywność przęsła i sprężystość podpory. Można to uwzględnić w procedurze aktualizacji parametrów poprzez zastosowanie macierzy wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  względem aktualizowanych parametrów:

$$\delta\theta = \mathbf{W}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{S}^T [\mathbf{S} \mathbf{W}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{S}^T]^{-1} \delta\mathbf{z}, \quad (2.134)$$

lub:

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \mathbf{W}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{S}_j^T [\mathbf{S}_j \mathbf{W}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{S}_j^T]^{-1} (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_{aj}). \quad (2.135)$$

Macierz wag parametrów mierzonych  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  jest zwykle macierzą diagonalną z odwrotnościami oszacowanych wariancji odpowiednich parametrów na przekątnej. Użycie tak zdefiniowanej macierzy wag nie ogranicza całkowitej zamiany parametrów w trakcie iteracji (Friswell & Mottershead 1995).

### 2.4.7 Minimalizacja funkcji kary

Alternatywną metodą uzyskania wartości zamiany parametrów projektowych  $\delta\theta$ , przy uwzględnieniu obu macierzy wag  $\mathbf{W}_{\epsilon\epsilon}$  i  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$ , jest minimalizacja funkcji kary w odniesieniu do aktualizowanych parametrów  $\delta\theta$ :

$$J(\delta\theta) = \epsilon^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} \epsilon + \delta\theta^T \mathbf{W}_{\theta\theta} \delta\theta. \quad (2.136)$$

Podstawiając  $\epsilon = \delta\mathbf{z} - \mathbf{S}\delta\theta$  do równania (2.136) otrzymujemy:

$$J(\delta\theta) = \delta\mathbf{z}^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} \delta\mathbf{z} - 2\delta\theta^T \mathbf{S}^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} \delta\mathbf{z} + \delta\theta^T [\mathbf{S}^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} \mathbf{S} + \mathbf{W}_{\theta\theta}] \delta\theta. \quad (2.137)$$

Minimalizując równanie (2.137) w odniesieniu do  $\delta\theta$  otrzymujemy zmianę parametrów w postaci:

$$\delta\theta = [\mathbf{S}^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} \mathbf{S} + \mathbf{W}_{\theta\theta}]^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} \delta\mathbf{z}, \quad (2.138)$$

lub:

$$\theta_{j+1} = \theta_j + [\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} \mathbf{S}_j + \mathbf{W}_{\theta\theta}]^{-1} \mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_{aj}). \quad (2.139)$$

Równania (2.138) i (2.139) mogą być bardziej skuteczne jeżeli waga jest przyłożona do początkowych szacunków parametrów. Link (1993) oraz Flores-Santiago i Link (1993) korzystając z tej metody redukowali parametr regulujący w każdej iteracji, co jest równoważne ze zmniejszaniem macierzy wag  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$ . Podobnym podejściem, które pozwala na otrzymanie dobrze uwarunkowanego układu równań, jest dodanie macierzy wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  do początkowych nieznanymi parametrów. Zmiana parametru w początkowej wartości szacunkowej jest dokładniejsza niż zmiana parametru w każdej iteracji. Nowe wyrażenie można więc zapisać wzorem:

$$\begin{aligned} J(\delta\theta) &= \epsilon^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} \epsilon + \{\theta - \theta_0\}^T \mathbf{W}_{\theta\theta} \{\theta - \theta_0\} \\ &= \epsilon^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} \epsilon + \{\delta\theta + \{\theta_j - \theta_0\}\}^T \mathbf{W}_{\theta\theta} \{\delta\theta + \{\theta_j - \theta_0\}\}, \end{aligned} \quad (2.140)$$

gdzie jest  $\theta_0$  początkowym oszacowaniem parametru. Podstawiając  $\epsilon = \delta\mathbf{z} - \mathbf{S}\delta\theta$  do pierwszej części równania i rozwijając jego drugą część przybiera ono postać:

$$\begin{aligned} J(\delta\theta) &= \delta\mathbf{z}^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} \delta\mathbf{z} + \{\theta_j - \theta_0\}^T \mathbf{W}_{\theta\theta} \{\theta_j - \theta_0\} \\ &\quad - 2\delta\theta^T \{\mathbf{S}^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} \delta\mathbf{z} - \mathbf{W}_{\theta\theta} \{\theta_j - \theta_0\}\} + \delta\theta^T [\mathbf{S}^T \mathbf{W}_{\epsilon\epsilon} \mathbf{S} + \mathbf{W}_{\theta\theta}] \delta\theta. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Otrzymałą zmianę parametrów wynikającą z minimalizacji funkcji kary w odniesieniu do aktualizowanych parametrów można zapisać w postaci:

$$\delta\theta = \left[ \mathbf{S}^T \mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon} \mathbf{S} + \mathbf{W}_{\theta\theta} \right]^{-1} \left\{ \mathbf{S}^T \mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon} \delta\mathbf{z} - \mathbf{W}_{\theta\theta} \left\{ \theta_j - \theta_0 \right\} \right\}, \quad (2.142)$$

lub

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \left[ \mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon} \mathbf{S}_j + \mathbf{W}_{\theta\theta} \right]^{-1} \left\{ \mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon} (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_{aj}) - \mathbf{W}_{\theta\theta} \left\{ \theta_j - \theta_0 \right\} \right\}. \quad (2.143)$$

## 2.5 Definicja macierzy wag

Jednym z bardziej istotnych czynników wpływających na wynik aktualizacji parametrów za pomocą minimalizacji funkcji kary (2.136) jest odpowiedni dobór macierzy wag wartości mierzonych  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$  i parametrów projektowych  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$ .

Macierz wag danych pomiarowych  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$  pozwala uwzględnić różne znaczenie poszczególnych elementów wektora reszkowego  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Dzięki temu dysponując pomierzonymi częstotliwościami jak i postaciami drgań można im nadać w procesie aktualizacji różne wagi w zależności od stopnia pewności oszacowania otrzymanych wyników. W ten sposób można również modyfikować wagi przypisane częstotliwościom drgań własnych, które przy niższych postaciach, mogą być mierzone z inną dokładnością, niż te odpowiadające wyższym postaciom.

Zazwyczaj macierz wag danych pomiarowych  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$  definiowana jest jako dodatnio określona macierz diagonalna. Najprostszą definicją jest w tym wypadku definicja macierzy jednostkowej:

$$\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon} = \mathbf{I}. \quad (2.144)$$

Macierz wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  pozwala na rozróżnienie wag parametrów projektowych. Powinna ona odzwierciedlać niepewności w początkowym ich określeniu. Ma to duże znaczenie w przypadku gdy dokonujemy jednorazowo aktualizacji różnych parametrów projektowych, jak na przykład: sztywności podpór pionowych i rotacyjnych, modułów Young'a oraz gabarytów przekrojów poprzecznych. Parametrów tych nie jesteśmy w stanie określić z taką samą dokładnością na etapie tworzenia modelu numerycznego, co może zostać odzwierciedlone poprzez przypisanie im różnych wag (Mottershead et al. 2011)

Jedną z klasycznych definicji zakłada, że macierz wag  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  można zdefiniować korzystając z regularyzacji Tikonov'a definiując ją jako macierz jednostkową (Mottershead et al. 2011):

$$\mathbf{W}_{\theta\theta} = \mathbf{I}. \quad (2.145)$$

Podejście to zakłada jednak przyłożenie takiej samej wagi do wszystkich aktualizowanych parametrów bez względu na ich rodzaj.

## 2.6 Funkcja odpowiedzi częstotliwościowej dla układu o jednym stopniu swobody

Równanie ruchu, które opisuje układ o jednym stopniu swobody w dziedzinie czasu  $t$  można przedstawić w postaci:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = p(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad (2.146)$$

gdzie  $m$ ,  $c$ ,  $k$  oznaczają odpowiednio masę tłumienie oraz sztywność,  $p$  jest obciążeniem zewnętrznym natomiast  $x(0)$  oraz  $\dot{x}(0)$  są przemieszczeniem i prędkością początkową. Wykorzystując transformatę Laplace'a, przy założeniu, że warunki początkowe są zerowe, równanie można zapisać w postaci (Mottershead et al. 2011; McConnell 2008):

$$\mathcal{L}[m\ddot{x} + c\dot{x} + kx] = \mathcal{L}[p(t)] = P(s). \quad (2.147)$$

Jeżeli przemieszczenie i prędkość początkowa są równe zero, równanie można zapisać w postaci:

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = P(s). \quad (2.148)$$

Pozwala to na zapisanie funkcji przejścia jako ilorazu transformaty Laplace'a odpowiedzi do transformaty Laplace'a wymuszenia:

$$H(s) = \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}, \quad (2.149)$$

$$H(s) = \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (2.150)$$

gdzie  $\xi$  jest liczbą tłumienia a  $\omega_n$  częstotliwością drgań nietłumionych.

W przypadku tłumienia podkrytycznego dla  $\xi < 1$ , pierwiastki równania, nazywane biegunami, można zapisać jako:

$$s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi\omega_n + i\omega_d, \quad (2.151)$$

$$s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi\omega_n - i\omega_d, \quad (2.152)$$

gdzie  $i$  jest częścią zespoloną, a  $\omega_d$  częstotliwością drgań tłumionych.

Przekształcając więc równanie (2.150) można je zapisać jako:



$$H(s) = \frac{1}{m} = \frac{r_1}{(s-s_1)(s-s_2)} + \frac{r_2}{(s-s_2)}. \quad (2.153)$$

Zapisując funkcję przejścia w dziedzinie częstotliwości  $s = i\omega$  otrzymujemy:

$$H(s) = \frac{1}{m} = \frac{r_1}{(s-s_1)(s-s_2)} + \frac{r_2}{(s-s_2)}, \quad (2.154)$$

gdzie

$$r_1 = \frac{1}{i2m\omega_d}, \quad (2.155)$$

$$r_2 = -\frac{1}{i2m\omega_d}. \quad (2.156)$$

Podstawienie  $r_1$  i  $r_2$  do równania (2.154) pozwala je zapisać w postaci:

$$H(s) = \frac{1}{m} = \frac{r_1(s-s_1^*)}{(s-s_1)(s-s_1^*)} = \frac{2r_1i\omega_d}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (2.157)$$

gdzie  $r_1$  jest współczynnikiem residuum lub resztą.

W celu otrzymania funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (FRF), funkcję przejścia zapisaną w dziedzinie czasu należy przekształcić do dziedziny częstotliwości:

$$H(\omega) = H(s)|_{s=i\omega} = \frac{2r_1i\omega_d}{(i\omega)^2 + 2\xi\omega_n i\omega + \omega_n^2} = \frac{2r_1i\omega_d}{\omega^2 + i2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2}. \quad (2.158)$$

## 2.7 Funkcja odpowiedzi częstotliwościowej dla układu o wielu stopniach stopni swobody

Równanie ruchu, które opisuje układ o wielu ( $n_d$ ) stopniach swobody w dziedzinie czasu  $t$  można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0, \quad (2.159)$$

gdzie  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  oznaczają odpowiednio macierze mas tłumienia oraz sztywności o wymiarze  $n_d \times n_d$ ,  $\mathbf{p}$  jest wektorem obciążeń zewnętrznych natomiast  $\mathbf{x}(0)$  oraz  $\dot{\mathbf{x}}(0)$  są wektorami przemieszczeń i prędkości początkowych. Wykorzystując transformatę Laplace'a równanie można zapisać w postaci:

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})\mathbf{U}(s) - \mathbf{M}s\mathbf{x}(0) - \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{C}\mathbf{x}(0) = \mathbf{P}(s). \quad (2.160)$$

Założenie zerowych warunków początkowych pozwala na zapisanie równania w postaci:

$$\mathbf{B}(s)\mathbf{X}(s) = \mathbf{P}(s), \quad (2.161)$$

gdzie  $\mathbf{B}(s)$  jest macierzą systemu definiowaną jako:

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}, \quad (2.162)$$

która z uwagi na symetrię macierzy  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  jest również macierzą symetryczną.

Odwrotnością macierzy systemu jest macierz przejścia zdefiniowana jako:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{B}(s)^{-1} = \frac{\text{adj}\mathbf{B}(s)}{\det\mathbf{B}(s)} = \frac{\mathbf{R}(s)}{\det\mathbf{B}(s)}, \quad (2.163)$$

gdzie  $\text{adj}\mathbf{B}(s)$  jest macierzą dołączoną do macierzy  $\mathbf{B}(s)$ , natomiast  $\mathbf{R}(s)$  jest macierzą reszt modalnych. Pierwiastki, zwane biegunami, stanowią rozwiązanie równania charakterystycznego  $\det\mathbf{B}(s) = 0$ :

$$p_k = -\xi_k \omega_{nk} \pm i\omega_{dk}, \quad (2.164)$$

dla  $k = 1, 2, \dots, N$  gdzie  $N$  jest liczbą postaci drgań własnych układu.

Macierz przejścia można zapisać również w postaci:

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\mathbf{R}_k}{s - p_k} + \frac{\mathbf{R}_k^*}{s - p_k^*} \right), \quad (2.165)$$

gdzie  $\mathbf{R}(s)$  jest macierzą reszt modalnych dla  $k$ -tej postaci drgań i można ją zapisać, korzystając ze współczynnika skalującego dla każdej z  $k$  postaci drgań w postaci:

$$\mathbf{R}_k = t_k \mathbf{\Phi}_k \mathbf{\Phi}_k^T, \quad k = 1, 2, \dots, n_d. \quad (2.166)$$

Funkcja odpowiedzi częstotliwościowej (FRF), powstaje poprzez zapisanie funkcji przejścia w dziedzinie częstotliwości i można ją sformułować jako:

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{k=1}^N \left( \frac{t_k \mathbf{\Phi}_k \mathbf{\Phi}_k^T}{i\omega + \xi_k \omega_{nk} - i\omega_{dk}} + \frac{t_k^* \mathbf{\Phi}_k^* (\mathbf{\Phi}_k^*)^T}{i\omega + \xi_k \omega_{nk} + i\omega_{dk}} \right). \quad (2.167)$$

W zależności od danych wyjściowych funkcja odpowiedzi częstotliwościowej nazywana jest (Maia & Silva 1997):

- ✓ podatnością dynamiczną, gdy opisuje zależność pomiędzy wejściem - przyłożonym obciążeniem, a wyjściem - odpowiedzią konstrukcji w postaci przemieszczeń:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{X}_f(\omega)}{\mathbf{P}_k(\omega)}, \quad (2.168)$$

- ✓ mobilnością dynamiczną, gdy opisuje zależność pomiędzy wejściem - przyłożonym obciążeniem, a wyjściem - odpowiedzią konstrukcji w postaci prędkości:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\dot{\mathbf{X}}_j(\omega)}{\mathbf{P}_k(\omega)}, \quad (2.169)$$

- ✓ interancją dynamiczną, gdy opisuje zależność pomiędzy wejściem - przyłożonym obciążeniem, a wyjściem - odpowiedzią konstrukcji w postaci przyspieszeń:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\ddot{\mathbf{X}}_j(\omega)}{\mathbf{P}_k(\omega)}. \quad (2.170)$$



## 3 Aktualizacja parametrów projektowych na podstawie analiz numerycznych

### 3.1 Indeksy uszkodzenia

Wykrywanie uszkodzenia realizowane jest przy użyciu indeksów uszkodzenia. Obliczenie zestawu indeksów przy jednoczesnej interpretacji ich wartości umożliwia detekcję ubytków oraz przyrostów materiałowych lub redukcji sztywności. W procesie detekcji uszkodzenia z reguły wykorzystuje się cztery stopnie zaawansowania:

1. stwierdzenie czy uszkodzenie istnieje;
2. poszukiwanie miejsca uszkodzenia;
3. ocena stopnia uszkodzenia
4. ocena typu uszkodzenia.

W opracowanych autorskich indeksach wykorzystano poniższe oznaczenia:

$n$  - liczba elementów modelu MES;

$n_{\max}$  - numer elementu modelu MES o największej bezwzględnej zmianie sztywności lub masy otrzymanej w wyniku procedury aktualizacji;

$n_d$  - numer dowolnego elementu modelu MES wytypowanego (potencjalnie uszkodzonego);

$EI_i^p$  - sztywność początkowa  $i$ -tego elementu modelu MES;

$EI_i^k$  - sztywność końcowa  $i$ -tego elementu modelu MES po procedurze aktualizacji;

$m_i^p$  - masa początkowa  $i$ -tego elementu modelu MES;

$m_i^k$  - masa końcowa  $i$ -tego elementu modelu MES po procedurze aktualizacji.

Podstawowym indeksem jest skalarny indeks  $I_{oi}$ , obliczany niezależnie dla każdego z  $n$  elementów modelu MES. Pozwala on na sprawdzenie procentowej zmiany parametru projektowego, który definiowany jest jako różnica sztywność  $EI_i$  lub masy  $m_i$   $i$ -tego elementu modelu MES, wyznaczonej po procedurze aktualizacji w stosunku do wartości początkowej danego parametru projektowego, znormalizowany przez wartość początkową parametru projektowego. Jeżeli aktualizowanym parametrem projektowym jest sztywność  $EI_i$  elementu modelu MES indeks  $I_{oi}$  zdefiniowany jest w postaci:

$$I_{oi} = \frac{EI_i^p - EI_i^k}{EI_i^p} \cdot 100\%. \quad (3.1)$$

W przypadku gdy aktualizowanym parametrem jest masa elementu modelu MES, indeks  $I_{oi}$  dany jest wzorem:

$$I_{oi} = \frac{m_i^k - m_i^p}{m_i^p} \cdot 100\%. \quad (3.2)$$

Na bazie indeksu skalarnego  $I_{oi}$  zaproponowano indeks wektorowy  $I_o$ , o wymiarze  $1 \times n$ , który zawiera zestawione dla każdego z elementów modelu MES procentowe zmiany parametru projektowego:

$$I_o = [I_{o1}, I_{o2}, I_{o3}, \dots, I_{on}]. \quad (3.3)$$

Modyfikacją indeksu  $I_o$  jest indeks  $I_o^{abs}$  (3.4), którego elementy są wartością bezwzględną z indeksu  $I_{oi}$  dla każdego z  $n$  elementów modelu MES:

$$I_o^{abs} = [|I_{o1}|, |I_{o2}|, |I_{o3}|, \dots, |I_{on}|]. \quad (3.4)$$

Podstawowe indeksy, bazujące na procentowej zmianie parametru projektowego, uzupełniono indeksami ułatwiającymi szacowanie położenia uszkodzenia w konstrukcji, jego stopnia oraz kontrolujące poprawność działania algorytmu. Do ich definicji wykorzystano dwanaście indeksów pomocniczych. Założono, że model MES składa się z minimum siedmiu elementów oraz, że element uszkodzony nie jest elementem skrajnym ani przedskrajnym - tzn. posiada co najmniej dwóch „sąsiadów” z każdej strony. W przypadku mniejszej liczby elementów bądź uszkodzenia zlokalizowanego w skrajnych częściach modelu indeksy definiowane są analogicznie z pominięciem odpowiednich elementów wektorów.

Zdefiniowano trzy typy indeksów pomocniczych. Wszystkie 3 typy indeksów wyznaczano biorąc pod uwagę, że za element uszkodzony uważa się ten o największej zmianie sztywności  $n_{max}$  po procedurze aktualizacji bądź, dowolny element wytypowany  $n_d$ , gdy potencjalnie znamy miejsce uszkodzenia.

Pierwsza grupa proponowanych indeksów wyznacza średnią zmianę parametrów projektowych elementów nieuszkodzonych:

$$I_{rm} = \frac{\sum_{i=1}^n I_{oi} - I_o(n_{max-1}, n_{max}, n_{max+1})}{n-3} \quad dla n > 3, \quad (3.5)$$

$$I_{rmd} = \frac{\sum_{i=1}^n I_{oi} - I_o(n_{d-1}, n_d, n_{d+1})}{n-3} \quad dla n > 3, \quad (3.6)$$

$$I_{rm}^{abs} = \frac{\sum_{i=1}^n I_{oi}^{abs} - I_o^{abs}(n_{max-1}, n_{max}, n_{max+1})}{n-3} \quad dla n > 3, \quad (3.7)$$

$$I_{rmd}^{abs} = \frac{\sum_{i=1}^n I_{oi}^{abs} - I_o^{abs}(n_{d-1}, n_d, n_{d+1})}{n-3} \quad dla n > 3. \quad (3.8)$$

Indeks  $I_{rm}$  (3.5) jest różnicą pomiędzy sumą parametrów projektowych wszystkich elementów indeksu wektorowego  $I_o$ , a sumą parametrów projektowych elementu o maksymalnej zmianie i elementów z nim sąsiadujących, znormalizowany przez  $n-3$ . Indeks  $I_{rmd}$  (3.6) jest różnicą pomiędzy sumą parametrów projektowych wszystkich elementów indeksu wektorowego  $I_o$ , a sumą parametrów projektowych dowolnego elementu wytypowanego i elementów z nim sąsiadujących, znormalizowany przez  $n-3$ . Analogicznie do powyższych indeksów zdefiniowano indeksy  $I_{rm}^{abs}$  (3.7) oraz  $I_{rmd}^{abs}$  (3.8) odnosząc się do indeksu wektorowego  $I_o^{abs}$ .

Druga grupa proponowanych indeksów pomocniczych odnosi się do maksymalnej zmiany parametru projektowego:

$$I_{rmax} = \max \langle I_o(1, \dots, n_{max-2}, n_{max+2}, \dots, n) \rangle \quad (3.9)$$

$$I_{rmax d} = \max \langle I_o(1, \dots, n_{d-2}, n_{d+2}, \dots, n) \rangle \quad (3.10)$$

$$I_{rmax}^{abs} = \max \langle I_o^{abs}(1, \dots, n_{max-2}, n_{max+2}, \dots, n) \rangle \quad (3.11)$$

$$I_{rmax d}^{abs} = \max \langle I_o^{abs}(1, \dots, n_{d-2}, n_{d+2}, \dots, n) \rangle \quad (3.12)$$

Indeks  $I_{rmax}$  (3.9) jest maksymalną wartością z indeksu wektorowego  $I_o$ , z pominięciem wartości indeksu  $I_o$  dla elementu o maksymalnej zmianie parametrów projektowych i elementów z nim sąsiadujących. Indeks  $I_{rmax d}$  (3.10) jest maksymalną wartością z indeksu wektorowego  $I_o$ , z pominięciem wartości indeksu  $I_o$  dla dowolnego wytypowanego elementu i elementów z nim sąsiadujących. Analogicznie do powyższych indeksów zdefiniowano indeksy  $I_{rmax}^{abs}$  (3.11) oraz  $I_{rmax d}^{abs}$  (3.12) odnosząc się do indeksu wektorowego  $I_o^{abs}$ .

Trzecia grupa indeksów odnosi się do maksymalnej zmiany sztywności z elementów bezpośrednio sąsiadujących z elementem uszkodzonym:

$$I_{rs} = \max \langle I_o(n_{\max-1}, n_{\max+1}) \rangle \quad (3.13)$$

$$I_{rs d} = \max \langle I_o(n_{d-1}, n_{d+1}) \rangle \quad (3.14)$$

$$I_{rs}^{abs} = \max \langle I_o^{abs}(n_{\max-1}, n_{\max+1}) \rangle \quad (3.15)$$

$$I_{rs d}^{abs} = \max \langle I_o^{abs}(n_{d-1}, n_{d+1}) \rangle \quad (3.16)$$

Indeks  $I_{rs}$  (3.13) jest maksymalną wartością z indeksu wektorowego  $I_o$  dla elementów sąsiadujących z elementem o maksymalnej zmianie parametrów projektowych. Indeks  $I_{rs d}$  (3.14) jest maksymalną wartością z indeksu wektorowego  $I_o$  dla elementów sąsiadujących z elementem dowolnie wytypowanym. Analogicznie do powyższych indeksów zdefiniowano indeksy  $I_{rs}^{abs}$  (3.15) oraz  $I_{rs d}^{abs}$  (3.16) odnosząc się do indeksu wektorowego  $I_o^{abs}$ .

Indeksy bezpośrednio sprawdzające jakość działania algorytmu podzielone zostały na dwie kategorie: bazowe i kontrolne.

Wykorzystując indeksy bazowe możliwe jest wyszukiwanie maksymalnej wartości w indeksie  $I_o$  lub  $I_o^{abs}$ , a następnie przyrównanie jej do odpowiadających wartości indeksów pośrednich. Indeksy bazowe umożliwiają sprawdzenie wzajemnych relacji pomiędzy zmianami parametrów projektowych we wszystkich elementach i na tej podstawie oszacowanie wielkości oraz zakresu uszkodzenia.

Indeks bazowy średni  $I_m$  oraz indeks bazowy średni bezwzględny  $I_m^{abs}$  odnoszą się do wartości średniej z elementów nieuszkodzonych i są zdefiniowane następująco:

$$I_m = \frac{I_o(n_{\max})}{I_{rm}}, \quad (3.17)$$

$$I_m^{abs} = \frac{I_o^{abs}(n_{\max})}{I_{rm}^{abs}}. \quad (3.18)$$



Indeks bazowy maksymalny  $I_{\max}$  oraz indeks bazowy maksymalny bezwzględny  $I_{\max}^{abs}$  odnoszą się do wartości maksymalnej z elementów nieuszkodzonych i są zdefiniowane następująco:

$$I_{\max} = \frac{I_o(n_{\max})}{I_{r\max}}, \quad (3.19)$$

$$I_{\max}^{abs} = \frac{I_o(n_{\max})}{I_{r\max}^{abs}}. \quad (3.20)$$

Indeks bazowy sąsiedni  $I_s$  oraz indeks bazowy sąsiedni bezwzględny  $I_s^{abs}$  odnoszą się do wartości maksymalnej z elementów sąsiadujących z uszkodzonym i są zdefiniowane następująco:

$$I_s = \frac{I_o(n_{\max})}{I_{rs}}, \quad (3.21)$$

$$I_s^{abs} = \frac{I_o(n_{\max})}{I_{rs}^{abs}}. \quad (3.22)$$

Analogicznie zaproponowano definicję indeksów kontrolnych, które służą do weryfikacji działania algorytmu aktualizacji. Używa się ich w symulacjach, w których znamy dokładnie lokalizację uszkodzenia.

Indeks kontrolny średni  $I_{mk}$  oraz indeks kontrolny średni bezwzględny  $I_{mk}^{abs}$  odnoszą się do wartości średniej z elementów nieuszkodzonych i są zdefiniowane następująco:

$$I_{mk} = \frac{I_o(n_d)}{I_{rm d}}, \quad (3.23)$$

$$I_{mk}^{abs} = \frac{I_o(n_d)}{I_{rm d}^{abs}}. \quad (3.24)$$

Indeks kontrolny maksymalny  $I_{\max k}$  oraz indeks kontrolny maksymalny bezwzględny  $I_{\max k}^{abs}$  odnoszą się do wartości maksymalnej z elementów nieuszkodzonych i są zdefiniowane następująco:

$$I_{\max k} = \frac{I_o(n_d)}{I_{r\max d}}, \quad (3.25)$$

$$I_{\max k}^{abs} = \frac{I_o(n_d)}{I_{r\max d}^{abs}}. \quad (3.26)$$

Indeks kontrolny sąsiedni  $I_{sk}$  oraz indeks kontrolny sąsiedni bezwzględny  $I_{sk}^{abs}$  odnoszą się do wartości maksymalnej z elementów sąsiadujących z uszkodzonym i są zdefiniowane następująco:

$$I_{sk} = \frac{I_o(n_d)}{I_{rsd}}, \quad (3.27)$$

$$I_{sk}^{abs} = \frac{I_o(n_d)}{I_{rsd}^{abs}}. \quad (3.28)$$

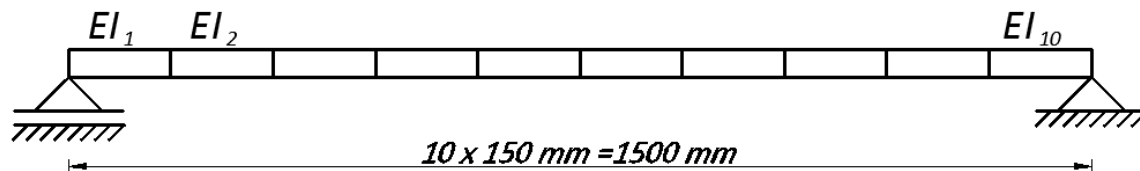
Opracowane autorskie indeksy są narzędziem wspomagającym proces identyfikacji uszkodzenia. Indeksy bazowe  $I_m$ ,  $I_m^{abs}$ ,  $I_{max}$ ,  $I_{max}^{abs}$ ,  $I_s$ ,  $I_s^{abs}$  znajdują zastosowanie w sprawdzeniu czy w konstrukcji występuje uszkodzenie oraz pozwalają na oszacowanie jego intensywności. Indeksy kontrolne  $I_{mk}$ ,  $I_{mk}^{abs}$ ,  $I_{maxk}$ ,  $I_{maxk}^{abs}$ ,  $I_{sk}$ ,  $I_{sk}^{abs}$  wyznaczone są dla z góry narzuconego elementu. Pozwalają na ustalenie, czy wybrany konkretny element modelu MES jest uszkodzony oraz na poznanie intensywności tego uszkodzenia. Mogą zostać wykorzystane również w poszukiwaniu najbardziej korzystnego rozmieszczenia czujników pomiarowych, na przykładzie testowym, gdy z góry znane jest miejsce uszkodzenia.

W niniejszej pracy uszkodzenie konstrukcji utożsamiane jest ze spadkiem pierwszej częstotliwości drgań własnych. W przypadku gdy aktualizowanym parametrem projektowym jest sztywność  $EI_i$  elementu modelu MES, uszkodzenie jest tożsame z jej redukcją. Kiedy aktualizowanym parametrem projektowym jest masa  $m_i$  segmentu, jej wzrost w danym elemencie jest tożsame z jego uszkodzeniem. Tym samym dodatnie wartości zarówno indeksów kontrolnych jak i bazowych świadczą o uszkodzeniu konstrukcji. Związane są więc z redukcją sztywności, bądź przyrostem masy elementu modelu MES. Ujemne wartości indeksów świadczą natomiast o wzroście sztywności bądź redukcji masy danego segmentu modelu MES.

### 3.2 Aktualizacja parametrów projektowych na przykładzie belki swobodnie podpartej

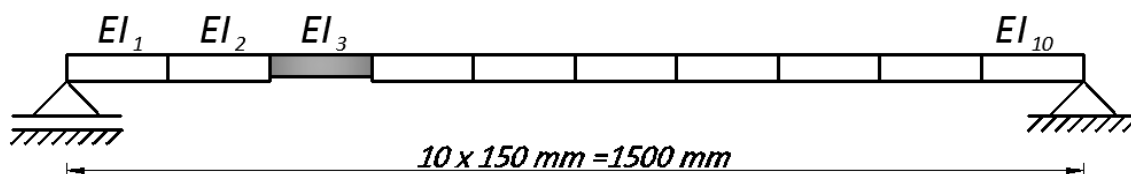
Aktualizację parametrów modelu MES przy użyciu częstotliwości i postaci drgań własnych wykonano na danych uzyskanych dla belki swobodnie podpartej. Belka zbudowana jest ze stalowego ceownika C 40 o długości 1,5 m. Przyjęto, że ciężar stali wynosi  $7850 \text{ kg/m}^3$ . Siatka dyskretyzacyjna modelu MES składała się z 10 elementów skończonych równej długości (rysunek 3.1) posiadających 2 stopnie swobody w węźle – przemieszczenie pionowe oraz obrót. Z uwagi na sposób podparcia założono zerowe przemieszczenia pionowe na podporach. Całkowita liczba

stopni swobody wynosi 20, w tym 9 stopni swobody stanowią translacje, natomiast 11 rotacje. Sztywność  $EI_i$  nieuszkodzonego elementu belki wynosi  $2171,6 \text{ Nm}^2$ . Tłumienie belki zostało pominięte w niniejszych obliczeniach.

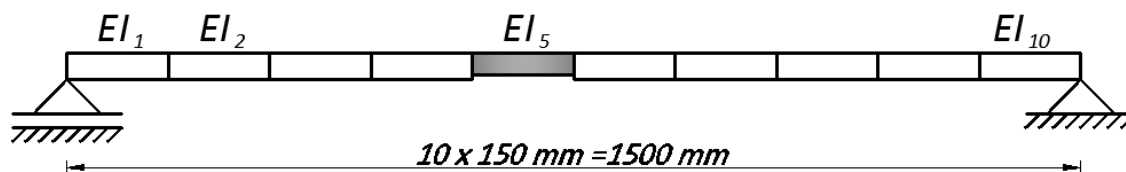


Rysunek 3.1 Model MES belki swobodnie podpartej

W pierwszym etapie obliczeń aktualizowanymi parametrami są sztywności giętności  $EI_i$  wszystkich elementów skończonych belki. Wektor aktualizowanych parametrów ma postać  $\theta = [EI_1, EI_2, \dots, EI_{10}]$ . Dane wejściowe do procedury aktualizacji zostały wygenerowane numerycznie, przy założeniu braku szumu pomiarowego. Przeprowadzono analizy dla trzech typów belek: belki nieuszkodzonej, belki z uszkodzeniem trzeciego elementu modelu MES (rysunek 3.2) oraz belki z uszkodzeniem piątego elementu modelu MES (rysunek 3.3).



Rysunek 3.2 Model MES belki swobodnie podpartej z uszkodzonym 3 elementem

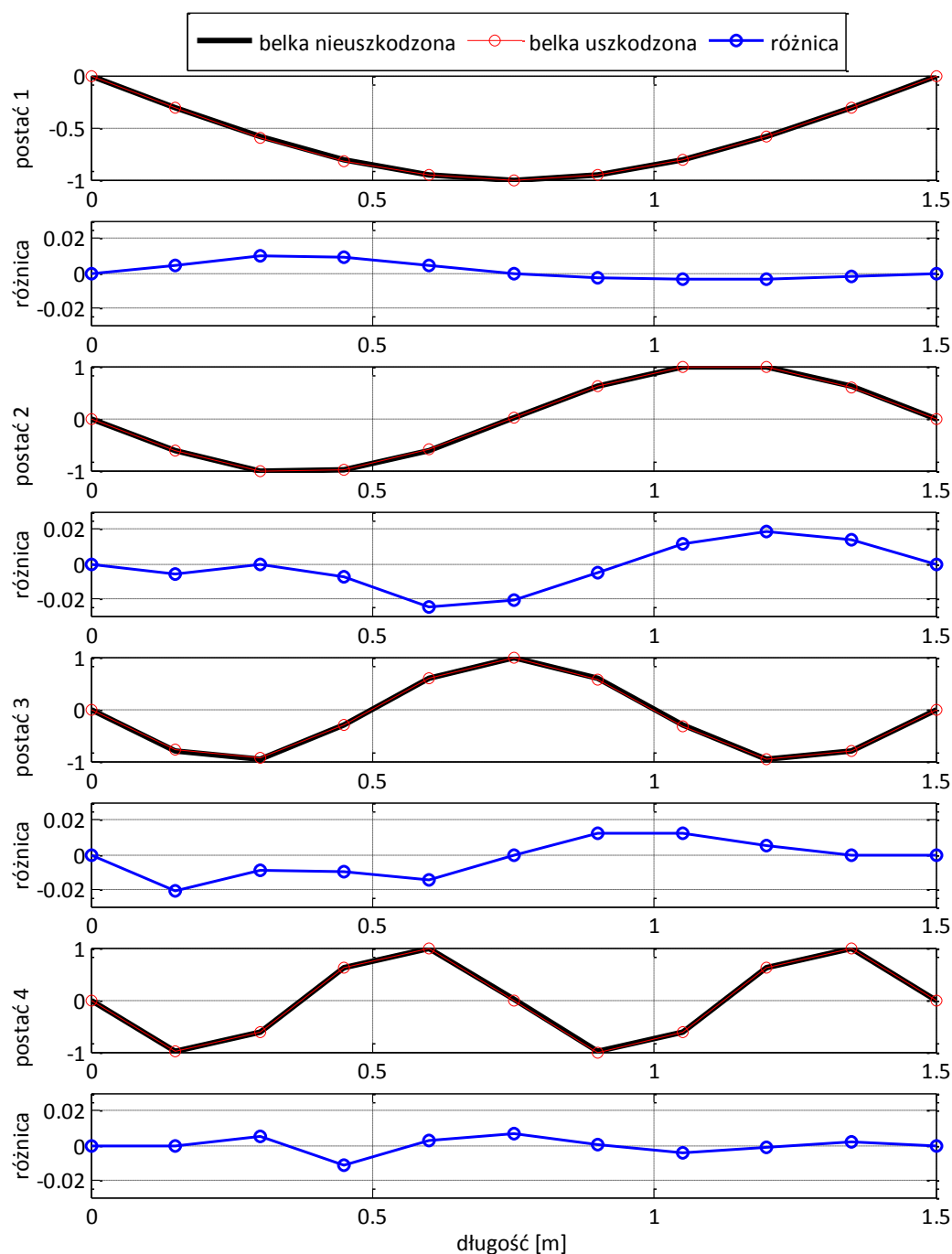


Rysunek 3.3 Model MES belki swobodnie podpartej z uszkodzonym 5 elementem

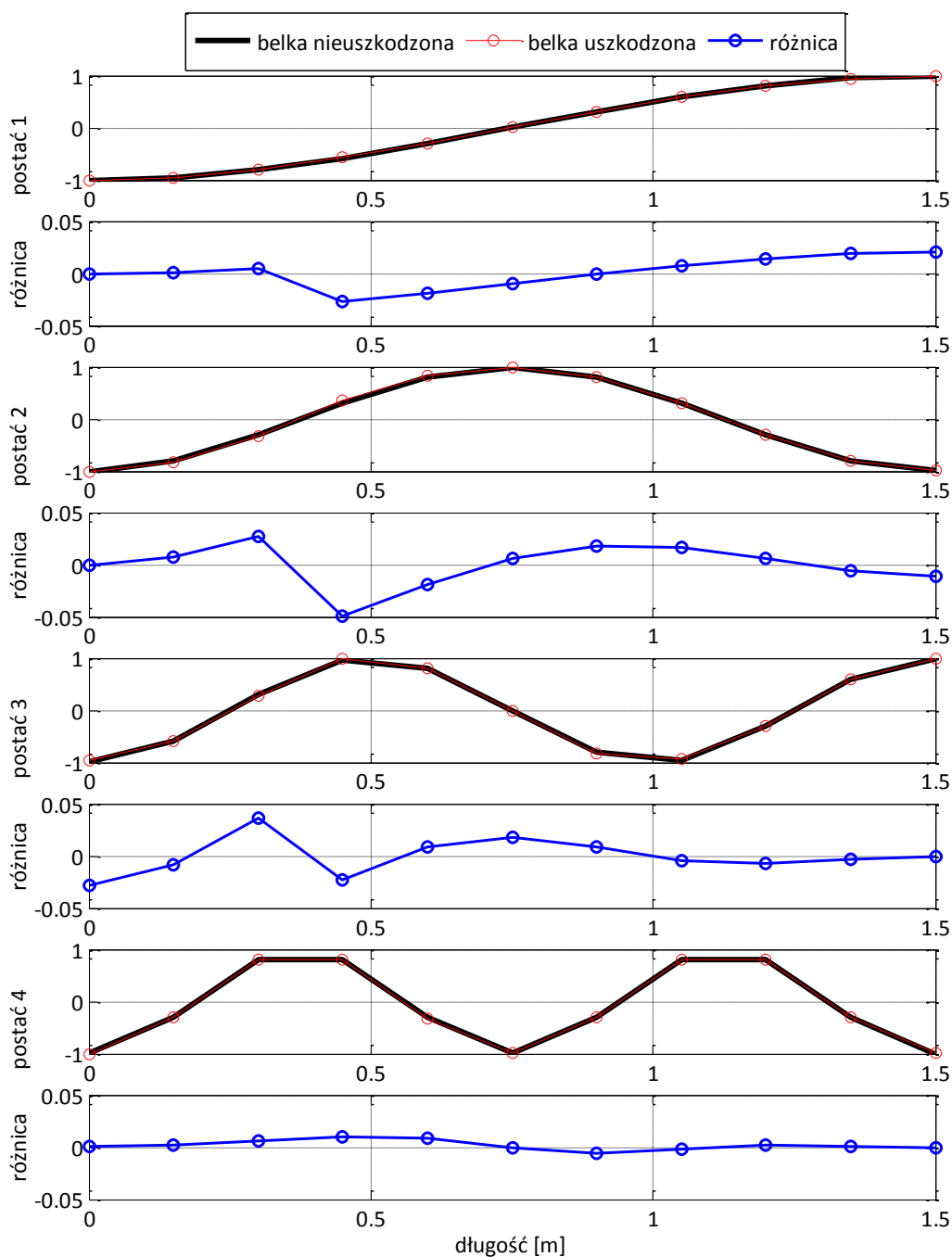
Uszkodzenie jest modelowane poprzez redukcję sztywności giętności  $EI_i$  danego elementu. W przeprowadzonej analizie badano zbieżność rozwiązania - poprawność lokalizacji uszkodzenia w przypadku gdy uszkodzenie belki, redukcja sztywności  $EI_i$ , elementu wynosi odpowiednio 1%, 5%, 10% oraz 15%.

Dla belki nieuszkodzonej oraz z uszkodzeniem elementu 3 i 5 przeprowadzono analizę modalną. Wyznaczono postacie i częstotliwości drgań własnych konstrukcji. Pierwsza częstotliwość w przypadku belki nieuszkodzonej wynosi  $19,61 \text{ Hz}$ , druga  $78,44 \text{ Hz}$ , trzecia  $176,57$

Hz, a czwarta 314,26 Hz. Wyniki czterech pierwszych częstotliwości giętnych dla belki z różnym stopniem uszkodzenia wraz z odpowiadającym kryterium MAC i NMD zestawiono w tabeli 3.1. Na rysunkach 3.4 i 3.5 przedstawiono cztery pierwsze gięte postacie drgań belki z uszkodzeniem o intensywności 15% oraz belki bez uszkodzenia wraz z różnicami pomiędzy postacią drgań dla belki bez uszkodzenia oraz z uszkodzeniem, odpowiednio dla translacyjnych oraz rotacyjnych stopni swobody.



Rysunek 3.4 Porównanie postaci drgań własnych dla belki bez uszkodzenia i z uszkodzeniem trzeciego elementu o intensywności 15% bazujące na translacyjnych stopniach swobody



Rysunek 3.5 Porównanie postaci drgań własnych dla belki bez uszkodzenia i z uszkodzeniem trzeciego elementu o intensywności 15% bazujące na rotacyjnych stopniach swobody

Maksymalne różnice dla przedstawionych postaci drgań w przypadku translacyjnych stopni swobody wahają się w zakresie od 0,007 do 0,019, natomiast w przypadku rotacyjnych stopni swobody od 0,010 do 0,037. Największe zmiany w obu przypadkach występują dla postaci 2 oraz 3 i wynoszą odpowiednio dla translacyjnych stopni swobody 0,019 i 0,012 oraz dla rotacyjnych stopni swobody 0,050 i 0,037.

Tabela 3.1 Zestawienie czterech pierwszych częstotliwości drgań własnych oraz kryterium MAC i NMD dla belki z uszkodzeniem 3 oraz 5 elementu

Stopień uszkodzenia	Postać drgań	EI uszkodzonego elementu	Typ belki					
			Uszkodzenie $EI_3$			Uszkodzenie $EI_5$		
[%]		Nm <sup>2</sup>	$f$ [Hz]	MAC [- ]	NMD [%]	$f$ [Hz]	MAC [- ]	NMD [%]
1	1	2149,9	19,60	1,000	0,085	19,59	1,000	0,084
	2		78,37	1,000	0,159	78,43	1,000	0,059
	3		176,48	1,000	0,139	176,44	1,000	0,187
	4		314,22	1,000	0,035	314,14	1,000	0,161
5	1	2063,1	19,56	0,999	0,441	19,51	0,999	0,435
	2		78,05	0,999	0,821	78,39	0,999	0,305
	3		176,12	0,999	0,712	175,88	0,999	0,958
	4		314,06	1,000	0,185	313,64	0,999	0,822
10	1	1954,5	19,50	0,999	0,926	19,40	0,999	0,908
	2		77,62	0,999	1,704	78,34	0,999	0,638
	3		175,63	0,999	1,469	175,14	0,999	1,983
	4		313,83	0,999	0,390	312,97	0,999	1,694
15	1	1845,9	19,44	0,999	1,463	19,28	0,999	1,424
	2		77,16	0,999	2,657	78,28	0,999	1,001
	3		175,11	0,999	2,277	174,34	0,999	3,083
	4		313,58	0,999	0,621	312,25	0,999	2,621

Procedura dla badań na danych numerycznych poszukiwania miejsca uszkodzenia składa się z następujących kroków:

1. wyboru liczby postaci drgań branych do procedury aktualizacji;
2. wyboru liczby translacji oraz rotacji;
3. stworzenia wektora numerycznych danych „pomiarowych”;
4. redukcji macierzy **K** i **M** metodą SEREP względem niemierzonych stopni swobody;
5. obliczenia częstotliwości i postaci drgań dla zredukowanych macierzy układu dynamicznego;
6. normalizacji wektora pomierzonych postaci drgań względem numerycznej macierzy mas;
7. obliczenia macierzy wrażliwości **S**, różnicy wektorów par modalnych, zdefiniowania macierzy wag i obliczenia perturbacji parametrów projektowych;
8. minimalizacji funkcji kary w odniesieniu do zmiany parametrów projektowych;
9. obliczenia aktualnej sztywności elementów skończonych układu i sprawdzenia poprawności zrealizowanych obliczeń.

Pierwszym wariantem zadania testowego jest przyjęcie do procedury aktualizacji dwóch pierwszych częstotliwości i postaci drgań, z uwagi na to, że są one relatywnie łatwe do uzyskania

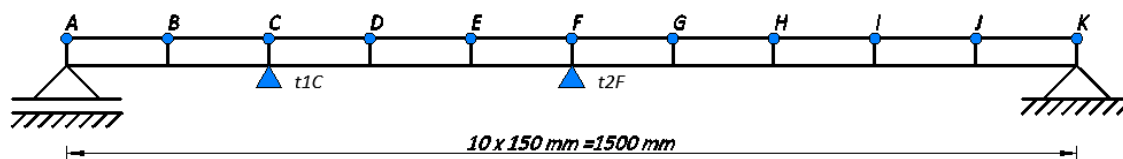
podczas badań rzeczywistych konstrukcji. W celu zbadania wpływu pomiaru dodatkowych rotacyjnych stopni swobody i ich wpływu na poprawną detekcję lokalizacji i stopnia uszkodzenia zastosowano pięć różnych schematów rozmieszczenia punktów pomiarowych. Jako sztywność początkową dla wszystkich elementów, przyjęto  $EI_i$  elementu nieuszkodzonego. W całej procedurze korzystano z pierwszego wariantu definicji macierzy wag opisanego w rozdziale 2.5. Macierz wag wartości mierzonych była definiowana zgodnie ze wzorem (2.144), a macierz wag paramentów korzystając z regularyzacji Tikonov'a (2.145).

Pierwszy schemat układu „pomiarowego” składa się z dwóch translacyjnych stopni swobody, w środku rozpiętości belki oraz w  $1/5$  długości belki (rysunek 3.6).

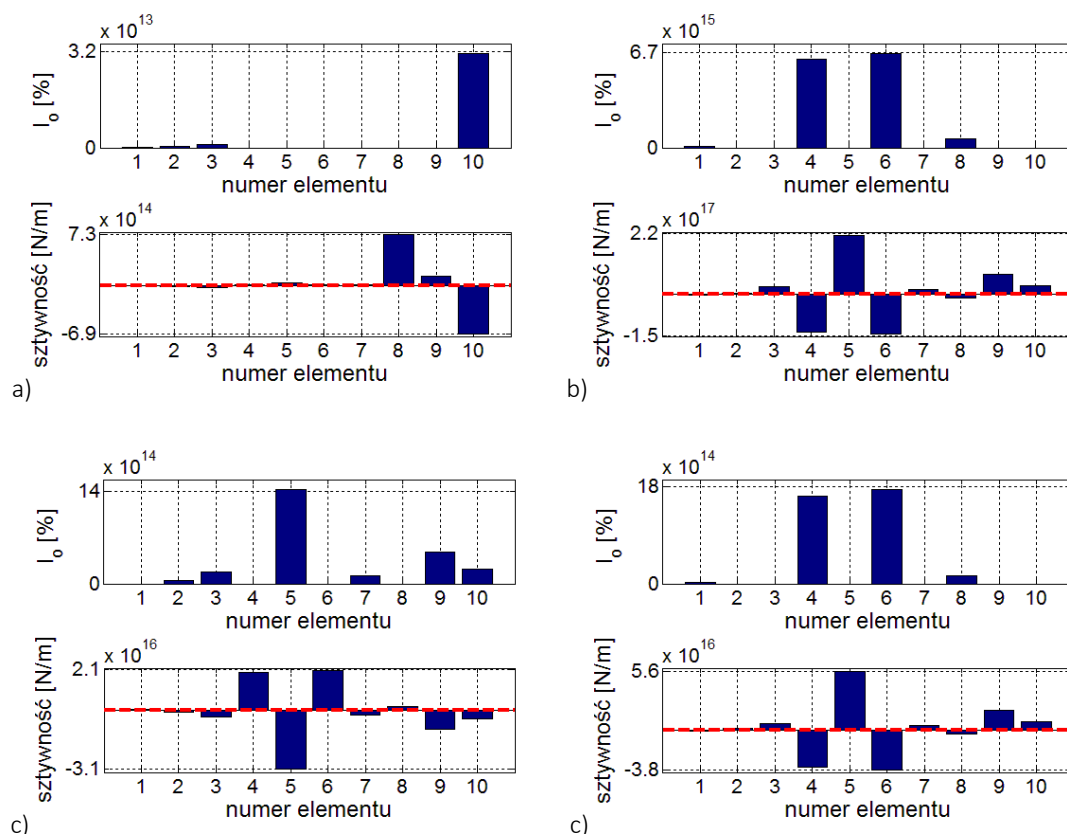
Wyniki symulacji wykazały, że aktualizacja paramentów modelu MES w przypadku, gdy iteracje wykonywane są wyłącznie na danych z dwóch translacyjnych stopni swobody nie jest możliwa, bez względu na wielkość i lokalizację uszkodzenia. Na rysunku 3.7 przedstawiono dodatkowo wartości indeksu  $I_o$  oraz zmianę sztywności elementów belki bez uszkodzenia oraz dla różnie zlokalizowanych uszkodzeń o intensywności 1% i 15%.

Na podstawie szeregu przeprowadzonych analiz założono, że maksymalna wartość bezwzględna indeksu  $I_{oi}$  może wynosić 40%. Założenie to pozwala wyeliminować ze zbioru potencjalnych prawidłowych rozwiązań, już na wstępnym etapie te, których wynik wskazuje na nierealny spadek bądź wzrost sztywności lub masy. Wartość indeksu  $I_{oi} = -40\%$  świadczy o stanie przedawaryjnym konstrukcji, natomiast  $I_{oi} = 40\%$  świadczy o znacznym lokalnym przesztynieniu konstrukcji. W konsekwencji tego maksymalna zmiana dowolnego elementu indeksu  $I_o$  może wynosić maksymalnie 40% co do wartości bezwzględnej.

Dla opisanego powyżej przykładu, niezależnie od intensywności uszkodzenia, indeks osiąga wartości znacznie przekraczające założoną wartość maksymalną równą 40%, co klasyfikuje rozwiązanie jako nieprawidłowe. Tym samym zastosowanie schematu bazującego na podstawie jedynie dwóch translacji rozmieszczonych w zgodnie z rysunkiem 3.6 nie umożliwi nam poprawnej aktualizacji paramentów.

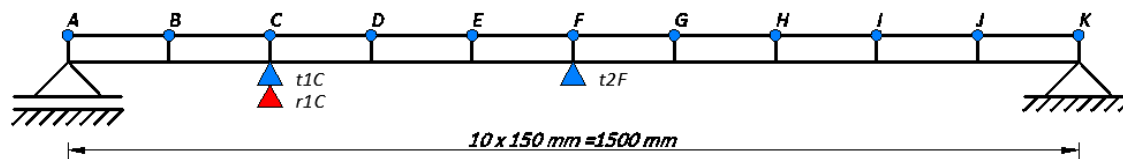


Rysunek 3.6 Miejsca pomiaru translacyjnych (t1C, t2F) stopni swobody – 1 schemat rozmieszczenia czujników

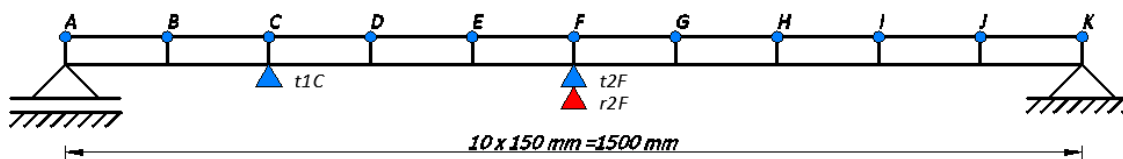


Rysunek 3.7 Indeks  $I_0$  oraz zmiana sztywności dla schematu 1 usytuowania czujników pomiarowych dla elementów belki a) bez uszkodzenia b) przy uszkodzeniu elementu trzeciego o intensywności 15% c) przy uszkodzeniu elementu piątego o intensywności 1% d) przy uszkodzeniu elementu piątego o intensywności 15%

Drugi schemat rozmieszczenia punktów pomiarowych zakładał dodanie, do wcześniej zadanych translacji jednego punktu pomiaru rotacji umieszczonego w pierwszym przypadku w  $1/5$  (rysunek 3.8), a w drugim w  $1/2$  (rysunek 3.9) rozpiętości belki.



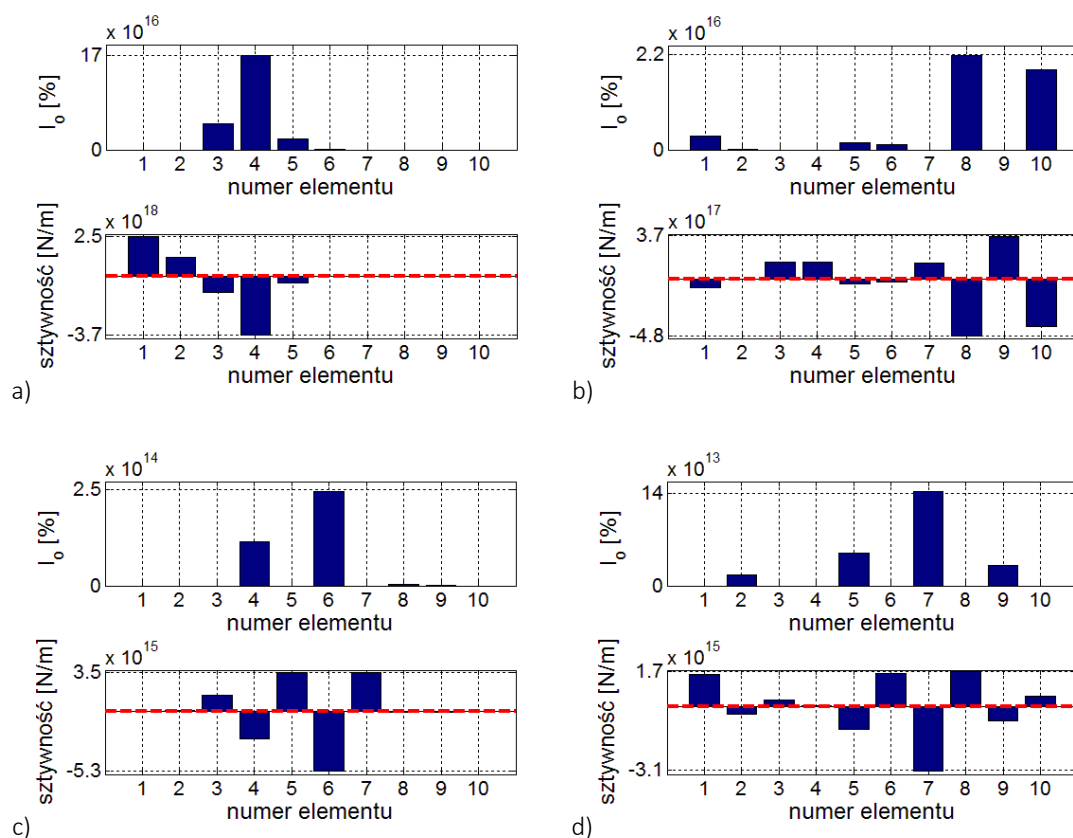
Rysunek 3.8 Miejsca pomiaru translacyjnych stopni swobody ( $t1C$ ,  $t2F$ ) i rotacyjnego stopnia swobody ( $r1C$ ) – 2 schemat rozmieszczenia czujników



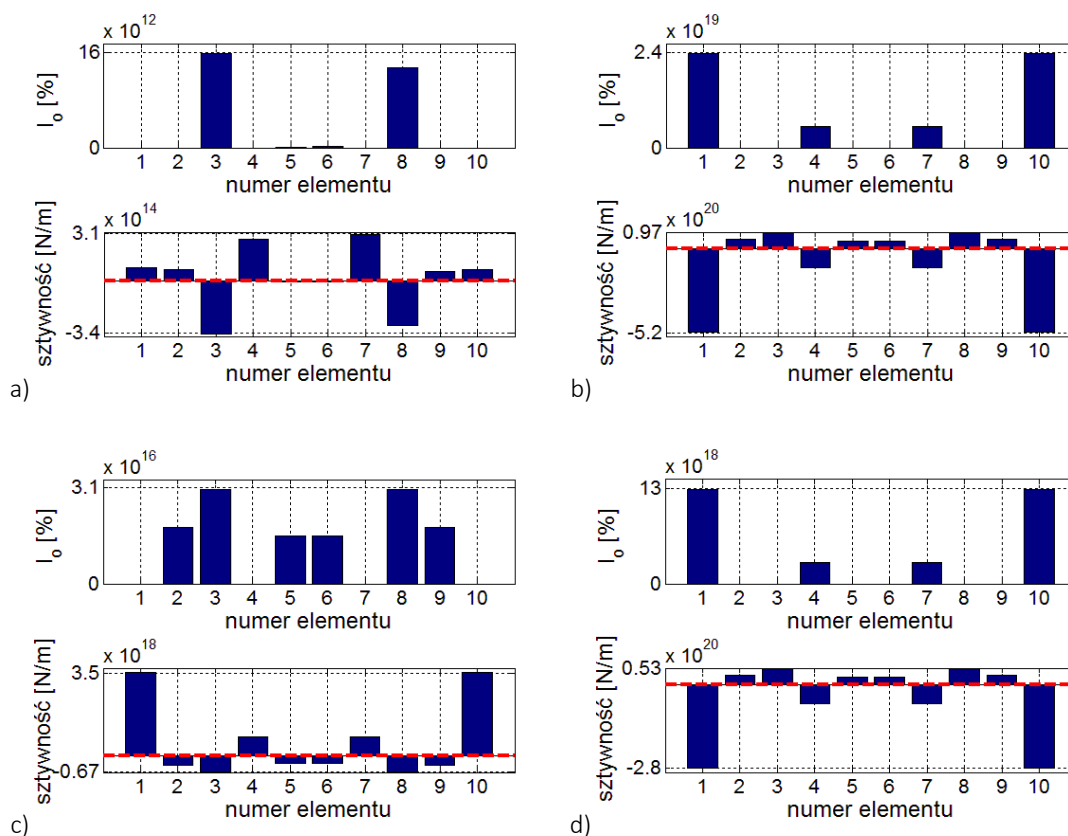
Rysunek 3.9 Miejsca pomiaru translacyjnych stopni swobody ( $t1C$ ,  $t2F$ ) i rotacyjnego stopnia swobody ( $r2F$ ) – 3 schemat rozmieszczenia czujników



Dodanie jednego rotacyjnego stopnia swobody do procedury aktualizacji nie umożliwiło poprawnego wskazania uszkodzenia. Podobnie jak w przypadku schematu numer 1 rozmieszczenia czujników, otrzymano indeks  $I_0$  o wartościach znacznie większych niż 40%, a sztywność części elementów ma wartość ujemną. Na rysunku 3.10 oraz 3.11 przedstawiono, analogiczne jak dla pomiaru dwóch translacyjnych stopni swobody, wyniki dla schematów 2 i 3 rozmieszczenia czujników.

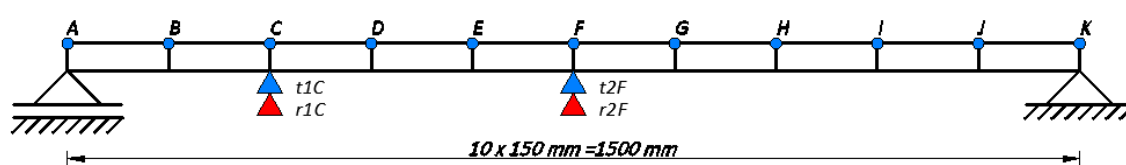


Rysunek 3.10 Indeks  $I_0$  oraz zmiana sztywności dla schematu 2 usytuowania czujników pomiarowych dla elementów belki a) bez uszkodzenia b) przy uszkodzeniu elementu trzeciego o intensywności 15% c) przy uszkodzeniu elementu piątego o intensywności 1% d) przy uszkodzeniu elementu piątego o intensywności 15%

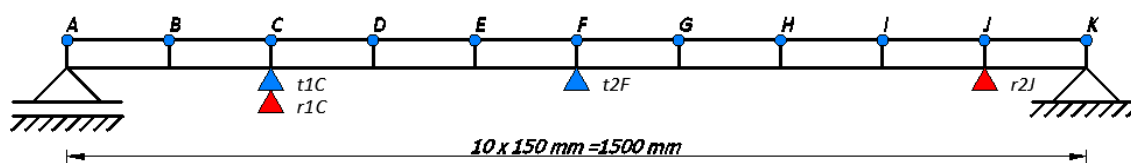


Rysunek 3.11 Indeks  $I_0$  oraz zmiana sztywności dla schematu 3 usytuowania czujników pomiarowych dla elementów belki a) bez uszkodzenia b) przy uszkodzeniu elementu trzeciego o intensywności 15% c) przy uszkodzeniu elementu piątego o intensywności 1% d) przy uszkodzeniu elementu piątego o intensywności 15%

Kolejnym etapem jest badanie schematu z dodanym czwartym punktem pomiarowym - drugą rotacją. Tym samym procedura aktualizacji dla schematu 4 bazuje na pomiarze 2 translacji i 2 rotacji umieszczonych dla schematu 4 w 1/5 i w 1/2 rozpiętości belki (rysunek 3.12), natomiast dla schematu 5 w 1/5 oraz 9/10 rozpiętości belki (rysunek 3.13).



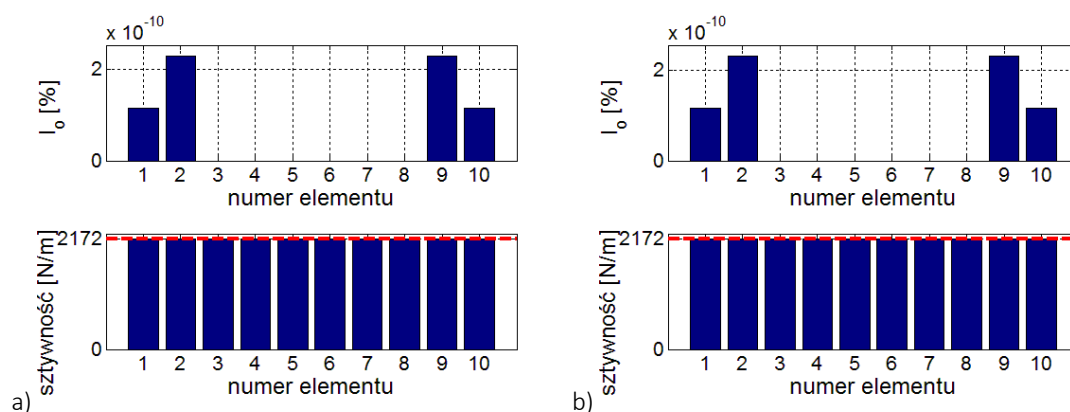
Rysunek 3.12 Miejsca pomiaru translacyjnych ( $t1C$ ,  $t2F$ ) i rotacyjnych ( $r1C$ ,  $r2F$ ) stopni swobody – 4 schemat rozmieszczenia czujników



Rysunek 3.13 Miejsca pomiaru translacyjnych ( $t1C$ ,  $t2F$ ) i rotacyjnych ( $r1C$ ,  $r2J$ ) stopni swobody – 5 schemat rozmieszczenia czujników

Wyniki symulacji wykazały, że aktualizacja paramentów modelu MES w przypadku, gdy iteracje wykonywane są na danych z dwóch translacyjnych i dwóch rotacyjnych stopniach swobody jest możliwa. Otrzymane wartości sztywności belki oraz indeksu  $I_0$  mają realne wartości. Każdorazowo maksymalna wartość z indeksu  $I_0$  jest mniejsza od wielkości uszkodzenia i założonej na wstępie maksymalnej zmiany sztywności wynoszącej 40%.

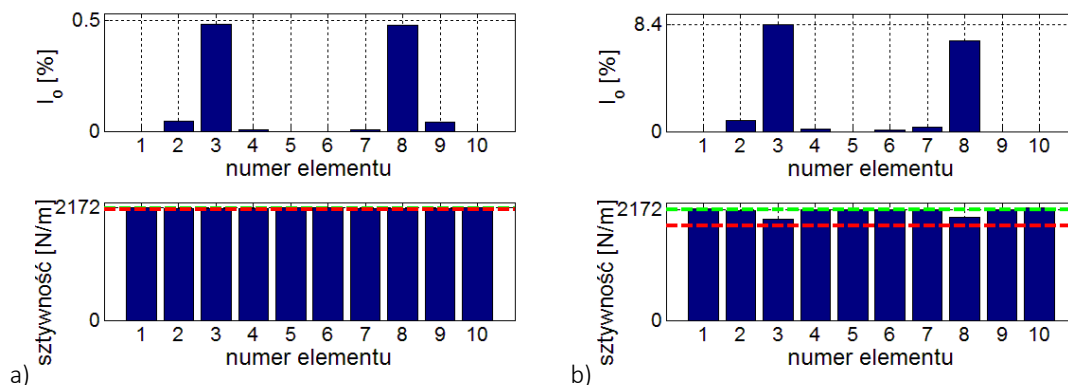
W przypadku belki nieuszkodzonej, dla schematu 4 i 5 rozmieszczenia czujników, maksymalny spadek sztywności wskazuje na uszkodzenie elementu numer dwa (Rysunek 3.14). Z uwagi jednak na fakt, że maksymalna wartość indeksu  $I_0$  jest w obu przypadkach bliska zeru i wynosi odpowiednio  $I_0 = 2,30 \cdot 10^{-10}\%$  dla schematu numer 4 rozmieszczenia czujników i  $I_0 = 2,32 \cdot 10^{-10}\%$  dla schematu numer 5 rozmieszczenia czujników, aktualizacja parametrów wykazuje, że w belce nie występuje uszkodzenie.



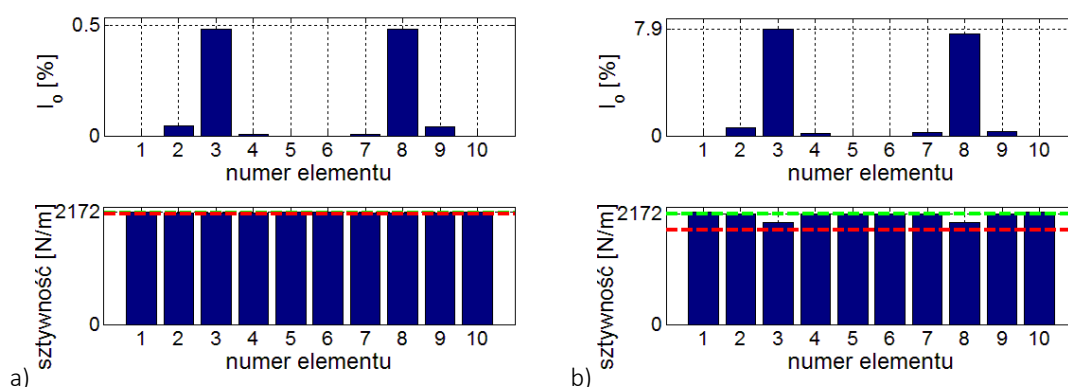
Rysunek 3.14 Indeks  $I_0$  oraz zmiana sztywności w przypadku belki nieuszkodzonej dla schematu a) 4 b) 5 usytuowania czujników pomiarowych

Wykresy przedstawione na rysunkach 3.15 i 3.16 przedstawiają wyniki aktualizacji parametrów dla belki z uszkodzeniem trzeciego elementu o intensywności 1% i 15%. Maksymalna wartość indeksu  $I_0$  w obu przypadkach występuje w elemencie trzecim, a więc  $n_{\max} = 3$  co świadczy o poprawnej identyfikacji miejsca uszkodzenia. W obu przypadkach wynik aktualizacji mylnie sugeruje również występowanie uszkodzenia w segmencie 8. Zestawione w tabelach 3.2 i 3.3 indeksy osiągają dokładnie takie same wartości dla indeksów bazowych jak dla odpowiadających im indeksów kontrolnych. Świadczy to o tym, że sugerowane miejsce uszkodzenia  $n_d = 3$ , jest zgodne z tym wyznaczonym przez algorytm. Najmniejszą, bliską jedności, wartość osiągnięto dla indeksów  $I_{\max}$ ,  $I_{\max}^{abs}$ ,  $I_{\max k}$ ,  $I_{\max}^{abs}$ . Wartość tych indeksów wskazuje, na to, że więcej niż jeden element uległ uszkodzeniu o podobnej intensywności. Niezależnie od stopnia uszkodzenia zmiany sztywności występujące w pozostałych elementach są niewielkie

w porównaniu do elementu numer 3 i 8, o czym świadczą wysokie wartości obliczonych indeksów bazowych i kontrolnych  $I_m$ ,  $I_m^{abs}$ ,  $I_{mk}$ ,  $I_{mk}^{abs}$  oraz  $I_s$ ,  $I_s^{abs}$ ,  $I_{sk}$ ,  $I_{sk}^{abs}$  (tabela 3.2 i 3.3.). Występuje rozbieżność pomiędzy zadanymi wartościami uszkodzenia wynoszącymi odpowiednio 1% i 15%, a otrzymanymi zmianą sztywności elementów wynoszącymi około 0,5% oraz 7,9-8,4%.



Rysunek 3.15 Indeks  $I_0$  oraz zmiana sztywności dla schematu 4 usytuowania czujników pomiarowych dla belki z uszkodzonym elementem 3 przy uszkodzeniu o intensywności a) 1% b) 15%



Rysunek 3.16 Indeks  $I_0$  oraz zmiana sztywności dla schematu 5 usytuowania czujników pomiarowych dla belki z uszkodzonym elementem 3 przy uszkodzeniu o intensywności a) 1% b) 15%

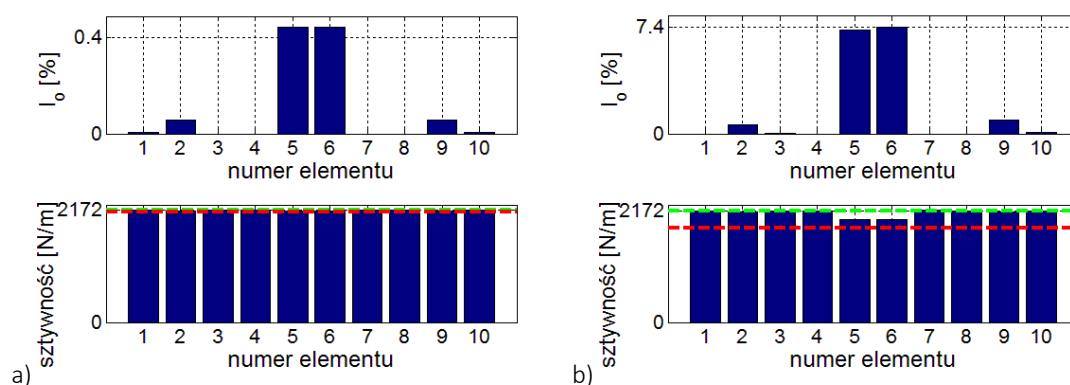
Tabela 3.2 Zestawienie kontrolnych oraz bazowych indeksów uszkodzenia dla procedury aktualizacji bazującej na schemacie 4 usytuowania czujników przy uszkodzeniu elementu numer 3 modelu MES

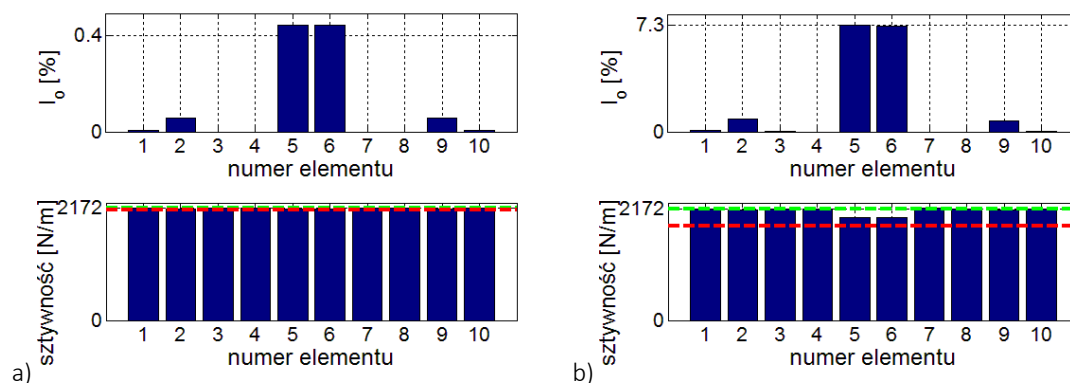
Uszkodzony 3 element														
St. uszk. [%]	Indeksy bazowe							Indeksy kontrolne						
	$n_{max}$	$I_m$	$I_m^{abs}$	$I_{max}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s$	$I_s^{abs}$	$n_d$	$I_{mk}$	$I_{mk}^{abs}$	$I_{maxk}$	$I_{maxk}^{abs}$	$I_{sk}$	$I_{sk}^{abs}$
1	3	10,17	4,71	1,01	1,01	10,75	10,75	3	10,17	4,71	1,01	1,01	10,75	10,75
5	3	10,69	5,00	1,05	1,05	10,16	10,16	3	10,69	5,00	1,05	1,05	10,16	10,16
10	3	11,41	5,39	1,11	1,11	9,75	9,75	3	11,41	5,39	1,11	1,11	9,75	9,75
15	3	12,21	5,72	1,18	1,18	9,65	9,65	3	12,21	5,72	1,18	1,18	9,65	9,65

Tabela 3.3 Zestawienie kontrolnych oraz bazowych indeksów uszkodzenia dla procedury aktualizacji bazującej na schemacie 5 usytuowania czujników przy uszkodzeniu elementu numer 3 modelu MES

Uszkodzony 3 element														
St. uszk. [%]	Indeksy bazowe							Indeksy kontrolne						
	$n_{\max}$	$I_m$	$I_m^{abs}$	$I_{\max}$	$I_{\max}^{abs}$	$I_s$	$I_s^{abs}$	$n_d$	$I_{mk}$	$I_{mk}^{abs}$	$I_{\max k}$	$I_{\max k}^{abs}$	$I_{sk}$	$I_{sk}^{abs}$
1	3	10,04	4,67	1,00	1,00	11,07	11,07	3	10,04	4,67	1,00	1,00	11,07	11,07
5	3	10,03	4,79	1,01	1,01	11,64	11,64	3	10,03	4,79	1,01	1,01	11,64	11,64
10	3	10,01	4,95	1,03	1,03	12,53	12,53	3	10,01	4,95	1,03	1,03	12,53	12,53
15	3	10,01	55,12	1,04	1,04	13,70	13,70	3	10,01	55,12	1,04	1,04	13,70	13,70

W przypadku uszkodzenia elementu 5, algorytm przy rozmieszczeniu czujników zgodnie ze schematem numer 4 lub 5 wskazuje jedynie strefę uszkodzenia obejmującą zasięgiem elementy numer 5 i 6 (rysunek 3.17 i 3.18). Wskazują na to między innymi nieznaczące różnice występujące pomiędzy wartościami indeksów bazowych, a odpowiadających im indeksów kontrolnych (tabela 3.4 i 3.5). Relację pomiędzy sztywnością elementu 6, potencjalnie uszkodzonego, a elementu 5, który w rzeczywistości jest uszkodzony obrazują indeksy  $I_s$ ,  $I_s^{abs}$ ,  $I_{sk}$ ,  $I_{sk}^{abs}$  (tabela 3.4 i 3.5). Ich wartości w tym wypadku są bliskie jedności co świadczy o zbliżonej zmianie sztywności obu elementów. Duże wartości indeksów  $I_{\max}$ ,  $I_{\max}^{abs}$ ,  $I_{\max k}$ ,  $I_{\max k}^{abs}$  oraz  $I_m$ ,  $I_m^{abs}$ ,  $I_{mk}$ ,  $I_{mk}^{abs}$  (tabela 3.4 i 3.5) świadczą o tym, że poza strefą środkową nie wykryto znaczącej zmiany sztywności innych elementów. We wszystkich przypadkach niedoszacowana jest również wielkość uszkodzenia i tak przy uszkodzeniu 1% wynosi ona nieco ponad 0,4%, a przy uszkodzeniu rzędu 15% wielkość ta waha się w granicach 7,3-7,4%.

Rysunek 3.17 Indeks  $I_0$  oraz zmiana sztywności dla schematu 4 usytuowania czujników pomiarowych dla belki z uszkodzonym elementem 5 o intensywności a) 1% b) 15%



Rysunek 3.18 Indeks  $I_0$  oraz zmiana sztywności dla schematu 5 usytuowania czujników pomiarowych dla belki z uszkodzonym elementem 5 o intensywności a) 1% b) 15%

Tabela 3.4 Zestawienie kontrolnych oraz bazowych indeksów uszkodzenia dla procedury aktualizacji bazującej na schemacie 4 usytuowania czujników przy uszkodzeniu elementu numer 5 modelu MES

Uszkodzony 5 element														
St. uszk. [%]	Indeksy bazowe							Indeksy kontrolne						
	$n_{max}$	$I_m$	$I_m^{abs}$	$I_{max}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s$	$I_s^{abs}$	$n_d$	$I_{mk}$	$I_{mk}^{abs}$	$I_{maxk}$	$I_{maxk}^{abs}$	$I_{sk}$	$I_{sk}^{abs}$
1	5,6	41,22	17,41	7,68	7,68	1,00	1,00	5	41,32	17,36	7,66	7,66	1,00	1,00
5	6	43,64	18,59	7,57	7,57	1,01	1,01	5	44,25	18,26	7,51	7,51	0,99	0,99
10	6	47,34	20,45	7,60	7,60	1,02	1,02	5	48,96	19,64	7,47	7,47	0,98	0,98
15	6	52,10	22,21	7,80	7,80	1,03	1,03	5	55,47	20,8	7,58	7,58	0,97	0,97

Tabela 3.5 Zestawienie kontrolnych oraz bazowych indeksów uszkodzenia dla procedury aktualizacji bazującej na schemacie 5 usytuowania czujników przy uszkodzeniu elementu numer 5 modelu MES

Uszkodzony 5 element														
St. uszk. [%]	Indeksy bazowe							Indeksy kontrolne						
	$n_{max}$	$I_m$	$I_m^{abs}$	$I_{max}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s$	$I_s^{abs}$	$n_d$	$I_{mk}$	$I_{mk}^{abs}$	$I_{maxk}$	$I_{maxk}^{abs}$	$I_{sk}$	$I_{sk}^{abs}$
1	5,6	41,24	17,31	7,74	7,74	1,00	1,00	5	41,24	17,31	7,74	7,74	1,00	1,00
5	5,6	43,75	18,00	7,83	7,83	1,00	1,00	5	43,75	18,00	7,83	7,83	1,00	1,00
10	5,6	47,67	19,06	7,97	7,97	1,00	1,00	5	47,67	19,06	7,97	7,97	1,00	1,00
15	5	52,85	20,17	8,14	8,14	1,01	1,01	5	52,85	20,17	8,14	8,14	1,01	1,01

W tabelach 3.6 oraz 3.7 zestawiono wartości częstotliwości drgań oraz kryterium NMD przy rozmieszczeniu czujników zgodnie ze schematem 4 i 5. Wartości kryterium NMD dla każdego z przeanalizowanych przypadków osiągają wartości znacznie poniżej 1% dla uszkodzeń o intensywności 1-5% oraz wartości poniżej 2,5% dla uszkodzeń o intensywności 10-15%. Wartości początkowe dwóch pierwszych częstotliwości drgań własnych były zgodne z wartościami dla belki nieuszkodzonej przedstawionej na rysunku 3.1. Wynosiły one odpowiednio 19,61 Hz oraz 78,44

Hz. W przypadku aktualizacji parametrów projektowych belki z uszkodzeniem 3 elementu, bez względu na intensywność uszkodzenia, uzyskano 100% zgodność częstotliwości drgań własnych otrzymanych po aktualizacji z dokładnymi wartościami częstotliwości drgań własnych wyliczonymi dla belki o zadanym uszkodzeniu. W przypadku uszkodzenia elementu 5, różnice występujące między częstotliwościami otrzymanymi po aktualizacji, a dokładnymi wartościami częstotliwości nie były większe od 0,3% (0,05 Hz).

Tabela 3.6 Zestawienie częstotliwości drgań własnych oraz wartości kryterium NMD dla procedury aktualizacji bazującej na schemacie 4 usytuowania czujników przy uszkodzeniu elementu numer 3 i 5 modelu MES

St. uszk. [%]	Uszkodzony 3 element						Uszkodzony 5 element					
	Wartości początkowe:		$f_1=19,61$ Hz $f_2=78,44$ Hz				Wartości początkowe:		$f_1=19,61$ Hz $f_2=78,44$ Hz			
	Wartości docelowe		Wartości otrzymane po aktualizacji				Wartości docelowe		Wartości otrzymane po aktualizacji			
	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	NMD [%]		$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	NMD [%]	
				1 postać	2 postać					1 postać	2 postać	
1	19,60	78,37	19,60	78,37	0,069	0,072	19,59	78,43	19,59	78,43	0,145	0,015
5	19,56	78,05	19,56	78,05	0,354	0,369	19,51	78,38	19,53	78,39	0,755	0,071
10	19,50	77,62	19,50	77,62	0,731	0,753	19,40	78,34	19,43	78,34	1,579	0,134
15	19,44	77,16	19,44	77,16	1,128	1,141	19,28	78,28	19,33	78,28	2,484	0,193

Tabela 3.7 Zestawienie częstotliwości drgań własnych oraz wartości kryterium NMD dla procedury aktualizacji bazującej na schemacie 5 usytuowania czujników przy uszkodzeniu elementu numer 3 i 5 modelu MES

St. uszk. [%]	Uszkodzony 3 element						Uszkodzony 5 element					
	Wartości początkowe:		$f_1=19,6$ 1Hz $f_2=78,44$ Hz				Wartości początkowe:		$f_1=19,6$ 1Hz $f_2=78,44$ Hz			
	Wartości docelowe		Wartości otrzymane po aktualizacji				Wartości docelowe		Wartości otrzymane po aktualizacji			
	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	NMD [%]		$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	NMD [%]	
				1 postać	2 postać					1 postać	2 postać	
1	19,60	78,37	19,60	78,37	0,064	0,106	19,59	78,43	19,59	78,43	0,024	0,019
5	19,56	78,05	19,56	78,05	0,331	0,539	19,51	78,38	19,53	78,39	0,120	0,095
10	19,50	77,62	19,50	77,62	0,685	1,090	19,40	78,34	19,43	78,34	0,242	0,196
15	19,44	77,16	19,44	77,16	1,064	1,652	19,28	78,28	19,33	78,30	0,369	0,304

Przy liczbie czujników „pomiarowych” mniejszej od 4, rozmieszczonych zgodnie ze schematami 1-3 oraz przy dostępności jedynie 2 częstotliwości i postaci drgań własnych dla belki swobodnie podpartej składającej się z 10 elementów skończonych, nie jest możliwa detekcja uszkodzenia za pomocą przedstawionej procedury.

Wartości zaprezentowanych indeksów oraz ich analiza wskazują, że możliwa jest poprawna detekcja uszkodzenia dla belki swobodnie podpartej składającej się z 10 elementów

skończonych, jeżeli korzystamy co najmniej z 2 punktów pomiaru translacji i dwóch punktów pomiaru rotacji rozmieszczonych zgodnie ze schematami 4 i 5. Posługiwanie się indeksami opisanymi szczegółowo w rozdziale 3.1 pozwala na wiarygodną interpretację otrzymanych wyników oraz ocenę poprawności działania algorytmu jak i ocenę zakresu uszkodzenia. Indeksy pozwalają także oszacować, czy uszkodzenie występuje w jednym czy w większej liczbie elementów.

Indeksy bazowe, odnoszące się do maksymalnej wartości z indeksu wektorowego  $I_o$ , pozwalają na ocenę tego, czy w modelu występuje uszkodzenie. Potwierdzeniem występowania uszkodzenia są wartości indeksów  $I_m$ ,  $I_m^{abs}$  większe od jedności. Indeksy bazowe  $I_s$  oraz  $I_s^{abs}$  pozwalają na sprawdzenie czy uszkodzona jest większa strefa „sąsiadująca” z elementem o największej zmianie parametru projektowego. Wskazują na to niskie, zbliżone do jedności, wartości tych indeksów. Wartości indeksów  $I_{max}$  i  $I_{max}^{abs}$  zbliżone do jedności są potwierdzeniem uszkodzeń występujących w innych strefach modelu MES.

Indeksy kontrolne, odnoszące się do wybranego elementu modelu MES, pozwalają na ocenę tego, czy w danym elemencie występuje uszkodzenie. Potwierdzeniem jest większa od jedności wartość indeksów  $I_{mk}$ ,  $I_{mk}^{abs}$ . Indeksy kontrolne  $I_{sk}$  oraz  $I_{sk}^{abs}$  pozwalają na ocenę strefy „sąsiadującej” z wybranym elementem. Ich wartość mniejsza od jedności, sygnalizuje większe uszkodzenie w elemencie „sąsiadującym” niż w wybranym. Natomiast wartość zbliżona do jedności wskazuje na uszkodzenie strefy w pobliżu wytypowanego elementu. W przypadku gdy wartości tych indeksów są znacznie większe od jedności oznacza to, że największe uszkodzenie w danej strefie występuje w wybranym elemencie. Analogicznie do indeksów kontrolnych  $I_{sk}$  oraz  $I_{sk}^{abs}$  można interpretować wartości indeksów  $I_{maxk}$  i  $I_{maxk}^{abs}$ , odnosząc się w tym wypadku do elementów występujących w innych strefach modelu MES.

Przeprowadzone analizy wykazały, że bardziej zasadne wydaje się stosowanie indeksów odnoszących się do indeksu wektorowego  $I_o^{abs}$  niż  $I_o$ , zarówno w przypadku indeksów kontrolnych jak i bazowych. Z uwagi na możliwe wahania wszystkich paramentów projektowych, przypisanych do konkretnych elementów modelu MES, względem poziomu początkowego, nawet przy znacznych różnicach parametrów projektowych wartości indeksów pomocniczych  $I_{rm}$  oraz  $I_{rmd}$  mogą osiągać bardzo małe wartości. Przekłada się to na zawyżone wartości indeksów  $I_m$ ,  $I_{mk}$ , co w konsekwencji może prowadzić do błędnego wskazania dużego uszkodzenia w modelu MES. W przypadku pozostałych indeksów, odnoszenie się do wartości indeksów pomocniczych  $I_{rmax}^{abs}$ ,



$I_{r_{\max d}}^{abs}$ ,  $I_{rs}^{abs}$ ,  $I_{rs d}^{abs}$  związanych z indeksem  $I_o^{abs}$  znacznie ułatwia interpretację zmian paramentów w poszczególnych strefach modelu. Uwzględnienie przy obliczaniu indeksów pomocniczych wartości z indeksu  $I_o^{abs}$  pozwala na interpretację zarówno wzrostów jak i redukcji sztywności lub masy w pozostałych elementach. Stosowanie indeksów  $I_{\max}$ ,  $I_{\max k}$ ,  $I_s$  i  $I_{sk}$  odnoszących się do indeksów pomocniczych  $I_{r_{\max}}$ ,  $I_{r_{\max d}}$ ,  $I_{rs}$ ,  $I_{rs d}$  pozwala na interpretację uszkodzenia w pozostałych elementach modelu tylko w przypadku redukcji sztywności bądź wzrostu masy.

Indeksy bazowe odnoszące się do wartości bezwzględnych, mogą być powszechnie stosowane w procedurach aktualizacji jako narzędzie do oceny uszkodzenia. Indeksy kontrolne, odnoszące się do wartości bezwzględnych mogą być stosowane, wtedy kiedy celowe wydaje się sprawdzenie, konkretnej wybranej strefy i relacji zmiany jej sztywności bądź masy w stosunku do pozostałych elementów modelu MES.

### 3.3 Wpływu modyfikacji macierzy wag na procedurę aktualizacji paramentów

Wynik aktualizacji parametrów uzależniony jest od odpowiedniego sformułowania macierzy wag wartości mierzonych  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$  i parametrów projektowych  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$ . W procedurze aktualizacji parametrów przedstawionej w rozdziale 3.2 korzystano z macierzy wag zdefiniowanych zgodnie ze wzorami (2.144) oraz (2.145) opisanym w rozdziale 2.5. Taka definicja macierzy wag, powoduje przypisanie jednakowej wagi do wszystkich paramentów projektowych związanych z macierzą  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  i wartości mierzonych związanych z macierzą  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$ .

Link (1993) proponuje wprowadzenie współczynników  $w_p$ , które umożliwiają skalowanie macierzy wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$ . Podstawową trudnością jest dobór współczynników skalujących  $w_p$ . Autorską propozycją jest iteracyjny dobór współczynnika skalującego  $w_p$ . Macierz wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  w tym przypadku zdefiniowana jest w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\theta\theta} &= w_p \mathbf{I}, \\ w_p &\in \langle 10^{-2}, 10^{-3}, \dots, 10^{-10} \rangle. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Współczynnik  $w_p$  zmienia się w kolejnych iteracjach. Taka macierz umożliwia stworzenie tablicy wyników aktualizacji parametrów w zależności od wartości współczynnika  $w_p$ .

Innym podejściem do definicji macierzy wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  jest dobranie jej tak, aby odzwierciedlić niepewności wstępnych szacunków parametrów. W praktyce są one trudne do oszacowania. Z tego powodu w analizach często wykorzystywane jest sformułowanie macierzy wag zaproponowane przez Link'a (1993):

$$\mathbf{G} = \text{diag}[\mathbf{S}_i^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_i],$$

$$\mathbf{W}_{\theta\theta} = \frac{\text{mean}(\text{diag}\mathbf{G})}{\text{mean}(\text{diag}\mathbf{G}^{-1})} \mathbf{G}^{-1}. \quad (3.30)$$

Definicja ta pozwala na ograniczenie zmiany parametrów w zależności od ich wrażliwości. W związku z tym parametry pozostają bez zmian, jeżeli ich wrażliwość jest bliska zera.

Dodatkowo w obliczeniach wprowadzono autorską modyfikację blokową bazowej macierzy wag paramentów:

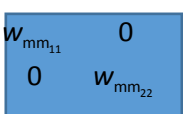
$$\mathbf{W}_{mm} = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{W}_{\theta\theta}^z(i, j) = \begin{cases} \mathbf{W}_{mm}(1,1) & \text{dla } i=k \wedge j=k, \\ \mathbf{W}_{mm}(2,2) & \text{dla } i=k+1 \wedge j=k+1, \\ \mathbf{W}_{\theta\theta}(i, j) & \text{dla } i \neq k \vee i \neq k+1 \vee j \neq k \vee j \neq k+1, \end{cases} \quad (3.32)$$

dla  $k=1, 3, 5, \dots, N_p-1$ .

Modyfikacja polega na iteracyjnym wprowadzeniu podstawienia blokowej macierzy diagonalnej  $\mathbf{W}_{mm}$  (3.31) o wymiarze  $2 \times 2$  na kolejnych elementach diagonalu. Macierz wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  w  $k$ -tej iteracji można opisać wzorem (3.32). Zmodyfikowana macierz wag parametrów w drugiej iteracji przyjmuje postać:

$$\mathbf{W}_{\theta\theta_2} = \begin{bmatrix} w_{\theta\theta_{11}} & w_{\theta\theta_{12}} & \dots & \dots & \dots & w_{\theta\theta_{1n}} \\ w_{\theta\theta_{21}} & w_{\theta\theta_{22}} & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ w_{\theta\theta_{n1}} & & & & & w_{\theta\theta_{nn}} \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$



Modyfikację blokową macierzy wag można zastosować dla dowolnej sformułowanej macierzy wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$ , przy parzystej liczbie aktualizowanych parametrów projektowych.

Macierz wag wartości mierzonych  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$  jest trudna do oszacowania. Mottershead (2011) sugeruje, aby jej definicja obejmowała co najmniej takie skalowanie, aby wyrównać efekt amplitud i proponuje definiowanie jej jako kwadratu odwrotności wektora par modalnych:

$$\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon} = [\text{diag}(\mathbf{z}_m)]^{-2} \quad (3.34)$$

W pracy zaproponowano zastosowanie 8 wariantów złożonych z zestawu dwóch macierzy wag: macierzy wag wartości mierzonych  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$  i macierzy wag parametrów projektowych  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$ . Zostały one zdefiniowane w następujący sposób:

- ✓ Wariant 1 zakłada definicję obu macierzy wag w postaci macierzy jednostkowych. Tym samym macierz wag wartości mierzonych  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$  zdefiniowana jest zgodnie ze wzorem (2.144), a macierz wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  zgodnie ze wzorem (2.145).
- ✓ Wariant 2 bazuje na wariacie 1 definicji macierzy wag, ale zakłada wprowadzenie modyfikacji blokowej opisanej wzorem (3.33) dla jednostkowej macierzy wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  (2.145). Macierz wag wartości mierzonych  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$  zdefiniowana jest zgodnie ze wzorem (2.144).
- ✓ Wariant 3 bazuje na wariacie 1 definicji macierzy wag, ale zakłada wprowadzenie iteracyjnego doboru współczynnika skalującego  $w_p$  w definicji macierzy wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$ . Macierz wag wartości mierzonych  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$  opisana jest więc wzorem (2.144), a macierz wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  zgodnie ze wzorem (3.29).
- ✓ Wariant 4 bazuje na wariacie 3 definicji macierzy wag, ale zakłada wprowadzenie modyfikacji blokowej opisanej wzorem (3.33) dla jednostkowej macierzy wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  (3.29) z iteracyjnym doбором współczynnika skalującego  $w_p$ . Macierz wag wartości mierzonych  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$  zdefiniowana jest zgodnie ze wzorem (2.144).
- ✓ Wariant 5 zakłada definicję macierzy wag wartości mierzonych  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$  zdefiniowanej zgodnie ze wzorem (3.34) oraz macierzy wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  zaproponowanej przez Link'a (3.30).
- ✓ Wariant 6 bazuje na wariacie 5 definicji macierzy wag, ale zakłada wprowadzenie modyfikacji blokowej opisanej wzorem (3.33) dla macierzy wag parametrów zaproponowanej przez Link'a  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  (3.30). Macierz wag wartości mierzonych  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$  zdefiniowana jest zgodnie ze wzorem (3.34).

- ✓ Wariant 7 zakłada definicję jednostkowej macierzy wag wartości mierzonych  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$  opisanej wzorem (2.144) oraz macierzy wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  zaproponowanej przez Link'a (3.30).
- ✓ Wariant 8 bazuje na wariacie 7 definicji macierzy wag, ale zakłada wprowadzenie modyfikacji blokowej opisanej wzorem (3.33) dla macierzy wag parametrów zaproponowanej przez Link'a  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  (3.30). Macierz wag wartości mierzonych  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$  jest macierzą jednostkową zdefiniowaną zgodnie ze wzorem (2.144).

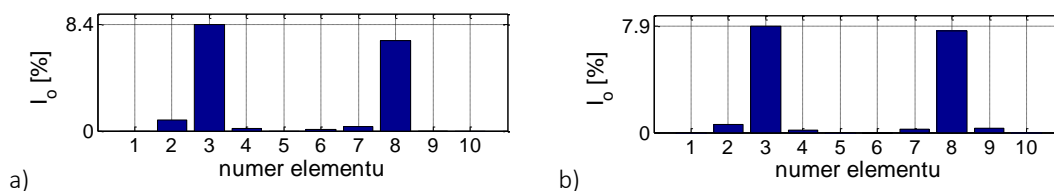
W zaproponowanej procedurze aktualizacji parametrów, gdy używana jest macierz wag w wariantach 2, 3, 4, 6, 8 wynikiem jest tabela, w której kolejnych wierszach zapisane są wartości zaktualizowanych parametrów w zależności od wartości współczynnika skalującego  $w_p$  lub w zależności od położenia macierzy blokowej na przekątnej macierzy wag. W załączniku 1 przedstawiono schemat tabeli wynikowej wraz z tabelami uzyskanymi po procedurze aktualizacji parametrów dla wszystkich 8 wariantów macierzy wag. Procedura, która umożliwia wybranie wyniku aktualizacji parametrów z tabeli dokonywana jest poprzez jej uporządkowanie jako kryterium przyjmując kolejno:

- 1 kryterium  $J_p$  - minimalna wartość funkcji kary  $J_p$ ;
- 2 kryterium  $f_{\Delta}$  - minimalna wartość różnicy wszystkich trzech częstotliwości drgań własnych pomiędzy wartością pomierzoną a zaktualizowaną  $f_{\Delta}$ ;
- 3 kryterium NMD3 - minimalna wartość sumy kryterium NMD wszystkich trzech postaci drgań własnych pomiędzy wartością pomierzoną a zaktualizowaną;
- 4 kryterium NMD2 - minimalna wartość sumy kryterium NMD dwóch pierwszych postaci drgań własnych pomiędzy wartością pomierzoną a zaktualizowaną;
- 5 kryterium NMD1 - minimalna wartość sumy kryterium NMD pierwszej postaci drgań własnych pomiędzy wartością pomierzoną a zaktualizowaną.

Na tej podstawie z całej tablicy wyników wybierany jest pierwszy wiersz, który najlepiej dla danego zestawu wyników spełniał dane kryterium.

Dla wszystkich przedstawionych wariantów macierzy wag przeprowadzono procedurę aktualizacji zgodnie z założeniami przedstawionymi w Rozdziale 3.2. W procedurze aktualizacji brano pod uwagę dwie pierwsze częstotliwości i postaci drgań własnych. Bazowano na modelu MES belki swobodnie podpartej z uszkodzeniem elementu trzeciego (rysunek 3.2) i piątego (rysunek 3.3) o intensywności 15%, przy rozmieszczeniu czujników zgodnie ze schematami 4 i 5 (rysunek 3.12 i 3.13).

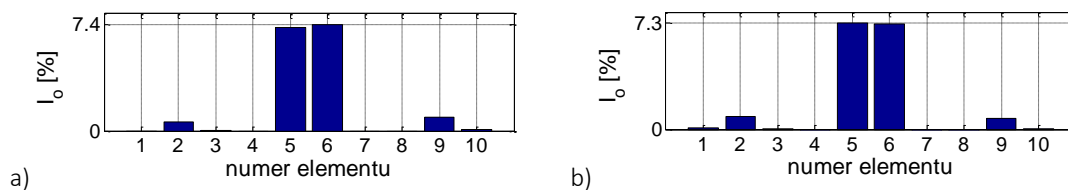
W przypadku stosowania macierzy wag w wariancie 1, przy uszkodzeniu elementu numer 1, przy uszkodzeniu elementu numer 3 bez względu na sposób rozmieszczenia czujników otrzymujemy poprawny wynik aktualizacji parametrów modelu MES (rysunek 3.19). Wykresy wartości indeksu  $I_0$  poprawnie wskazują na miejsce uszkodzenia, jednak z uwagi na wartość indeksu  $I_{max}^{abs}$  (tabela 3.8) zbliżoną do jedności, sugerują również możliwość występowania uszkodzenia w elemencie numer 8. W przypadku uszkodzenia elementu 5 wynik aktualizacji parametrów wskazuje jedynie strefę uszkodzenia, a jako element o największej zmianie sztywności  $n_{max}$  wskazuje element 5 lub 6 w zależności od schematu rozmieszczenia czujników (rysunek 3.20). Zbliżona do 1, wartość indeksu  $I_s^{abs}$  (tabela 3.9), mówi o uszkodzeniu więcej niż jednego elementu sąsiadującego z uszkodzonym. We wszystkich przypadkach wartości uszkodzenia są niedoszacowane. Zmiana sztywności uszkodzonych elementów po aktualizacji stanowi w przybliżeniu 50% intensywności założonego uszkodzenia. We wszystkich przedstawionych przypadkach, gdy w procedurze aktualizacji parametrów stosowana jest macierz wag w wariancie 1, otrzymujemy również bardzo wysoką zgodność pomiędzy częstotliwościami oraz postaciami drgań własnych dla modelu MES zaktualizowanego i modelu MES z uszkodzeniem wybranego elementu o intensywności 15% (tabela 3.8 i 3.9).



Rysunek 3.19 Indeks  $I_0$  dla elementów modelu MES z uszkodzeniem elementu numer 3 o intensywności 15% dla wariantu 1 macierzy wag przy rozmieszczeniu czujników według schematu a) numer 4 b) numer 5

Tabela 3.8 Zestawienie bazowych indeksów uszkodzenia, kryterium NMD oraz częstotliwości drgań własnych uzyskanych w wyniku procedury aktualizacji parametrów bazującej na schemacie 4 i 5 usytuowania czujników dla wariantu 1 definicji macierzy wag przy uszkodzeniu 3 elementu modelu MES o intensywności 15%

DANE												
Uszkodzenie		Macierz wag	f [Hz]			NMD [%]						
Element	Intens,		1	2	3	1	2	3				
3	15 %	<b>1</b>	19,44	77,16	175,11	1,463	2,657	2,277				
AKTUALIZACJA												
Kryterium	Schemat czujników	$J_p$	f [Hz]			NMD [%]			Indeksy bazowe			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	
brak	4	58937	19,44	77,16	175,11	1,129	1,142	5,123	5,72	1,18	9,65	TAK
	5	58345	19,44	77,16	175,11	1,064	1,653	2,264	5,12	1,04	13,7	TAK

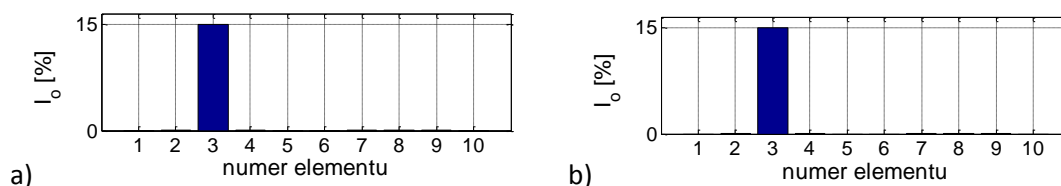


Rysunek 3.20 Indeks  $I_0$  dla elementów modelu MES z uszkodzeniem elementu numer 5 o intensywności 15% dla wariantu 1 macierzy wag przy rozmieszczeniu czujników według schematu a) numer 4 b) numer 5

Tabela 3.9 Zestawienie bazowych indeksów uszkodzenia, kryterium NMD oraz częstotliwości drgań własnych uzyskanych w wyniku procedury aktualizacji parametrów bazującej na schemacie 4 i 5 usytuowania czujników dla wariantu 1 definicji macierzy wag przy uszkodzeniu 5 elementu modelu MES o intensywności 15%

DANE												
Uszkodzenie		Macierz wag	f [Hz]			NMD [%]						
Element	Intens.		1	2	3	1	2	3				
5	15 %	<b>1</b>	19,28	77,28	174,34	1,424	1,001	3,083				
AKTUALIZACJA												
Kryterium	Schemat czujników	$J_p$	f [Hz]			NMD [%]			Indeksy bazowe			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	
brak	4	56255	19,33	78,28	174,34	2,484	0,193	14,245	22,21	7,8	1,03	<b>NIE</b>
	5	56207	19,33	78,28	174,34	0,369	0,304	0,870	20,17	8,14	1,01	<b>TAK</b>

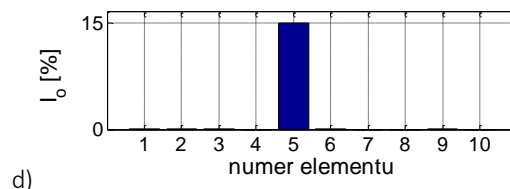
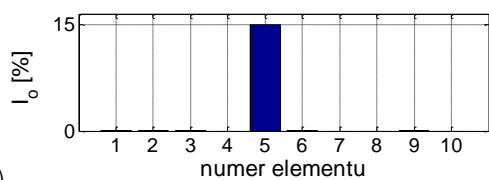
Macierz wag w wariantie 2 pozwala na uzyskanie poprawnych wyników aktualizacji parametrów. Na rysunkach 3.21 i 3.22 przedstawiono wykresy wartości indeksu wektorowego  $I_0$ . Niezależnie od zastosowanego kryterium wyboru uszkodzony element jest wyraźnie zaznaczony, a  $n_{max}$  jest zgodne z miejscem występowania uszkodzenia. Wartości trzech indeksów bazowych osiągają wartości znacznie większe od jedności (tabela 3.10 i 3.11), co jest potwierdzeniem uszkodzenia tylko jednego elementu. Wartości kryterium NMD są równe zero, a częstotliwości uzyskane po aktualizacji parametrów (tabela 3.10 i 3.11) zgodne są z wartościami oczekiwanymi, co świadczy o pełnej zgodności modelu MES zaktualizowanego z modelem MES z uszkodzonym elementem numer 3 lub 5 o intensywności 15 %. W tym przypadku algorytm również bardzo dobrze odwzorowuje założone intensywności uszkodzenia, szacując je na dokładnie 15%.



Rysunek 3.21 Indeks  $I_0$  dla elementów modelu MES z uszkodzeniem elementu numer 3 o intensywności 15% dla wariantu 2 macierzy wag przy użyciu kryterium  $J_p$ ,  $f_{\Delta}$ , NMD3, NMD2 i NMD1 oraz rozmieszczeniu czujników według schematu a) numer 4 b) numer 5

Tabela 3.10 Zestawienie bazowych indeksów uszkodzenia, kryterium NMD oraz częstotliwości drgań własnych uzyskanych w wyniku procedury aktualizacji parametrów bazującej na schemacie 4 i 5 usytuowania czujników dla wariantu 2 definicji macierzy wag przy uszkodzeniu 3 elementu modelu MES o intensywności 15%

DANE												
Uszkodzenie		Macierz wag	f [Hz]			NMD [%]						
Element	Intens,		1	2	3	1	2	3				
3	15 %	<b>2</b>	19,44	77,16	175,11	1,463	2,657	2,277				
AKTUALIZACJA												
Kryterium	Schemat czujników	$J_p$	f [Hz]			NMD [%]			Indeksy bazowe			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	
$J_p$ , $f_{\Delta}$	4	1,0611	19,44	77,15	175,11	0,000	0,000	0,000	5,78E+05	1,30E+05	2,37E+06	TAK
NMD3, NMD2, NMD1	5	1,0611	19,44	77,15	175,11	0,000	0,000	0,000	5,78E+05	1,30E+05	2,37E+06	TAK



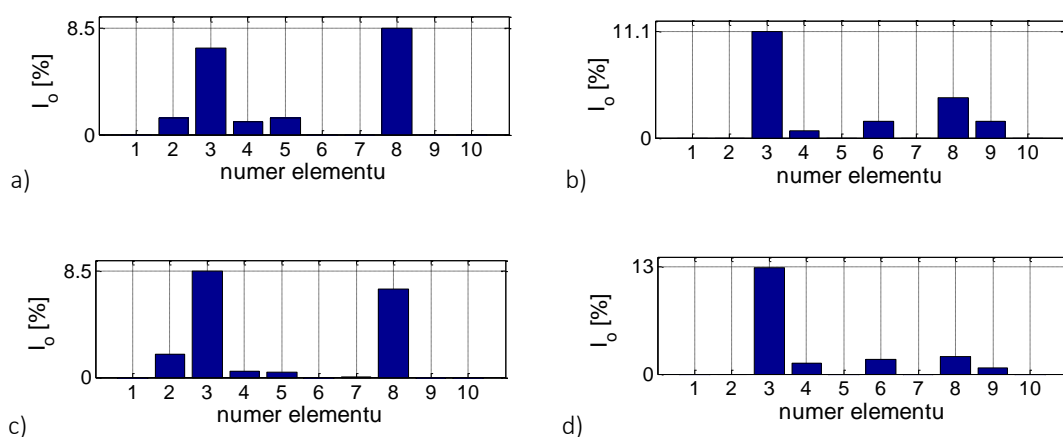
Rysunek 3.22 Indeks  $I_0$  dla elementów modelu MES z uszkodzeniem elementu numer 5 o intensywności 15% dla wariantu 2 macierzy wag przy użyciu kryterium  $J_p$ ,  $f_{\Delta}$ , NMD3, NMD2 i NMD1 oraz rozmieszczeniu czujników według schematu a) numer 4 b) numer 5

Tabela 3.11 Zestawienie bazowych indeksów uszkodzenia, kryterium NMD oraz częstotliwości drgań własnych uzyskanych w wyniku procedury aktualizacji parametrów bazującej na schemacie 4 i 5 usytuowania czujników dla wariantu 2 definicji macierzy wag przy uszkodzeniu 5 elementu modelu MES o intensywności 15%

DANE												
Uszkodzenie		Macierz wag	f [Hz]			NMD [%]						
Element	Intens,		1	2	3	1	2	3				
5	15 %	<b>2</b>	19,28	77,28	174,34	1,424	1,001	3,083				
AKTUALIZACJA												
Kryterium	Schemat czujników	$J_p$	f [Hz]			NMD [%]			Indeksy bazowe			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	
$J_p$ , $f_{\Delta}$	4	1,0611	19,28	78,28	174,34	0,000	0,000	0,000	2,15E+06	8,62E+05	1,43E+05	TAK
NMD3, NMD2, NMD1	5	1,0611	19,28	78,28	174,34	0,000	0,000	0,000	2,15E+06	8,62E+05	1,43E+05	TAK

Stosując macierz wag zdefiniowaną według wariantu 3, poprawność uzyskanych wyników aktualizacji parametrów uzależniona jest od schematu rozmieszczenia czujników oraz od stosowanego kryterium wyboru wyniku z tabeli. W przypadku uszkodzenia elementu numer 3, nie

we wszystkich przypadkach jesteśmy w stanie uzyskać poprawny wynik aktualizacji parametrów (rysunek 3.23). Rozmieszczenie czujników zgodnie ze schematem numer 5, niezależnie od stosownego kryterium pozwala na uzyskanie poprawnego wyniku aktualizacji parametrów. Jednak w przypadku rozmieszczenia czujników zgodnie ze schematem numer 4, posługując się kryterium  $J_p$ , NMD3 lub NMD1 otrzymujemy błędny wynik aktualizacji parametrów, który wskazuje element numer 8 jako uszkodzony. W przypadku uszkodzenia elementu numer 5 modelu MES, niezależnie od sposobu rozmieszczenia czujników i stosowanego kryterium wyboru, otrzymujemy poprawny wynik aktualizacji parametrów (rysunek 3.24). Jedynie zastosowanie kryterium NMD2 lub NMD1 przy rozmieszczeniu czujników zgodnie ze schematem numer 5 może sugerować, z uwagi na wartość indeksu  $I_s^{obs}$  zbliżoną do jedności, uszkodzenie strefy modelu MES (tabela 3.13). We wszystkich przedstawionych przypadkach, gdy w procedurze aktualizacji parametrów stosowna jest macierz wag w wariancie 3, otrzymujemy również bardzo wysoką zgodność pomiędzy częstotliwościami oraz postaciami drgań własnych dla modelu MES zaktualizowanego i modelu MES z uszkodzeniem wybranego elementu o intensywności 15% (tabela 3.12 i 3.13). W zależności od przedstawionego przypadku, zmiana sztywności uszkodzonych elementów po aktualizacji stanowi w przybliżeniu 55—99 % intensywności założonego uszkodzenia. Porównując otrzymane wyniki uzyskane po procedurze aktualizacji parametrów dla macierzy wag w wariancie 1 i 3, można stwierdzić, że przy wyborze odpowiedniego kryterium, wprowadzenie zmiennej wartości współczynnika  $w_p$  znajdującego się na przekątnej macierzy wag paramentów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$ , w większości przypadków dla opisanego zadania, może znacząco poprawić wynik aktualizacji parametrów.



Rysunek 3.23 Indeks  $I_0$  dla elementów modelu MES z uszkodzeniem elementu numer 3 o intensywności 15% dla wariantu 3 macierzy wag przy rozmieszczeniu czujników według schematu a) numer 4 i użyciu kryterium  $J_p, NMD3$  i NMD1 b) numer 5 i użyciu kryterium  $J_p, f_{\Delta}$  c) numer 4 i użyciu kryterium  $f_{\Delta}$  i NMD2 d) numer 5 i użyciu kryterium NMD3, NMD2 i NMD1

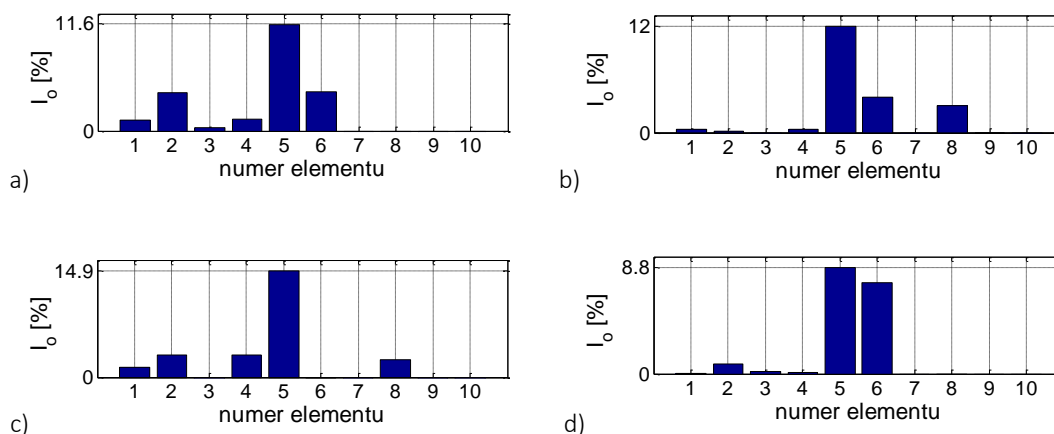


Tabela 3.12 Zestawienie bazowych indeksów uszkodzenia, kryterium NMD oraz częstotliwości drgań własnych uzyskanych w wyniku procedury aktualizacji parametrów bazującej na schemacie 4 i 5 usytuowania czujników dla wariantu 3 definicji macierzy wag przy uszkodzeniu 3 elementu modelu MES o intensywności 15%

DANE												
Uszkodzenie		Macierz wag	f [Hz]			NMD [%]						
Element	Intens,		1	2	3	1	2	3				
3	15 %	<b>3</b>	19,44	77,16	175,11	1,463	2,657	2,277				
AKTUALIZACJA												
Kryterium	Schemat czujników	$J_p$	f [Hz]			NMD [%]			Indeksy bazowe			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	
$J_p$	4	0,0079	19,44	77,15	175,11	0,777	1,455	4,093	4,10	1,23	15,8	NIE
	5	0,0018	19,44	77,15	175,11	0,650	0,693	0,248	6,46	2,68	11,37	TAK
$f_\Delta$	4	0,0142	19,44	77,15	175,11	0,843	1,353	4,130	5,14	1,21	4,57	TAK
	5	0,0018	19,44	77,15	175,11	0,65	0,693	0,248	6,46	2,68	11,37	TAK
NMD3	4	0,0079	19,44	77,15	175,11	0,777	1,455	4,093	4,10	1,23	15,8	NIE
	5	0,0018	19,44	77,15	175,11	0,275	0,402	0,090	9,38	6,11	9,50	TAK
NMD2	4	0,0142	19,44	77,15	175,11	0,843	1,353	4,130	5,14	1,21	4,57	TAK
	5	0,0018	19,44	77,15	175,11	0,275	0,402	0,090	9,38	6,11	9,50	TAK
NMD1	4	0,0079	19,44	77,15	175,11	0,777	1,455	4,093	4,10	1,23	15,8	NIE
	5	0,0018	19,44	77,15	175,11	0,275	0,402	0,090	9,38	6,11	9,50	TAK

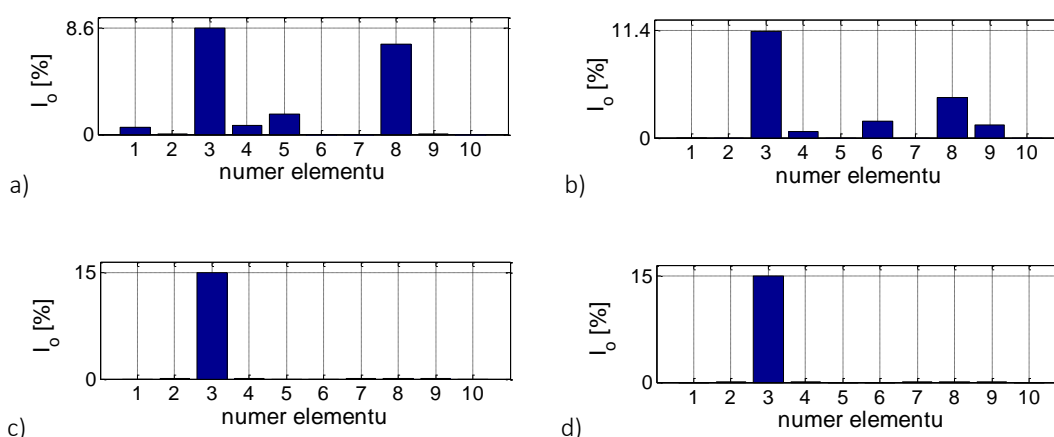
Tabela 3.13 Zestawienie bazowych indeksów uszkodzenia, kryterium NMD oraz częstotliwości drgań własnych uzyskanych w wyniku procedury aktualizacji parametrów bazującej na schemacie 4 i 5 usytuowania czujników dla wariantu 3 definicji macierzy wag przy uszkodzeniu 5 elementu modelu MES o intensywności 15%

DANE												
Uszkodzenie		Macierz wag	f [Hz]			NMD [%]						
Element	Intens,		1	2	3	1	2	3				
5	15 %	<b>3</b>	19,28	77,28	174,34	1,424	1,001	3,083				
AKTUALIZACJA												
Kryterium	Schemat czujników	$J_p$	f [Hz]			NMD [%]			Indeksy bazowe			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	
$J_p$	4	0,034474	19,28	78,28	174,34	0,767	1,046	4,000	6,07	2,74	2,71	TAK
	5	0,001137	19,28	78,28	174,34	0,463	0,489	0,502	10,34	3,76	3,03	TAK
$f_\Delta$	4	0,034474	19,28	78,28	174,34	0,767	1,046	4,000	6,07	2,74	2,71	TAK
	5	0,001137	19,28	78,28	174,34	0,463	0,489	0,502	10,34	3,76	3,03	TAK
NMD3	4	1,3094	19,28	78,28	174,29	0,319	0,954	3,289	6,02	4,77	4,72	TAK
	5	0,001137	19,28	78,28	174,34	0,353	0,348	0,434	17,55	6,04	4,40	TAK
NMD2	4	1,3094	19,28	78,28	174,29	0,319	0,954	3,289	6,02	4,77	4,72	TAK
	5	0,068411	19,28	78,28	174,34	0,218	0,374	0,648	22,83	11,01	1,17	TAK
NMD1	4	1,3094	19,28	78,28	174,29	0,319	0,954	3,289	6,02	4,77	4,72	TAK
	5	0,012283	19,28	78,28	174,34	0,170	0,49	0,844	11,59	5,29	1,58	TAK



Rysunek 3.24 Indeks  $I_0$  dla elementów modelu MES z uszkodzeniem elementu numer 5 modelu MES o intensywności 15% dla wariantu 3 macierzy wag przy rozmieszczeniu czujników według schematu a) numer 4 i użyciu kryterium  $J_p$  i  $f_{\Delta}$  b) numer 5 i użyciu kryterium  $J_p$  i  $f_{\Delta}$  c) numer 4 i użyciu kryterium NMD3, NMD2 i NMD1 d) numer 5 i użyciu kryterium NMD2

Macierz wag w wariancie 4 pozwala na uzyskanie poprawnego wyniku aktualizacji parametrów niezależnie od stosowanego kryterium, schematu rozmieszczenia czujników oraz od lokalizacji elementu uszkodzonego (rysunek 3.25 i 3.26). W tym przypadku stosowanie kryterium NMD3, NMD2 i NMD1 pozwala na otrzymanie największych wartości wszystkich indeksów bazowych, jak również najmniejszych wartości kryterium NMD dla trzech postaci drgań (tabela 3.14 i 3.15). Również wybór wyniku aktualizacji parametrów oparty o wyżej przytoczone kryteria, pozwala na oszacowanie intensywności uszkodzenia na poziomie 100% wartości założonej.



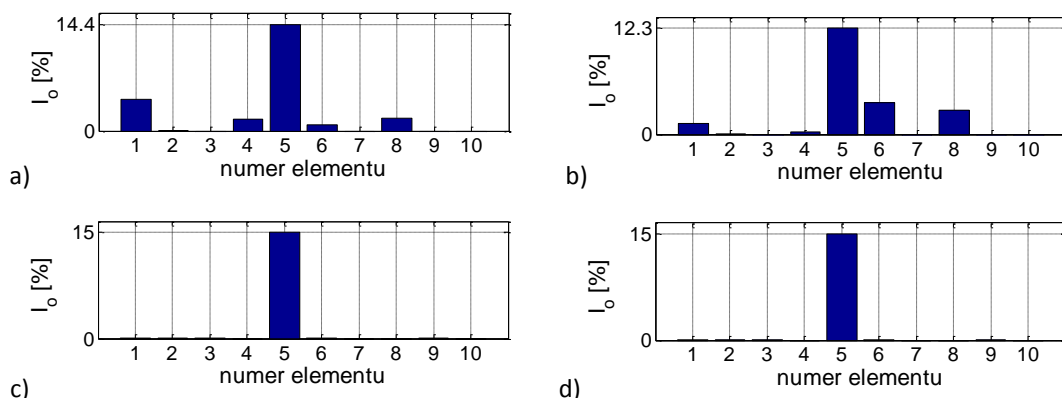
Rysunek 3.25 Indeks  $I_0$  dla elementów modelu MES z uszkodzeniem elementu numer 3 o intensywności 15% dla wariantu 4 macierzy wag przy rozmieszczeniu czujników według schematu a) numer 4 i użyciu kryterium  $J_p$  b) numer 5 i użyciu kryterium  $J_p$  i  $f_{\Delta}$  c) numer 4 i użyciu kryterium NMD3, NMD2, NMD1 d) numer 5 i użyciu kryterium NMD3, NMD2 i NMD1

Tabela 3.14 Zestawienie bazowych indeksów uszkodzenia, kryterium NMD oraz częstotliwości drgań własnych uzyskanych w wyniku procedury aktualizacji parametrów bazującej na schemacie 4 i 5 usytuowania czujników dla wariantu 4 definicji macierzy wag przy uszkodzeniu 3 elementu modelu MES o intensywności 15%

DANE												
Uszkodzenie		Macierz wag	f [Hz]			NMD [%]						
Element	Intens,		1	2	3	1	2	3				
3	15 %	<b>4</b>	19,44	77,16	175,11	1,463	2,657	2,277				
AKTUALIZACJA												
Kryterium	Schemat czujników	$J_p$	f [Hz]			NMD [%]			Indeksy bazowe			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	
$J_p$	4	0,0028	19,44	77,15	175,11	0,547	1,012	2,628	4,71	1,18	12,16	TAK
	5	0,0015	19,44	77,15	175,11	0,619	0,628	0,194	7,85	2,67	8,49	TAK
$f_{\Delta}$	4	0,0168	19,44	77,15	175,11	0,904	1,436	4,539	5,30	1,21	3,80	TAK
	5	0,0019	19,44	77,15	175,11	0,663	0,632	0,284	7,13	2,94	11,74	TAK
NMD3	4	1,0611	19,44	77,15	175,11	0,000	0,000	0,000	5,78E+05	1,30E+05	2,37E+06	TAK
NMD2	5	1,0611	19,44	77,15	175,11	0,000	0,000	0,000	5,78E+05	1,30E+05	2,37E+06	TAK
NMD1												

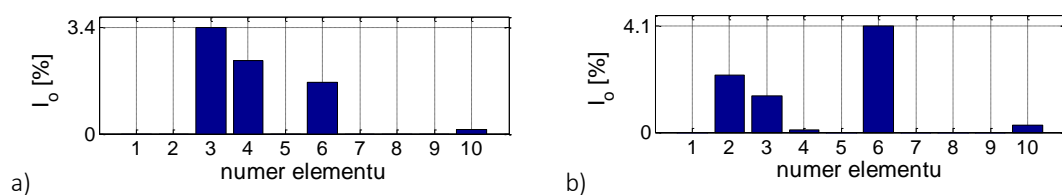
Tabela 3.15 Zestawienie bazowych indeksów uszkodzenia, kryterium NMD oraz częstotliwości drgań własnych uzyskanych w wyniku procedury aktualizacji parametrów bazującej na schemacie 4 i 5 usytuowania czujników dla wariantu 4 definicji macierzy wag przy uszkodzeniu 5 elementu modelu MES o intensywności 15%

DANE												
Uszkodzenie		Macierz wag	f [Hz]			NMD [%]						
Element	Intens,		1	2	3	1	2	3				
5	15 %	<b>4</b>	19,28	77,28	174,34	1,424	1,001	3,083				
AKTUALIZACJA												
Kryterium	Schemat czujników	$J_p$	f [Hz]			NMD [%]			Indeksy bazowe			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	
$J_p$	4	0,00494	19,28	78,28	174,34	0,029	0,275	1,251	9,02	3,38	9,15	TAK
	5	0,001074	19,28	78,28	174,34	0,389	0,396	0,490	10,48	4,50	3,41	TAK
$f_{\Delta}$	4	0,00494	19,28	78,28	174,34	0,029	0,275	1,251	9,02	3,38	9,15	TAK
	5	0,002729	19,28	78,28	174,34	0,071	0,192	0,544	10,74	3,21	4,00	TAK
NMD3	4	1,0611	19,28	78,28	174,34	0,000	0,000	0,000	2,15E+06	8,62E+05	1,43E+05	TAK
NMD2	5	1,0611	19,28	78,28	174,34	0,000	0,000	0,000	2,15E+06	8,62E+05	1,43E+05	TAK
NMD1												



Rysunek 3.26 Indeks  $I_0$  dla elementów modelu MES z uszkodzeniem elementu numer 5 o intensywności 15% dla wariantu 4 macierzy wag przy rozmieszczeniu czujników według schematu a) numer 4 i użyciu kryterium  $J_p$ , b) numer 5 i użyciu kryterium  $J_p$  c) numer 4 i użyciu kryterium NMD3, NMD2, NMD1 d) numer 5 i użyciu kryterium NMD3, NMD2 i NMD1

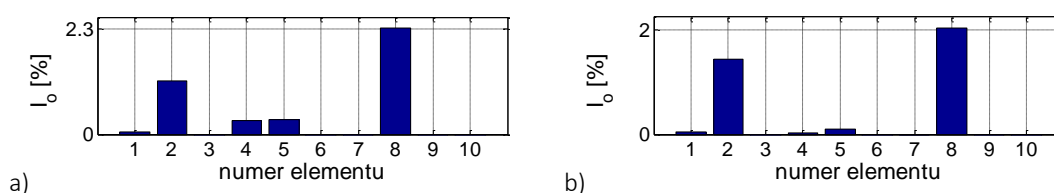
Stosując macierz wag według wariantu 5, wynik aktualizacji paramentów w większości przypadków nie umożliwi poprawnego wskazania lokalizacji elementu uszkodzonego (rysunki 3.27-3.28). Jedynie przy uszkodzeniu elementu 3 i rozmieszczeniu czujników zgodnie ze schematem numer 4 maksymalna zmiana sztywności występuje w elemencie 3, co poprawnie wskazuje na lokalizację miejsca uszkodzenia. W drugim przypadku, przy uszkodzeniu elementu numer 3, wynik aktualizacji parametrów błędnie wskazuje na uszkodzenie elementu 6. W przypadku uszkodzenia elementu numer 3, zarówno wartości kryterium NMD dla poszczególnych postaci drgań, jak i częstotliwości drgań własnych przedstawione w tabeli 3.16, świadczą o wysokim stopniu zgodności modelu zaktualizowanego z modelem MES z uszkodzeniem elementu numer 3 o intensywności 15%. Przy uszkodzeniu występującym w elemencie numer 5, niezależnie od schematu rozmieszczenia czujników, wynik aktualizacji parametrów wskazuje na uszkodzenie elementu numer 8. W tym przypadku, pomimo niskich wartości kryterium NMD dla poszczególnych postaci drgań, pojawiają się rozbieżności w zgodności częstotliwości drgań własnych modelu zaktualizowanego z modelem MES z uszkodzeniem elementu numer 5 o intensywności 15% (tabela 3.17). Zmiana sztywności uszkodzonych elementów po aktualizacji stanowi w przybliżeniu 13-28 % intensywności założonego uszkodzenia.



Rysunek 3.27 Indeks  $I_0$  dla elementów modelu MES z uszkodzeniem elementu numer 3 o intensywności 15% dla wariantu 5 macierzy wag przy rozmieszczeniu czujników według schematu a) numer 4 b) numer 5

Tabela 3.16 Zestawienie bazowych indeksów uszkodzenia, kryterium NMD oraz częstotliwości drgań własnych uzyskanych w wyniku procedury aktualizacji parametrów bazującej na schemacie 4 i 5 usytuowania czujników dla wariantu 5 definicji macierzy wag przy uszkodzeniu 3 elementu modelu MES o intensywności 15%

DANE												
Uszkodzenie		Macierz wag	f [Hz]			NMD [%]						
Element	Intens,		1	2	3	1	2	3				
3	15 %	5	19,44	77,16	175,11	1,463	2,657	2,277				
AKTUALIZACJA												
Kryterium	Schemat czujników	$J_p$	f [Hz]			NMD [%]			Indeksy bazowe			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	
brak	4	58937	19,44	77,16	175,11	1,129	1,142	5,123	5,72	1,18	9,65	TAK
	5	58345	19,44	77,16	175,11	1,064	1,653	2,264	5,12	1,04	13,70	NIE



Rysunek 3.28 Indeks  $I_0$  dla elementów modelu MES z uszkodzeniem elementu numer 5 o intensywności 15% dla wariantu 5 macierzy wag przy rozmieszczeniu czujników według schematu a) numer 4 b) numer 5

Tabela 3.17 Zestawienie bazowych indeksów uszkodzenia, kryterium NMD oraz częstotliwości drgań własnych uzyskanych w wyniku procedury aktualizacji parametrów bazującej na schemacie 4 i 5 usytuowania czujników dla wariantu 5 definicji macierzy wag przy uszkodzeniu 5 elementu modelu MES o intensywności 15%

DANE												
Uszkodzenie		Macierz wag	f [Hz]			NMD [%]						
Element	Intens,		1	2	3	1	2	3				
5	15 %	5	19,28	77,28	174,34	1,424	1,001	3,083				
AKTUALIZACJA												
Kryterium	Schemat czujników	$J_p$	f [Hz]			NMD [%]			Indeksy bazowe			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	
brak	4	2,0938	19,60	78,36	176,47	2,480	0,388	13,260	4,95	1,94	1,77	NIE
	5	0,1760	19,60	78,40	176,50	0,733	0,576	2,001	4,21	1,26	1,57	NIE

Zastosowanie macierzy wag w wariancie 6, czyli wprowadzenie modyfikacji blokowej (3.33) przy definicji macierzy wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta 0}$  według Linka (3.30), pozwala na otrzymanie poprawnych wyników aktualizacji. Przetawione na rysunkach 3.29 i 3.30 wykresy indeksu  $I_0$ , jednoznacznie wskazują na  $n_{max}$ , którego lokalizacja jest zgodna z założonym miejscem uszkodzenia. Pomimo rozbieżności w wartościach częstotliwości drgań własnych przedstawionych w tabelach 3.18 i 3.19 pomiędzy modelem zaktualizowanym a modelem MES z uszkodzeniem

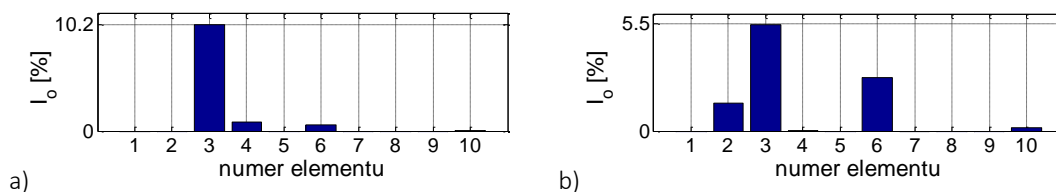
elementu numer 3 lub 5 o intensywności 15%, poprawna detekcja lokalizacji uszkodzenia możliwa jest prawie we wszystkich przypadkach niezależnie od stosowanego kryterium i schematu rozmieszczenia czujników. Zmiana sztywności uszkodzonych elementów po aktualizacji waha się w przedziale 28-68 % intensywności założonego uszkodzenia.

Tabela 3.18 Zestawienie bazowych indeksów uszkodzenia, kryterium NMD oraz częstotliwości drgań własnych uzyskanych w wyniku procedury aktualizacji parametrów bazującej na schemacie 4 i 5 usytuowania czujników dla wariantu 6 definicji macierzy wag przy uszkodzeniu 3 elementu modelu MES o intensywności 15%

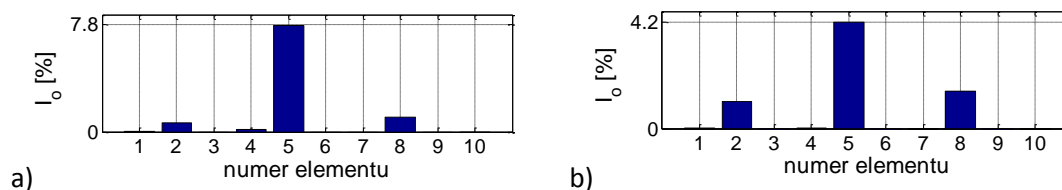
DANE												
Uszkodzenie		Macierz wag	f [Hz]			NMD [%]						
Element	Intens,		1	2	3	1	2	3				
3	15 %	<b>6</b>	19,44	77,16	175,11	1,463	2,657	2,277				
AKTUALIZACJA												
Kryterium	Schemat czujników	$J_p$	f [Hz]			NMD [%]			Indeksy bazowe			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	
$J_p$ , $f_\Delta$ , NMD3, NMD2, NMD1	4	1,0047	19,51	77,76	175,95	0,380	0,855	2,846	16,16	8,86	11,78	TAK
	5	0,4744	19,54	78,05	176,01	0,815	2,245	4,039	5,22	1,98	3,76	TAK

Tabela 3.19 Zestawienie bazowych indeksów uszkodzenia, kryterium NMD oraz częstotliwości drgań własnych uzyskanych w wyniku procedury aktualizacji parametrów bazującej na schemacie 4 i 5 usytuowania czujników dla wariantu 6 definicji macierzy wag przy uszkodzeniu 5 elementu modelu MES o intensywności 15%

DANE												
Uszkodzenie		Macierz wag	f [Hz]			NMD [%]						
Element	Intens,		1	2	3	1	2	3				
5	15 %	<b>6</b>	19,28	77,28	174,34	1,424	1,001	3,083				
AKTUALIZACJA												
Kryterium	Schemat czujników	$J_p$	f [Hz]			NMD [%]			Indeksy bazowe			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	
$J_p$	4	0,85311	19,45	78,35	175,48	1,298	0,216	6,925	16,20	7,42	55,40	TAK
	5	0,13853	19,62	78,53	176,65	0,748	0,752	2,350	3,68	1,12	0,58	NIE
$f_\Delta$ , NMD3, NMD2, NMD1	4	0,85311	19,45	78,35	175,48	1,298	0,216	6,925	16,2	7,42	55,40	TAK
	5	0,18629	19,52	78,38	175,96	0,546	0,434	1,521	6,06	2,85	51,62	TAK

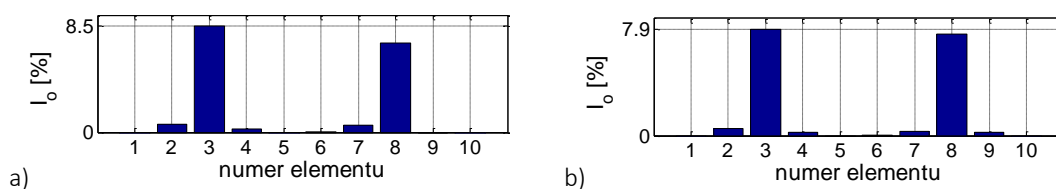


Rysunek 3.29 Indeks  $I_0$  dla elementów modelu MES z uszkodzeniem elementu numer 3 o intensywności 15% dla wariantu 6 macierzy wag przy użyciu kryterium  $J_p$ ,  $f_{\Delta}$ , NMD3, NMD2 i NMD1 oraz rozmieszczeniu czujników według schematu a) numer 4 b) numer 5

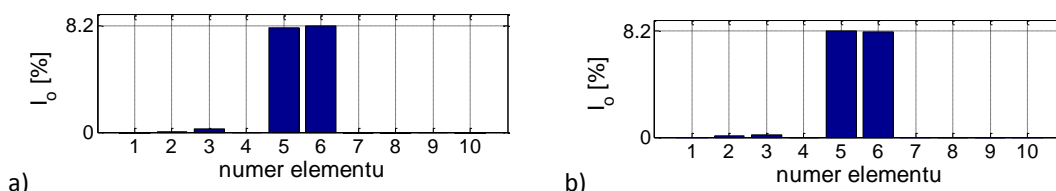


Rysunek 3.30 Indeks  $I_0$  dla elementów modelu MES z uszkodzeniem elementu numer 5 o intensywności 15% dla wariantu 6 macierzy wag przy rozmieszczeniu czujników według schematu a) numer 4 i użyciu kryterium  $J_p$ ,  $f_{\Delta}$ , NMD3, NMD2 i NMD1 b) numer 5 i użyciu kryterium  $f_{\Delta}$ , NMD3, NMD2 i NMD1

We wszystkich przypadkach, wariant 7 definicji macierzy wag, pozwala na wykrycie i poprawne wytypowanie lokalizacji uszkodzonego elementu (rysunek 3.31), bądź jedynie wskazanie położenia strefy uszkodzenia (rysunek 3.32). Otrzymane indeksy bazowe (tabela 3.20 i 3.21) mają znacznie niższą wartość niż w przypadku wariantu 2 lub 4 macierzy wag. Podobnie jak w przypadku definicji macierzy w wariantie 1, zmiana sztywności uszkodzonych elementów po aktualizacji stanowi w przybliżeniu 50% intensywności założonego uszkodzenia.



Rysunek 3.31 Indeks  $I_0$  dla elementów modelu MES z uszkodzeniem elementu numer 3 o intensywności 15% dla wariantu 7 macierzy wag przy rozmieszczeniu czujników według schematu a) numer 4 b) numer 5



Rysunek 3.32 Indeks  $I_0$  dla elementów modelu MES z uszkodzeniem elementu numer 5 o intensywności 15% dla wariantu 7 macierzy wag przy rozmieszczeniu czujników według schematu a) numer 4 b) numer 5

Tabela 3.20 Zestawienie bazowych indeksów uszkodzenia, kryterium NMD oraz częstotliwości drgań własnych uzyskanych w wyniku procedury aktualizacji parametrów bazującej na schemacie 4 i 5 usytuowania czujników dla wariantu 7 definicji macierzy wag przy uszkodzeniu 3 elementu modelu MES o intensywności 15%

DANE												
Uszkodzenie		Macierz wag	f [Hz]			NMD [%]						
Element	Intens,		1	2	3	1	2	3				
3	15 %	<b>7</b>	19,44	77,16	175,11	1,463	2,657	2,277				
AKTUALIZACJA												
Kryterium	Schemat czujników	$J_p$	f [Hz]			NMD [%]			Indeksy bazowe			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	
brak	4	-1,05E+06	19,44	77,04	175,21	1,073	1,097	4,796	5,60	1,19	13,08	TAK
	5	0,0072	19,44	77,15	175,11	1,054	1,621	2,213	5,18	1,04	15,84	TAK

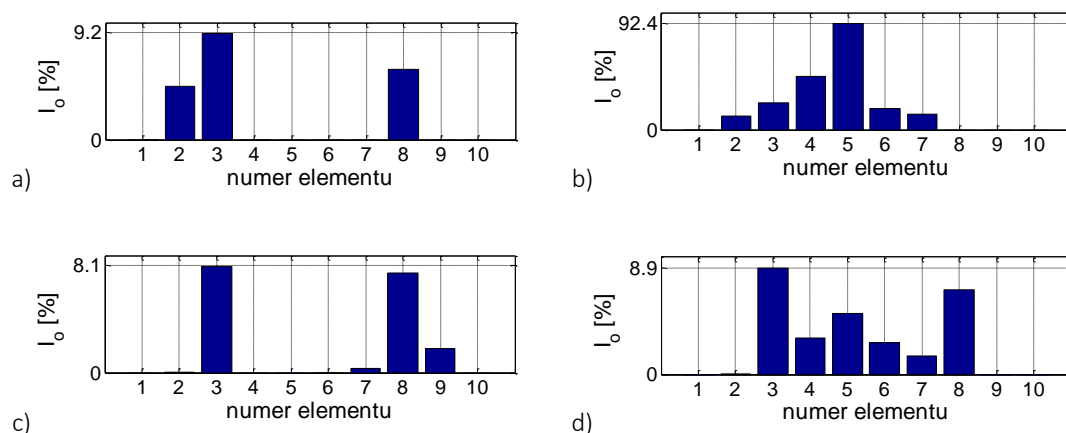
Tabela 3.21 Zestawienie bazowych indeksów uszkodzenia, kryterium NMD oraz częstotliwości drgań własnych uzyskanych w wyniku procedury aktualizacji parametrów bazującej na schemacie 4 i 5 usytuowania czujników dla wariantu 7 definicji macierzy wag przy uszkodzeniu 5 elementu modelu MES o intensywności 15%

DANE												
Uszkodzenie		Macierz wag	f [Hz]			NMD [%]						
Element	Intens,		1	2	3	1	2	3				
5	15 %	<b>7</b>	19,28	77,28	174,34	1,424	1,001	3,083				
AKTUALIZACJA												
Kryterium	Schemat czujników	$J_p$	f [Hz]			NMD [%]			Indeksy bazowe			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	
brak	4	-3,5895	19,28	78,28	174,34	2,449	0,165	13,922	60,98	28,94	1,02	NIE
	5	-4,09E+05	19,28	78,26	174,31	0,293	0,398	1,215	52,83	28,15	1,01	NIE

Zastosowanie macierzy wag w wariancie 8, w przypadku uszkodzenia elementu numer 3, w większości przypadków pozwala na poprawną lokalizację miejsca uszkodzenia (rysunek 3.33). Duży wpływ na poprawny wynik aktualizacji parametrów ma jednak wybór schematu rozmieszczania czujników oraz odpowiedniego kryterium wyboru wyniku aktualizacji parametrów. Bazowanie na rozmieszczeniu czujników zgodnie ze schematem numer 4, w każdym przypadku pozwala na poprawną lokalizację miejsca uszkodzenia. W przypadku rozmieszczenia czujników zgodnie ze schematem 5, tylko przy użyciu kryterium NMD3 i NMD2 otrzymujemy poprawny wynik aktualizacji parametrów (tabela 3.22). Przy uszkodzeniu zlokalizowanym w elemencie 5, niezależnie od kryterium wyboru wyniku aktualizacji parametrów oraz od schematu rozmieszczenia czujników, otrzymujemy w wyniku aktualizacji parametrów strefę uszkodzenia obejmującą swoim zasięgiem elementy 5 i 6 (rysunek 3.34). Potwierdzają to wartości indeksu  $I_s^{abs}$



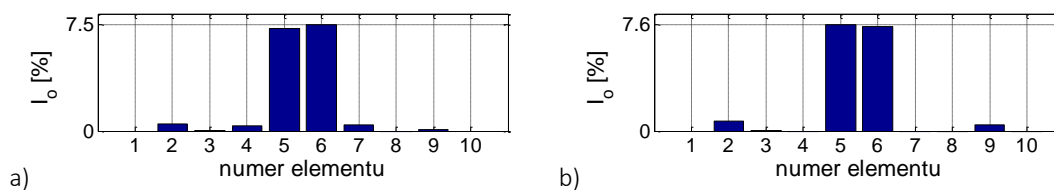
zbliżone do jedności (tabela 3.23). W tym przypadku zmiana sztywności uszkodzonych elementów po aktualizacji waha się w granicach 50-616 % intensywności założonego uszkodzenia.



Rysunek 3.33 Indeks  $I_0$  dla elementów modelu MES z uszkodzeniem elementu numer 3 o intensywności 15% dla wariantu 8 macierzy wag przy rozmieszczeniu czujników według schematu a) numer 4 i użyciu kryterium  $J_p$  i NMD2 b) numer 5 i użyciu kryterium  $J_p$ ,  $f_{\Delta}$  i NMD1 c) numer 4 i użyciu kryterium  $f_{\Delta}$  i NMD3 d) numer 5 i użyciu kryterium NMD3

Tabela 3.22 Zestawienie bazowych indeksów uszkodzenia, kryterium NMD oraz częstotliwości drgań własnych uzyskanych w wyniku procedury aktualizacji parametrów bazującej na schemacie 4 i 5 usytuowania czujników dla wariantu 8 definicji macierzy wag przy uszkodzeniu 3 elementu modelu MES o intensywności 15%

DANE												
Uszkodzenie		Macierz wag	f [Hz]			NMD [%]						
Element	Intens.		1	2	3	1	2	3				
3	15 %	<b>8</b>	19,44	77,16	175,11	1,463	2,657	2,277				
AKTUALIZACJA												
Kryterium	Schemat czujników	$J_p$	f [Hz]			NMD [%]			Indeksy bazowe			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	
$J_p$	4	-1,98E+07	19,46	77,09	175,00	0,625	1,994	6,686	5,07	1,51	2,00	TAK
	5	-1,79E+07	19,38	77,19	174,87	0,644	2,269	5,758	3,12	0,83	1,98	NIE
$f_{\Delta}$	4	-288,71	19,44	77,15	175,12	1,290	0,986	6,276	4,24	1,07	24,82	TAK
	5	-1,79E+07	19,38	77,19	174,87	0,644	2,269	5,758	3,12	0,83	1,98	NIE
NMD3	4	-288,71	19,44	77,15	175,12	1,29	0,986	6,276	4,24	1,07	24,82	TAK
	5	-1,79E+07	19,38	77,19	174,87	1,099	1,553	1,783	2,29	1,26	2,94	TAK
NMD2	4	-288,71	19,44	77,15	175,12	1,290	0,986	6,276	4,24	1,07	24,82	TAK
	5	-1,79E+07	19,38	77,19	174,87	1,045	1,556	2,058	5,2	1,05	18,45	TAK
NMD1	4	-1,98E+07	19,46	77,09	175,00	0,625	1,994	6,686	5,07	1,51	2,00	TAK
	5	-1,79E+07	19,38	77,19	174,87	0,644	2,269	5,758	3,12	0,83	1,98	NIE



Rysunek 3.34 Indeks  $I_0$  dla elementów modelu MES z uszkodzeniem elementu numer 5 o intensywności 15% dla wariantu 8 macierzy wag przy rozmieszczeniu czujników według schematu a) numer 4 i użyciu kryterium  $f_{\Delta}$ , NMD3 i NMD2 b) numer 5 i użyciu kryterium  $J_p$ , NMD3 i NMD2 c

Tabela 3.23 Zestawienie bazowych indeksów uszkodzenia, kryterium NMD oraz częstotliwości drgań własnych uzyskanych w wyniku procedury aktualizacji parametrów bazującej na schemacie 4 i 5 usytuowania czujników dla wariantu 7 definicji macierzy wag przy uszkodzeniu 5 elementu modelu MES o intensywności 15%

DANE												
Uszkodzenie		Macierz wag	f [Hz]			NMD [%]						
Element	Intens,		1	2	3	1	2	3				
5	15 %	<b>8</b>	19,28	77,28	174,34	1,424	1,001	3,083				
AKTUALIZACJA												
Kryterium	Schemat czujników	$J_p$	f [Hz]			NMD [%]			Indeksy bazowe			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	
$J_p$	4	-5,55E+06	19,61	78,44	176,57	2,457	0,435	13,937	1,88	0,66	1,64	NIE
	5	-2,05E+06	19,30	78,27	174,32	0,314	0,333	0,889	27,98	10,88	1,02	TAK
$f_{\Delta}$	4	-200,72	19,61	78,44	176,57	2,457	0,435	13,937	31,55	13,11	1,04	NIE
	5	-3,29E+04	19,28	78,28	174,34	0,274	0,424	1,300	13,89	4,09	1,13	TAK
NMD3	4	-2,01E+02	19,61	78,44	176,57	2,457	0,435	13,937	31,55	13,11	1,04	NIE
	5	-2,05E+06	19,30	78,27	174,32	0,314	0,333	0,889	27,98	10,88	1,02	TAK
NMD2	4	-2,01E+02	19,61	78,44	176,57	2,457	0,435	13,937	31,55	13,11	1,04	NIE
	5	-2,05E+06	19,30	78,27	174,32	0,314	0,333	0,889	27,98	10,88	1,02	TAK
NMD1	4	-2,47E+02	19,61	78,44	176,57	2,457	0,435	13,937	26,83	12,05	1,10	NIE
	5	-3,29E+04	19,28	78,28	174,34	0,266	0,417	1,231	52,21	25,98	1,02	TAK

Poprawne sformułowanie macierzy wag ma niezwykle istotny wpływ na otrzymany wynik aktualizacji parametrów. Dla przedstawionego problemu belki swobodnie podparte, najlepszą jakością aktualizacji, a tym samym poprawne wykrycie lokalizacji uszkodzenia, wysokie wartości indeksów bazowych oraz wysoką zgodność otrzymanej wartości uszkodzenia z przyjętą w „eksperymentach” numerycznym, otrzymuje się w przypadku macierzy bazujących na regularyzacji Tikonov’a. Na znaczną poprawę dokładności aktualizacji parametrów modelu MES, wpływ ma również zastosowanie autorskiej modyfikacji z macierzą blokową. Dla wariantu 2 macierzy wag, niezależnie od zastosowanego kryterium wyboru wyniku aktualizacji parametrów, oraz dla wariantu 4 macierzy wag przy użyciu kryterium NMD3, NMD2 i NMD1, otrzymano najlepsze wyniki aktualizacji parametrów. Dla macierzy wag parametrów zaproponowanej przez

Linka oraz macierz wag wartości mierzonych zaproponowanej przez Mottershead'a, czyli dla wariantu 5 macierzy wag, otrzymujemy najgorszy wynik aktualizacji, ponieważ tylko w jednym przypadku uszkodzenie zostało poprawnie zlokalizowane.

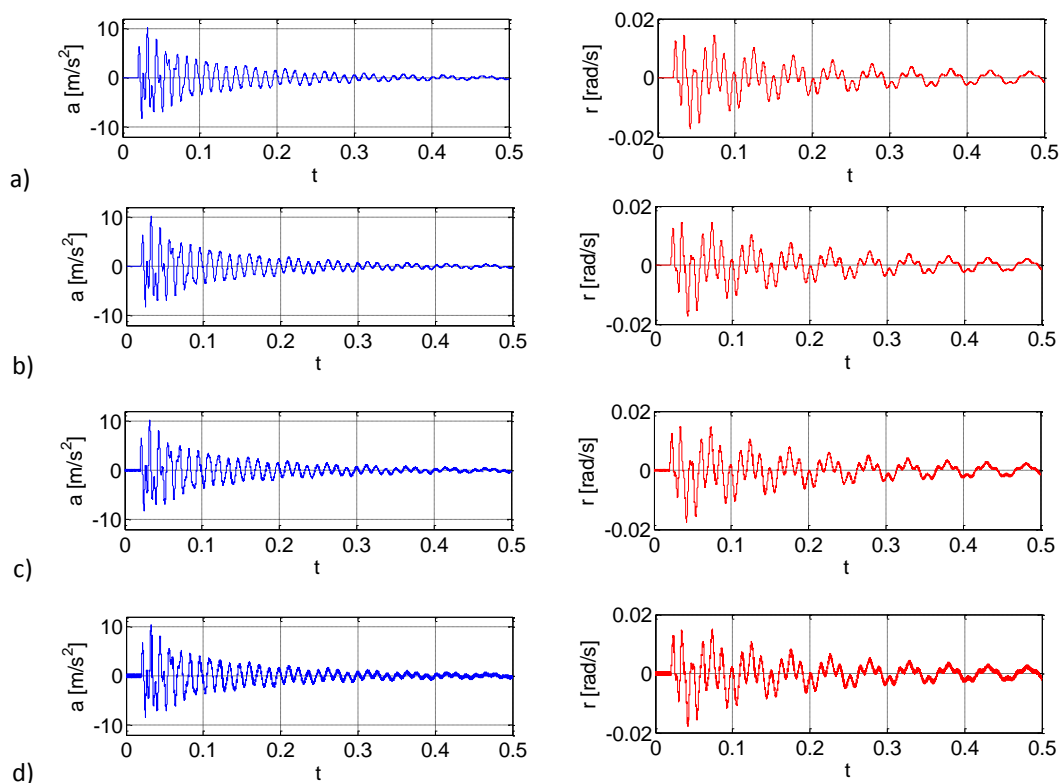
### 3.4 Wpływu szumu pomiarowego na procedurę aktualizacji paramentów

Nieodłącznym elementem rejestracji wszystkich rzeczywistych sygnałów jest obecność w nich szumów pomiarowych. Można je rozumieć jako różnego pochodzenia niepożądane składowe sygnału, utrudniające wyodrębnienie z sygnału pomiarowego szukanych informacji. Poziom szumów zależy od wielu czynników, między innymi od stosowanej aparatury pomiarowej tzn. od czujników pomiarowych oraz przetworników sygnałów, jak również od czynników środowiskowych, czy sposobu i ewentualnych niedokładności zamocowania urządzeń pomiarowych.

Wprowadzenie szumu pomiarowego do danych numerycznych ma na celu zbliżenie przeprowadzonych symulacji numerycznych do rzeczywistych pomiarów i zbadania wpływu wielkości szumu pomiarowego na poprawność aktualizacji parametrów modelu MES. Do wszystkich serii danych numerycznych dodano, wygenerowany w programie MATLAB, numeryczny losowy szum pomiarowy o płaskim widmie. W celu zbadania wpływu poziomu szumów na wynik i na poprawność detekcji uszkodzenia badano sygnały o 4 poziomach zaszumienia 1%, 2%, 5% oraz 10% wartości skutecznej sygnałów (RMS) (rysunek 3.35), która została zdefiniowana dla układów dyskretnych zgodnie ze wzorem (Kucharski 2002):

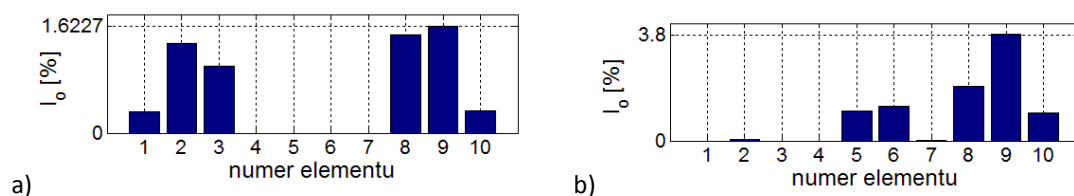
$$y_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)^2}. \quad (3.35)$$

Dla każdej nowej serii danych numerycznych, w zależności od miejsca i stopnia uszkodzenia i poziomu zaszumienia generowano 10 różnych sygnałów z szumem pomiarowym. Detekcję uszkodzeń przeprowadzono dla trzech typów belek opisanych w Rozdziale 3.2: nieuszkodzonej (rysunek 3.1), z uszkodzeniem trzeciego (rysunek 3.2) i z uszkodzeniem piątego elementu (rysunek 3.3) o intensywnościach odpowiednio 1%, 5%, 10% i 15%. Założono rozmieszczenie czujników pomiarowych zgodnie ze schematem 4 (rysunek 3.12). W procedurze aktualizacji wzięto pod uwagę dwie pierwsze częstotliwości i postaci drgań własnych. Korzystano z macierzy wag w wariancie 2 opisanej w rozdziale 3.3 i bazowano na kryterium NMD3 wyboru wyniku aktualizacji parametrów.



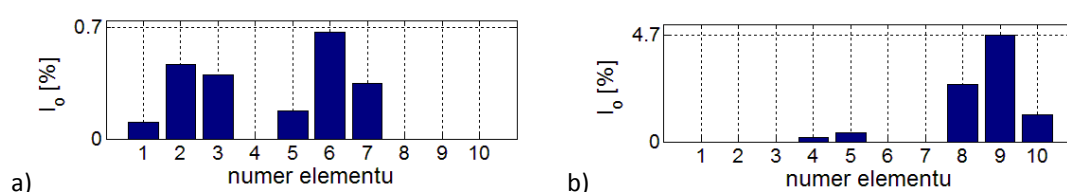
Rysunek 3.35 Przebiegi czasowe przyspieszeń i prędkości kątowych belki swobodnie podpartej przy zaszumieniu sygnału na poziomie a) 1% b) 2% c) 5% d) 10% wartości skutecznej sygnałów (RMS)

W przypadku belki bez uszkodzenia, przy braku szumu pomiarowego algorytm nie wykazywał znaczących zmian sztywności żadnego z elementów modelu MES belki (rysunek 3.14). Dodanie szumu pomiarowego o wartości 1% znacząco zmienia wynik aktualizacji parametrów projektowych, który przy braku uszkodzeń, w zależności od serii danych, wykazuje uszkodzenia w losowych elementach dochodzące nawet do 2% (rysunek 3.36). Przy poziomie szumów rzędu 2% pojawiają się uszkodzenia o intensywności do 4%, natomiast przy poziomie szumów wynoszącym 5% o intensywności prawie 9%. Cechą charakterystyczną otrzymanych wyników jest losowość lokalizacji uszkodzenia, dla każdej z serii danych numerycznych. Przy powtórzeniu kilku serii pomiarów, występowanie dużej losowości i rozbieżności w wynikach może więc świadczyć o braku uszkodzenia w belce, a jedynie o dużym poziomie zaszumienia sygnału pomiarowego.



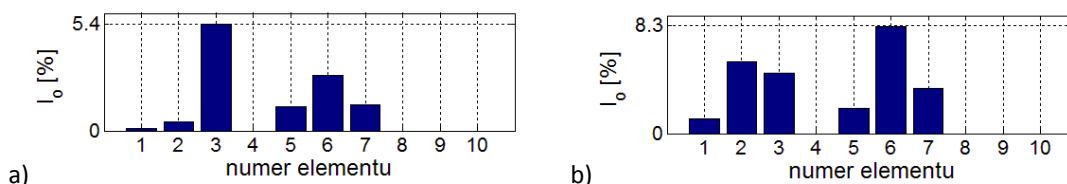
Rysunek 3.36 Indeks  $I_0$  dla elementów belki bez uszkodzenia przy szumie pomiarowym na poziomie a) 1% b) 5% dla schematu 4 usytuowania czujników pomiarowych.

Zasumienie sygnału pomiarowego ma więc znaczący wpływ na wykrywanie uszkodzeń, zwłaszcza kilkuprocentowego rzędu. Wykresy indeksu  $I_o$ , które otrzymano dla belki bez uszkodzenia z zasumieniem sygnału wynoszącym 1% wskazują, że zasumienie sygnału wykazuje większy wpływ na wynik aktualizacji niż uszkodzenie jednego elementu o wartości 1%. Tym samym, już przy stosunkowo niskim poziomie zasumienia sygnału wykrywanie małych uszkodzeń staje się niemożliwe. Przedstawione na rysunku 3.37 wykresy przedstawiają reprezentatywne wyniki aktualizacji dla belki z uszkodzeniem o wartości 1% przy poziomie zasumienia sygnału pomiarowego o wartościach 1% i 2%. Otrzymane zmiany sztywności nie wskazują na uszkodzenie wybranego elementu, a sugerują niewielkie uszkodzenia w kilku elementach belki.

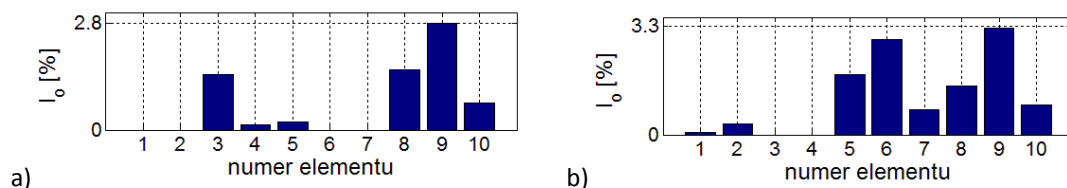


Rysunek 3.37 Indeks  $I_o$  dla elementów belki z uszkodzeniem elementu 3 o intensywności 1% przy szumie pomiarowym na poziomie a) 1% b) 2% dla schematu 4 usytuowania czujników pomiarowych.

W przypadku gdy uszkodzenie o intensywność 5% zlokalizowane jest w elemencie numer 3 modelu MES, możliwe jest wykrywanie uszkodzeń za pomocą algorytmu bazującego na rozmieszczeniu czujników zgodnie ze schematem 4, tylko w przypadku szumu pomiarowego na poziomie 1% (rysunek 3.38). W tym wypadku dla dowolnej serii danych wartość  $n_{max}$  była zgodna z miejscem uszkodzenia. Uzyskana procentowa wielkość uszkodzenia również ma zbliżone wartości do oczekiwanych 5%. Występowanie szumów pomiarowych o większej wartości uniemożliwia poprawną detekcję uszkodzenia (rysunek 3.39). W zależności od serii danych uszkodzenie wykazywane jest w różnych elementach, a więc  $n_{max}$  przyjmuje różne wartości. Jednak w przypadku uszkodzenia elementu 5 algorytm przy szumie pomiarowym na poziomie 1% błędnie wskazuje uszkodzenie sąsiedniego szóstego elementu (rysunek 3.38) lub 8 (rysunek 3.39).

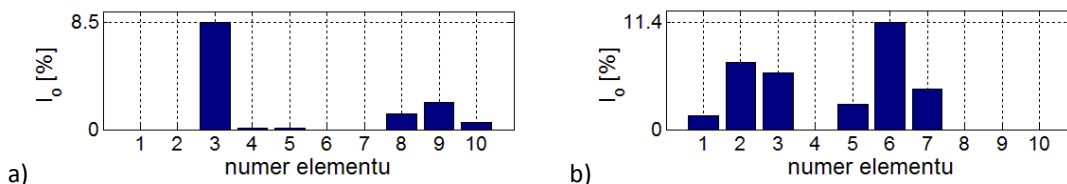


Rysunek 3.38 Indeks  $I_o$  dla elementów belki z uszkodzeniem elementu a) 3 b) 5 o intensywności 5% przy szumie pomiarowym na poziomie 1%, dla schematu 4 usytuowania czujników pomiarowych.

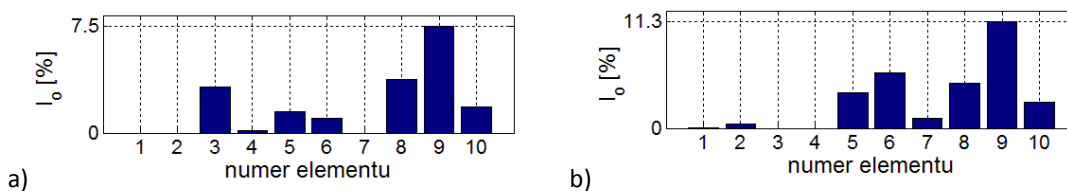


Rysunek 3.39 Indeks dla elementów belki z uszkodzeniem elementu a) 3 b) 5 o intensywności 5% przy szumie pomiarowym na poziomie 2% dla schematu 4 usytuowania czujników pomiarowych.

Podobna sytuacja występuje w przypadku uszkodzeń o intensywności 10%. Przy wielkości szumów na poziomie 1 i 2% dla wszystkich serii danych możliwa jest detekcja uszkodzeń w elemencie 3 (rysunek 3.40). Przy uszkodzeniu elementu 5, otrzymana zmiana sztywności w przedstawionym przypadku wykazywana jest w elemencie nr 6 i jest równa 114% założonego spadku sztywności. Przy szumach sięgających 5% zakłócenia sygnału są na tyle duże, że nie we wszystkich przypadkach umożliwią poprawną lokalizację uszkodzenia. Dla 20 różnych serii danych przy uszkodzeniu elementu 3 otrzymany wynik aktualizacji w 60% poprawnie wskazał miejsce bądź strefę uszkodzenia belki (rysunek 3.41). W przypadku uszkodzenia elementu 5 w 45% udawało się otrzymać wynik, który jako element uszkodzony wskazywał 5 lub 6 segment belki. Wielkość szumu wpływa na dokładność oszacowania stopnia uszkodzenia. W przypadku przedstawionym na rysunku 3.40 przy uszkodzeniu elementu 3 oszacowana wartość wynosi 85% wartości zadanej, natomiast w przypadku uszkodzenia elementu 5 wynosi ona 114% wartości zadanej.



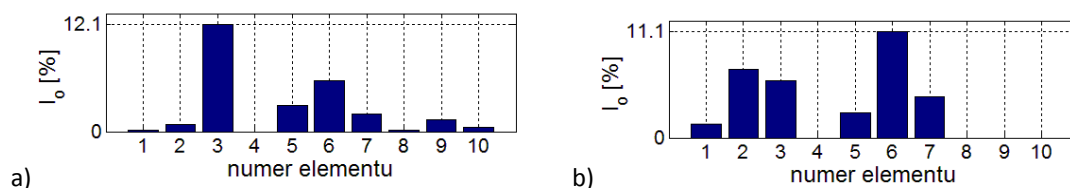
Rysunek 3.40 Indeks  $I_0$  dla elementów belki z uszkodzeniem elementu a) 3 b) 5 o intensywności 10% przy szumie pomiarowym na poziomie 2% dla schematu 4 usytuowania czujników pomiarowych.



Rysunek 3.41 Indeks  $I_0$  dla elementów belki z uszkodzeniem elementu a) 3 b) 5 o intensywności 10% przy szumie pomiarowym na poziomie 5% dla schematu 4 usytuowania czujników pomiarowych.

Uszkodzenia o intensywności 15% są relatywnie łatwo lokalizowane przy szumach sięgających nawet 10%. Na rysunku 3.42 przedstawiono wynik aktualizacji parametrów przy zaszumieniu na poziomie 10%. Dla wszystkich serii danych numerycznych wynik aktualizacji poprawnie wskazuje na miejsce uszkodzenia. Występują jednak znaczne rozbieżności w szacowaniu stopnia uszkodzenia. W przypadku zaprezentowanych wyników dla belki

z uszkodzeniem 3 elementu wynoszą one 81% , natomiast dla elementu 5 tylko 74% wartości zadanej.

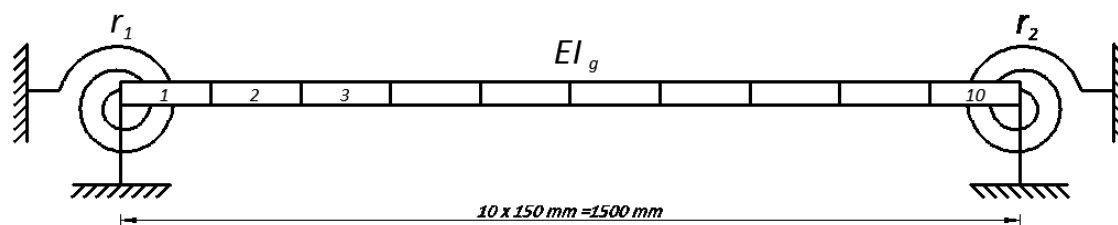


Rysunek 3.42 Indeks  $I_0$  dla elementów belki z uszkodzeniem elementu a) 3 b) 5 o intensywności 15% przy szumie pomiarowym na poziomie 10% dla schematu 4 usytuowania czujników pomiarowych.

Przeprowadzone symulacje wykazały bardzo istotny wpływ szumów pomiarowych na wynik aktualizacji parametrów. Przy niewielkich uszkodzeniach, nawet niewielkie szumy pomiarowe uniemożliwiają poprawną detekcję uszkodzenia. Z uwagi na losowość generowanych wyników, przy kilku seriach danych możliwe jest ich odrzucenie jako niepoprawnych. Przy uszkodzeniach o intensywności rzędu 5%, ważne jest aby zapewnić sygnał pomiarowy o jak najmniejszym poziomie zaszumienia oraz wykonać kilka serii pomiarów, które zweryfikują miejsce uszkodzenia. Przy uszkodzeniach o intensywności powyżej 10% szumy pomiarowe poniżej poziomu 5% nie mają istotnego wpływu na wynik aktualizacji parametrów. Każdorazowo zauważalny jest jednak znaczący wpływ szumów pomiarowych na wielkość stopnia uszkodzenia.

### 3.5 Aktualizacja warunków podporowych i sztywności globalnej modelu

Celem poniższych analiz jest aktualizacja parametrów modelu belki dla ustroju opisanego w Rozdziale 3.2, z założeniem zerowych przemieszczeń pionowych oraz skrupowanej rotacji na podporach (rysunek 3.43). Wektor aktualizowanych parametrów składa się z trzech elementów i przyjmuje postać  $\theta = [EI_g, r_1, r_2]$ , gdzie  $EI_g$  jest sztywnością globalną belki, a  $r_1$  i  $r_2$  odpowiednio rotacyjnymi sztywnościami sprężyny na podporze lewej i prawej.



Rysunek 3.43 Model MES belki

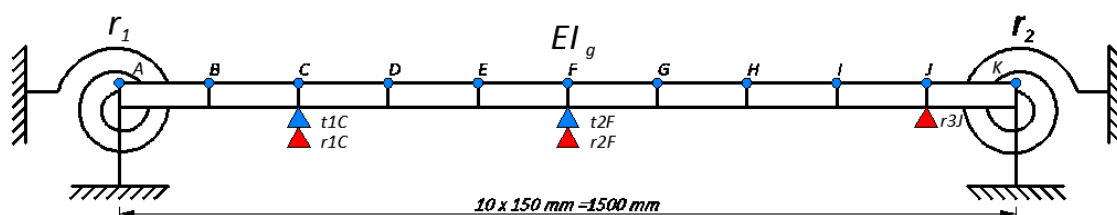
W procedurze aktualizacji założono, że przeprowadzona ona zostanie na podstawie danych numerycznych z 5 stopni swobody, w tym dwóch translacyjnych i trzech rotacyjnych zgodnie ze schematem przedstawionym na rysunku 3.44. Procedura aktualizacji bazuje na dwóch

pierwszych giętnych częstotliwościach i postaciach drgań własnych. Macierz wag parametrów mierzonych  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$  jest zdefiniowana zgodnie ze wzorem (2.144). Macierz wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  została zdefiniowana zgodnie ze wzorem:

$$\mathbf{W}_{\theta\theta} = w_p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

$$w_p \in \langle 10^{-2}, 10^{-3}, \dots, 10^{-10} \rangle.$$

W ten sposób parametrom związanym z rotacyjnymi sztywnościami sprężyny na podporze lewej i prawej, jako trudniejszym w oszacowaniu, nadano mniejszą wagę niż sztywności globalnej belki  $EI_g$ . W zaproponowanej procedurze aktualizacji parametrów, wynikiem jest tabela, w której kolejnych wierszach zapisane są wartości zaktualizowanych parametrów w zależności od wartości współczynnika skalującego  $w_p$ . Procedura, która umożliwi wybranie wyniku aktualizacji parametrów z tabeli dokonywana jest poprzez jej porządkowanie jako kryterium przyjmując NMD3 - minimalną wartość sumy kryterium NMD trzech pierwszych postaci drgań własnych pomiędzy wartością pomierzoną a zaktualizowaną.



Rysunek 3.44 Miejsca pomiaru translacyjnych (t1C, t2F) i rotacyjnych (r1C, r2F, r3J) stopni swobody – 6 schemat rozmieszczenia czujników

W 2 kolumnie tabeli 3.24 zestawiono rzeczywiste wartości parametrów oraz wartości częstotliwości drgań własnych modelu MES belki. W kolumnie 3 zestawiono wartości startowe zadane w algorytmie aktualizacji, bazujące na sztywności modelu nieuszkodzonego. Jako sztywność rotacyjną podpór przyjęto bardzo małą wartości zbliżając się tym samym do nieskrępowanego obrotu belki w tych punktach. Zestawiono również wartości dwóch pierwszych częstotliwości drgań własnych belki o zadanych parametrach oraz wartość kryterium NMD w stosunku do rzeczywistego modelu belki. Wynik przeprowadzonej aktualizacji parametrów bazującej na 2 postaciach i częstotliwościach drgań własnych oraz czujnikach rozmieszczonych zgodnie ze schematem 6 rozmieszczenia czujników przedstawiono w kolumnie 4 tabeli 3.24. Otrzymane wartości zarówno akualizowanych parametrów, częstotliwości drgań własnych oraz



kryterium NMD świadczą o zgodności modelu rzeczywistego z zaktualizowanym i potwierdzają dokładność uzyskanych w procedurze identyfikacji parametrów.

Tabela 3.24 Zastawnie wartość parametrów przed i po aktualizacji sztywności globalnej i sztywności rotacyjnej podpór dla modelu MES belki swobodnie podpartej

Parametr		Wartość rzeczywista	Wartość początkowa	Wartość zaktualizowana
Parametry aktualizowane				
$\theta_1$	$EI_g [Nm^2]$	2106,5	2171,6	2106,5
$\theta_2$	$r_1 [Nm/rad]$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-2}$
$\theta_3$	$r_2 [Nm/rad]$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-2}$
Częstotliwości				
$f_1 [Hz]$		19,31	19,61	19,31
$f_2 [Hz]$		77,26	78,44	77,26
Kryterium NMD				
Postać 1		-	$7,4 \cdot 10^{-3} \%$	0,0%
Postać 2		-	$5,0 \cdot 10^{-3} \%$	0,0%

Tabela 3.25 Zastawnie wartość częstotliwości drgań własnych i kryterium NMD dla modelu MES belki swobodnie podpartej w zależności od założonej sztywności rotacyjnej podpór

Parametr		Sztywność rotacyjna podpór przypadek 1	Sztywność rotacyjna podpór przypadek 2	Różnica
Parametry aktualizowane				
$\theta_1$	$EI_g [Nm^2]$	2171,6	2171,6	0%
$\theta_2$	$r_1 [Nm/rad]$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{12} \%$
$\theta_3$	$r_2 [Nm/rad]$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{12} \%$
Częstotliwości				
$f_1 [Hz]$		19,61	19,61	0%
$f_2 [Hz]$		78,44	78,44	0%
Kryterium NMD				
Postać 1		-	$7,1 \cdot 10^{-3} \%$	$7,1 \cdot 10^{-3} \%$
Postać 2		-	$4,8 \cdot 10^{-3} \%$	$4,8 \cdot 10^{-3} \%$

Różnice w częstotliwościach i postaciach drgań własnych belki przedstawionej na rysunku 3.45, przy założeniu sztywności rotacyjnej obu podpór na poziomie  $1 \cdot 10^{-10}$  oraz  $1 \cdot 10^0$  i jednakowej sztywności globalnej  $EI_g$  modelu MES, przedstawiono w tabeli 3.25. Wyniki zwarte

w tabeli świadczą o bardzo małym wpływie sztywności rotacyjnej podpór na model MES belki swobodnie podpartej w przedstawionym zakresie. Pozwala to na pominięcie aktualizacji parametru związanego z rotacyjnymi sztywnościami podpór w przeprowadzonych analizach.

## 4 Badania eksperymentalne

Badania laboratoryjne przeprowadzono na modelu eksperymentalnym stalowej belki wykonanej na potrzeby niniejszej pracy. Model opisano dokładniej w rozdziale 4.2. Belka poddawana była testom dynamicznym zgodnie z programem badań opisanym w rozdziale 4.3.

### 4.1 Aparatura pomiarowa

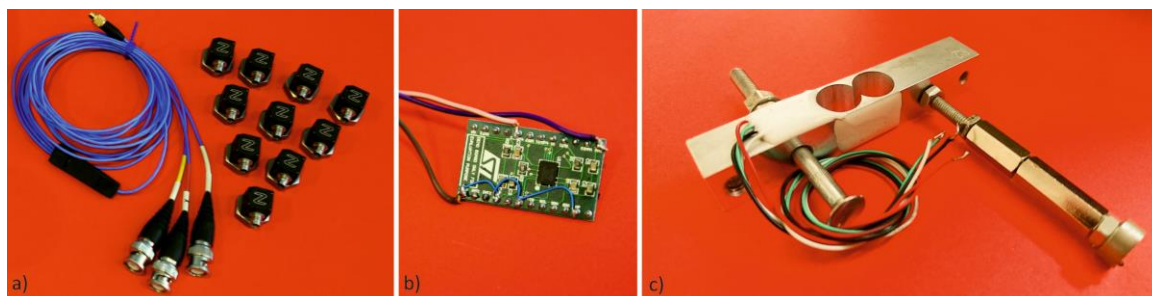
Podczas badań dynamicznych stosowano dwa rodzaje wzbudzenia dynamicznego obiektów eksperymentalnych: wzbudzenie impulsowe oraz wymuszenie harmoniczne. Wzbudzenie impulsowe wywoływane było przy użyciu młotka modalnego typu PCB 086C03 wyprodukowanego przez PCB Piezotronics (rysunek 4.1a). Młotek ten umożliwia wygenerowanie siły w zakresie  $\pm 2224$  N a jego częstotliwość rezonansowa jest wyższa niż 22 kHz. Wymuszenie harmoniczne generowane było za pomocą wzbudnika TIRA S 50009 (rysunek 4.2b) oraz wzbudnika VEB RFT MESSELEKTRONIK. Wzbudnik TIRA S 50009 umożliwia wygenerowanie funkcji sinusoidalnej o maksymalnej amplitudzie siły równej 9 N. Zakres dostępnych częstotliwości wynosi 2 - 20000 Hz, a maksymalne wychylenie masy jest równe 3 mm. Zakres dostępnych częstotliwości wzbudnika VEB RFT MESSELEKTRONIK wynosi od 1 Hz do 15 kHz. Umożliwia on wygenerowanie siły sinusoidalnej o maksymalnej amplitudzie 200 N. W badaniach korzystano z tak zwanego sweep-testu o różnych zakresach częstotliwości wywołanego za pomocą generatora RIGOL DG1022 (rysunek 4.1c).



Rysunek 4.1 a) Młotek modalny PCB 086C03 b) Wzbudnik TIRA S 50009 c) Wzbudnik VEB RFT MESSELEKTRONIK d) generator RIGOL DG1022.

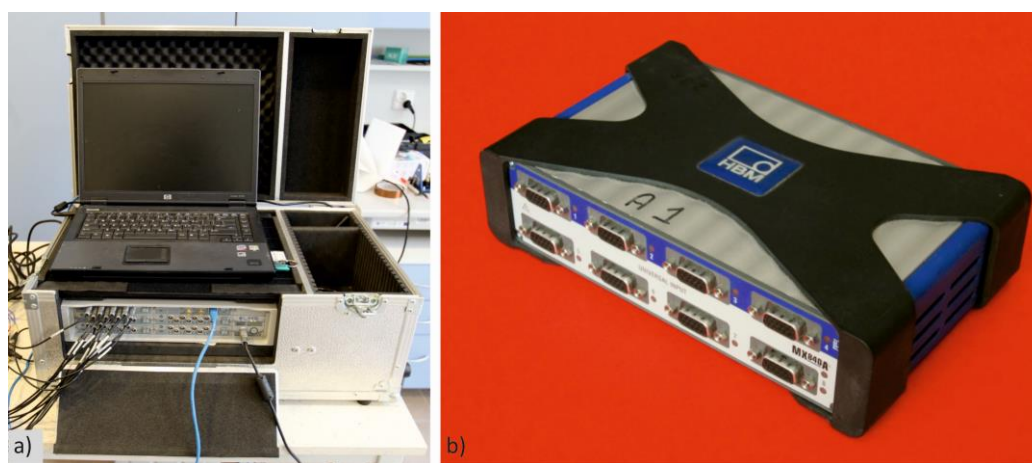
Do pomiarów wykorzystano czujniki przyspieszenia, prędkości kątowej oraz siły. Zestaw służący do pomiaru przyspieszeń składał się z 12 trzyosiowych piezoelektrycznych akcelerometrów wysokoczęstotliwościowych PCB 356A16 (rysunek 4.2a) o zakresie pomiarowym  $\pm 490$  m/s<sup>2</sup>. Zakres mierzonych częstotliwości na osi z oraz y wynosi 0,5 – 5000 Hz a na osi x 0,5 – 4500 Hz. Częstotliwość rezonansowa czujników jest wyższa od 25 kHz. Do pomiaru prędkości kątowej użyto

żyroskopów prędkościowych LPY403AL wykonanych w technologii MEMS (rysunek 4.2b) wykorzystujących efekt Coriolisa. Ich zakres pomiarowy prędkości kątowej wynosi  $\pm 30$  dps, a maksymalna mierzona częstotliwość to 140 Hz. Pomiar siły wymuszenia dynamicznego przekazywanego przez wzbudnik na belkę wykonano przy użyciu belki tensometrycznej BTENS-N27-002 o zakresie do 20 N (rysunek 4.2c).



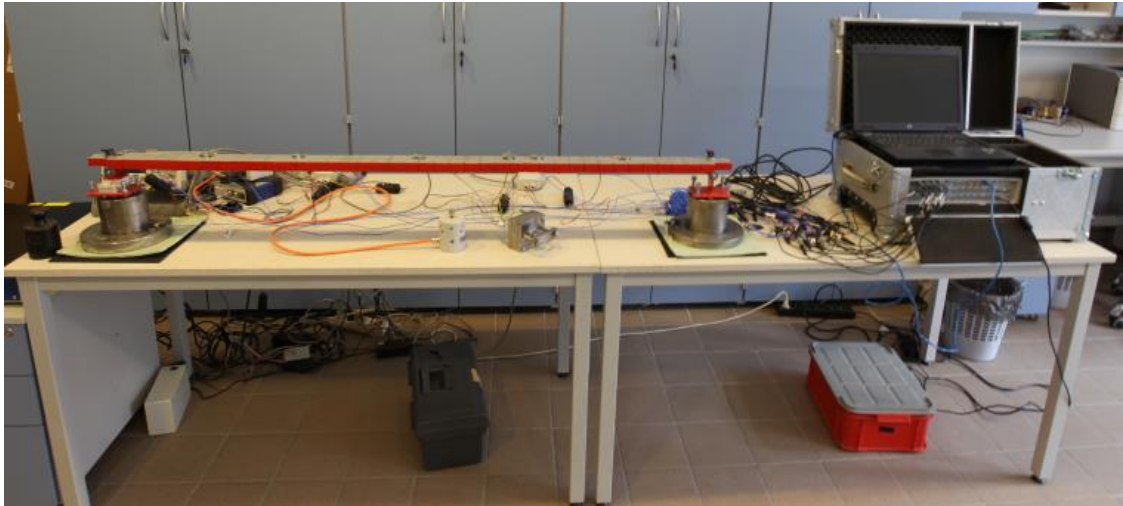
Rysunek 4.2 Aparatura pomiarowa : a) Akcelerometry PCB 356A16 b) Żyroskopy MEMS LPY403AL c) belka tensometryczna BTENS-N27-002

Dane pomiarowe rejestrowane były przy użyciu 40-kanalowego systemu LMS SCADAS (rysunek 4.3a) oraz 8-kanalowego wzmacniacza pomiarowego QUANTUM HBM 840a (rysunek4.3b).

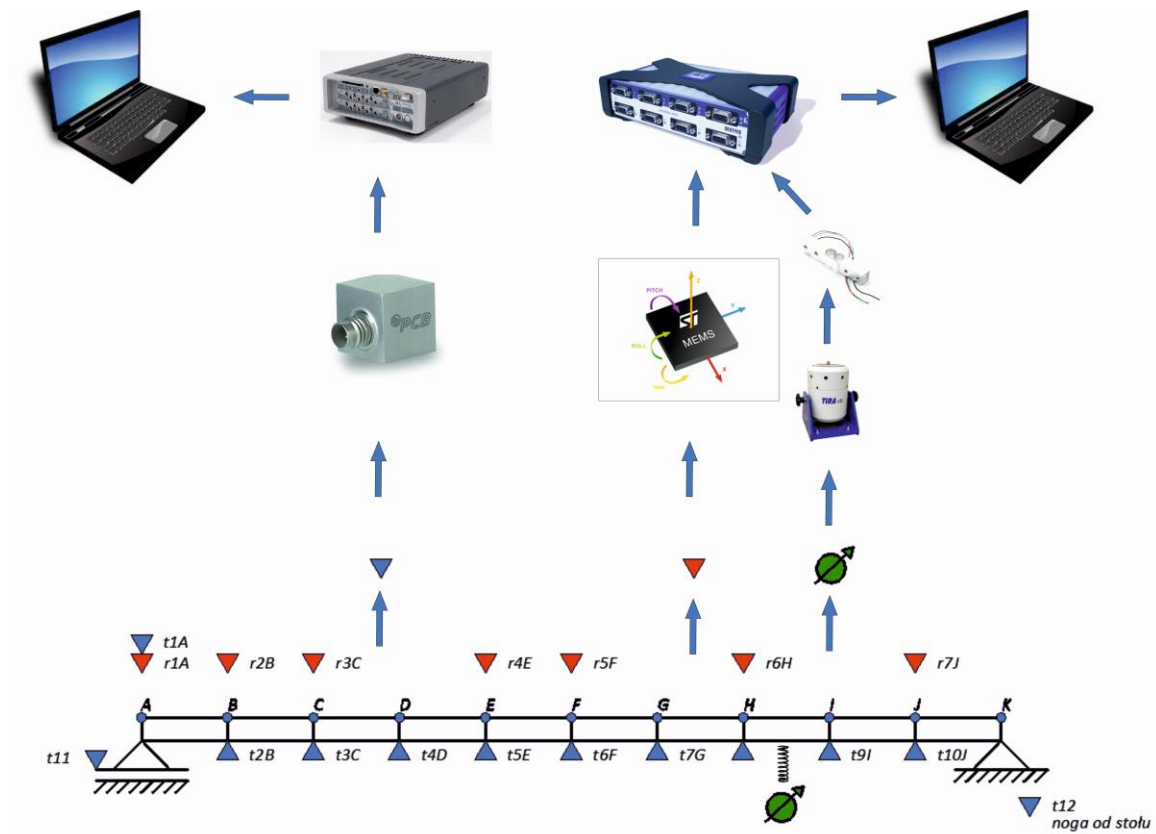


Rysunek 4.3 Aparatura pomiarowa : a) systemu LMS SCADAS b) wzmacniacz pomiarowy QUANTUM HBM 840a

Stanowisko pomiarowe (rysunki 4.4 i 4.5) składało się również z dwóch laptopów służących do przetwarzania danych, ich wizualizacji oraz przechowywania rezultatów pomiarów.



Rysunek 4.4 Stanowisko pomiarowe



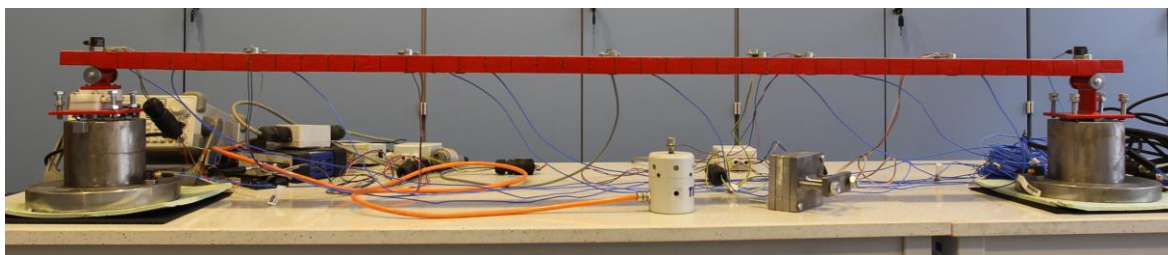
Rysunek 4.5 Schemat stanowiska pomiarowego

## 4.2 Model eksperymentalny belki swobodnie podpartej

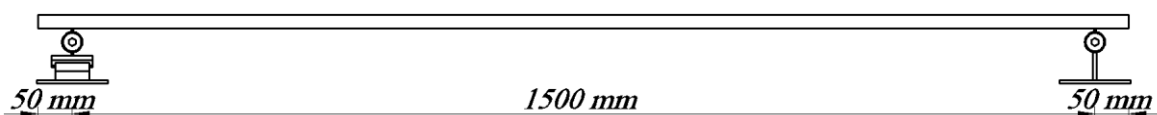
Belka swobodnie podparta (rysunek 4.6) została wykonana z profilu walcowanego C40. Całkowita długość belki wynosi 1600 mm, a jej rozpiętość między podporami jest równa 1500 mm (rysunek 4.7). Belka została wykonana ze stali o module Younga 205 GPa i gęstości 7850 kg/m<sup>3</sup>. Częstotliwości drgań własnych belki zostały obniżone, ze względu na stosowane czujniki

żyroskopowe, poprzez doklejenie do zewnętrznych krawędzi ceowników ołowianych blach o grubości 3 mm. Blachy zostały przyklejone w pakietach po 3 sztuki z każdej strony (rysunek 4.8). Następnie co 37,5 mm po długości belki wykonano szczelinę grubości ok 1 mm, aby nie powodować nadmiernego wzrostu sztywności belki. Cała belka, bez łożysk, po dociążeniu ważyła 12,05 kg.

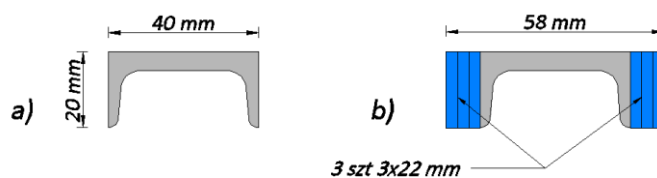
Łożyska wykonano tak aby zapewnić swobodę obrotu belki na obu podporach. W tym celu wykonano przeguby w formie walców z teflonu, z uwagi na bardzo mały współczynnik tarcia tego materiału. Dodatkowe użycie smaru na powierzchni teflonu zapewniło swobodny obrót walców w stalowej obudowie łożyska. Jedno z łożysk wykonano jako nieprzesuwne (rysunek 4.9b). Natomiast w łożysku przesuwym (rysunek 4.9a) zastosowano dodatkowe powierzchnie ślizgowe wykonane z dwóch teflonowych płytek, umożliwiające swobodny przesuw podłużny jednego z końców belki.



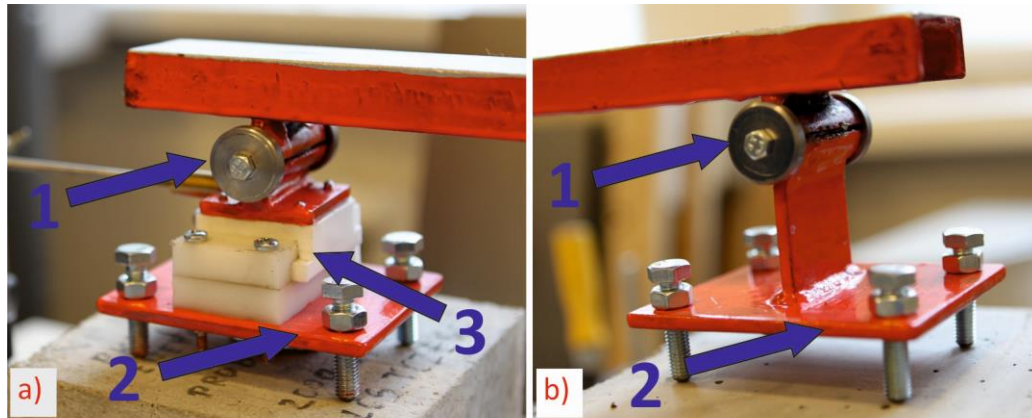
Rysunek 4.6 Stalowa belka swobodnie podparta



Rysunek 4.7 Schemat belki swobodnie podpartej



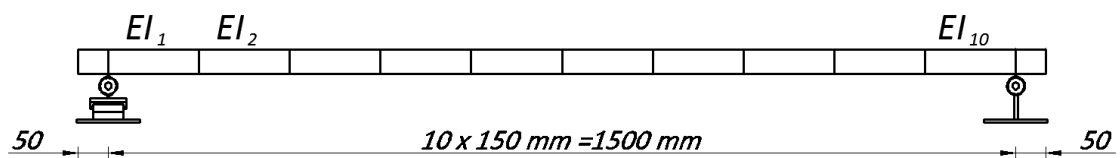
Rysunek 4.8 Przekrój poprzeczny belki a) podstawowy b) po dodaniu masy w postaci blach ołowianych



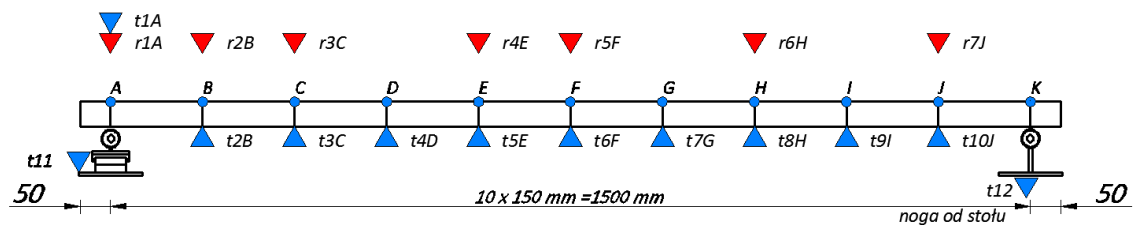
Rysunek 4.9 Budowa łożysk liniowo stycznych: a) przegubowe przesuwne: 1 – przegub teflonowy w stalowej obudowie, 2 – podstawa łożyska, 3 – powierzchnie teflonowe umożliwiające przesuw b) przegubowe nieprzesuwne: 1 – przegub teflonowy w stalowej obudowie 2 – podstawa łożyska

### 4.3 Program badań

Badania eksperymentalne zostały przeprowadzone dla dwóch przypadków: belki bez uszkodzenia oraz belki z uszkodzeniem 3 lub 5 elementu. Belka została myślowo podzielona na 10 odcinków o długości 150 mm każdy (rysunek 4.10). Do badań użyto zestawów 12 akcelerometrów PCB 356A16 oraz 7 czujników żyroskopowych MEMS (rysunek 4.11).



Rysunek 4.10 Podział belki na odcinki



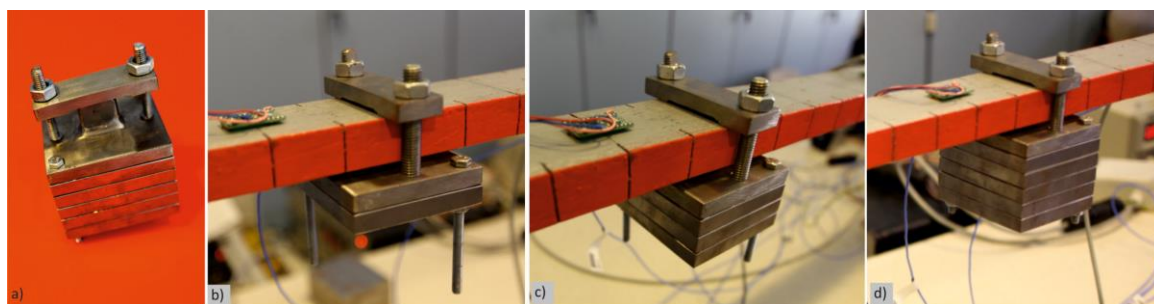
Rysunek 4.11 Rozmieszczenie punktów pomiarów przyspieszeń oraz prędkości kątowych

W badaniach eksperymentalnych uszkodzenie symulowane było poprzez dodanie dodatkowej masy skupionej. Podejście takie nie wymaga ingerencji w konstrukcję modelu, jak w przypadku symulowania uszkodzenia poprzez redukcję sztywności wybranych elementów. Pozwala ono na dodatkowe modyfikowanie uszkodzenia, poprzez zmniejszanie bądź zwiększanie

jego intensywności oraz poprzez zmianę lokalizacji uszkodzenia w kolejnych testach dynamicznych.

W pierwszym etapie przeprowadzono badania na belkach nieuszkodzonych, bez dodatkowych mas skupionych. Następnie wszystkie testy powtórzono na belkach, których uszkodzenie symulowała dodatkowa masa skupiona złożona z elementów mocujących oraz płytek obciążających (rysunek 4.12). Wykorzystano 3 rodzaje masy:

- ✓ masa o symbolu 2 – 2 płytki o numerach 1 i 2,
- ✓ masa o symbolu 4 – 4 płytki o numerach 1 – 4,
- ✓ masa o symbolu 6 – 6 płytki o numerach 1 – 6.



Rysunek 4.12 a) Konstrukcja masy symulującej uszkodzenie o symbolu 6 oraz sposób montażu masy o symbolu b) 2 c) 4 d) 6 na belce

Jako reprezentatywne przedstawiono wyniki otrzymane podczas testów belki poddawanej obciążeniu harmonicznemu funkcją sweep - sine w zakresie częstotliwości od 6 Hz do 160 Hz, wywołanemu przy użyciu wzbudnika drgań VEB RFT MESSELEKTRONIK. Wzbudnik umieszczano kolejno w elementach belki o numerach 6 i 8 dokonując pomiaru przykładanej siły podczas każdego testu (rysunek 4.13). Z uwagi na szумы występujące w sygnałach każdy test powtarzano 4 krotnie. Sumarycznie wykonano 211 testów, dla belki bez uszkodzenia, z uszkodzeniem w elemencie 3 o symbolach 2, 4 i 6, oraz z uszkodzeniem w elemencie 5 o symbolach 2, 4 i 6 (rysunek 4.14).



Rysunek 4.13 Sposób połączenia wzbudnika z belką z jednoczesnym pomiarem siły

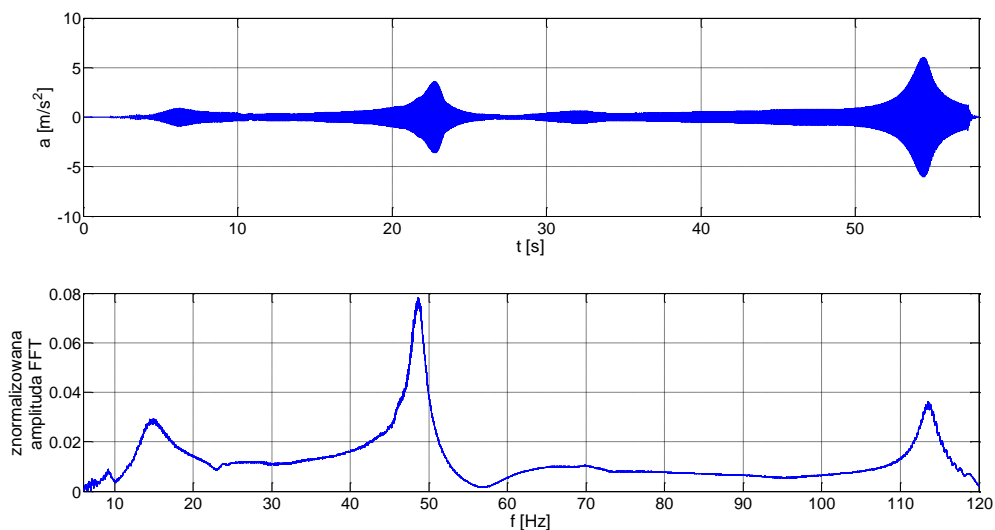




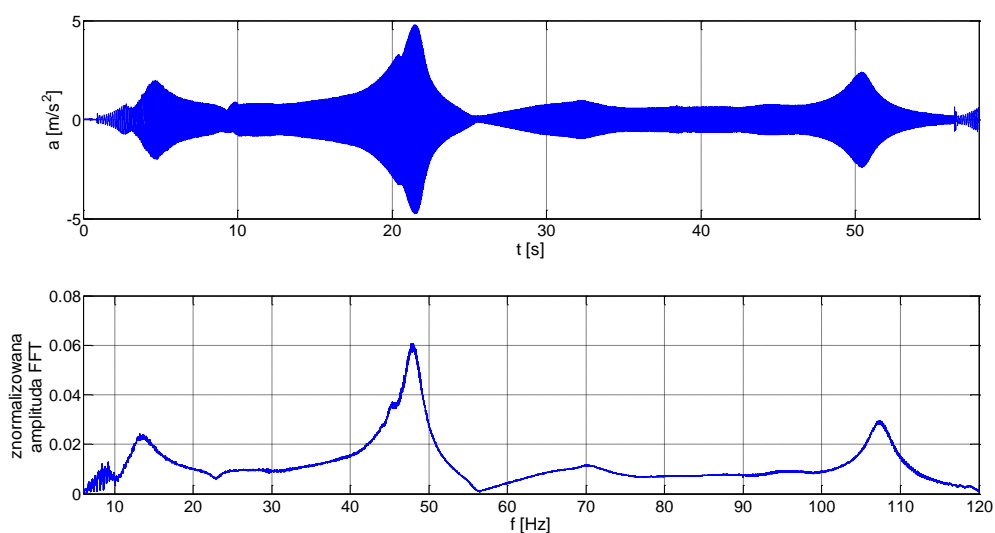
Rysunek 4.14 Zestawienie wykonanych testów

#### 4.4 Wyniki badań eksperymentalnych

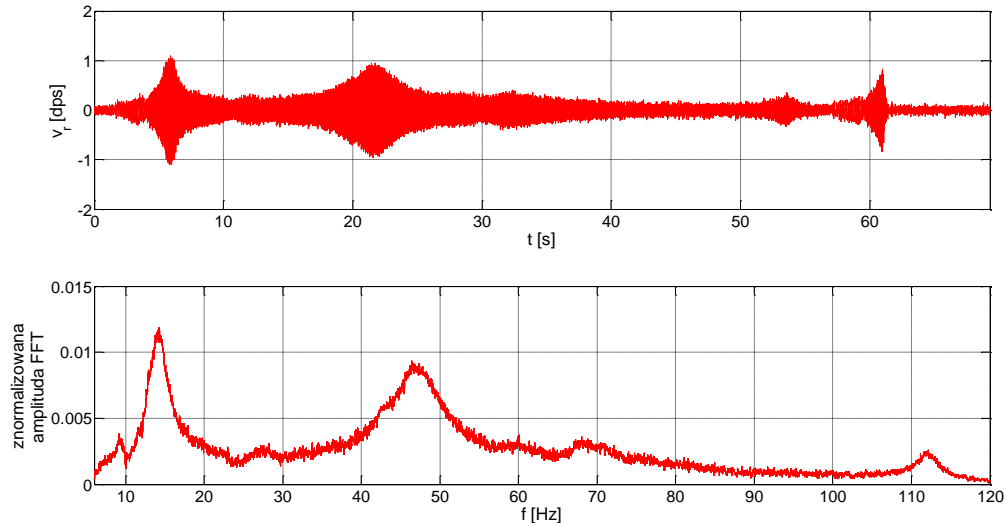
Przeprowadzone pomiary pozwoliły na zarejestrowanie przebiegów czasowych przyspieszeń oraz prędkości kątowych belki. Wszystkie otrzymane przebiegi poddano filtracji przy użyciu filtra Butterwortha odcinającego z sygnału składowe o częstotliwościach wyższych od 150 Hz. Reprezentatywne przebiegi wraz z wyznaczonymi na ich podstawie transformatami Fouriera (FFT) przedstawiono na rysunkach 4.15-4.18.



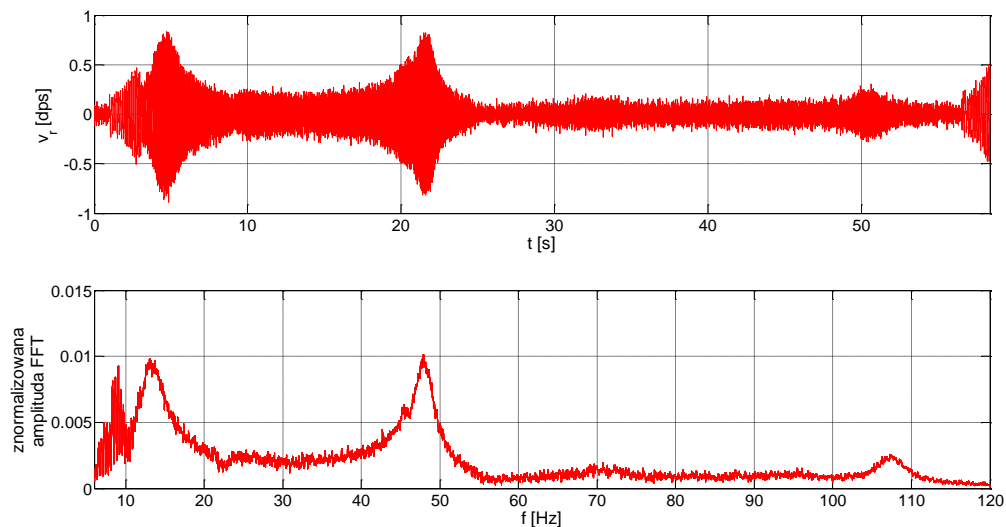
Rysunek 4.15 Przebieg czasowy przyspieszeń w punkcie pomiarowym t4D wraz z odpowiadającą transformacją Fouriera dla belki nieuszkodzonej (bez dodatkowej masy) przy wzbudniku umieszczonym w elemencie 6.



Rysunek 4.16 Przebieg czasowy przyspieszeń w punkcie pomiarowym t4D wraz z odpowiadającą transformacją Fouriera dla belki z uszkodzeniem elementu 5 o symbolu 2 (z dodatkową masą) przy wzbudniku umieszczonym w elemencie 6.



Rysunek 4.17 Przebieg czasowy prędkości kątowych w punkcie pomiarowym r2B wraz z odpowiadającą mu transformatą Fouriera dla belki nieuszkodzonej (bez dodatkowej masy) przy wzbudniku umieszczonym w elemencie 6.

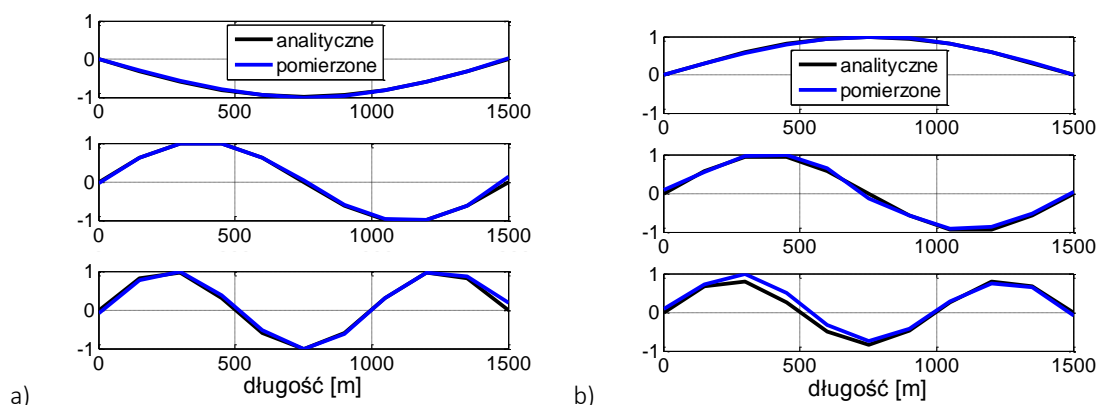


Rysunek 4.18 Przebieg czasowy prędkości kątowych w punkcie pomiarowym r2B wraz z odpowiadającą mu transformatą Fouriera dla belki z uszkodzeniem elementu 5 o symbolu 2 (z dodatkową masą) przy wzbudniku umieszczonym w elemencie 6.

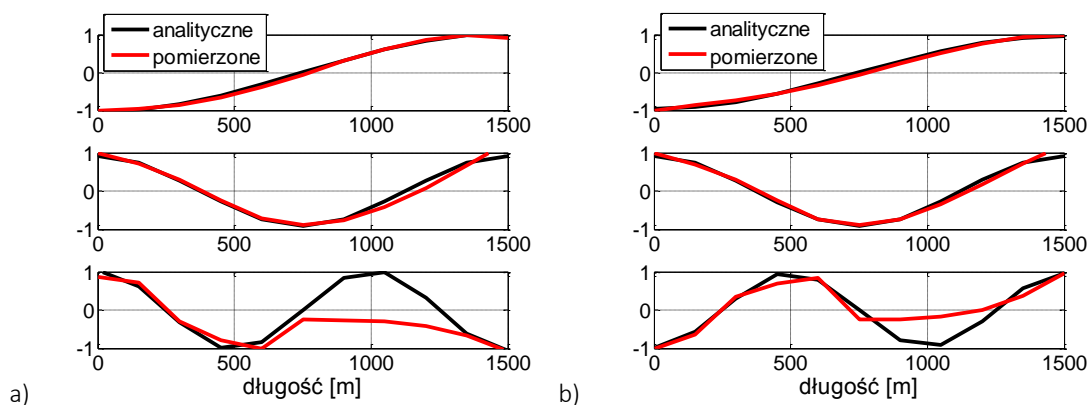
Transformaty Fouriera posłużyły do wyznaczenia częstotliwości drgań własnych belki oraz funkcji odpowiedzi częstotliwościowej  $\mathbf{H}$  dla pomierzonych sygnałów. Na podstawie funkcji odpowiedzi częstotliwościowej otrzymano giętkie postaci drgań własnych belki. Pomiary wykonane za pomocą akcelerometrów pozwoliły na otrzymanie translacyjnych składowych wektora modalnego, natomiast pomiary wykonane za pomocą żyroskopów na otrzymanie rotacyjnych elementów wektora modalnego. Na rysunkach 4.19 i 4.20 przedstawiono numeryczne giętkie postaci drgań własnych dla belki nieuszkodzonej oraz postaci drgań wyznaczone na

podstawie badań eksperymentalnych dla belki nieuszkodzonej oraz belki z uszkodzeniem elementu 5 o symbolu 2. W tabeli 4.1 zestawiono, w zależności od symbolu uszkodzenia oraz położenia wzbudnika, pomierzone częstotliwości drgań własnych oraz kryterium NMD względem modelu numerycznego bez uszkodzeń.

Drgania podłoża były mierzone podczas wszystkich testów eksperymentalnych. Jednak z uwagi na bardzo małe amplitudy otrzymanych sygnałów nie mają one wpływu na wyniki badań i nie są w niniejszej dysertacji przedstawione.



Rysunek 4.19 Translacyjne postacie drgań belki dla belki a) bez uszkodzenia b) z uszkodzeniem elementu 5 o symbolu 2



Rysunek 4.20 Rotacyjne postacie drgań belki dla belki a) bez uszkodzenia b) z uszkodzeniem elementu 5 o symbolu 2

Tabela 4.1 Zestawienie częstotliwości drgań własnych wraz z kryterium NMD dla modelu eksperymentalnego belki swobodnie podpartej o różnym symbolu uszkodzenia

Element uszkodzony	Symbol uszkodzenia	Częstotliwości drgań			Translacyjna postać drgań			Rotacyjna postać drgań		
		$f$ [Hz]			NMD [%]			NMD [%]		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3
WZBUDNIK ELEMENT 6										
brak	-	14,73	48,77	113,58	2,01	5,36	7,31	4,30	6,50	18,37
3	2	13,90	43,22	108,28	7,44	25,95	17,69	2,86	5,73	121,96
	4	13,48	42,11	110,48	1,23	42,68	29,09	4,41	9,93	30,60
	6	13,04	42,11	107,02	1,34	67,35	48,52	6,31	6,06	130,13
5	2	13,20	48,12	107,40	1,62	9,31	22,08	5,21	5,14	75,58
	4	12,87	44,13	107,40	1,64	16,14	37,60	9,35	5,12	26,40
	6	12,18	46,15	107,02	1,99	21,47	47,22	4,32	3,49	35,15
WZBUDNIK ELEMENT 8										
Brak	-	14,31	47,60	112,04	2,38	2,76	7,94	5,03	5,52	15,60
3	2	13,58	42,97	108,41	1,32	18,71	17,96	3,25	6,17	48,00
	4	13,50	42,02	109,12	2,24	40,38	13,50	7,26	11,03	27,21
	6	12,63	42,06	107,14	0,98	47,63	34,88	6,02	9,18	48,05
5	2	13,10	47,32	107,66	2,62	6,98	27,48	5,09	5,60	17,48
	4	12,38	42,09	107,16	1,57	17,22	38,64	5,39	5,08	23,23
	6	11,73	42,09	107,51	1,91	13,11	57,88	4,90	4,07	25,39

## 4.5 Niepewności pomiarowe

Wszelkie prowadzone pomiary z założenia obarczone są pewnymi błędami. Nie istnieją pomiary, które w 100% dokładnie opisywały by rzeczywistość. Błędy w pomiarach mogą być różnego pochodzenia, w zależności między innymi od typu i zakresu mierzonych wartości, stosowanych czujników pomiarowych, sposobu ich podłączenia i montażu czy czynników środowiskowych.

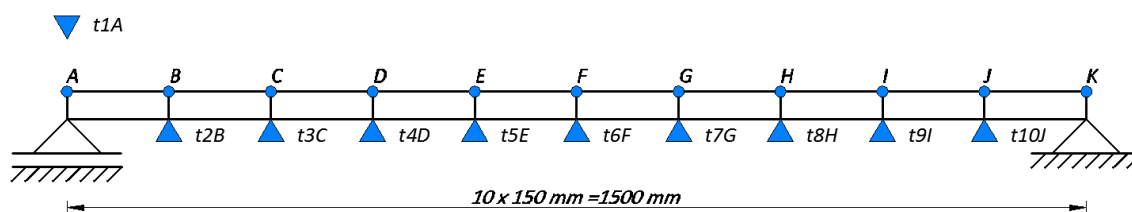
W przypadku szacowania niepewności dla opisanych powyżej badań pod uwagę wzięto: błąd wzmacniacza i przetwornika, wpływ drgań w innych kierunkach na wartość mierzoną, błędy spowodowane przez próbkowanie mierzonego sygnału oraz przez szумы czujników pomiarowych. Pominęto, z uwagi na stabilne warunki atmosferyczne panujące w laboratorium, błędy środowiskowe związane między innymi ze zmianą temperatury oraz wilgotności.

Niepewność pomiarowa dla akcelerometrów przy założeniu maksymalnego przyspieszenia na poziomie  $10 \frac{m}{s^2}$  wyniosła  $\pm 0,24 \frac{m}{s^2}$ , natomiast dla żyroskopów typu MEMS przy założeniu maksymalnej pomierzonej wartości rzędu 2,0 dps równą 0,15 dps.

## 5 Aktualizacja parametrów projektowych na podstawie badań eksperymentalnych

### 5.1 Procedura aktualizacji parametrów projektowych na podstawie badań eksperymentalnych

Aktualizacji parametrów projektowych na podstawie badań eksperymentalnych dokonano na podstawie sygnałów z 10 translacyjnych stopni swobody zlokalizowanych na belce (rysunek 5.1), wykorzystując trzy uzyskane częstotliwości i postacie drgań własnych konstrukcji (rozdział 4). Uszkodzenie belki symulowane było przez dodanie masy skupionej w wybranym elemencie. Aktualizowanymi parametrami były masy  $m_i$  wszystkich elementów modelu MES belki. Wektor aktualizowanych parametrów miał postać  $\theta = [m_1, m_2, \dots, m_{10}]$ .



Rysunek 5.1 Rozmieszczenie punktów pomiarowych przyspieszeń (akcelerometrów) użytych do procedury aktualizacji parametrów

W badaniach wstępnych ograniczono zakres rozważanych danych pomiarowych do ośmiu zestawów:

1. belka z uszkodzeniem 3 elementu o symbolu 2 oraz wzbudnik umieszczony w elemencie 6,
2. belka z uszkodzeniem 3 elementu o symbolu 4 oraz wzbudnik umieszczony w elemencie 6,
3. belka z uszkodzeniem 5 elementu o symbolu 2 oraz wzbudnik umieszczony w elemencie 6,
4. belka z uszkodzeniem 5 elementu o symbolu 4 oraz wzbudnik umieszczony w elemencie 6,
5. belka z uszkodzeniem 3 elementu o symbolu 2 oraz wzbudnik umieszczony w elemencie 8,
6. belka z uszkodzeniem 3 elementu o symbolu 4 oraz wzbudnik umieszczony w elemencie 8,

7. belka z uszkodzeniem 5 elementu o symbolu 2 oraz wzbudnik umieszczony w elemencie 8,
8. belka z uszkodzeniem 5 elementu o symbolu 4 oraz wzbudnik umieszczony w elemencie 8.

W obliczeniach użyto macierzy wag w wariacie 3 oraz 4 opisanych w rozdziale 3.3. Każdorazowo wynikiem aktualizacji parametrów była tabela, w której zamiana parametrów projektowych zależała bezpośrednio od definicji macierzy wag parametrów  $\mathbf{W}_{\theta\theta}$  i elementów mierzonych  $\mathbf{W}_{\varepsilon\varepsilon}$ . W celu wyboru elementów, które mogą występować w rzeczywistej konstrukcji w tabeli zapisywano jedynie te wyniki dla których spełnione zostały poniżej warunki:

- ✓ uzyskane postacie drgań opisane były liczbami rzeczywistymi;
- ✓ uzyskane częstotliwości drgań opisane były liczbami rzeczywistymi;
- ✓ maksymalny spadek masy w dowolnym elemencie nie był większy niż 5% masy całej belki;
- ✓ maksymalny przyrost masy w dowolnym elemencie nie był większy niż 25% masy całej belki;
- ✓ minimalna wartość uszkodzenia (przyrostu masy) w jednym dowolnym elemencie wynosiła przynajmniej 0,5% masy całej belki;
- ✓ jedna z wartości NMD, dla dowolnej z trzech postaci drgań, była mniejsza niż 30%;
- ✓ wszystkie indeksy bazowe opisane były liczbami rzeczywistymi.

Wybór wyniku aktualizacji parametrów odbywał się przy użyciu kryteriów  $J_p$ ,  $f_{\Delta}$ , NMD3, NMD2 i NMD1 opisanych w rozdziale 3.3.

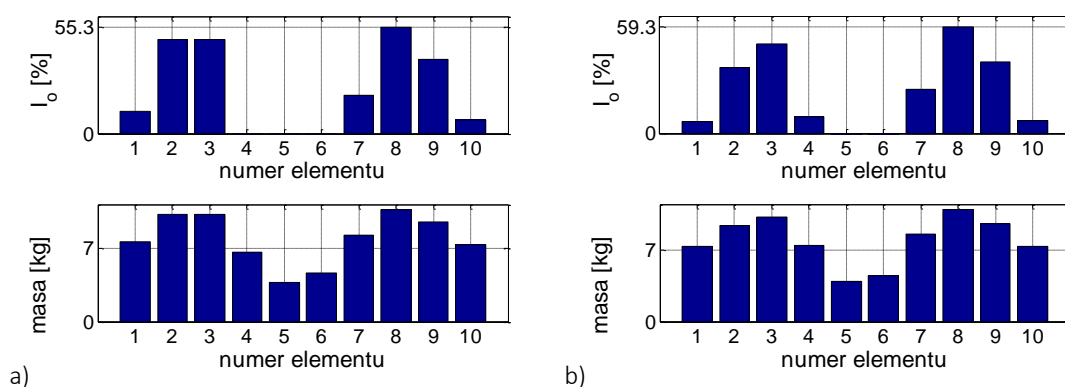
Wyniki aktualizacji parametrów dla modelu belki z uszkodzeniem w elementach o numerach 3 i 5 o symbolu 2 zostały przedstawione na rysunkach 5.2-5.21 oraz w tabelach 5.1-5.4. Przeprowadzając analizę wykresów przedstawionych na rysunkach 5.2-5.5 oraz 5.12-5.15, wyraźnie widać, że posługując się kryterium  $J_p$  oraz  $f_{\Delta}$  każdorazowo, bez względu na wariant definicji macierzy wag, algorytm nie wskazuje uszkodzenia jednego elementu. W przypadku prowadzonych badań eksperymentalnych, zwiększenie masy jednego elementu powodowało wyraźnie inny jej rozkład w wybranym elemencie w stosunku do pozostałych, nieuszkodzonych elementów. Poprawne działanie procedury aktualizacji parametrów, powinno więc jednoznacznie wskazywać jeden uszkodzony element, przy jedynie stosunkowo nieznacznych wahaniach masy w pozostałych, nieuszkodzonych elementach. Analizując wyniki przedstawione w tabelach 5.1 - 5.4 zaobserwowano, bardzo wysoką zgodność wartości 2 i 3 częstotliwości drgań własnych pomiędzy częstotliwościami eksperymentalnymi, a częstotliwościami uzyskanymi dla modelu



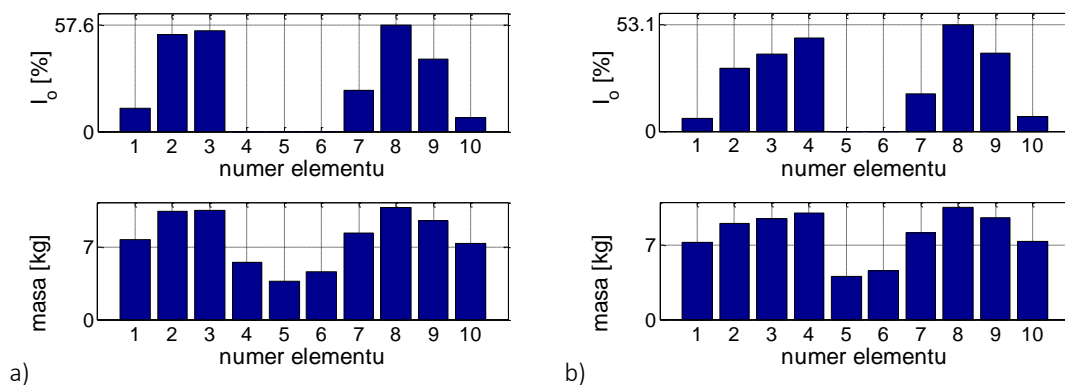
zaktualizowanego posługując się kryterium  $J_p$  oraz  $f_{\Delta}$ . Jednocześnie można jednak zaobserwować wzrost wartości kryterium NMD dla 2 i 3 postaci drgań własnych.

W przypadku stosowania kryteriów NMD3, NMD2 i NMD1, zaobserwowano, że najlepsze wyniki aktualizacji parametrów otrzymuje się korzystając z macierzy wag w wariancie 4 oraz kryterium NMD3, które bazuje na minimalizacji wszystkich 3 postaci drgań własnych (rysunki 5.6-5.11 oraz 5.16-5.21). Pomimo większych rozbieżności pomiędzy otrzymanymi po aktualizacji wartościami częstotliwościami drgań własnych, niż to było w przypadku kryteriów  $J_p$  oraz  $f_{\Delta}$ , zaobserwowano że aktualizacja parametrów bazująca na kryterium NMD3 i NMD2 pozwala na znacznie lepsze wpasowanie się 2 i 3 postaci drgań otrzymanych po procedurze aktualizacji parametrów z postaciami drgań otrzymanymi z badań eksperymentalnych (tabela 5.1 i 5.2). Wynik aktualizacji parametrów, poprawnie wskazuje lokalizację uszkodzonego elementu, również w przypadku gdy wartość kryterium NMD dla pierwszej postaci wzrasta, natomiast wartości kryterium NMD dla postaci 2 i 3 zostają znacznie obniżone. Świadczy to o dużym znaczeniu drugiej i trzeciej postaci drgań w procedurze aktualizacji parametrów. Analizując wyniki, można stwierdzić, że użycie kryterium NMD2, w części przypadków również pozwala na poprawną detekcję uszkodzenia. Posługiwanie się jednak wyłącznie kryterium NMD1, bazującym na minimalizacji 1 postaci drgań, nie pozwala na osiągnięcie zadawalających rezultatów.

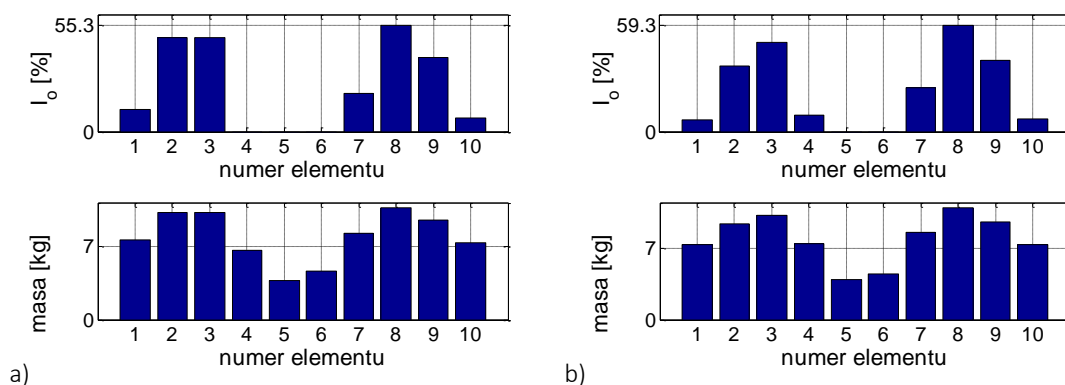
Analiza zestawionych w tabelach 5.1 - 5.4 wyników aktualizacji parametrów oraz wykresów przedstawionych na rysunkach 5.2, 5.4, 5.6, 5.8, 5.10, 5.12, 5.14, 5.16, 5.18 i 5.20, dowodzi, że stosowanie macierzy wag w wariancie 3 nie pozwala uzyskać poprawnych wyników aktualizacji parametrów. Zasadne wydaje się więc użycie macierzy wag w wariancie 4, z autorską modyfikacją polegającą na wprowadzeniu macierzy blokowej.



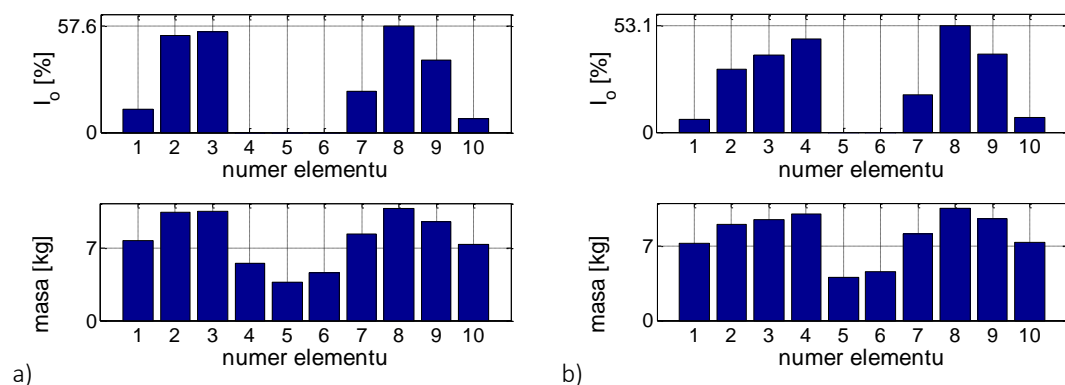
Rysunek 5.2 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu trzeciego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium  $J_p$  dla macierzy wag w wariancie 3



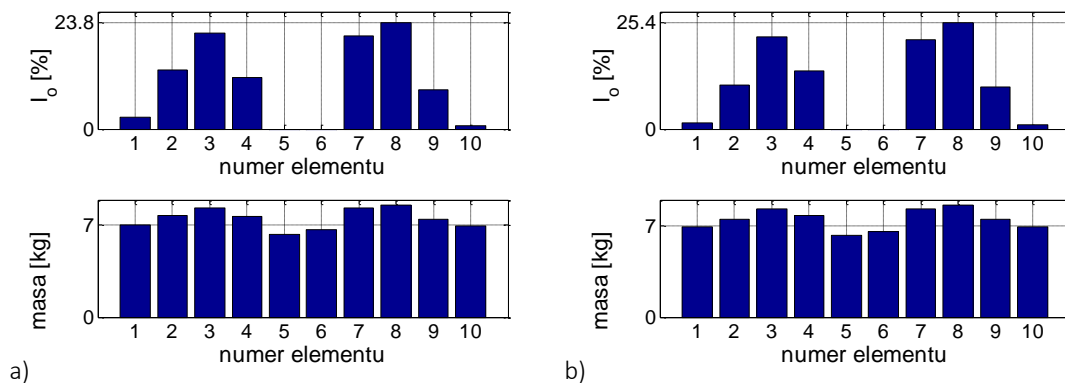
Rysunek 5.3 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu trzeciego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium  $J_p$  dla macierzy wag w wariancie 4



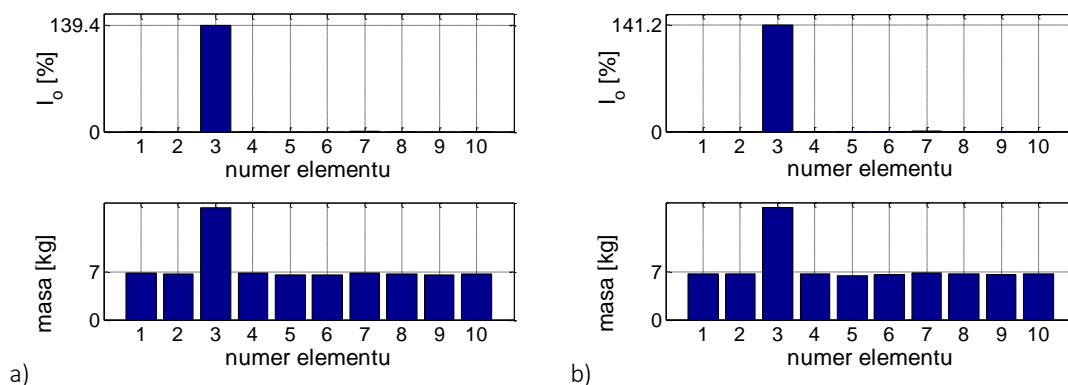
Rysunek 5.4 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu trzeciego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium  $f_{\Delta}$  dla macierzy wag w wariancie 3



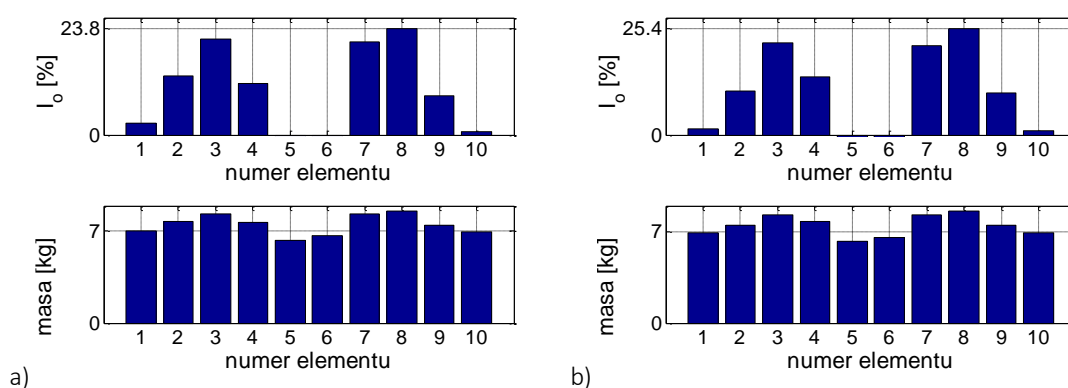
Rysunek 5.5 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu trzeciego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium  $f_{\Delta}$  dla macierzy wag w wariancie 4



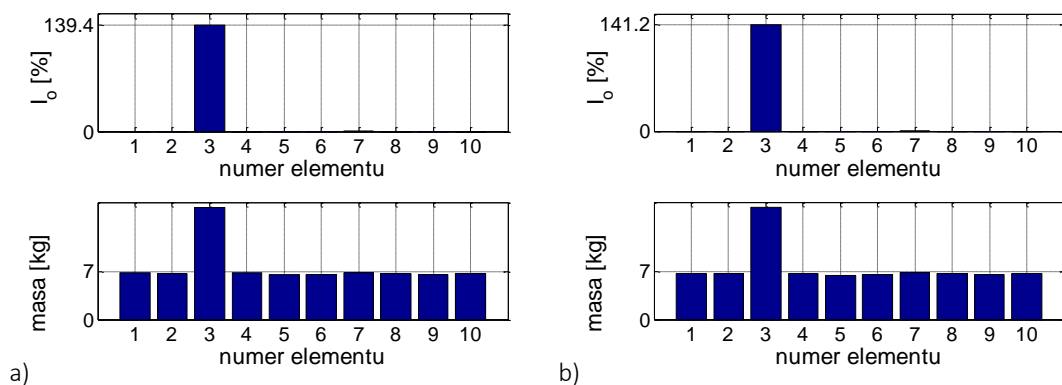
Rysunek 5.6 Indeks  $I_o$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu trzeciego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 3



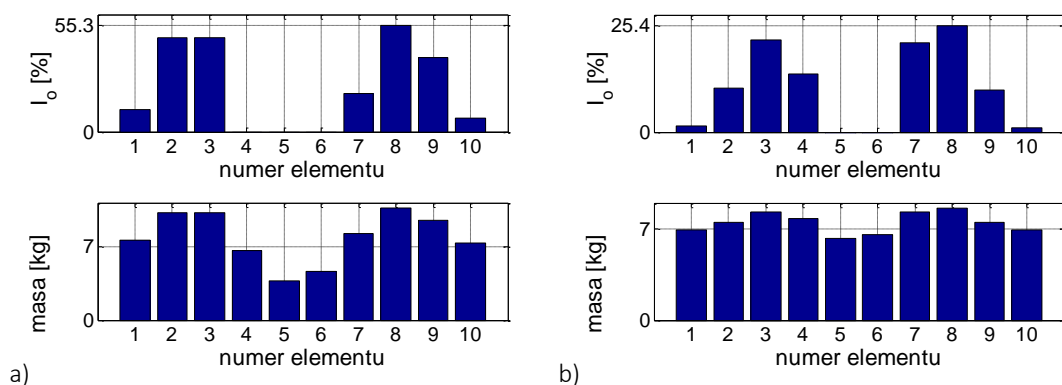
Rysunek 5.7 Indeks  $I_o$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu trzeciego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4



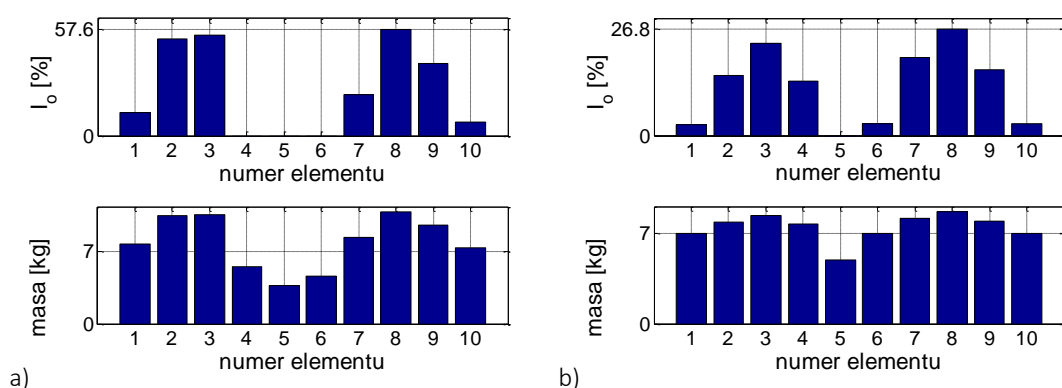
Rysunek 5.8 Indeks  $I_o$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu trzeciego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium NMD2 dla macierzy wag w wariancie 3



Rysunek 5.9 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu trzeciego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium NMD2 dla macierzy wag w wariancie 4



Rysunek 5.10 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu trzeciego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium NMD1 dla macierzy wag w wariancie 3



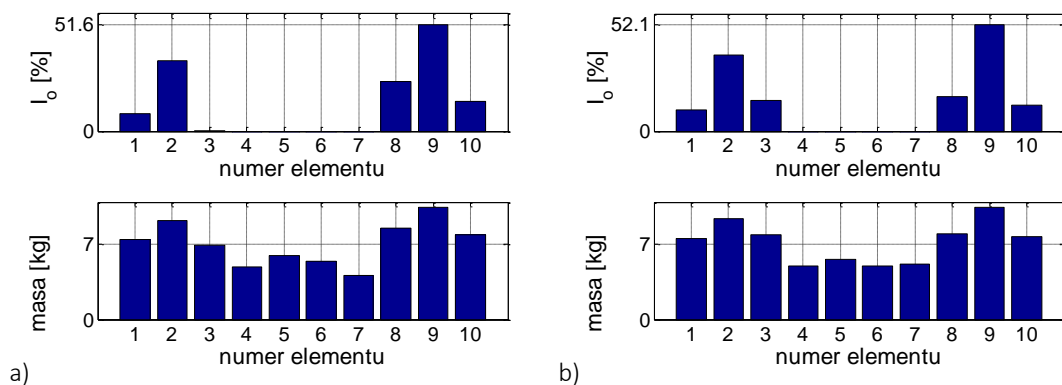
Rysunek 5.11 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu trzeciego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium NMD1 dla macierzy wag w wariancie 4

Tabela 5.1 Zestawienie wyników aktualizacji parametrów belki z uszkodzeniem elementu 3 o symbolu 2 w zależności od definicji macierzy wag i kryterium wyboru wyniku przy wzbudniku umieszczonym w elemencie 6

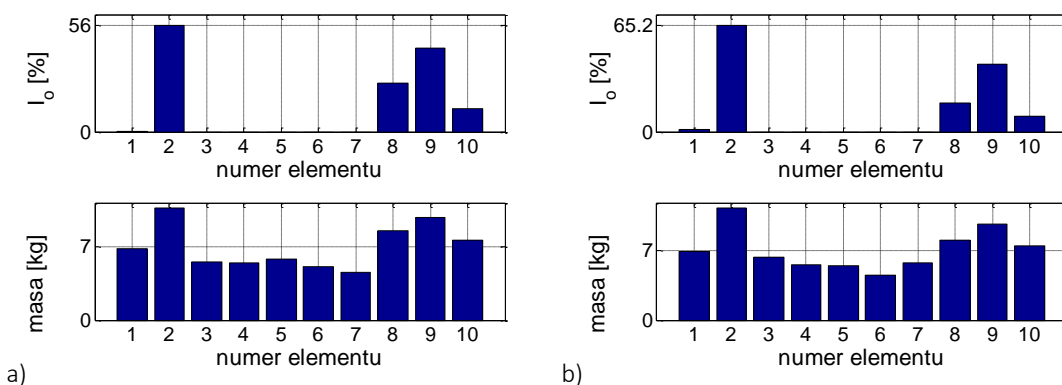
DANE									
Uszkodzenie		Pole wzbudnik	f [Hz]			NMD [%]			Pomiar
Element	Symbol		1	2	3	1	2	3	
3	2	6	13,90	43,22	108,28	7,44	25,95	17,69	148
AKTUALIZACJA									
Kryterium	Macierz wag	Jp	f [Hz]			NMD [%]			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	
Jp	3	8,87*10 <sup>6</sup>	12,33	43,32	108,28	6,58	28,06	23,78	NIE
	4	9,30*10 <sup>6</sup>	12,42	43,35	108,27	6,54	30,29	24,62	NIE
f <sub>Δ</sub>	3	8,87*10 <sup>6</sup>	12,33	43,32	108,28	6,58	28,06	23,78	NIE
	4	9,30*10 <sup>6</sup>	12,42	43,35	108,27	6,54	30,29	24,62	NIE
NMD3	3	2,13*10 <sup>8</sup>	11,95	46,31	108,22	6,65	25,71	14,27	NIE
	4	6,12*10 <sup>7</sup>	11,73	44,86	108,03	7,13	9,81	5,02	TAK
NMD2	3	2,13*10 <sup>8</sup>	11,95	46,31	108,22	6,65	25,71	14,27	NIE
	4	6,12*10 <sup>7</sup>	11,73	44,86	108,03	7,13	9,81	5,02	TAK
NMD1	3	8,87*10 <sup>6</sup>	12,33	43,32	108,28	6,58	28,06	23,78	NIE
	4	9,30*10 <sup>6</sup>	13,90	43,22	108,28	6,54	30,29	24,62	NIE

Tabela 5.2 Zestawienie wyników aktualizacji parametrów belki z uszkodzeniem elementu 3 o symbolu 2 w zależności od definicji macierzy wag i kryterium wyboru wyniku przy wzbudniku umieszczonym w elemencie 8

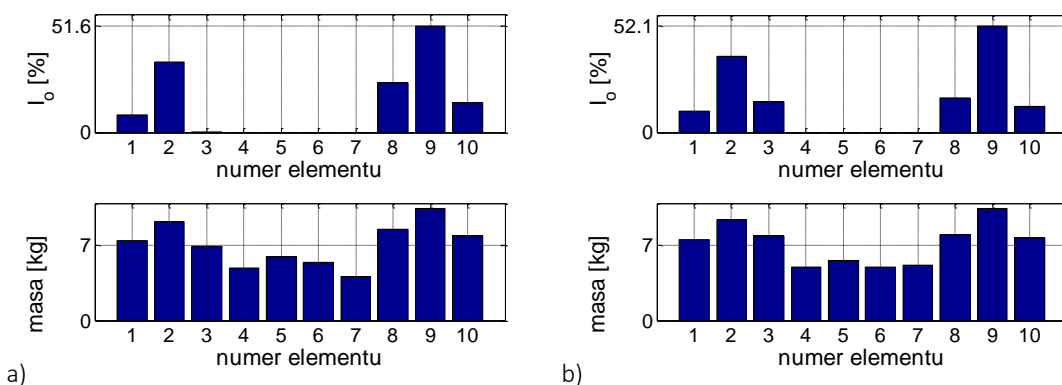
DANE									
Uszkodzenie		Pole wzbudnik	f [Hz]			NMD [%]			Pomiar
Element	Symbol		1	2	3	1	2	3	
3	2	8	13,58	42,97	108,41	1,32	18,71	17,96	48
AKTUALIZACJA									
Kryterium	Macierz wag	Jp	f [Hz]			NMD [%]			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	
Jp	3	8,09*10 <sup>6</sup>	12,16	43,07	108,41	1,30	23,25	26,72	NIE
	4	7,40*10 <sup>6</sup>	11,98	43,06	108,41	1,47	18,21	26,05	NIE
f <sub>Δ</sub>	3	8,09*10 <sup>6</sup>	12,16	43,07	108,41	1,30	23,25	26,72	NIE
	4	7,40*10 <sup>6</sup>	11,98	43,06	108,41	1,47	18,21	26,05	NIE
NMD3	3	2,30*10 <sup>8</sup>	11,93	46,20	108,34	1,27	20,42	16,40	NIE
	4	7,50*10 <sup>7</sup>	11,72	44,83	108,13	2,40	1,47	5,74	TAK
NMD2	3	2,30*10 <sup>8</sup>	11,93	46,20	108,34	1,27	20,42	16,40	NIE
	4	7,50*10 <sup>7</sup>	11,72	44,83	108,13	2,40	1,47	5,74	TAK
NMD1	3	2,30*10 <sup>8</sup>	11,93	46,20	108,34	1,27	20,42	16,40	NIE
	4	2,21*10 <sup>8</sup>	12,04	45,94	108,40	1,22	22,01	15,64	NIE



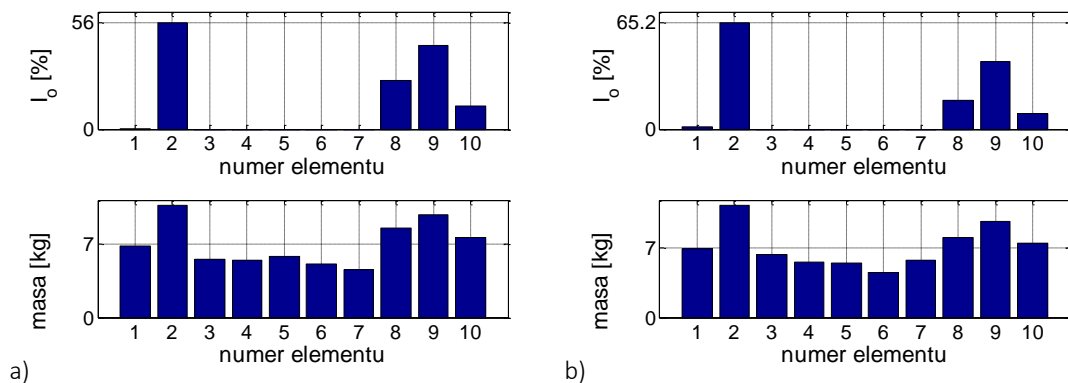
Rysunek 5.12 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu piątego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium  $J_p$  dla macierzy wag w wariancie 3



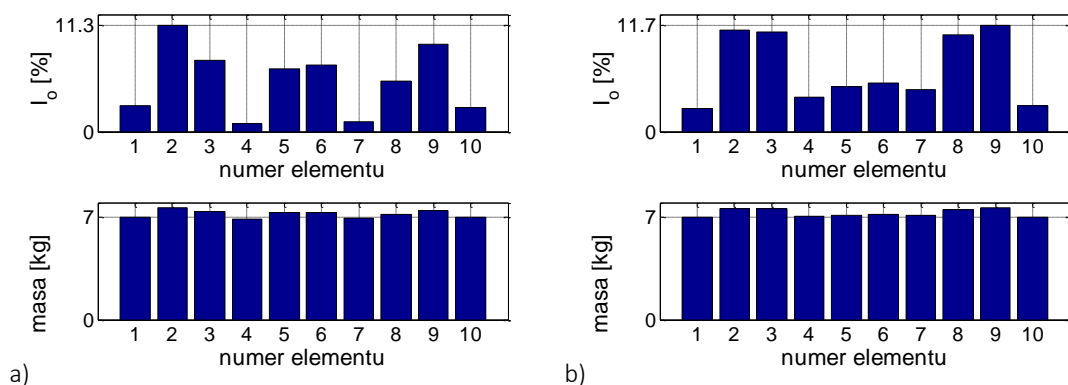
Rysunek 5.13 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu piątego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium  $J_p$  dla macierzy wag w wariancie 4



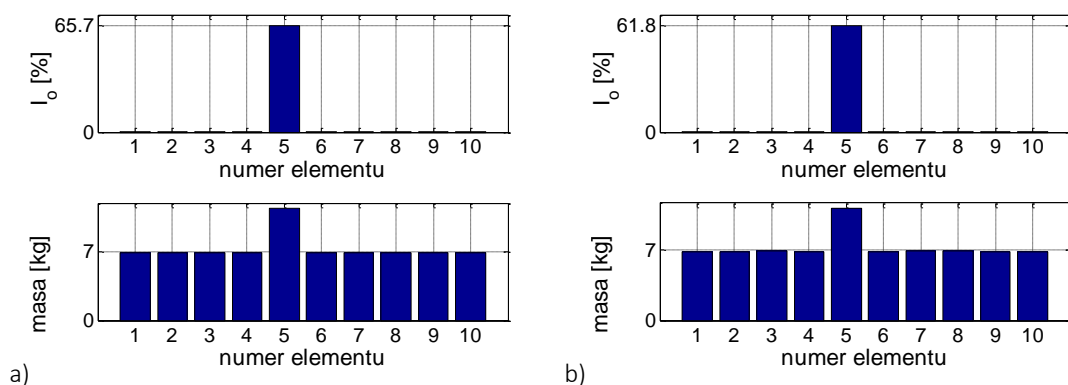
Rysunek 5.14 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu piątego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium  $f_d$  dla macierzy wag w wariancie 3



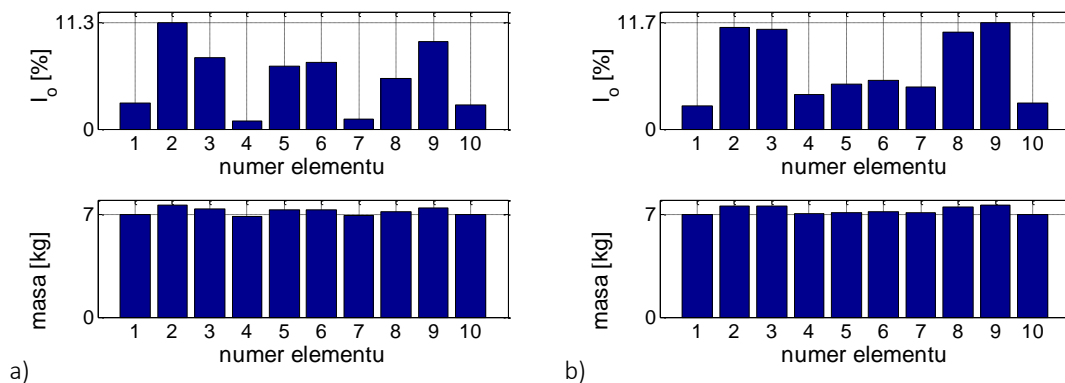
Rysunek 5.15 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu piątego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium  $f_{\Delta}$  dla macierzy wag w wariancie 4



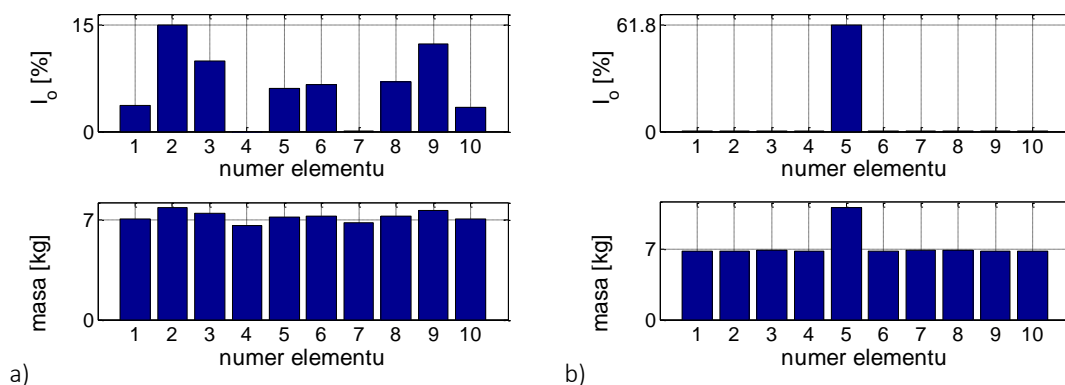
Rysunek 5.16 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu piątego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 3



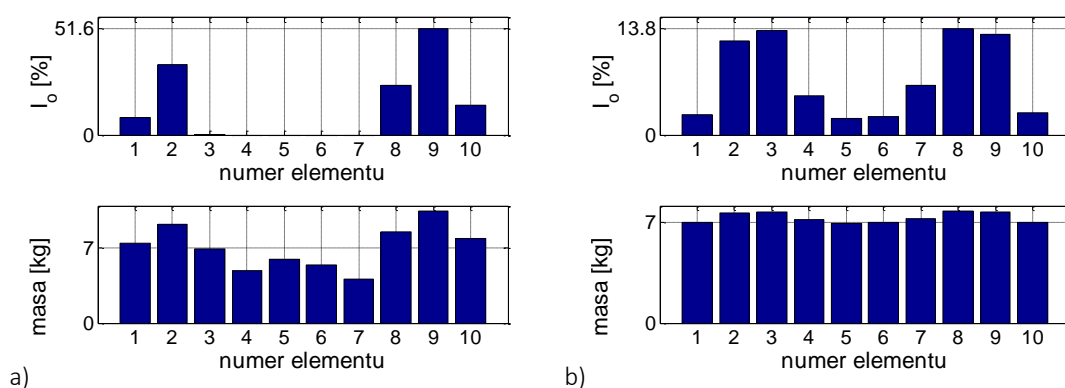
Rysunek 5.17 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu piątego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4



Rysunek 5.18 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu piątego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium NMD2 dla macierzy wag w wariancie 3.

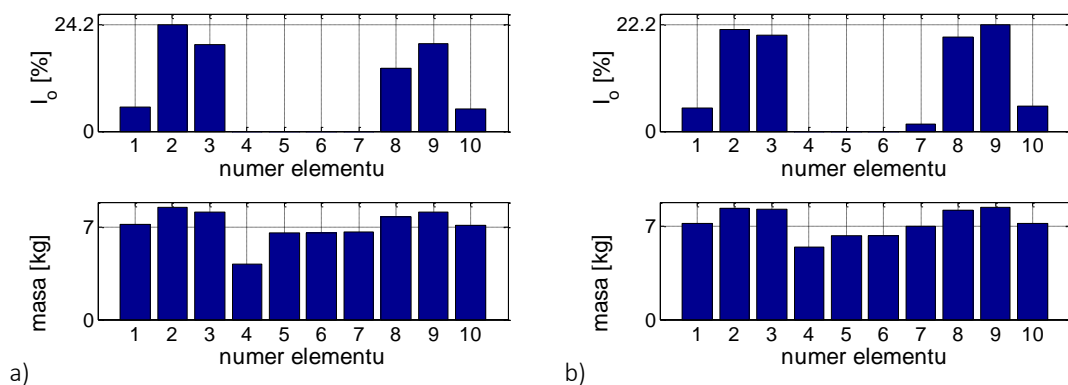


Rysunek 5.19 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu piątego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium NMD2 dla macierzy wag w wariancie 4



Rysunek 5.20 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu piątego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium NMD1 dla macierzy wag w wariancie 3





Rysunek 5.21 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu piątego o symbolu 2 i wzbudniku umieszczonym w elemencie a) 6 b) 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium NMD1 dla macierzy wag w wariancie 4

Tabela 5.3 Zestawienie wyników aktualizacji belki z uszkodzeniem elementu 5 o symbolu 2 w zależności od definicji macierzy wag i kryterium wyboru wyniku przy wzbudniku umieszczonym w elemencie 6

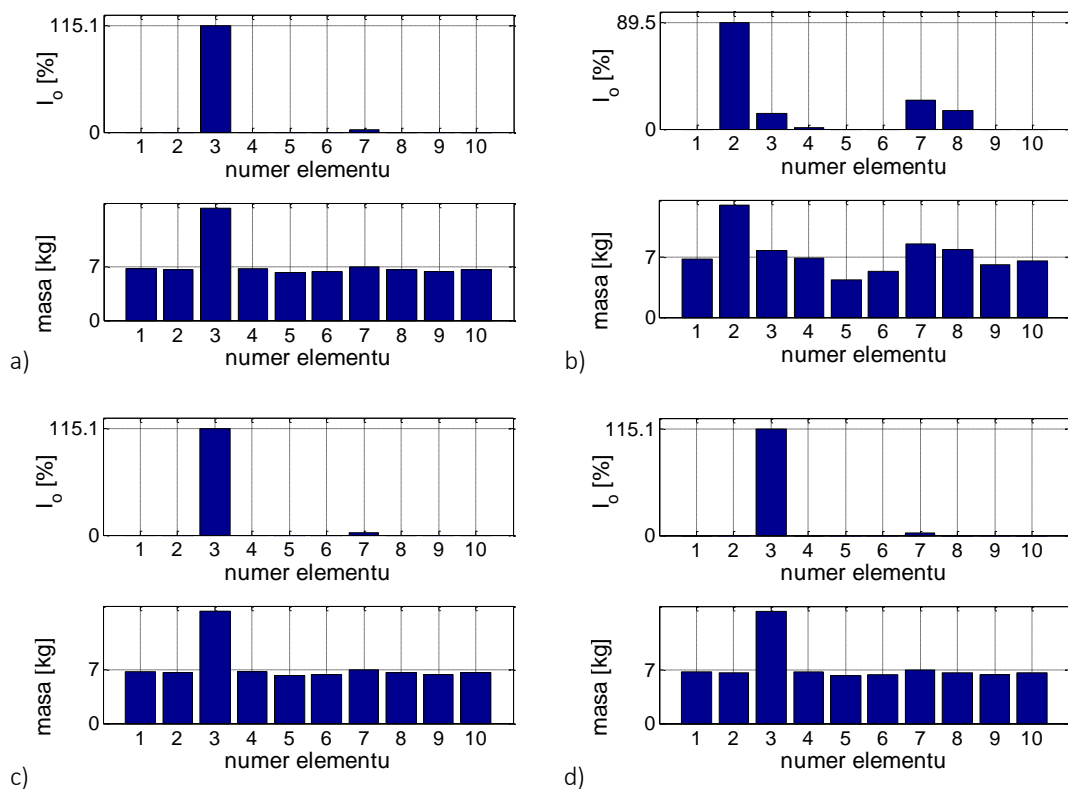
DANE									
Uszkodzenie		Pole wzbudnik	f [Hz]			NMD [%]			Pomiar
Element	Symbol		1	2	3	1	2	3	
5	2	6	13,20	48,12	107,40	1,62	9,31	22,08	86
AKTUALIZACJA									
Kryterium	Macierz wag	Jp	f [Hz]			NMD [%]			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	
Jp	3	0,16*10 <sup>0</sup>	13,20	48,12	107,40	1,59	9,97	38,03	NIE
	4	0,16*10 <sup>0</sup>	13,20	48,12	107,40	1,57	9,81	38,87	NIE
f <sub>Δ</sub>	3	0,16*10 <sup>0</sup>	13,20	48,12	107,40	1,59	9,97	38,03	NIE
	4	0,16*10 <sup>0</sup>	13,20	48,12	107,40	1,57	9,81	38,87	NIE
NMD3	3	2,33*10 <sup>8</sup>	12,14	48,38	108,12	1,62	8,43	22,35	NIE
	4	2,69*10 <sup>8</sup>	11,72	49,41	107,38	1,73	10,13	12,19	TAK
NMD2	3	2,33*10 <sup>8</sup>	12,14	48,38	108,12	1,62	8,43	22,35	NIE
	4	4,08*10 <sup>6</sup>	12,15	48,14	107,41	1,62	8,40	23,54	NIE
NMD1	3	0,16*10 <sup>0</sup>	13,20	48,12	107,40	1,59	9,97	38,03	NIE
	4	1,13*10 <sup>6</sup>	12,62	48,14	107,40	1,47	8,73	31,74	NIE

Tabela 5.4 Zestawienie wyników aktualizacji belki z uszkodzeniem elementu 5 o symbolu 2 w zależności od definicji macierzy wag i kryterium wyboru wyniku przy wzbudniku umieszczonym w elemencie 8

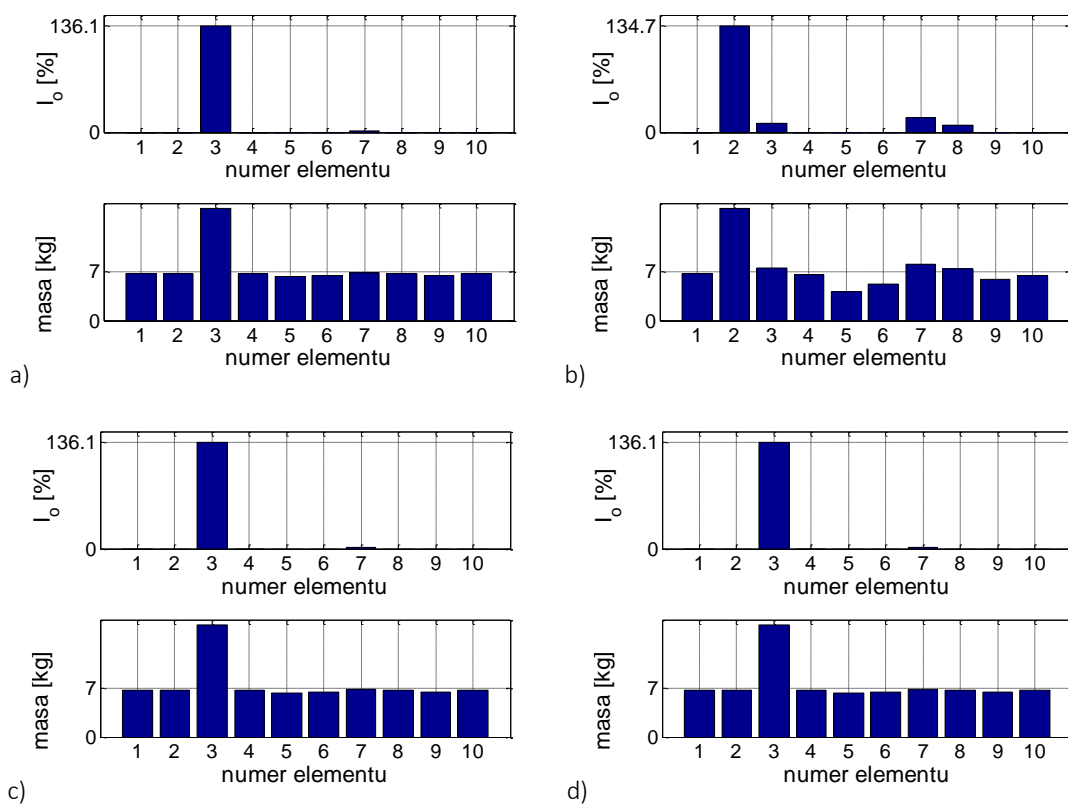
DANE									
Uszkodzenie		Pole wzbudnik	f [Hz]			NMD [%]			Pomiar
Element	Symbol		1	2	3	1	2	3	
5	2	8	13,10	47,32	107,66	2,62	6,98	27,48	82-84
AKTUALIZACJA									
Kryterium	Macierz wag	J <sub>p</sub>	f [Hz]			NMD [%]			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	
J <sub>p</sub>	3	0,24*10 <sup>0</sup>	13,10	47,32	107,66	2,68	7,97	51,01	NIE
	4	0,22*10 <sup>0</sup>	13,10	47,32	107,66	2,67	8,22	51,89	NIE
f <sub>Δ</sub>	3	0,24*10 <sup>0</sup>	13,10	47,32	107,66	2,68	7,97	51,01	NIE
	4	0,22*10 <sup>0</sup>	13,10	47,32	107,66	2,67	8,22	51,89	NIE
NMD3	3	3,21*10 <sup>7</sup>	12,06	47,78	107,71	2,61	7,07	28,35	NIE
	4	6,74*10 <sup>6</sup>	11,76	49,43	107,61	2,75	5,25	17,25	TAK
NMD2	3	3,21*10 <sup>7</sup>	12,06	47,78	107,71	2,61	7,07	28,35	NIE
	4	6,74*10 <sup>6</sup>	11,76	49,43	107,61	2,75	5,25	17,25	TAK
NMD1	3	4,86*10 <sup>6</sup>	12,06	47,41	107,66	2,61	7,16	29,91	NIE
	4	1,31*10 <sup>6</sup>	12,46	47,33	107,66	2,51	9,40	38,03	NIE

Analogiczna analiza została przeprowadzona dla uszkodzenia elementów o numerach 3 i 5 o symbolu 4. Użyto postaci i częstotliwości drgań własnych otrzymanych z pomiarów, w których wzbudnik umieszczony był w elemencie 6 i 8 oraz macierzy wag w wariancie 4. W przypadku uszkodzenia elementu 3 poprawną lokalizację miejsca uszkodzenia otrzymano przy użyciu kryterium J<sub>p</sub>, NMD3 i NMD2 (rysunki 5.22-5.23). Przy uszkodzeniu elementu numer 5 o symbolu 4, jedynie użycie kryterium NMD3 pozwala na poprawną detekcję lokalizacji uszkodzonego elementu (rysunki 5.24-5.25).

Zestawione na rysunkach 5.22-5.25 wykresy oraz wyniki zawarte w tabelach 5.5-5.8 wskazują, że jedynie użycie kryterium NMD3 daje gwarancję uzyskania poprawnych wyników aktualizacji parametrów, bez względu na miejsce uszkodzenia. Analizując zaprezentowane wyniki aktualizacji parametrów (tabele 5.5-5.8) można stwierdzić, że obniżenie wartości kryterium NMD, dla 2 i 3 postaci drgań własnych, daje możliwość poprawnej detekcji lokalizacji uszkodzenia. Dla wszystkich przedstawionych przypadków, gdy wartości kryterium NMD dla 2 i 3 postaci drgań własnych wzrastały, bądź tylko nieznacznie spadały, wynik aktualizacji parametrów był nieprawidłowy.



Rysunek 5.22 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu trzeciego o symbolu 4 i wzбудniku umieszczonym w elemencie 6 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium a)  $J_p$  b)  $f_{\Delta}$  c) NMD3 d) NMD2 dla macierzy wag w wariancie 4.



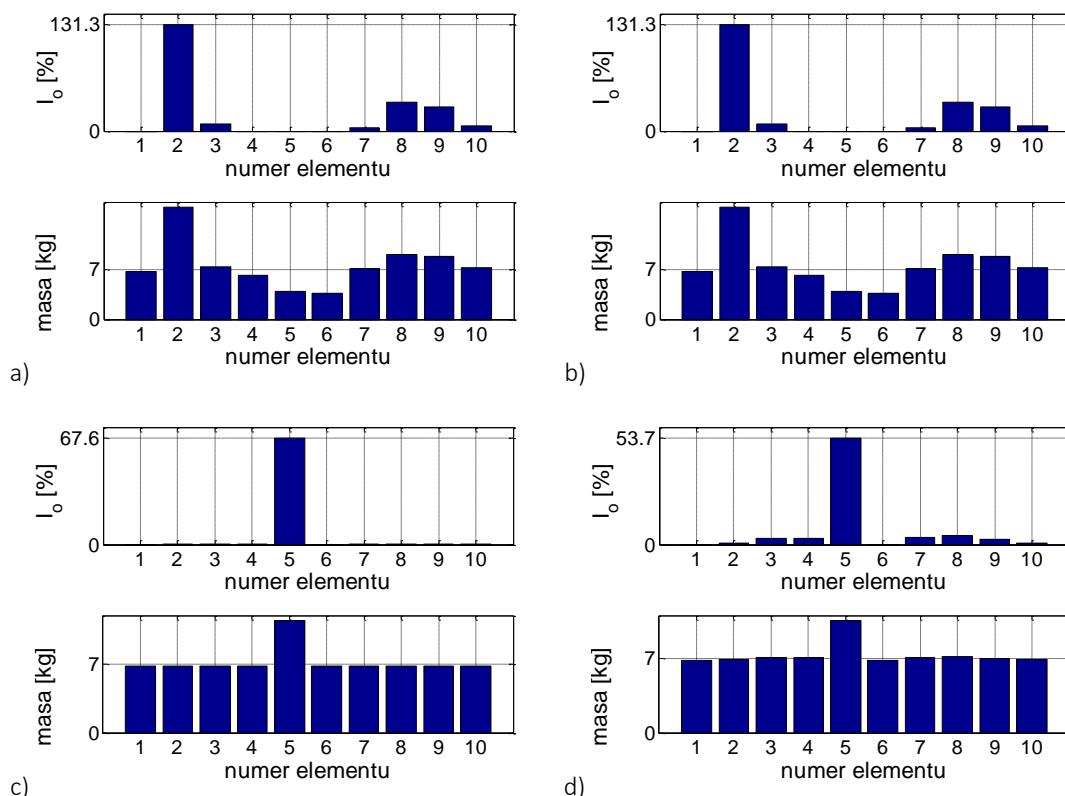
Rysunek 5.23 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu trzeciego o symbolu 4 i wzбудniku umieszczonym w elemencie 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium a)  $J_p$  b)  $f_{\Delta}$  c) NMD3 d) NMD2 dla macierzy wag w wariancie 4.

Tabela 5.5 Zestawienie wyników aktualizacji belki z uszkodzeniem elementu 3 o symbolu 4 w zależności od kryterium wyboru wyniku dla macierzy wag w wariancie 4 przy wzbudniku umieszczonym w elemencie 6

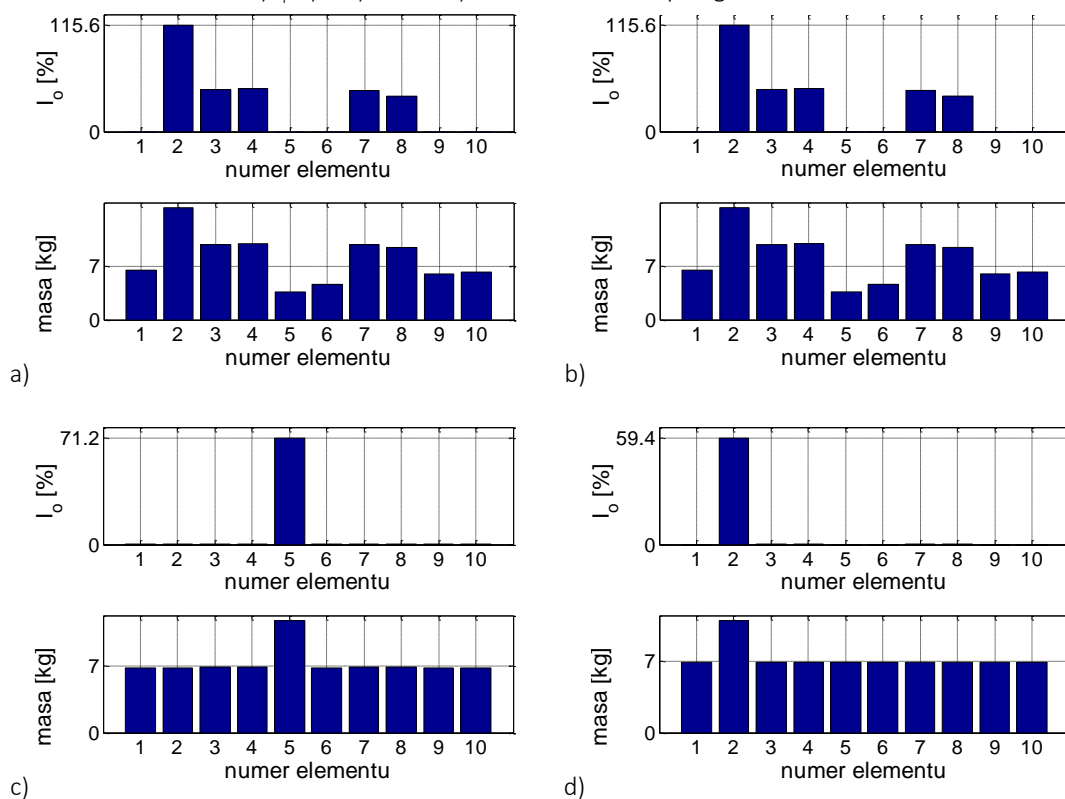
DANE									
Uszkodzenie		Pole wzbudnik	f [Hz]			NMD [%]			Pomiar
Element	Symbol		1	2	3	1	2	3	
3	4	6	13,48	42,11	110,48	1,23	42,68	29,09	139
AKTUALIZACJA									
Kryterium	Macierz wag	Jp	f [Hz]			NMD [%]			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	
J <sub>p</sub>	4	2,63*10 <sup>8</sup>	11,95	45,73	109,99	0,81	24,39	12,94	TAK
f <sub>Δ</sub>	4	3,13*10 <sup>8</sup>	12,52	45,86	110,29	1,14	37,57	16,42	NIE
NMD3	4	2,63*10 <sup>8</sup>	11,95	45,73	109,99	0,81	24,39	12,94	TAK
NMD2	4	2,63*10 <sup>8</sup>	11,95	45,73	109,99	0,81	24,39	12,94	TAK
NMD1	4	2,63*10 <sup>8</sup>	11,95	45,73	109,99	0,81	24,39	12,94	TAK

Tabela 5.6 Zestawienie wyników aktualizacji belki z uszkodzeniem elementu 3 o symbolu 4 w zależności od kryterium wyboru wyniku dla macierzy wag w wariancie 4 przy wzbudniku umieszczonym w elemencie 8

DANE									
Uszkodzenie		Pole wzbudnik	f [Hz]			NMD [%]			Pomiar
Element	Symbol		1	2	3	1	2	3	
3	4	8	13,50	42,02	109,12	2,24	40,38	30,22	21-22
AKTUALIZACJA									
Kryterium	Macierz wag	Jp	f [Hz]			NMD [%]			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	
J <sub>p</sub>	4	2,38*10 <sup>8</sup>	11,79	45,03	108,75	3,21	19,86	11,54	TAK
f <sub>Δ</sub>	4	3,32*10 <sup>8</sup>	12,61	45,37	108,94	2,64	29,52	19,32	NIE
NMD3	4	2,38*10 <sup>8</sup>	11,79	45,03	108,75	3,21	19,86	11,54	TAK
NMD2	4	2,38*10 <sup>8</sup>	11,79	45,03	108,75	3,21	19,86	11,54	TAK
NMD1	4	7,01*10 <sup>8</sup>	12,10	48,67	109,16	2,21	40,41	29,85	NIE



Rysunek 5.24 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu piątego o symbolu 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium a)  $J_p$  b)  $f_{\Delta}$  c) NMD3 d) NMD2 dla macierzy wag w wariancie 4.



Rysunek 5.25 Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki przy uszkodzeniu elementu piątego o symbolu 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 przy wyborze z tabeli wynikowej wyniku spełniającego kryterium a)  $J_p$  b)  $f_{\Delta}$  c) NMD3 d) NMD2 dla macierzy wag w wariancie 4.

Tabela 5.7 Zestawienie wyników aktualizacji belki z uszkodzeniem elementu 5 o symbolu 4 w zależności od kryterium wyboru wyniku dla macierzy wag w wariancie 4 przy wzbudniku umieszczonym w elemencie 6

DANE									
Uszkodzenie		Pole wzbudnik	f [Hz]			NMD [%]			Pomiar
Element	Symbol		1	2	3	1	2	3	
5	4	6	12,87	44,13	107,40	1,64	16,14	37,60	100
AKTUALIZACJA									
Kryterium	Macierz wag	Jp	f [Hz]			NMD [%]			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	
J <sub>p</sub>	4	0,73*10 <sup>0</sup>	12,87	44,13	107,39	2,06	16,18	84,46	NIE
f <sub>Δ</sub>	4	0,73*10 <sup>0</sup>	12,87	44,13	107,39	2,06	16,18	84,46	NIE
NMD3	4	3,82*10 <sup>8</sup>	11,70	49,40	107,26	1,63	13,25	25,10	TAK
NMD2	4	3,23*10 <sup>8</sup>	11,74	48,77	107,28	1,62	13,20	27,78	TAK
NMD1	4	1,47*10 <sup>8</sup>	11,79	46,57	107,34	1,61	13,82	38,24	NIE

Tabela 5.8 Zestawienie wyników aktualizacji belki z uszkodzeniem elementu 5 o symbolu 4 w zależności od kryterium wyboru wyniku dla macierzy wag w wariancie 4 przy wzbudniku umieszczonym w elemencie 8

DANE									
Uszkodzenie		Pole wzbudnik	f [Hz]			NMD [%]			Pomiar
Element	Symbol		1	2	3	1	2	3	
5	4	8	12,38	42,09	107,16	1,57	17,22	38,64	71
AKTUALIZACJA									
Kryterium	Macierz wag	Jp	f [Hz]			NMD [%]			Detekcja
			1	2	3	1	2	3	
J <sub>p</sub>	4	5,68*10 <sup>6</sup>	11,74	42,22	107,15	2,11	14,39	73,39	NIE
f <sub>Δ</sub>	4	5,68*10 <sup>6</sup>	11,74	42,22	107,15	2,11	14,39	73,39	NIE
NMD3	4	6,94*10 <sup>8</sup>	11,66	49,38	107,04	1,57	15,40	25,69	TAK
NMD2	4	4,44*10 <sup>8</sup>	12,30	47,97	106,83	1,17	13,46	47,84	NIE
NMD1	4	6,83*10 <sup>8</sup>	11,67	49,29	107,05	1,57	15,37	26,14	TAK

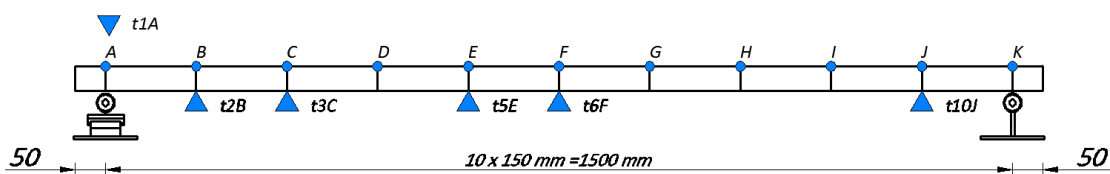
Analiza zaprezentowanych wyników aktualizacji parametrów pozwala na sformułowanie wniosku, że postępowanie się zaproponowaną macierzą wag w wariancie 4, z autorską modyfikacją blokową jest najkorzystniejsze. Wprowadzenie jej pozwoliło na otrzymanie prawidłowych wyników aktualizacji parametrów na podstawie danych eksperymentalnych. W przypadku stosowania macierzy wag w wariancie 3 otrzymane wyniki aktualizacji nie wskazywały wyraźnie żadnego konkretnego uszkodzonego elementu i dawały nieprawdziwy obraz zamiany masy elementów.

Definiowanie macierzy wag według wariantu 3 i 4 prowadzi w konsekwencji do otrzymania w wyniku aktualizacji parametrów nie jednego rozwiązania, a zbioru rozwiązań. Zbiór ten może

zwierać rozwiązania rzeczywiste, tzn. takie które mogą występować w konstrukcji inżynierskiej, oraz takie, które z uwagi na przykład na ujemną sztywność lub masę elementów, nie mogą opisywać istniejącej konstrukcji inżynierskiej. W celu usunięcia z tabeli wynikowej rozwiązań, które nie mogą występować w rzeczywistych konstrukcjach inżynierskich, dokonywano jej wstępnego porządkowania. Kolejnym etapem było wprowadzenie kryteriów porządkowania wyników, które pozwoliło na wybór jednego rozwiązania z tabeli. Przeprowadzone analizy pozwalają stwierdzić, że w przedstawionych powyżej przypadkach stosowanie kryterium najmniejszej funkcji kary  $J_p$ , bądź kryterium najmniejszej różnicy częstotliwości  $f_\Delta$  pomiędzy wartościami pomierzonymi, a zaktualizowanymi, nie daje zadowalających wyników aktualizacji parametrów w większości przypadków. Wprowadzenie kryterium bazującego na najmniejszych wartościach kryterium NMD pozwala uzyskać poprawne wyniki aktualizacji parametrów. Należy jednak zwrócić uwagę, że jedynie dla dwóch kryteriów: NMD3 oraz NMD2 rezultaty są zadowalające. Zdecydowanie najlepsze wyniki aktualizacji parametrów otrzymano dla kryterium NMD3, które pozwalało na porównanie po procedurze aktualizacji parametrów, wszystkich 3 postaci drgań własnych. W tym przypadku poprawność uzyskanych wyników aktualizacji parametrów dla różnych zestawów danych wyniosła 100%. Zdecydowanie gorsze wyniki aktualizacji parametrów uzyskano w przypadku stosowania kryterium NMD1. Na tej podstawie można wnioskować, że informacje pochodzące jedynie z pierwszej postaci drgań własnych, nie są wystarczające do przeprowadzania poprawnego procesu aktualizacji parametrów i poprawnej detekcji uszkodzenia dla przedstawionego przypadku belki swobodnie podpartej.

## 5.2 Aktualizacja parametrów projektowych na podstawie 6 translacyjnych stopni swobody

Aktualizację parametrów projektowych w kolejnym etapie, przeprowadzono dla masy  $m_i$  wszystkich elementów modelu MES belki redukując liczbę translacyjnych stopni swobody do sześciu (rysunek 5.26). Uszkodzenie belki symulowane było przez dodanie masy skupionej o symbolu 2, 4 lub 6 w elemencie 3 lub 5. W obliczeniach posługiwano się macierzą wag w wariancie 4, a tabelę wynikową porządkowano korzystając z kryterium NMD3.



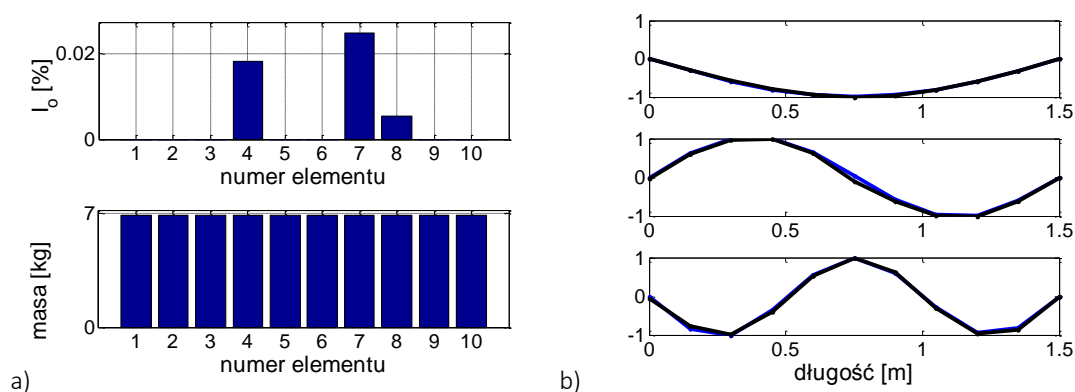
Rysunek 5.26 Rozmieszczenie punktów pomiarowych przyspieszeń (akcelerometrów) użytych do procedury aktualizacji parametrów

Na rysunkach 5.27-5.40 przedstawiono wartości indeksu wektorowego  $I_o$  oraz zmiany masy belki wraz z pierwszymi trzema postaciami drgań własnych. Translacyjne postacie drgań własnych uzyskane na podstawie badań eksperymentalnych oznaczono kolorem czarnym, natomiast postacie drgań własnych uzyskane dla modelu numerycznego po aktualizacji parametrów kolorem niebieskim. W tabeli 5.9 zestawiono wartości bazowych indeksów bezwzględnych oraz kryterium NMD dla poszczególnych przypadków uszkodzeń.

W przypadku belki bez uszkodzenia, maksymalna wartość indeksu wektorowego  $I_o$  jest mniejsza od 0,2%. Jest to równoznaczne z bardzo małą zmianą parametrów projektowych w analizowanym przypadku, czemu odpowiadają bardzo niskie wartości wszystkich indeksów zestawionych w tabeli 5.9. Potwierdza to otrzymanie poprawnych wyników aktualizacji parametrów w przypadku belki bez uszkodzenia.

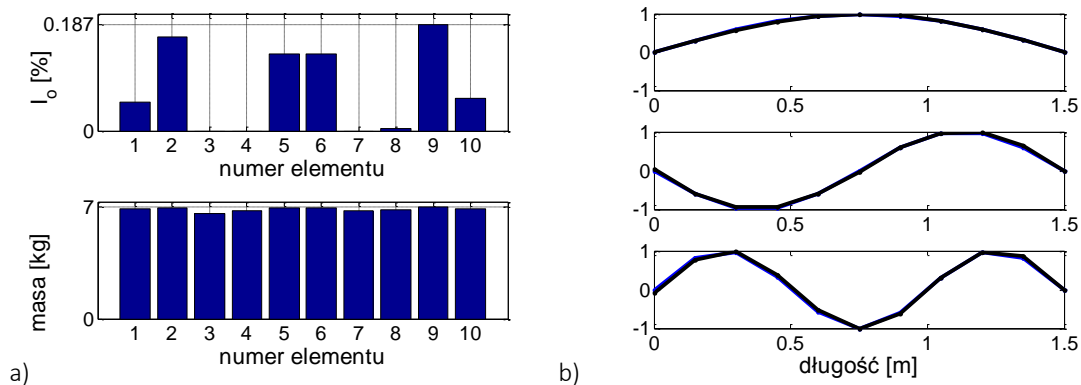
W przypadku uszkodzenia elementu numer 3 o symbolu 2 i 4 ( rysunki 5.28-5.32), wyniki aktualizacji parametrów poprawnie wskazują lokalizację uszkodzenia. Zestawione w tabeli 5.9 indeksy bazowe osiągają wysokie wartości. Przy uszkodzeniu elementu numer 3 o symbolu 6 (rysunki 5.33-5.34) wynik aktualizacji parametrów tylko w jednym przypadku poprawnie wskazuje miejsce uszkodzenia. Wartości indeksów bazowych osiągają jednak znacznie mniejsze wartości, sugerując uszkodzenia również w innych elementach. W przypadku uszkodzenia elementu numer 5, bez względu na symbol uszkodzenia, uzyskujemy poprawny wynik aktualizacji parametrów. Również wszystkie indeksy bazowe (tabela 5.9) osiągają bardzo duże wartości, jednoznacznie potwierdzając uszkodzenie tylko jednego elementu.

W zaprezentowanych przypadkach, oszacowane wartości uszkodzeń są mniejsze od założonych w badaniach eksperymentalnych i wahają się w zakresie od 6-91%.

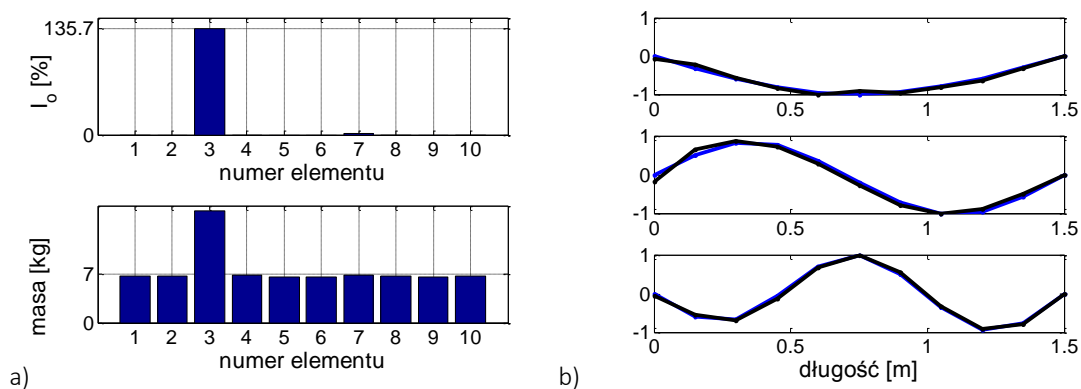


Rysunek 5.27 a) Indeks  $I_o$  oraz zmiana masy elementów belki nieuszkodzonej przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6  
b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)

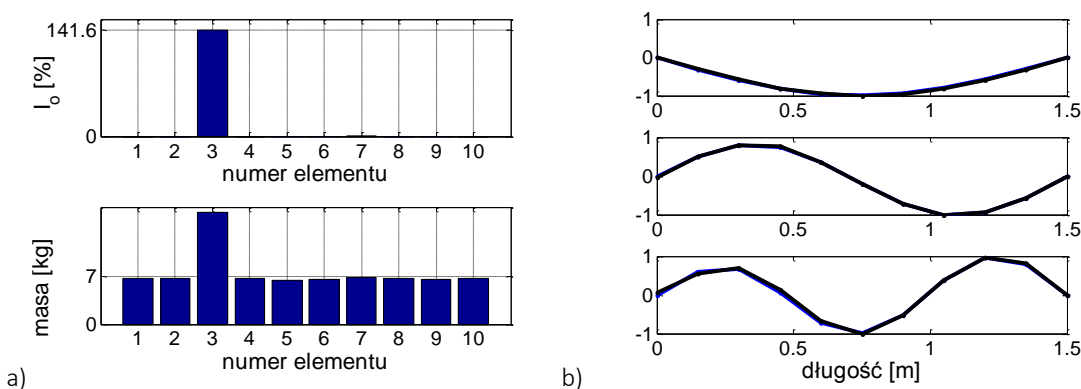




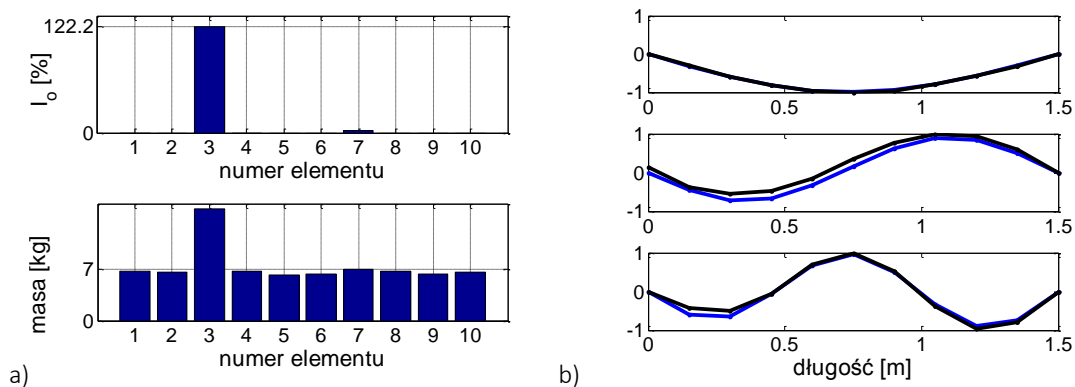
Rysunek 5.28 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki nieuszkodzonej przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



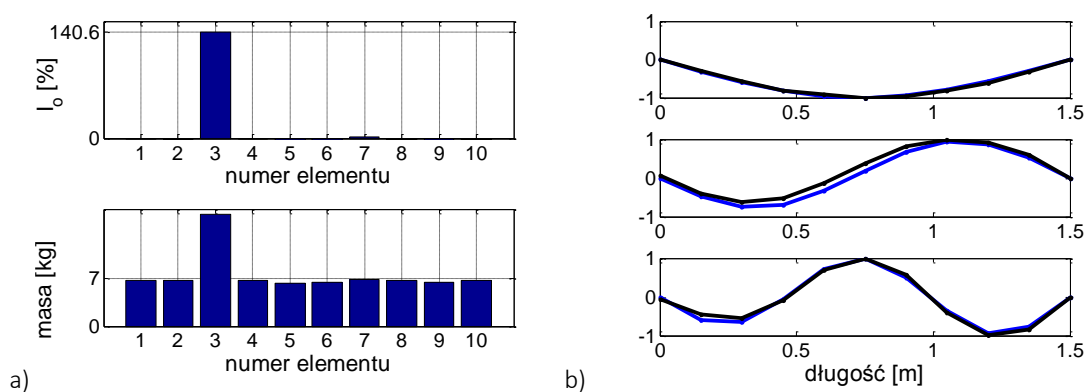
Rysunek 5.29 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 2 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



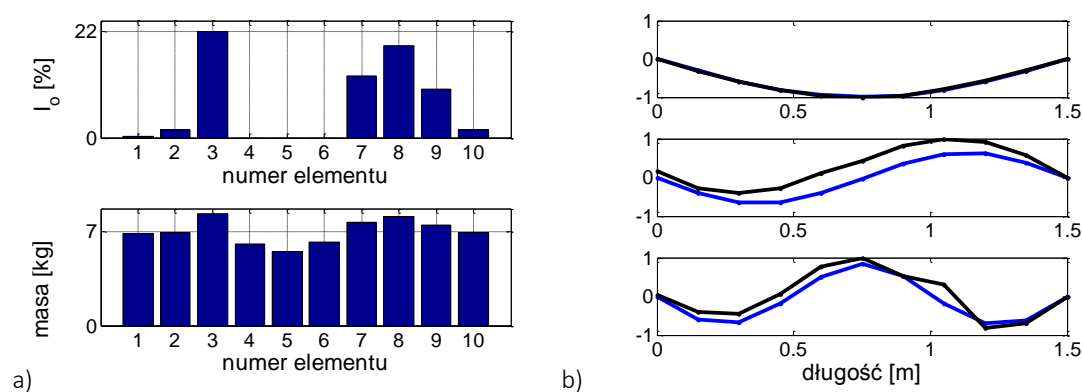
Rysunek 5.30 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 2 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



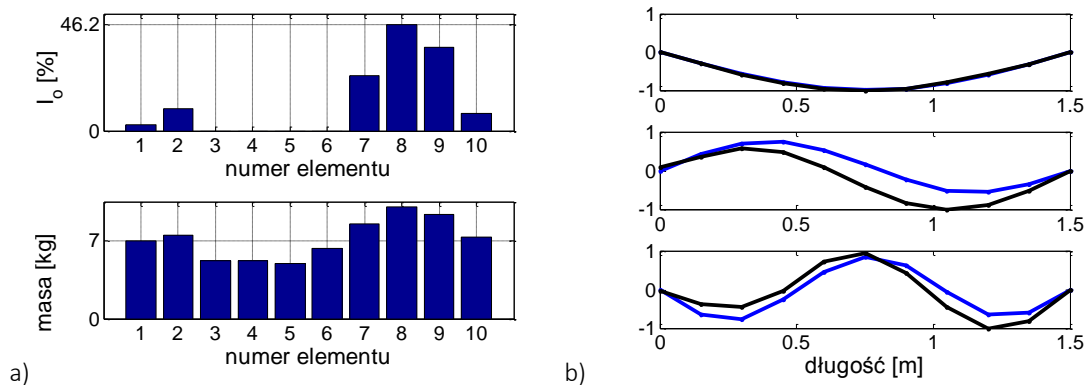
Rysunek 5.31 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 4 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



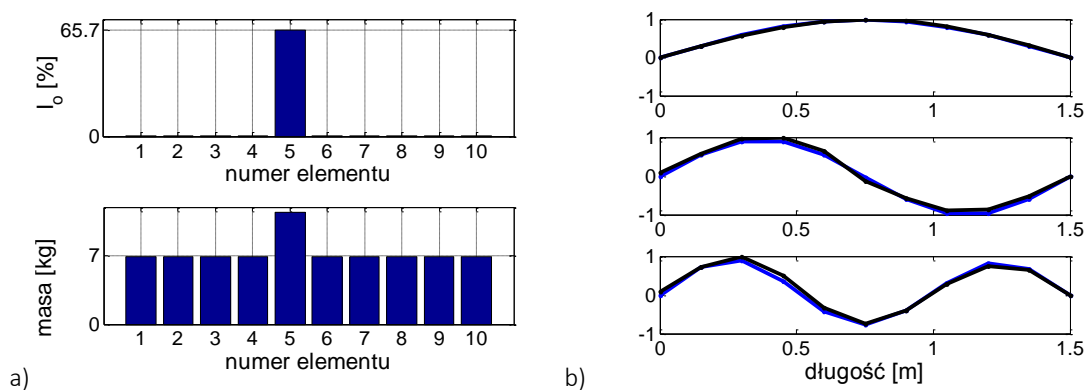
Rysunek 5.32 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 4 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



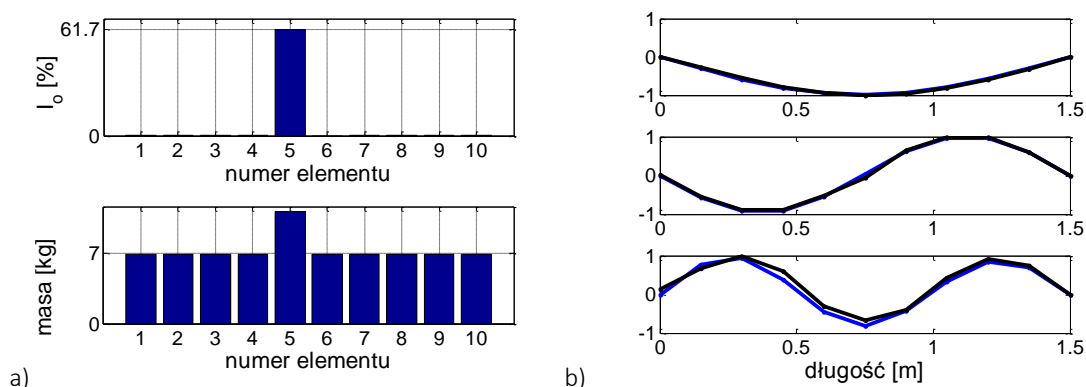
Rysunek 5.33 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 6 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



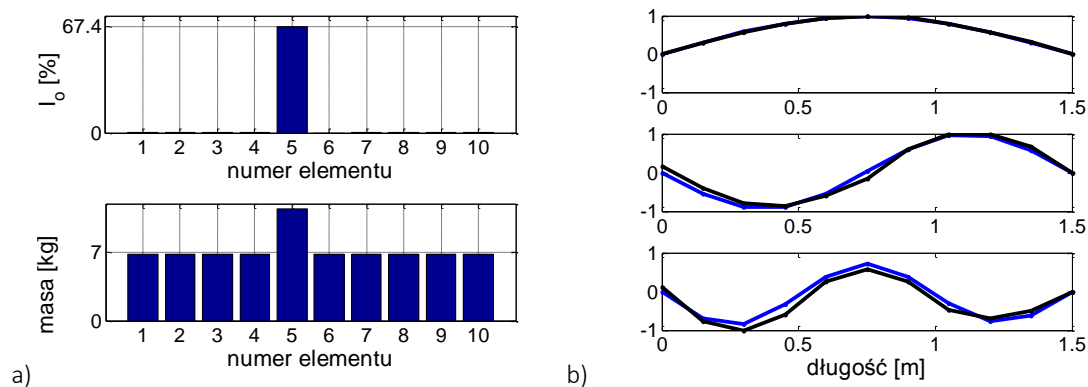
Rysunek 5.34 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 6 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



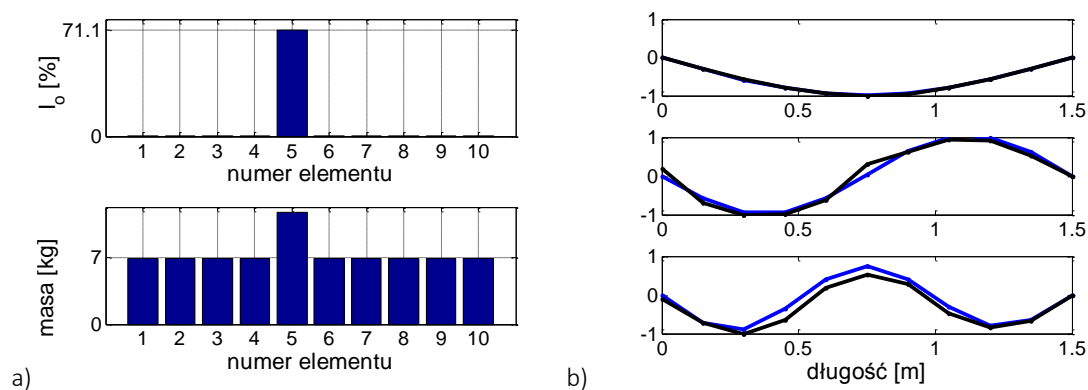
Rysunek 5.35 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 2 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



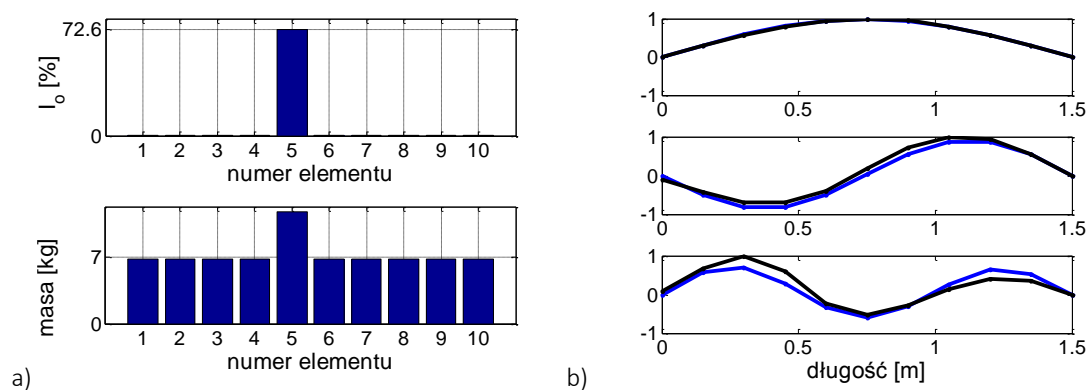
Rysunek 5.36 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 2 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



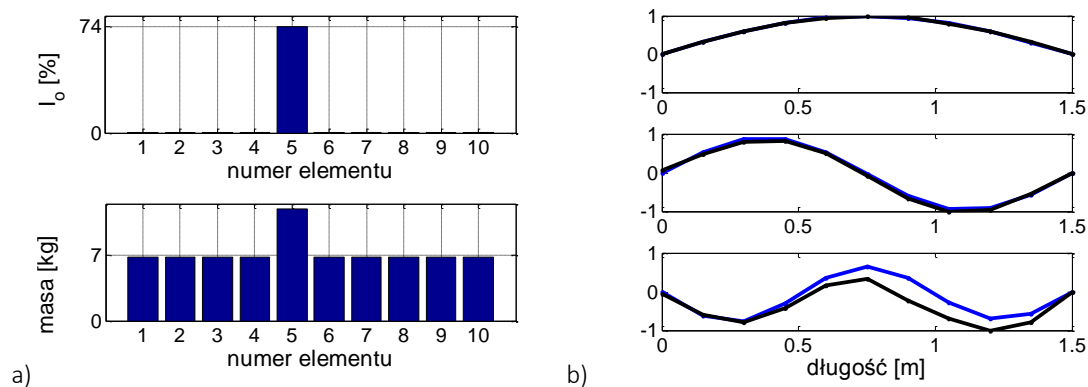
Rysunek 5.37 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 4 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



Rysunek 5.38 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 4 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



Rysunek 5.39 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 6 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



Rysunek 5.40 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 6 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)

Tabela 5.9 Zestawienie indeksów bazowych bezwzględnych oraz kryterium NMD dla aktualizacji parametrów na podstawie danych eksperymentalnych uzyskanych z translacyjnych stopni swobody

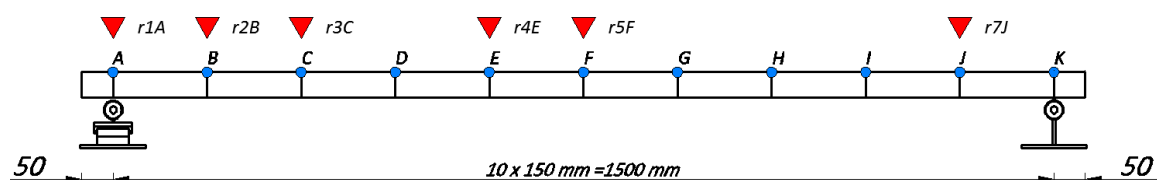
AKTUALIZACJA											
Element	Symbol	Pole wzbudnik	Indeksy			NMD [%]			Element z maksymalną zmianą masy	Zgodność wielkości uszkodzenia [%]	Detekcja
			$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	1	2	3			
0	brak	6	1,05	0,69	0,72	1,95	10,96	5,34	-	100	TAK
		8	1,14	0,44	3,27	2,13	4,92	4,90	-	100	TAK
3	2	6	72,79	35,08	108,24	8,30	14,88	4,25	3	91	TAK
		8	63,99	31,55	86,29	2,45	2,10	4,88	3	95	TAK
	4	6	27,92	12,89	44,58	0,81	31,86	13,86	3	47	TAK
		8	44,16	20,45	78,30	2,59	28,16	12,14	3	54	TAK
	6	6	2,16	1,15	2,10	1,78	41,03	8,38	3	6	TAK
		8	3,15	1,64	1,27	2,79	12,57	22,78	8	13	NIE
5	2	6	6521,20	3451,20	5423,20	1,95	11,43	9,58	5	44	TAK
		8	4975,21	2786,93	3682,17	3,01	7,58	13,55	5	41	TAK
	4	6	3397,20	1630,40	1758,90	2,04	21,69	19,54	5	26	TAK
		8	1462,40	652,45	1670,93	1,93	21,93	21,60	5	27	TAK
	6	6	2802,53	1362,3	3034,21	1,82	17,11	27,38	5	20	TAK
		8	2962,51	1531,85	1978,81	0,98	5,32	33,13	5	20	TAK

Na podstawie analizy przedstawionych powyżej wyników można stwierdzić, że aktualizacja przeprowadzona na podstawie postaci drgań uzyskanych z 6 translacyjnych stopni swobody, przy wykorzystaniu macierzy wag w wariancie 4 oraz przy wyborze wyników, które spełniają kryterium NMD3, umożliwia poprawną lokalizację miejsca uszkodzenia. Tylko w jednym przypadku wynik aktualizacji parametrów był niezadowolający. Przedstawione przykłady pokazują również, że nadmierny wzrost intensywności uszkodzenia, może prowadzić do otrzymania niepoprawnych wyników aktualizacji parametrów. Wyniki aktualizacji parametrów nie zapewniły

wysokiej zgodności szacowania intensywności uszkodzenia. W większości przypadku wartości są niedoszacowane, zwłaszcza w przypadku gdy strefa uszkodzenia znajduje się w środku rozważanego modelu belki.

### 5.3 Aktualizacja parametrów projektowych na podstawie 6 rotacyjnych stopni swobody

Trzeci etap analiz, zakładał zastąpienie 6 translacyjnych stopni swobody, rotacyjnymi stopniami swobody rozmieszczonymi w tych samych punktach pomiarowych (rysunek 5.41). Aktualizację parametrów przeprowadzono zgodnie z złożeniami przedstawionymi w rozdziale 5.2. Uszkodzenie belki symulowane było przez dodanie masy skupionej o symbolu 2, 4 lub 6 w elemencie 3 lub 5. W obliczeniach posługiwano się macierzą wag w wariancie 4, a tabelę wyników porządkowano korzystając z kryterium NMD3.



Rysunek 5.41 Rozmieszczenie punktów pomiarowych prędkości kątowych (żyroskopów) użytych do procedury aktualizacji parametrów

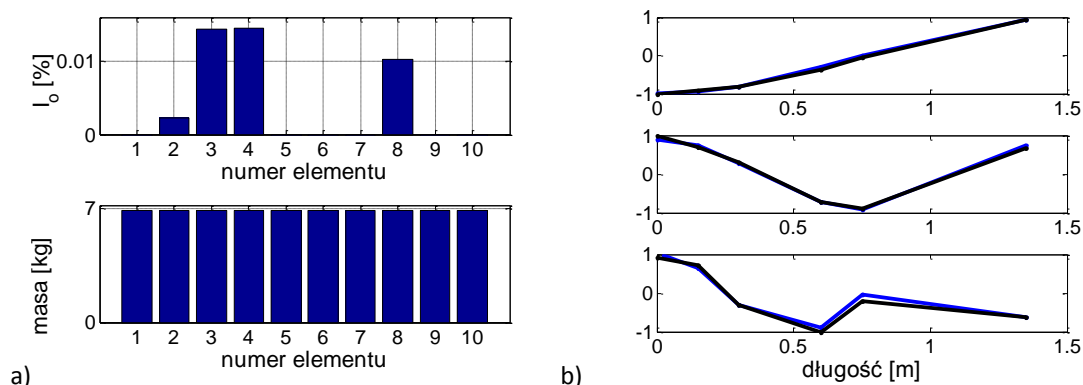
Na rysunkach 5.42-5.55 przedstawiono wartości indeksu wektorowego  $I_0$  oraz zmiany masy belki wraz z pierwszymi trzema postaciami drgań własnych. Rotacyjne postacie drgań własnych uzyskane na podstawie badań eksperymentalnych oznaczono kolorem czarnym, natomiast postacie drgań własnych uzyskane dla modelu numerycznego po aktualizacji parametrów kolorem niebieskim. W tabeli 5.10 zestawiono wartości bazowych indeksów bezwzględnych oraz kryterium NMD dla poszczególnych przypadków uszkodzeń.

Dla belki nieuszkodzonej maksymalna wartość indeksu wektorowego  $I_0$  jest mniejsza od 1,2% (rysunek 5.42-5.43). Uzyskana wartość jest 6-rotnie większa, niż w analogicznym przypadku przy zastosowaniu translacyjnych stopni swobody. Zmiana wartości parametrów jest jednak na tyle niewielka, że można ją traktować, jako brak znaczącej zmiany masy belki.

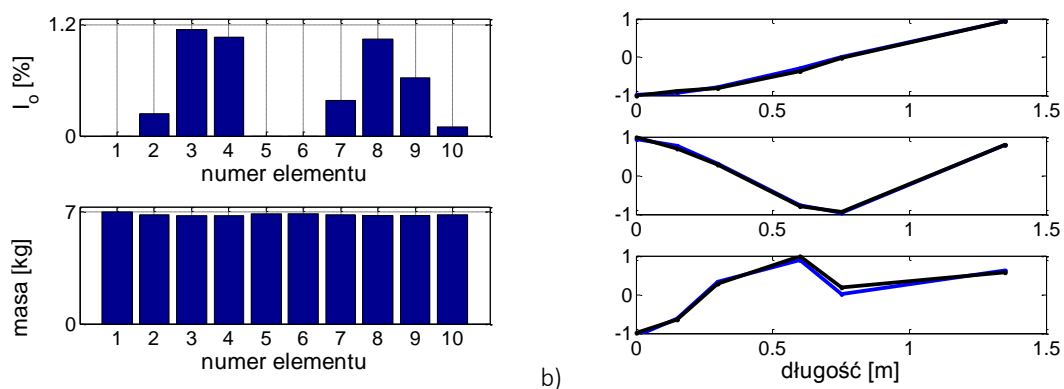
W przypadku uszkodzenia elementu numer 3, bez względu na jego symbol (rysunki 5.44-5.49), wyniki aktualizacji parametrów poprawnie wskazują lokalizację uszkodzenia. Zestawione w tabeli 5.10 indeksy bazowe, z uwagi na wartości znacznie większe od jedności, potwierdzają uszkodzenie tylko jednego elementu. Przy uszkodzeniu elementu numer 5, tylko w przypadku

uszkodzenia o symbolu 2, uzyskujemy każdorazowo poprawny wynik aktualizacji parametrów (rysunki 5.50 i 5.51). W przypadku uszkodzeń o symbolach 4 i 6 (rysunki 5.52-5.55), poprawny wynik otrzymano tylko dla wzbudnika umieszczonego w elemencie numer 8. Może to świadczyć o trudności w oszacowaniu miejsca uszkodzenia, przy użyciu sygnałów pomiarowych z rotacyjnych stopni swobody, gdy wymuszenie znajduje się w pobliżu uszkodzonego elementu.

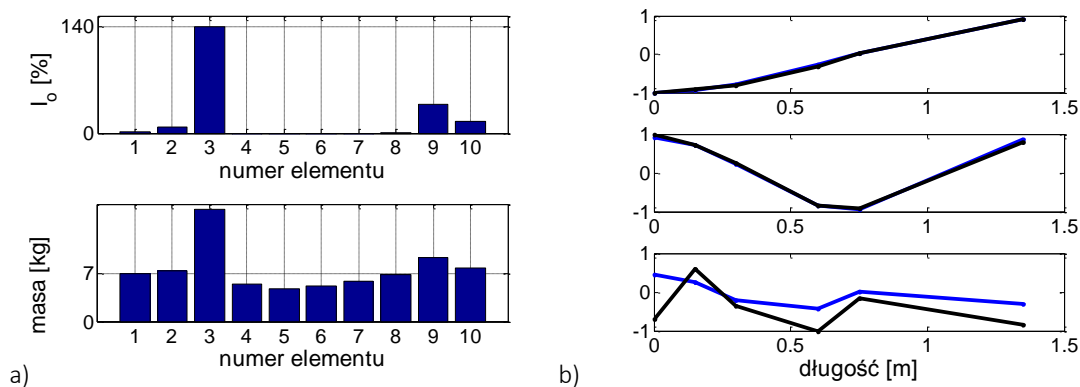
Analogicznie jak w przypadku przedstawionym w rozdziale 5.2, intensywność uszkodzeń jest znacznie niedoszacowana i waha się w granicach od 20 do 99% intensywności rzeczywistego uszkodzenia.



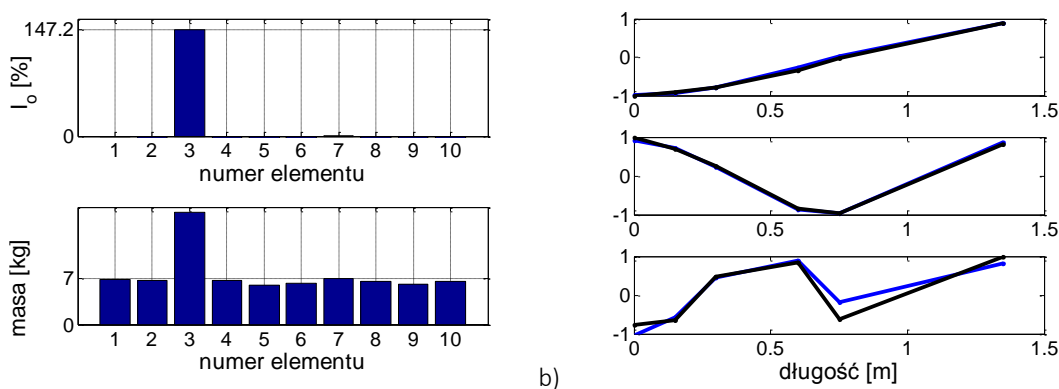
Rysunek 5.42 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki nieuszkodzonej przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6  
b) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



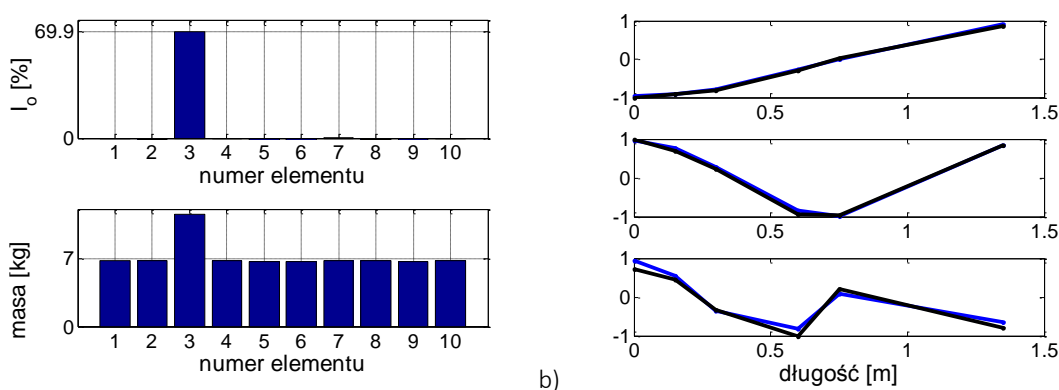
Rysunek 5.43 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki nieuszkodzonej przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8  
b) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



Rysunek 5.44 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 2 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



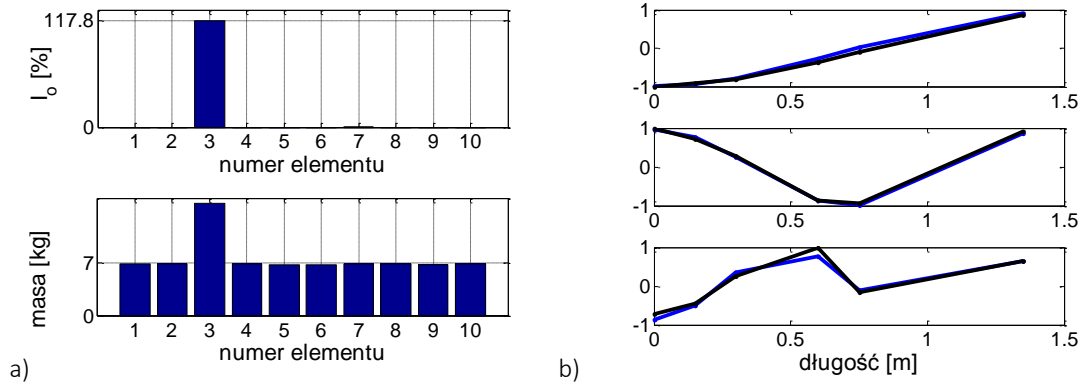
Rysunek 5.45 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 2 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



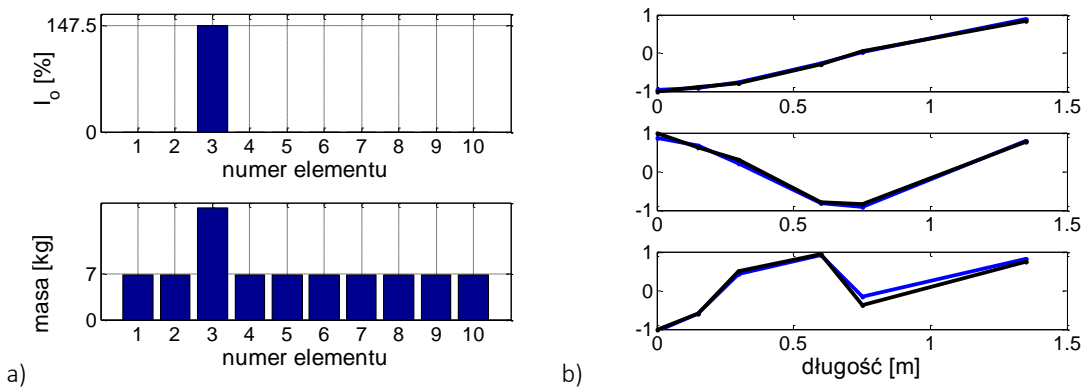
Rysunek 5.46 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 4 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



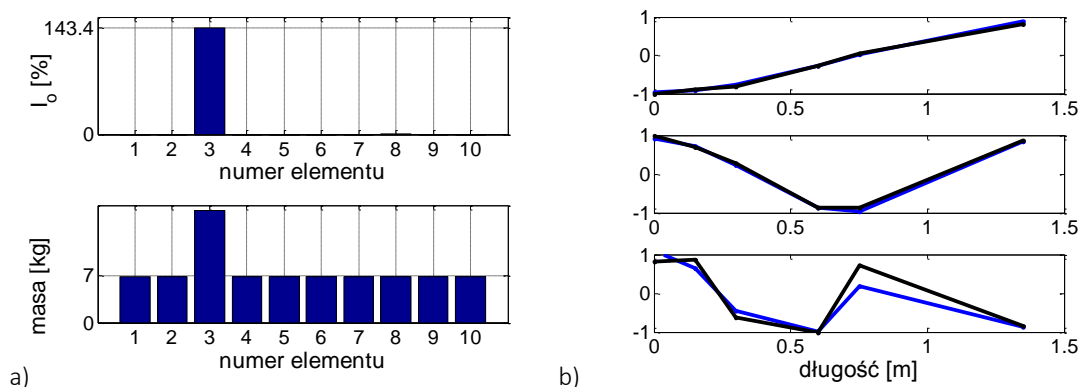




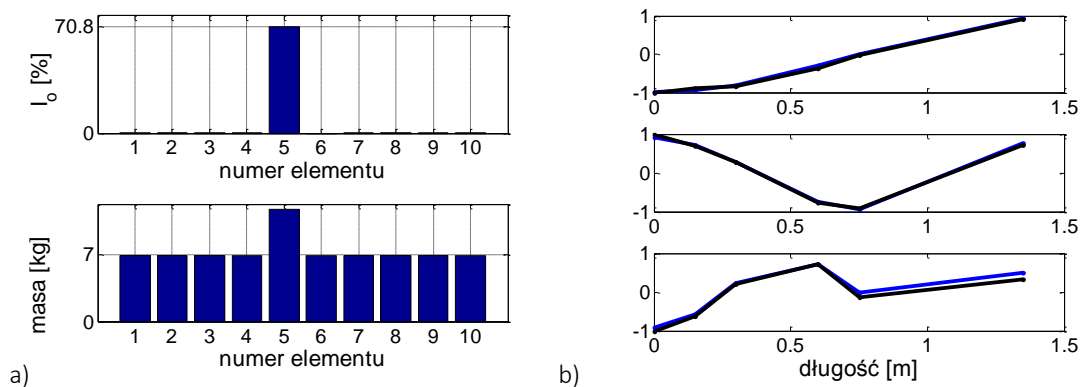
Rysunek 5.47 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 4 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



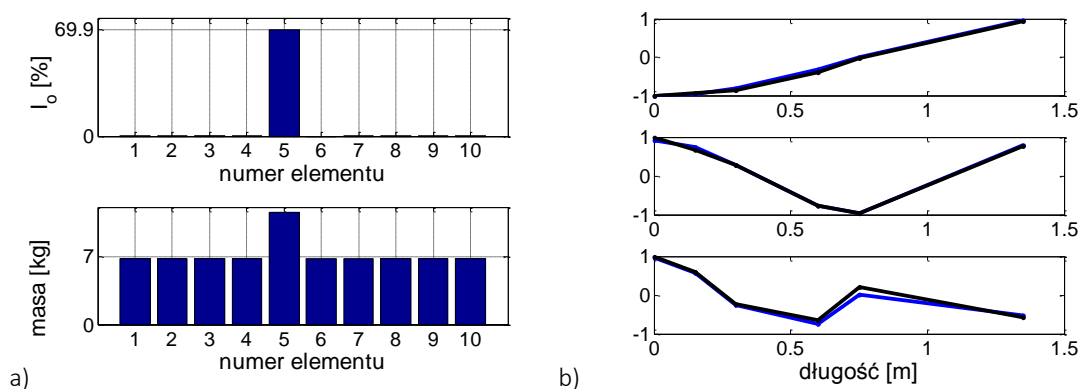
Rysunek 5.48 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 6 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



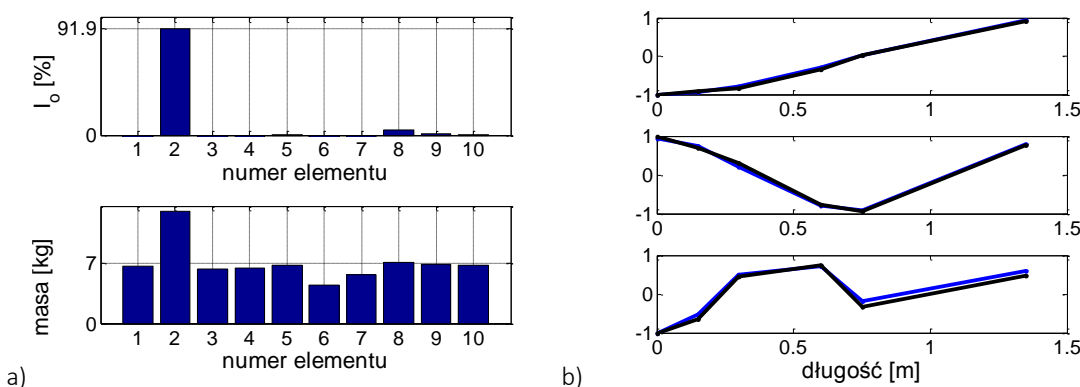
Rysunek 5.49 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 6 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



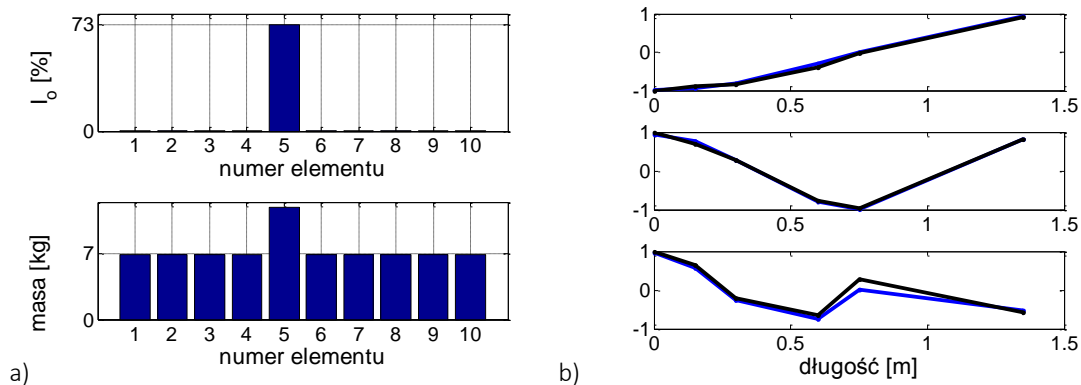
Rysunek 5.50 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 2 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



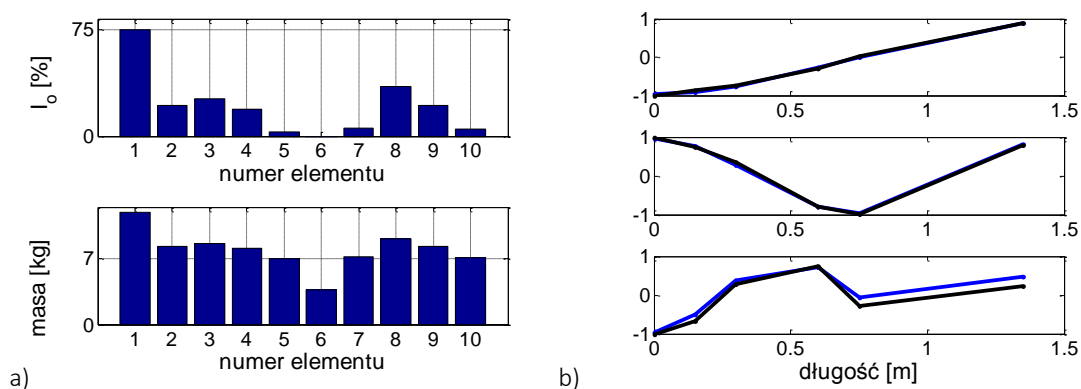
Rysunek 5.51 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 2 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



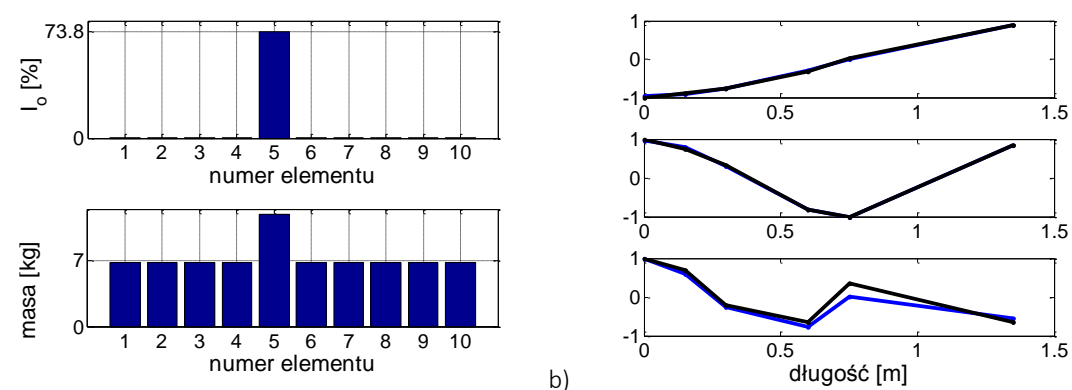
Rysunek 5.52 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 4 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



Rysunek 5.53 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 4 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



Rysunek 5.54 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 6 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



Rysunek 5.55 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 6 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)

Tabela 5.10 Zestawienie indeksów bazowych bezwzględnych oraz kryterium NMD dla aktualizacji parametrów na podstawie danych eksperymentalnych uzyskanych z rotacyjnych stopni swobody

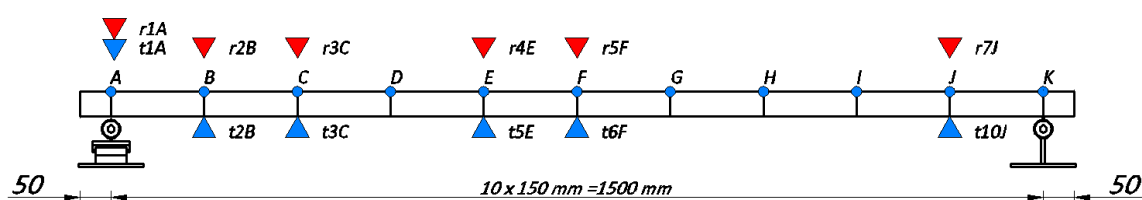
AKTUALIZACJA											
Uszkodzenie		Pole wzbudni k	Indeksy			NMD [%]			Element z maksymalną zmianą masy	Zgodność wielkości uszkodzenia [%]	Detekcja
Ele- ment	Symbol		$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	1	2	3			
0	brak	6	2,09	1,09	1,08	4,52	6,87	14,64	-	100	TAK
		8	8,05	1,77	165,15	5,18	4,64	12,90	-	100	TAK
3	2	6	7,91	3,67	7,28	3,68	6,66	188,05	3	94	TAK
		8	24,68	11,66	43,99	4,70	5,49	30,93	3	99	TAK
	4	6	74,19	33,21	111,96	3,70	6,83	23,40	3	27	TAK
		8	275,76	110,62	361,50	8,29	5,22	21,00	3	45	TAK
	6	6	3992,61	1696,83	4874,92	3,86	10,86	12,87	3	41	TAK
		8	2212,11	913,72	3867,23	4,75	7,95	35,61	3	38	TAK
5	2	6	9569,84	5483,42	6040,12	5,33	6,44	15,95	5	47	TAK
		8	5956,82	3329,65	3386,54	5,15	5,58	15,55	5	47	TAK
	4	6	10,31	2,67	13,64	4,99	6,57	14,91	2	35	NIE
		8	5246,00	3009,37	2925,52	5,40	4,55	20,86	5	28	TAK
	6	6	3,70	1,61	3,44	4,14	4,22	27,01	1	21	NIE
		8	2734,12	1555,96	1654,69	3,67	2,86	25,96	5	20	TAK

Przedstawione powyżej wyniki świadczą o tym, że aktualizacja przeprowadzona na podstawie postaci drgań uzyskanych na podstawie sygnałów pomiarowych z 6 rotacyjnych stopni swobody, przy podanych założeniach, pozwala na uzyskanie w większości przypadków poprawnych wyników aktualizacji parametrów. Tylko w dwóch przypadkach, wynik aktualizacji parametrów błędnie wskazał lokalizację uszkodzonego elementu. W większości przypadków jednak intensywność uszkodzenia jest niedoszacowana, szczególnie gdy uszkodzenie znajduje się w środkowej strefie rozważanego modelu.

Porównując powyższe wyniki aktualizacji parametrów, na podstawie rotacyjnych stopni swobody, uzyskiwanych poprzez pomiar sygnałów prędkości kątowych przy użyciu żyroskopów MEMS, z wynikami przedstawionymi w rozdziale 5.2, uzyskanymi na podstawie sygnałów przyspieszeń mierzonych za pomocą akcelerometrów, można stwierdzić, że czujniki żyroskopowe typu MEMS mogą stanowić alternatywę dla powszechnie stosowanych akcelerometrów w przedstawionym przypadku.

## 5.4 Aktualizacja parametrów projektowych na podstawie 6 translacyjnych i 6 rotacyjnych stopni swobody

Ostatni czwarty etap analiz, zakładał połączenie 6 translacyjnych stopni swobody z 6 rotacyjnymi stopniami swobody rozmieszczonymi w tych samych punktach pomiarowych (rysunek 5.56). Aktualizację parametrów przeprowadzono zgodnie z złożeniami przedstawionymi w rozdziale 5.2. Uszkodzenie belki symulowane było przez dodanie masy skupionej o symbolu 2, 4 lub 6 w elemencie 3 lub 5. W obliczeniach posługiwano się macierzą wag w wariancie 4, a tabelę wyników porządkowano korzystając z kryterium NMD3.

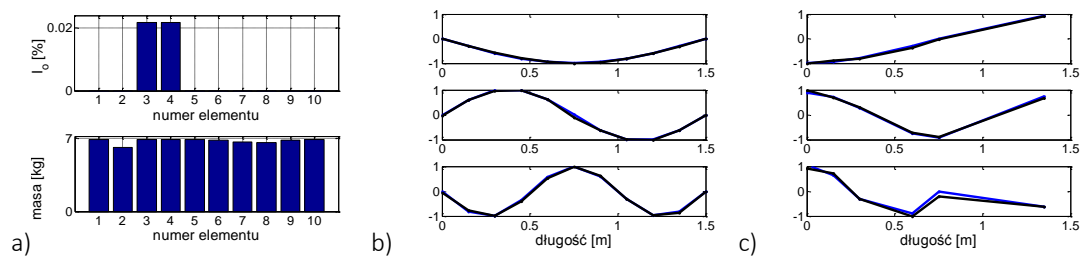


Rysunek 5.56 Rozmieszczenie punktów pomiarowych przyspieszeń (akcelerometrów) i prędkości kątowych (żyroskopów) użytych do procedury aktualizacji parametrów

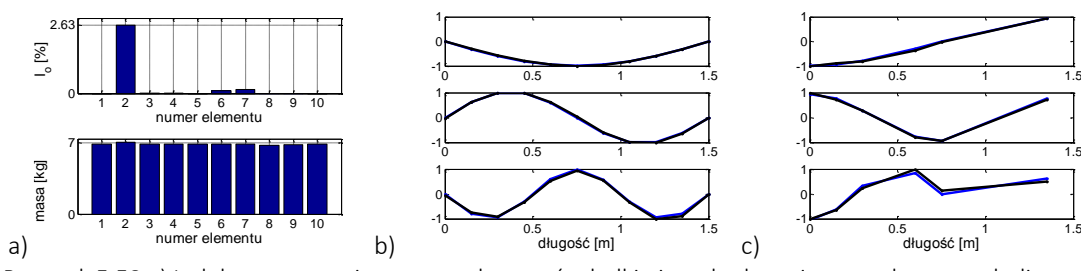
Na rysunkach 5.57-5.70 przedstawiono wartości indeksu wektorowego  $I_0$  oraz zmiany masy belki wraz z pierwszymi trzema postaciami drgań własnych. Translacyjne i rotacyjne postacie drgań własnych uzyskane na podstawie badań eksperymentalnych oznaczono kolorem czarnym, natomiast postacie drgań własnych uzyskane dla modelu numerycznego po aktualizacji parametrów kolorem niebieskim. W tabeli 5.11 zestawiono wartości bazowych indeksów bezwzględnych oraz kryterium NMD dla poszczególnych przypadków uszkodzeń.

Dla przypadku belki bez uszkodzenia (rysunek 5.57-5.58) maksymalna wartość indeksu wektorowego  $I_0$  wynosi 2,63%, co świadczy o bardzo małej zmianie masy elementów. W przypadku gdy w procedurze aktualizacji parametrów korzysta się jednocześnie zarówno z 6 translacyjnych jak i 6 rotacyjnych stopni swobody, we wszystkich przedstawionych przypadkach, bez względu na miejsce oraz symbol uszkodzenia otrzymujemy poprawny wynik aktualizacji parametrów (rysunki 5.59-5.70). Jednocześnie indeksy bazowe (tabela 5.10) osiągają wartości znacznie większe od jedności, co stanowi potwierdzenie uszkodzenia tylko jednego elementu.

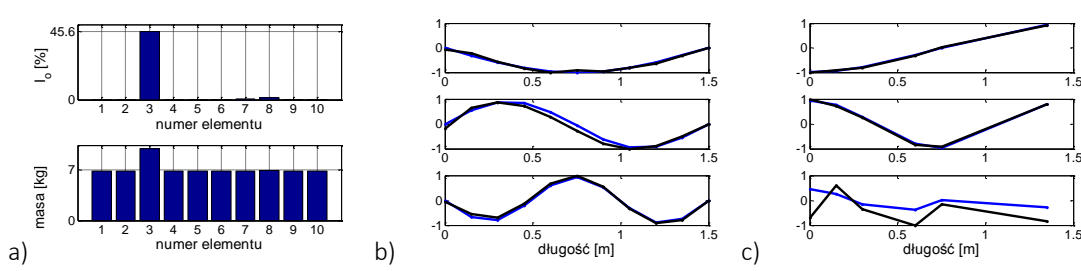
Analogicznie jak dla aktualizacji parametrów prowadzonej wyłącznie na translacyjnych (rozdział 5.2) bądź rotacyjnych stopniach swobody (rozdział 5.3), intensywność uszkodzeń jest w większości przypadków niedoszacowana i waha się w granicach od 23 do 225% intensywności rzeczywistego uszkodzenia.



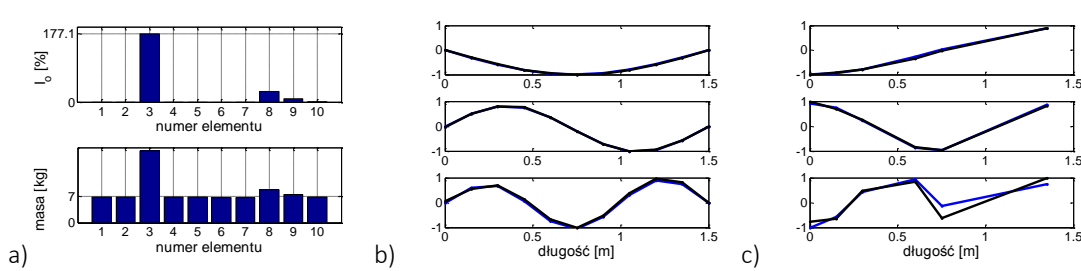
Rysunek 5.57 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki nieuszkodzonej przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska) c) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



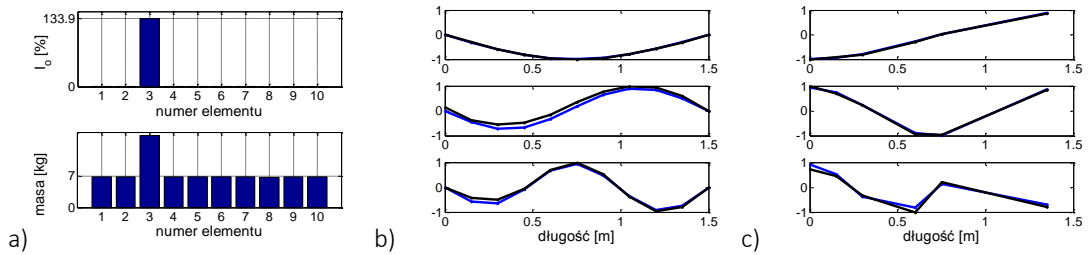
Rysunek 5.58 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki nieuszkodzonej przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska) c) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



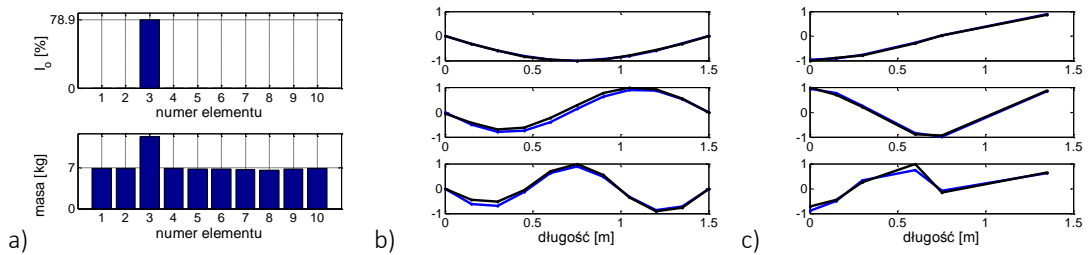
Rysunek 5.59 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 2 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska) c) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



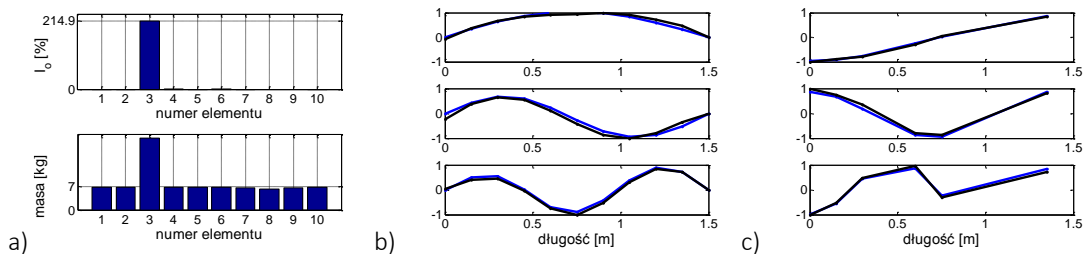
Rysunek 5.60 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 2 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska) c) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



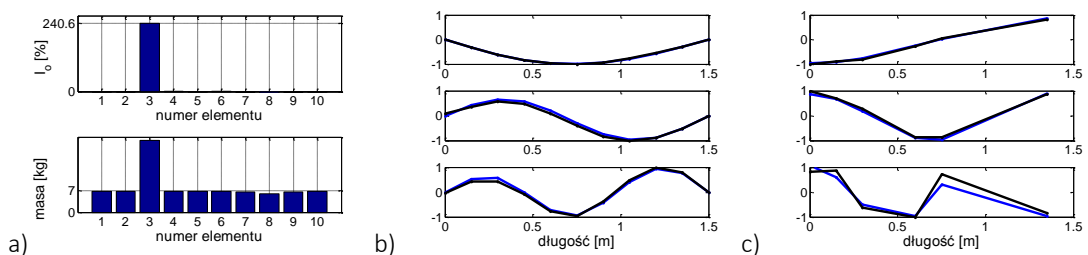
Rysunek 5.61 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 4 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) translacyjne postaci drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska) c) rotacyjne postaci drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



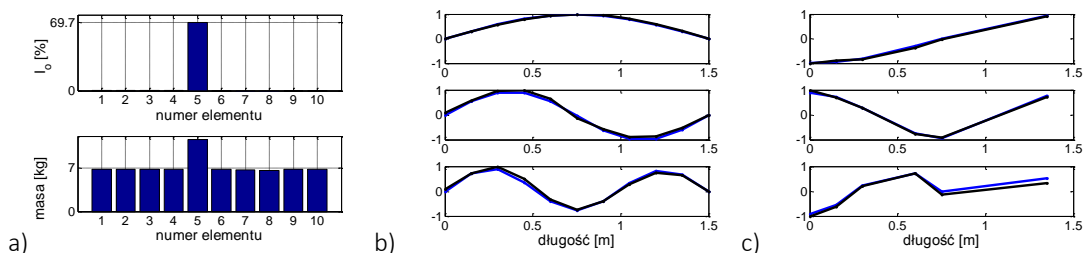
Rysunek 5.62 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 4 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) translacyjne postaci drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska) c) rotacyjne postaci drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



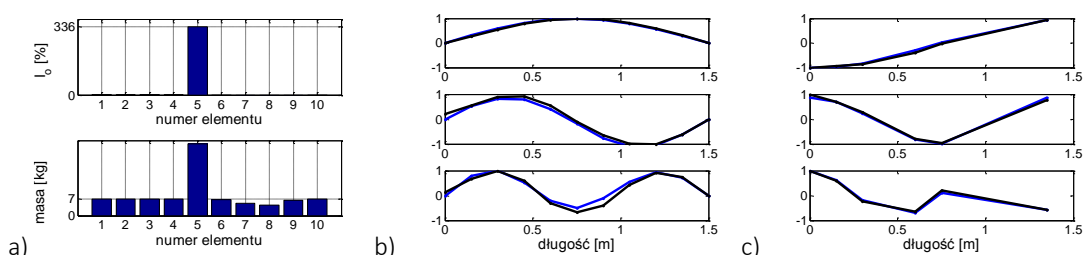
Rysunek 5.63 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 6 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) translacyjne postaci drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska) c) rotacyjne postaci drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



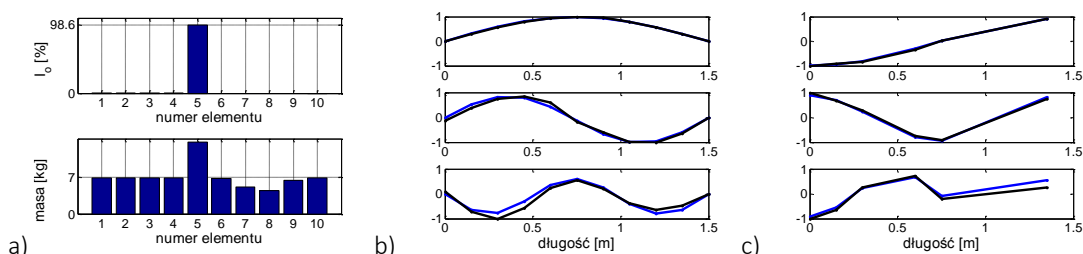
Rysunek 5.64 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 3 o symbolu 6 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) translacyjne postaci drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska) c) rotacyjne postaci drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



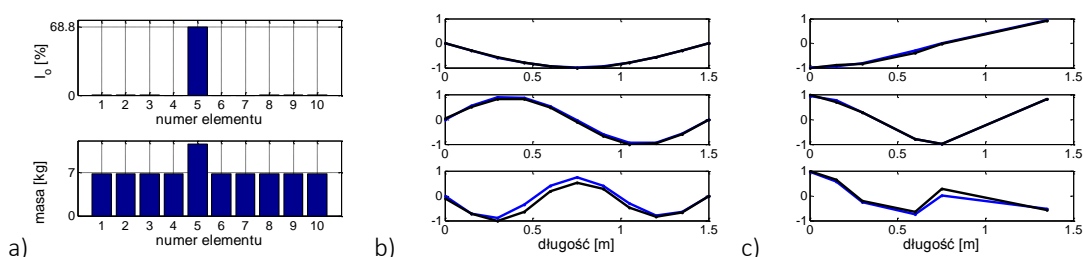
Rysunek 5.65 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 2 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska) c) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



Rysunek 5.66 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 2 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska) c) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)

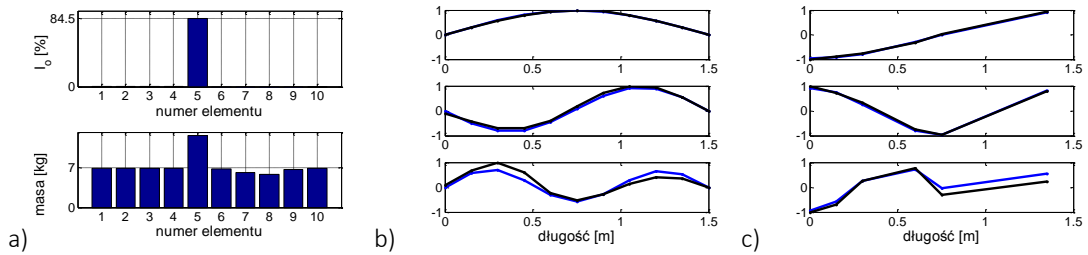


Rysunek 5.67 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 4 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska) c) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)

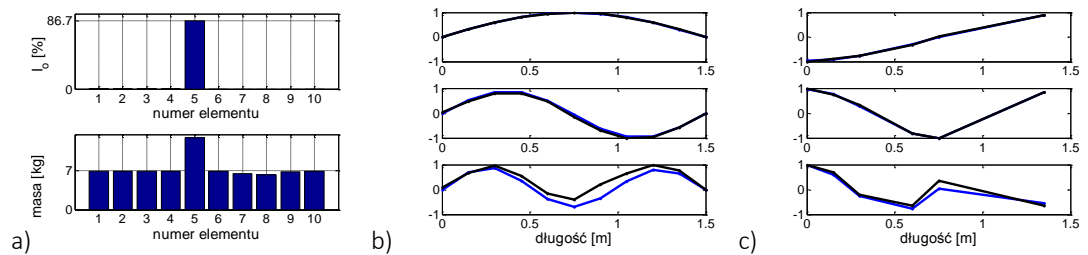


Rysunek 5.68 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 4 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska) c) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)





Rysunek 5.69 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 6 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 6 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska) c) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)



Rysunek 5.70 a) Indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów belki z uszkodzeniem elementu numer 5 o symbolu 6 przy wyborze z tabeli wyniku spełniającego kryterium NMD3 dla macierzy wag w wariancie 4 i wzbudniku umieszczonym w elemencie 8 b) translacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska) c) rotacyjne postacie drgań eksperymentalne (linia czarna) oraz zaktualizowane (linia niebieska)

Tabela 5.11 Zestawienie indeksów bazowych bezwzględnych oraz kryterium NMD dla aktualizacji parametrów na postawie danych eksperymentalnych uzyskanych z translacyjnych i rotacyjnych stopni swobody

AKTUALIZACJA											
Uszkodzenie		Pole wzbudnik	Indeksy			NMD [%]			Element z maksymalną zmianą masy	Zgodność wielkości uszkodzenia [%]	Detekcja
Element	Symbol		$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	1	2	3			
0	brak	6	0,01	2,03e-4	1,00	4,07	6,89	16,22	-	100	TAK
		8	8,05	1,77	165,15	4,47	4,76	15,43	-	100	TAK
3	2	6	147,38	36,18	68957,12	3,98	6,12	188,63	3	31	TAK
		8	31,83	6,59	2984,46	4,39	5,28	34,48	3	119	TAK
	4	6	507,39	114,51	54401,32	3,18	6,84	19,44	3	51	TAK
		8	81,08	21,09	2859,64	3,82	7,06	21,82	3	30	TAK
	6	6	116,14	25,15	33212,75	6,22	13,44	10,24	3	59	TAK
		8	85,65	19,24	15259,87	3,81	11,19	29,68	3	66	TAK
5	2	6	93,45	23,24	1143,63	5,04	6,65	15,91	5	47	TAK
		8	36,95	9,97	179,82	5,78	9,09	9,07	5	225	TAK
	4	6	10,23	2,76	50,50	4,17	8,34	24,73	5	38	TAK
		8	37241,56	9725,15	56003,78	5,21	6,41	19,56	5	26	TAK
	6	6	20,64	5,56	103,62	3,42	6,71	28,78	5	23	TAK
		8	36,74	9,52	265,92	3,36	3,27	24,46	5	24	TAK

Przedstawione powyżej wyniki stanowią potwierdzenie, że uzupełnienie translacyjnych stopni swobody, rotacyjnymi stopniami swobody, pozwala na uzyskanie poprawnych wyników aktualizacji parametrów. We wszystkich przanalizowanych przypadkach udało się poprawnie zlokalizować miejsce uszkodzenia. Podobnie jak we wcześniej opisanych przykładach, aktualizacja parametrów przy opisanych założeniach, umożliwia poprawną lokalizację uszkodzenia, jednak nie pozwala na poprawne oszacowanie jego intensywności.

## 6 Badania in situ na obiektach inżynierskich

Analizy dotyczące zastosowania diagnostyki wibracyjnej na rzeczywistych obiektach mostowych zrealizowano na czterech przykładach: trzech kładkach dla pieszych i jednym wiadukcie. W przedstawionych badaniach zastosowano różne typy wzbudzenia drgań w zależności od typu konstrukcji oraz możliwości technicznych i technologicznych dostępnych metod wprowadzania mostu w wibracje.

### 6.1 Opis aparatury

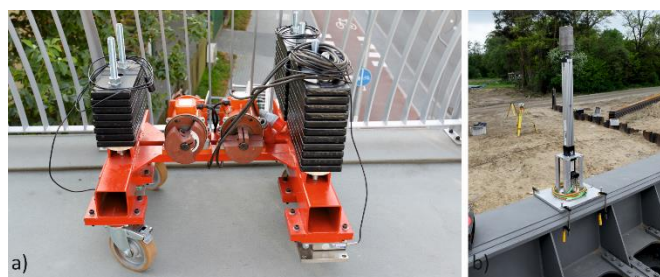
Najczęściej stosowane metody wzbudzenia drgań kładek dla pieszych to testy dynamiczne bazujące na ruchu człowieka lub grupy ludzi w formie marszu, biegu lub podskoków (rysunek 6.1). W przypadku obiektów takich jak wiadukty lub mosty drogowe najczęściej wykorzystuje się ciężkie samochody ciężarowe, a w przypadku obiektów kolejowych lokomotywy o dużej masie przejeżdżające przez obiekt w różnych konfiguracjach i z różnymi prędkościami (rysunek 6.2). Często, aby wzmocnić oddziaływanie dynamiczne pojazdu, w testach dynamicznych używa się specjalnych przeszkód w formie progu, które wywołują obciążenia semi-impulsowe. Drgania obiektów mostowych są także wywoływane przy pomocy impaktorów lub wzbudników drgań. Zastosowanie kontrolowanych źródeł drgań umożliwia precyzyjne przyłożenie siły i przeprowadzenie testów w większym zakresie częstotliwości drgań. Zastosowanie, w szczególności wzbudników, umożliwia wzbudzenie większej liczby postaci drgań niż w przypadku standardowych testów dynamicznych bazujących na wymuszeniach środowiskowych, do których zalicza się także przejazdy po obiekcie pojazdów kołowych. Wadą zastosowania impaktorów i wzbudników jest relatywnie mała masa tych urządzeń oraz sposób ich interakcji z konstrukcją, tak aby wymagana siła dynamiczna efektywnie pobudzała drgania mostu. W poniższych badaniach zastosowano dwa wzbudniki drgań: lekki wzbudnik o masie 13 kg oraz zaprojektowany i wykonany do niniejszych badań duży wzbudnik umożliwiający aplikację relatywnie dużych sił dynamicznych (rysunek 6.3).



Rysunek 6.1 Metody wzbudzenia dynamicznego kładek dla pieszych a) marsz b) bieg c) podskoki



Rysunek 6.2 Metody wzbudzenia dynamicznego mostów i wiaduktów a) przejazd samochodu po gładkiej nawierzchni z różnymi prędkościami b) przejazd samochodu przez próg c) przejazd lokomotywy z różnymi prędkościami



Rysunek 6.3 Stosowane wzbudniki drgań o masie wzbudzenia a) 300 kg b) 13 kg

W badaniach rzeczywistych obiektów mostowych posługiwano się trzema rodzajami czujników mierzących odpowiedź konstrukcji (rysunek 6.4). Do pomiaru prędkości kątowej zastosowano żyroskopy prędkościowe LPY403AL. Są to żyroskopy wykorzystujące efekt Coriolisa oddziaływający na drgający element wykonywane w technologii MEMS. Ich zakres pomiarowy prędkości kątowej wynosi  $\pm 30$  dps. Do pomiarów przyspieszeń konstrukcji wykorzystywano wykonywane w technologii MEMS akcelerometry pojemnościowe. Kontrolny pomiar przemieszczeń obiektów prowadzony był przy użyciu indukcyjnych czujników przemieszczeń PTX. Wszystkie otrzymane przebiegi poddano filtracji przy użyciu filtra Butterwortha odcinającego z sygnału składowe o częstotliwościach wyższych od 30 Hz. Dane pomiarowe rejestrowane były przy użyciu 8-kanłowych wzmacniaczy pomiarowych QUANTUM HBM 840a (rysunek 6.5b). Każdorazowo stanowisko pomiarowe (rysunek 6.5a) składało się również z generatora RIGOL DG1022 (rysunek 6.5c) oraz laptopa służącego do przetwarzania danych, ich wizualizacji oraz przechowywania rezultatów pomiarów.



Rysunek 6.4 Stosowane czujniki pomiarowe a) prędkości kątowej- żyroskopy MEMS b) przyspieszeń – akcelerometry c) przemieszczeń – czujniki indukcyjne



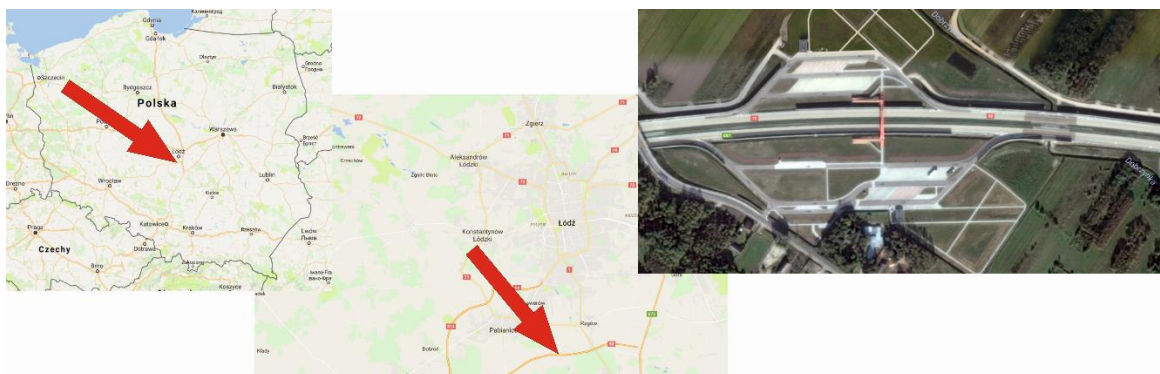
Rysunek 6.5 a) Stanowisko pomiarowe b) System akwizycji danych Quantum 840a c) generator RIGOL DG1022

## 6.2 Kładka nad drogą S8

Kładka dla pieszych KP-8.10 (rysunek 6.6) została zbudowana nad drogą ekspresową S-8 w km 194+353,04 (rysunek 6.7). Kładka znajduje się pomiędzy węzłem Walichnowy, a węzłem Wrocław A1. Jej zadaniem jest bezkolizyjne przeprowadzenie ruchu nad drogą S8



Rysunek 6.6 Widok na kładkę nad drogą S8.



Rysunek 6.7 Lokalizacja kładki nad drogą S8.

### 6.2.1 Opis obiektu

Konstrukcję nośną tworzy jednoprzęsłowy ustrój łukowy z jazdą dołem. Główne dźwigary łukowe zaprojektowano jako stalowe o przekroju kołowym. Do podwieszenia pomostu zastosowano wieszaki prętowe  $\varnothing 52\text{mm}$  (M56). Konstrukcję pomostu tworzy żelbetowy, monolityczny ustrój belkowo – płytowy: dwie podłużne belki skrajne, poprzecznicę i płyta. Na każdej podporze zlokalizowano po 2 łożyska elastomerowe. Podpory kładki wykonano jako

ścianowe posadowione za pośrednictwem ław fundamentowych na palach wielkośrednicowych  $\varnothing 1200\text{mm}$ . Konstrukcja kładki została zaprojektowana na obciążenie tłumem pieszych wg PN- 85/S-10030.

Podstawowe parametry geometryczne konstrukcji nośnej kładki:

- ✓ Długość kładki:  $L_c = 51,60\text{m}$
- ✓ Rozpiętość teoretyczna przęsła:  $L_t = 50,00\text{m}$
- ✓ Szerokość użytkowa kładki:  $B_u = 3,00\text{m}$
- ✓ Szerokość całkowita kładki:  $B_c = 4,50\text{m}$
- ✓ Kąt skrzyżowania z przeszkodą:  $90^\circ$
- ✓ Wysokość konstrukcyjna:  $H_k = 0,60\text{m}$

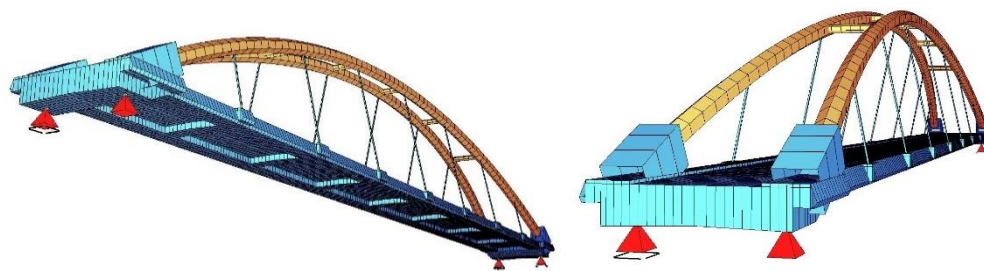
### 6.2.2 Model MES

Model obliczeniowy obiektu (rysunek 6.8) utworzono w formalizmie Metody Elementów Skończonych jako przestrzenny układ belkowo - powłokowy. Obliczenia wykonano z wykorzystaniem komercyjnego programu SOFiSTiK.

Konstrukcję płyty pomostu, poprzecznice oraz kapy chodnikowe opisano 4- węzłowymi powłokowymi elementami skończonymi. Dźwigary łukowe oraz stężenia modelowano 2- węzłowymi elementami belkowymi z uwzględnieniem mimośrodów. Wieszaki modelowano elementami ciągnowymi – kablowymi. Parametry geometryczne i materiałowe konstrukcji przyjęto na podstawie rysunków konstrukcyjnych obiektu.

Wygenerowany model powłokowo - belkowy konstrukcji przęsła składał się z:

- ✓ siatki 5.750 węzłów,
- ✓ 7.008 elementów powłokowych,
- ✓ 682 elementów belkowych,
- ✓ 14 elementów ciągnowych,
- ✓ 7 wieżów podporowych.



Rysunek 6.8 Wizualizacje modelu MES kładki nad drogą S8

### 6.2.3 Badania in situ

Kładka została poddana badaniom statycznym i dynamicznym. Badania statyczne były elementem badań odbiorowych kładki i polegały na sprawdzeniu odpowiedzi konstrukcji obciążanej pojemnikami wypełnionymi wodą. Podczas tych badań mierzono przemieszczenia pionowe - ugięcia konstrukcji przęsła, przyrosty odkształceń/naprężeń (sił normalnych) w wieszakach, temperaturę konstrukcji w czasie badań, przemieszczenia poziome konstrukcji na łożysku ruchomym oraz osiadania podpór.

Badania dynamiczne kładki obejmowały:

- ✓ pomiary przebiegów przemieszczeń pionowych - ugięć konstrukcji przęsła,
- ✓ pomiary przebiegów przyspieszeń konstrukcji pomostu,
- ✓ pomiary prędkości kątowej wybranych punktów przęsła.

Ogółem podczas badań dynamicznych mierzone i rejestrowane były przebiegi zmienności dla:

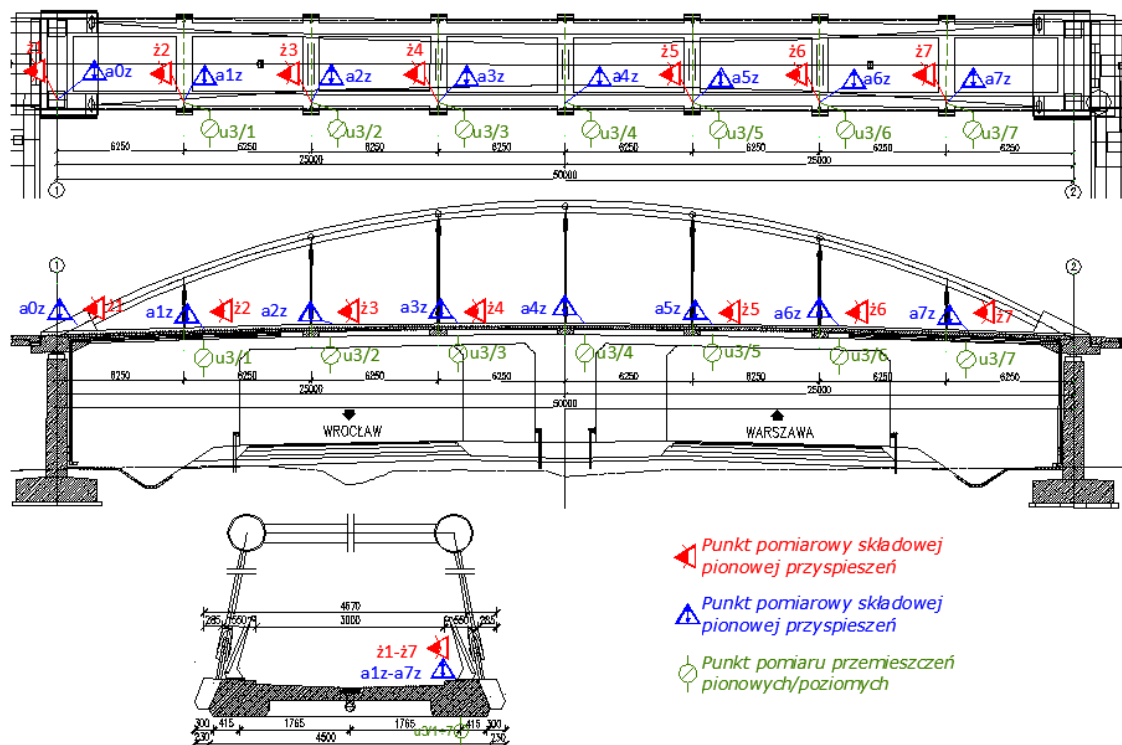
- ✓ 7 punktów pomiarowych przemieszczeń pionowych - ugięć,
- ✓ 8 punktów pomiarowych przyspieszeń konstrukcji przęsła,
- ✓ 7 punktów pomiarowych prędkości kątowej (żyroskopy MEMS).

Rozmieszczenie przekrojów i punktów pomiarowych przedstawiono na rysunku 6.9.

Przebiegi zmienności mierzonych parametrów rejestrowano przy następujących testach dynamicznych:

- ✓ marsz swobodny grupy 6-osobowej,
- ✓ marsz swobodny grupy 12-osobowej,
- ✓ bieg swobodny grupy 6-osobowej,
- ✓ bieg swobodny grupy 12-osobowej,
- ✓ marsz synchroniczny grupy 6-osobowej,
- ✓ marsz synchroniczny grupy 12-osobowej,
- ✓ bieg synchroniczny grupy 6-osobowej,
- ✓ bieg synchroniczny grupy 12-osobowej,
- ✓ podskoki synchroniczne grupy 6-osobowej w przekroju pomiarowym 2-2 (1/4 rozpiętości przęsła),
- ✓ podskoki synchroniczne grupy 6-osobowej w przekroju pomiarowym 4-4 (1/2 rozpiętości przęsła),
- ✓ przysiady synchroniczne grupy 6-osobowej w przekroju pomiarowym 4-4 (1/2 rozpiętości przęsła),
- ✓ obciążenie impulsowe – upuszczenie pojemnika z wodą o ciężarze 10,5kN z wysokości 6 cm na środek pomostu w przekroju pomiarowym 1-1,

- ✓ obciążenie impulsowe– upuszczenie pojemnika z wodą o ciężarze 10,5kN z wysokości 6 cm na środek pomostu w przekroju pomiarowym 2-2,
- ✓ obciążenie impulsowe– upuszczenie pojemnika z wodą o ciężarze 10,5kN z wysokości 6 cm na środek pomostu w przekroju pomiarowym 3-3,
- ✓ wymuszenie małym wzbudnikiem drgań.



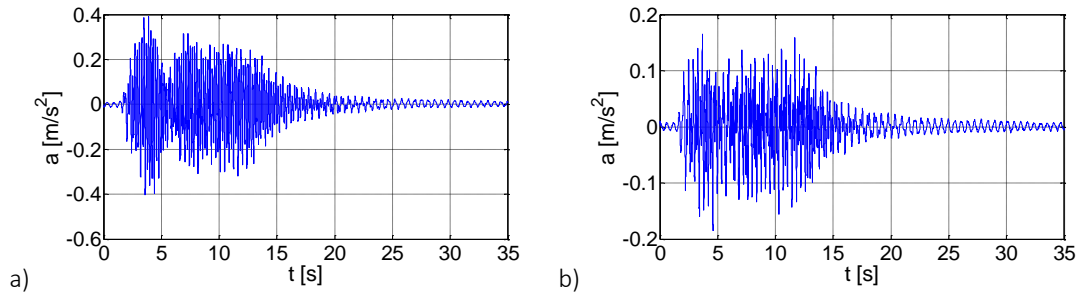
Rysunek 6.9 Rozmieszczenie punktów pomiarowych podczas badań dynamicznych kładki nad drogą S8

Procedura badań dynamicznych została tak opracowana, aby na obiekcie znajdował się tylko określony zestaw - grupa osób realizująca określony schemat dynamiczny. Kolejny test był realizowany dopiero po całkowitym wytlumieniu drgań wywołanych poprzednim testem dynamicznym.

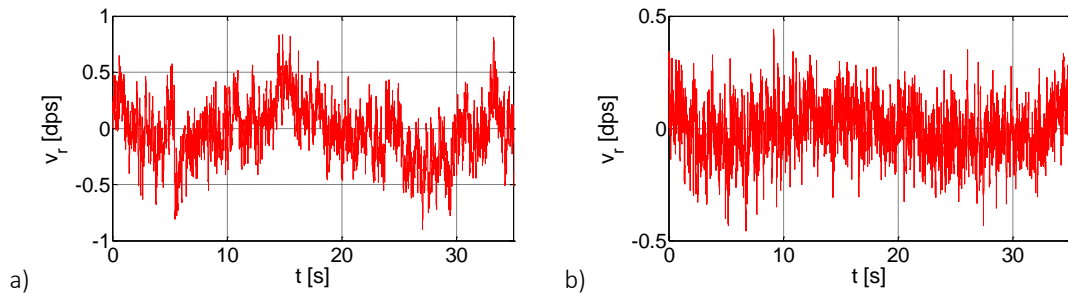
## 6.2.4 Wyniki pomiarów

Wykresy reprezentatywnych przebiegów przyspieszeń dla poszczególnych punktów pomiarowych zarejestrowane podczas badań przedstawiono na rysunku 6.10. Natomiast wykresy reprezentatywnych przebiegów prędkości kątowych dla poszczególnych punktów pomiarowych przedstawiono na rysunku 6.11.





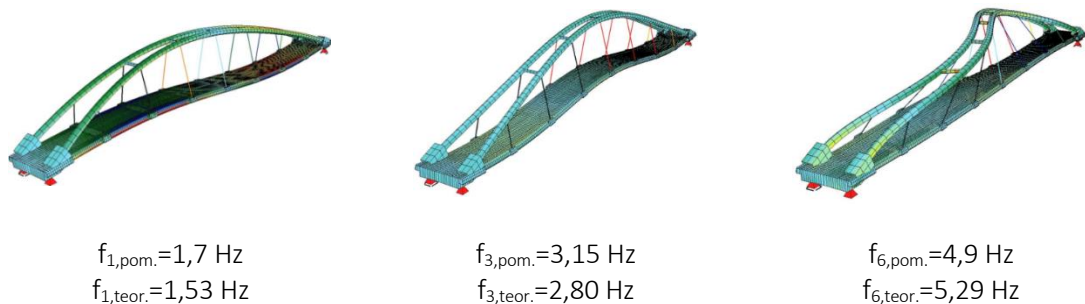
Rysunek 6.10 Przebiegi czasowe przyspieszeń kładki nad drogą S8 od wymuszenia podskokami synchronicznymi grupy 6 osób w osi wieszaka nr 2 a) a2z - składowa pionowa przyspieszeń pomostu w miejscu wpięcia wieszaka nr 2 b) a5z - składowa pionowa przyspieszeń pomostu w miejscu wpięcia wieszaka nr 5



Rysunek 6.11 Przebiegi czasowe prędkości kątowych kładki nad drogą S8 od wymuszenia podskokami synchronicznymi grupy 6 osób w osi wieszaka nr 2 a) ż2 - prędkość kątowa pomostu w miejscu wpięcia wieszaka nr 2 b) ż5 - prędkość kątowa pomostu w miejscu wpięcia wieszaka nr 5

Na podstawie analizy wyników badań przemieszczeń pionowych, przyspieszeń zarejestrowanych przy próbach dynamicznych wyznaczono następujące parametry dynamiczne konstrukcji przęsła:

- ✓ logarytmiczny dekrement tłumienia konstrukcji nośnej obiektu:  $v_{pom} \approx 0,02$ .
- ✓ częstotliwości drgań własnych konstrukcji kładki (rysunek 6.12)



Rysunek 6.12 Zestawienie pomierzonych i numerycznych częstotliwości drgań kładki nad drogą S8.

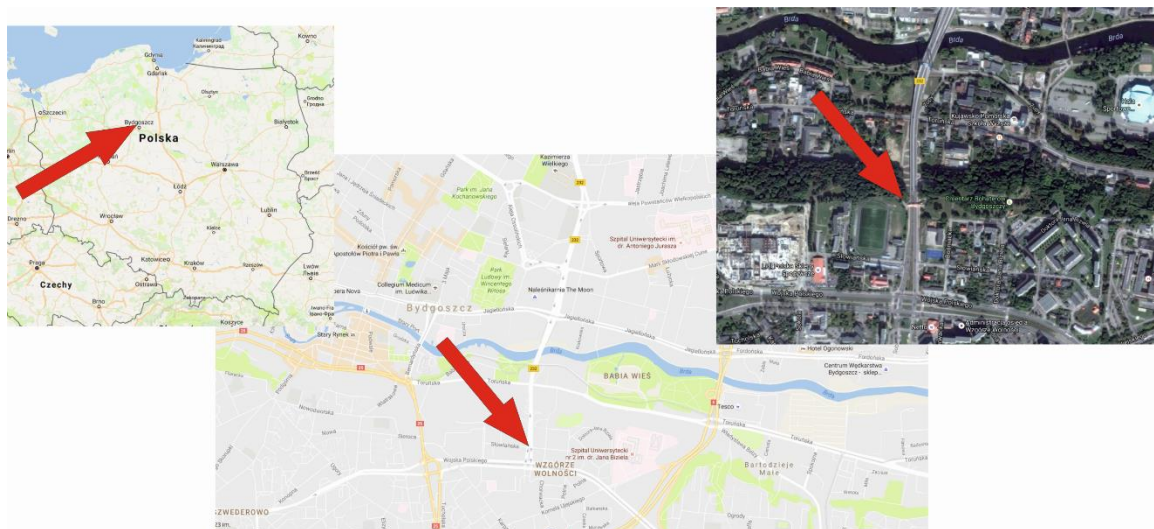
W przedstawionym powyżej przypadku, bez względu na sposób wymuszenia drgań, sygnał otrzymany z czujników żyroskopowych charakteryzował się wysokim poziomem szumów w stosunku do wartości mierzonych. Zarejestrowane sygnały prędkości kątowych nie umożliwiły wyznaczenia na jego podstawie dokładnych wartości częstotliwości oraz postaci drgań, a tym samym przeprowadzenia dalszych procedur diagnostycznych.

### 6.3 Kładka nad trasą Ogińskiego w Bydgoszczy

Kładka (rysunek 6.13) znajduje się nad ul. Ogińskiego w Bydgoszczy i jest elementem projektu "Budowa ul. Ogińskiego w Bydgoszczy na odcinku od ul. Powstańców Wielkopolskich do ul. Wojska Polskiego wraz z obiektami inżynierskimi i dojazdami"(rysunek 6.14) .Celem całej inwestycji było stworzenie nowej przeprawy przez Brdę w centrum miasta. Jej zakres obejmował budowę 6 obiektów mostowych: estakady lewobrzeżnej E-1, mostu nurtowego przez Brdę MD-2, estakady prawobrzeżnej E-3, wiaduktów drogowych WD-5 i WD-6 zlokalizowanych na łącznicach oraz kładki widokowej nad ul. Ogińskiego znajdująca się za estakadą prawobrzeżną.



Rysunek 6.13 Widok na kładkę nad ul Ogińskiego w Bydgoszczy



Rysunek 6.14 Lokalizacja kładki nad ul Ogińskiego w Bydgoszczy

#### 6.3.1 Opis obiektu

Konstrukcję kładki tworzą: żelbetowa płyta pomostu oraz dwa stalowe dźwigary łukowe wraz z wieszakami. Łuki kładki wykonano w formie przekroju zamkniętego o wysokości 0,6 m i szerokości 0,9 m. Pomost wykonany został jako żelbetowa płyta o zmiennej grubości od 0,18 m w osi podłużnej konstrukcji do 0,45 m w strefach skrajnych. Wieszaki

wykonano z prętów zamkniętych o średnicy 0,06 m. Konstrukcję łuków posadowiono na trzech blokach podporowych posadowionych na palach. Płytę żelbetową pomostu oparto na żelbetowych przyczółkach posadowionych bezpośrednio.

Podstawowe parametry geometryczne konstrukcji nośnej kładki:

- ✓ Długość kładki:  $L_c = 34,40$  m
- ✓ Długość pomostu:  $L_{cp} = 32,4$  m
- ✓ Rozpiętość teoretyczna konstrukcji łuku:  $L_t = 38,3$  m
- ✓ Szerokość użytkowa kładki:  $B_u = 3,00$  m
- ✓ Szerokość całkowita pomostu:  $B_c = 4,5$  m
- ✓ Kąt skosu konstrukcji obiektu:  $89,93^\circ$
- ✓ Kąt skrzyżowania z przeszkodą:  $90^\circ$

### 6.3.2 Model MES

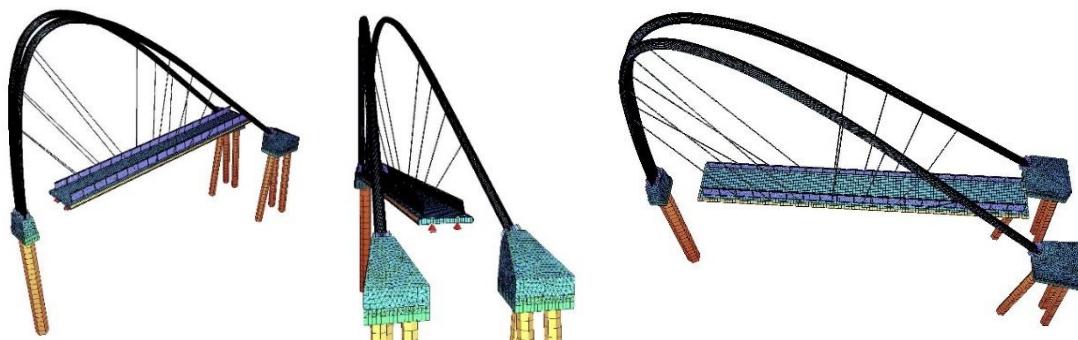
Model obliczeniowy obiektu stanowi przestrzenny układ belkowo – powłokowo - ciągnowy (rysunek 6.15). Obliczenia przeprowadzono dla dwóch wariantów: z uwzględnieniem współpracy i bez uwzględnienia współpracy balustrady. Obliczenia wykonano Metodą Elementów Skończonych (MES) przy wykorzystaniu programu SOFiSTiK.

Konstrukcję płyty pomostu opisano 4- węzłowymi powłokowymi elementami skończonymi. Dźwigary łukowe opisano 2- węzłowymi elementami belkowymi z uwzględnieniem mimośrodków. Wieszaki modelowano elementami ciągnowymi - kablowymi. Bloki oporowe modelowano elementami bryłowymi.

Parametry geometryczne i materiałowe konstrukcji przyjęto na podstawie rysunków konstrukcyjnych obiektu.

Wygenerowany model konstrukcji przęsła składał się z:

- ✓ siatki 10.902 węzłów,
- ✓ 7.192 elementów powłokowych,
- ✓ 9.170 elementów belkowych,
- ✓ 14 elementów ciągnowych,
- ✓ 8 więzów podporowych.



Rysunek 6.15 Wizualizacje modelu MES kładki nad ul Ogińskiego w Bydgoszczy

### 6.3.3 Badania in situ

Kładka została poddana badaniom statycznym i dynamicznym. Badania statyczne były elementem badań odbiorowych kładki i polegały na sprawdzeniu odpowiedzi konstrukcji obciążanej pojemnikami wypełnionymi wodą. Podczas tych badań mierzono przemieszczenia pionowe - ugięcia konstrukcji przęsła, przyrosty odkształceń/naprężeń (sił normalnych) w wieszakach, temperaturę konstrukcji w czasie badań, przemieszczenia poziome konstrukcji na łożysku ruchomym, oraz osiadania podpór.

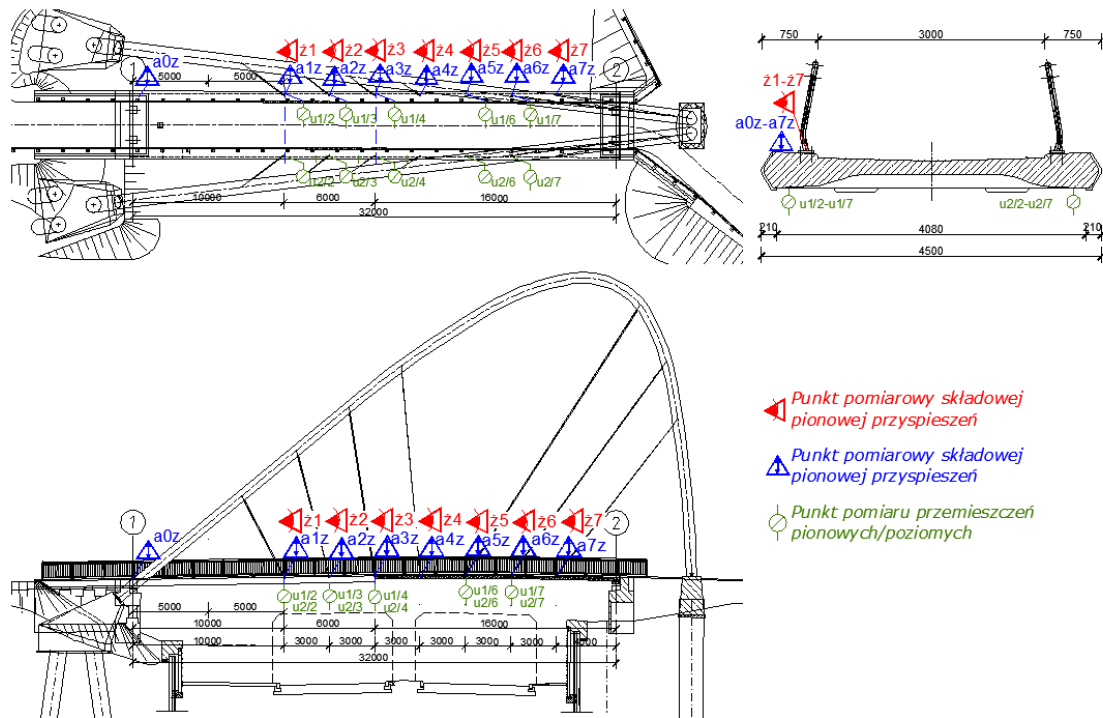
Badania dynamiczne kładki obejmowały pomiary:

- ✓ pomiary przebiegów przemieszczeń pionowych - ugięć konstrukcji przęsła,
- ✓ pomiary przebiegów przyspieszeń konstrukcji pomostu,
- ✓ pomiary prędkości kątowej wybranych punktów przęsła.

Ogółem podczas badań dynamicznych mierzone i rejestrowane były przebiegi zmienności dla:

- ✓ 10 punktów pomiarowych przemieszczeń pionowych - ugięć,
- ✓ 8 punktów pomiarowych przyspieszeń konstrukcji przęsła,
- ✓ 7 punktów pomiarowych prędkości kątowej (żyroskopy MEMS).

Rozmieszczenie przekrojów i punktów pomiarowych przedstawiono na rysunku 6.16.



Rysunek 6.16 Rozmieszczenie punktów pomiarowych podczas badań kładki nad ul Ogińskiego w Bydgoszczy

Dynamiczne pomiary przemieszczeń pionowych, przyspieszeń konstrukcji i prędkości kątowych przeprowadzono przy realizacji 16 różnych schematów dynamicznych złożonych z grup 6, 9 i 12- osobowych. Przebiegi zmienności mierzonych parametrów rejestrowano przy następujących testach dynamicznych:

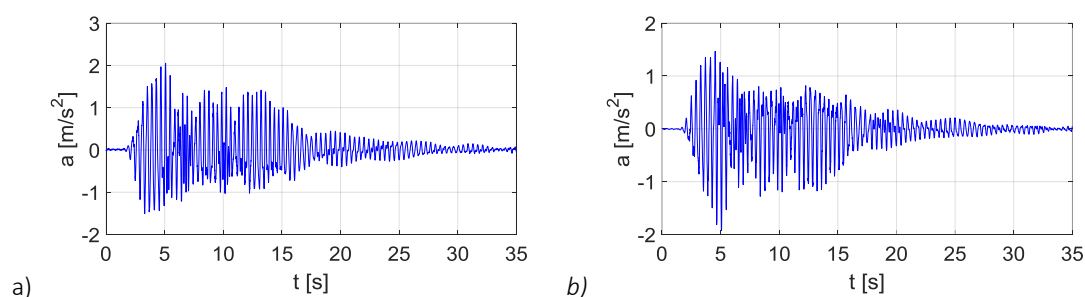
- ✓ marsz swobodny grupy 6-osobowej,
- ✓ marsz swobodny grupy 12-osobowej,
- ✓ bieg swobodny grupy 6-osobowej,
- ✓ bieg swobodny grupy 12-osobowej,
- ✓ marsz synchroniczny grupy 6-osobowej z częstotliwością kroków zbliżoną do częstotliwości własnej konstrukcji,
- ✓ marsz synchroniczny grupy 9-osobowej z częstotliwością kroków zbliżoną do częstotliwości własnej konstrukcji,
- ✓ marsz synchroniczny grupy 12-osobowej z częstotliwością kroków zbliżoną do częstotliwości własnej konstrukcji,
- ✓ bieg synchroniczny grupy 6-osobowej z częstotliwością kroków zbliżoną do częstotliwości własnej konstrukcji,
- ✓ bieg synchroniczny grupy 9-osobowej z częstotliwością kroków zbliżoną do częstotliwości własnej konstrukcji
- ✓ bieg synchroniczny grupy 12-osobowej z częstotliwością kroków zbliżoną do częstotliwości własnej konstrukcji,
- ✓ podskoki synchroniczne grupy 6-osobowej w osi wieszaków nr 1,
- ✓ podskoki synchroniczne grupy 6-osobowej w osi wieszaków nr 2,
- ✓ podskoki synchroniczne grupy 6-osobowej w osi wieszaków nr 3,

- ✓ podskoki synchroniczne grupy 6-osobowej w osi wieszaków nr 4,
- ✓ wymuszenie małym wzbudnikiem drgań,
- ✓ obciążenie impulsowe - upuszczenie masy skupionej 1000kg z wysokości 0,06m.

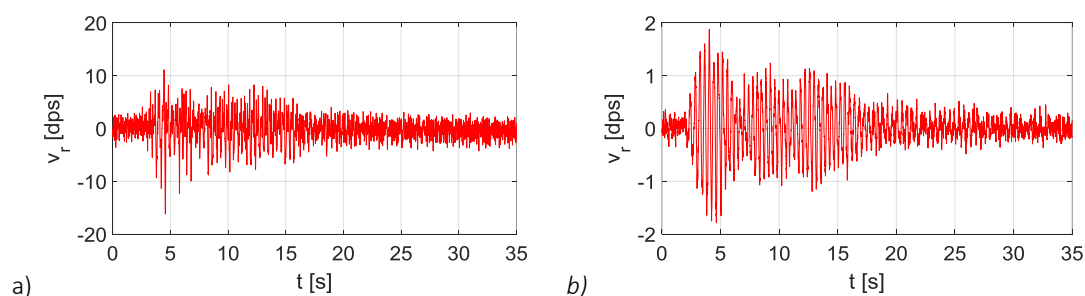
Procedura badań dynamicznych została tak opracowana, aby na obiekcie znajdował się tylko określony zestaw - grupa osób realizująca określony schemat dynamiczny. Kolejny test był realizowany dopiero po całkowitym wytłumieniu drgań spowodowanych poprzednim testem dynamicznym.

### 6.3.4 Wyniki pomiarów

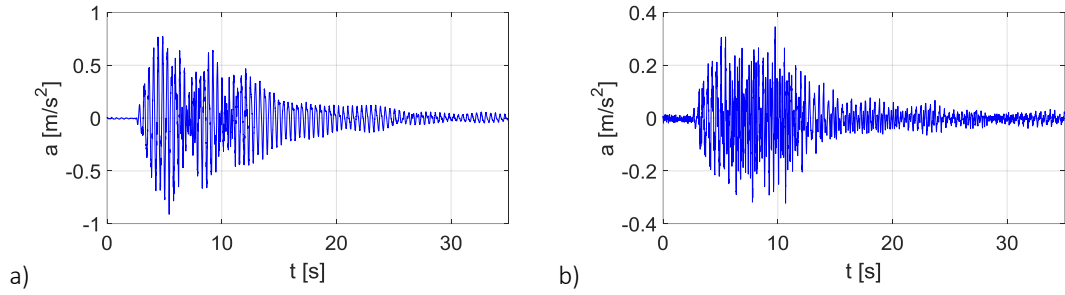
Wykresy reprezentatywnych przebiegów przyspieszeń dla poszczególnych punktów pomiarowych zarejestrowane podczas badań przedstawiono na rysunkach 6.17, 6.19 i 6.21. Wykresy reprezentatywnych przebiegów prędkości kątowych dla poszczególnych punktów pomiarowych zarejestrowane podczas badań przedstawiono na rysunkach 6.18, 6.20 i 6.22.



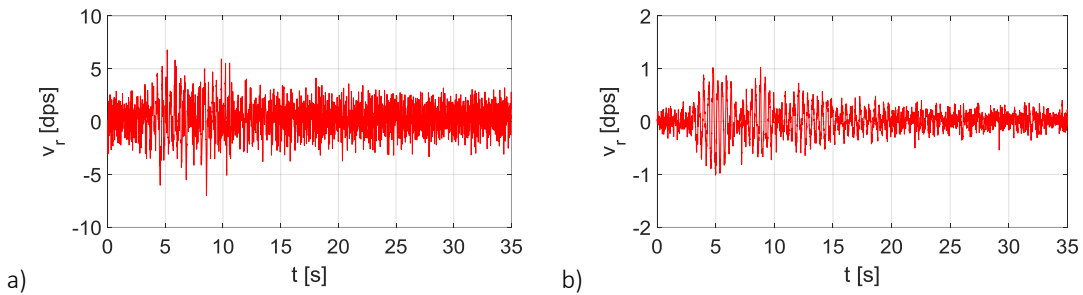
Rysunek 6.17 Przebiegi czasowe przyspieszeń kładki nad ul. Ogińskiego w Bydgoszczy od wymuszenia podskokami synchronicznymi grupy 12 osób w osi wieszaka nr 1 a) a3z - składowa pionowa przyspieszeń pomostu w miejscu wpięcia wieszaka nr 3 b) a4z - składowa pionowa przyspieszeń pomostu w miejscu wpięcia wieszaka nr 4



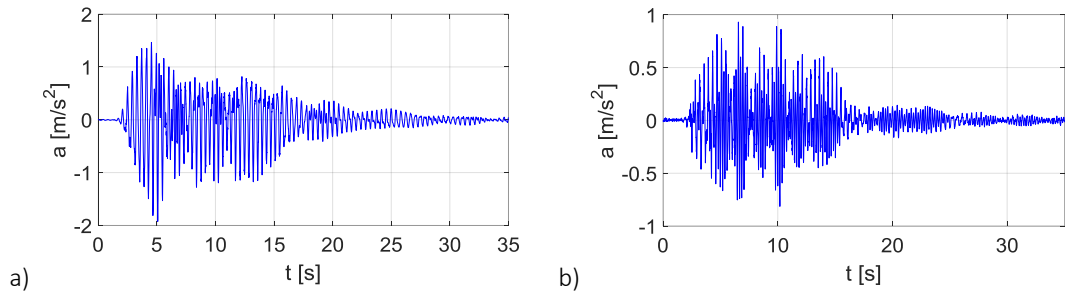
Rysunek 6.18 Przebiegi czasowe prędkości kątowych kładki nad ul. Ogińskiego w Bydgoszczy od wymuszenia podskokami synchronicznymi grupy 12 osób w osi wieszaka nr 1 a) a3z - prędkość kątowa pomostu w miejscu wpięcia wieszaka nr 3 b) a4z - prędkość kątowa pomostu w miejscu wpięcia wieszaka nr 4



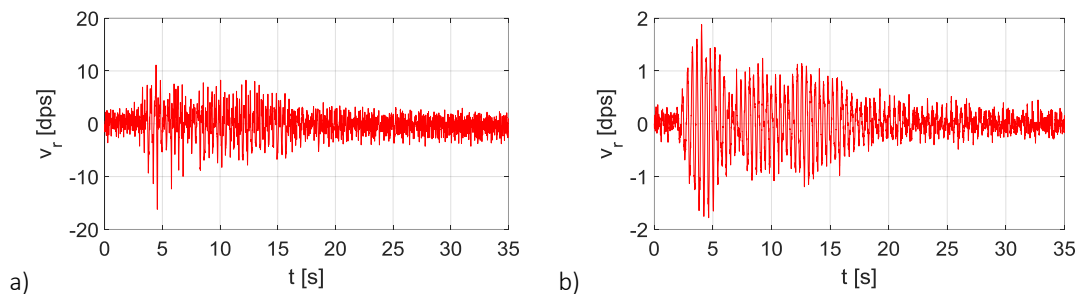
Rysunek 6.19 Przebiegi czasowe przyspieszeń kładki nad ul. Ogińskiego w Bydgoszczy od wymuszenia podskokami synchronicznymi grupy 6 osób w osi wieszaka nr 2 a) a4z - składowa pionowa przyspieszeń pomostu w miejscu wpięcia wieszaka nr 4 b) a5z składowa pionowa przyspieszeń pomostu w miejscu wpięcia wieszaka nr 5



Rysunek 6.20 Przebiegi czasowe prędkości kątowych kładki nad ul. Ogińskiego w Bydgoszczy od wymuszenia podskokami synchronicznymi grupy 6 osób w osi wieszaka nr 2 a) ż4 - prędkość kątowa pomostu w miejscu wpięcia wieszaka nr 4 b) ż5 - prędkość kątowa pomostu w miejscu wpięcia wieszaka nr 5



Rysunek 6.21 Przebiegi czasowe przyspieszeń kładki nad ul. Ogińskiego w Bydgoszczy od wymuszenia marszem synchronicznym grupy 12 osób a) a4z - składowa pionowa przyspieszeń pomostu w miejscu wpięcia wieszaka nr 4 b) a5z - składowa pionowa przyspieszeń pomostu w miejscu wpięcia wieszaka nr 5



Rysunek 6.22 Przebiegi czasowe prędkości kątowych kładki nad ul. Ogińskiego w Bydgoszczy od wymuszenia marszem synchronicznym grupy 12 osób a) ż4 - prędkość kątowa pomostu w miejscu wpięcia wieszaka nr 4 b) ż5 - prędkość kątowa pomostu w miejscu wpięcia wieszaka nr 5

Na podstawie analizy wyników badań przemieszczeń pionowych, przyspieszeń i prędkości kątowych zarejestrowanych przy próbach dynamicznych oszacowano następujące parametry dynamiczne konstrukcji przęsta:

- ✓ logarytmiczny dekrement tłumienia konstrukcji nośnej obiektu:  $\nu_{pom} \approx 0,022$ ,
- ✓ częstotliwości drgań własnych konstrukcji kładki (rysunku 6.23 i 6.24).



$$f_{2,pom.}=1,15 \text{ Hz}$$

$$f_{2,teor.}=1,13 \text{ Hz}$$

$$f_{3,pom.}=2,30 \text{ Hz}$$

$$f_{3,teor.}=2,31 \text{ Hz}$$

$$f_{4,pom.}=2,45 \text{ Hz}$$

$$f_{4,teor.}=2,35 \text{ Hz}$$

$$f_{10,pom.}=4,95 \text{ Hz}$$

$$f_{10,teor.}=5,02 \text{ Hz}$$

Rysunek 6.23 Zestawienie pomierzonych i numerycznych częstotliwości drgań kładki nad ul. Ogińskiego w Bydgoszczy bez uwzględnienia współpracy barieroporęczy



$$f_{2,pom.}=1,15 \text{ Hz}$$

$$f_{2,teor.}=1,13 \text{ Hz}$$

$$f_{3,pom.}=2,30 \text{ Hz}$$

$$f_{3,teor.}=2,31 \text{ Hz}$$

$$f_{4,pom.}=2,45 \text{ Hz}$$

$$f_{4,teor.}=2,39 \text{ Hz}$$

$$f_{10,pom.}=5,04 \text{ Hz}$$

$$f_{10,teor.}=5,04 \text{ Hz}$$

Rysunek 6.24 Zestawienie pomierzonych i numerycznych częstotliwości drgań kładki nad ul. Ogińskiego w Bydgoszczy z uwzględnieniem współpracy barieroporęczy

W przedstawionym przypadku kładki nad ul. Ogińskiego w Bydgoszczy, pomierzone sygnały prędkości kątowych umożliwiły wyznaczenie zarówno częstotliwości drgań własnych jak i logarytmicznego dekrementu tłumienia przy wymuszeniach bazujących na poruszających się grupach ludzi. Uzyskano dobrą zgodność doświadczalnie wyznaczanych częstotliwości drgań własnych z pomiarów akcelerometrycznych i żyroskopowych. Jednak nie uzyskano zadowalających wyników przy wyznaczaniu eksperymentalnych postaci drgań własnych bazujących na pomiarach rotacji. Przy wymuszeniach bazujących na obciążeniach impulsowych, amplitudy pomierzonych sygnałów prędkości kątowych były zbyt małe, w stosunku do szumów pomiarowych, aby umożliwić wyznaczenie na ich podstawie postaci drgań własnych konstrukcji. Zarejestrowane podczas testów wyniki, mogą dostarczać dodatkowych danych o konstrukcji podczas badań pod próbnym obciążeniem, ale nie mogły być użyte do przeprowadzenia aktualizacji parametrów na podstawie pomiarów rotacyjnych stopni swobody.

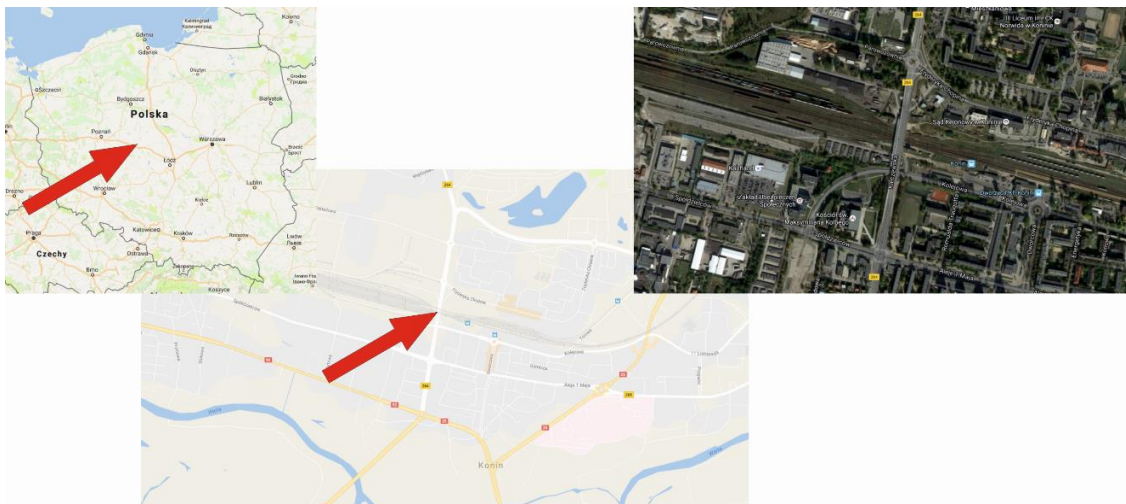


## 6.4 Wiadukt Brańskiego w Koninie

Wiadukt Brańskiego (rysunek 6.25) znajduje się w ciągu ulicy Kleczewskiej w Koninie nad ul. Kolejową oraz linią PKP Poznań-Warszawa, w km 0+550,00 – 0+850,00 (rysunek 6.26). Inwestycja ma na celu przeprowadzenie bezkolizyjnie ruchu drogowego nad ul. Kolejową oraz linią PKP Poznań-Warszawa w mieście Konin.



Rysunek 6.25 Widok wiaduku Brańskiego z boku oraz od spodu konstrukcji.



Rysunek 6.26 Lokalizacja wiaduku Brańskiego w Koninie.

### 6.4.1 Opis obiektu

Konstrukcję nośną stanowi dziewięcioprzęsłowy, zespolony ustrój ciągły belkowo - płytowy. Przekrój poprzeczny składa się z 10 dźwigarów blachownicowych o stałej wysokości, w rozstawie co 2,10m, zespolonych z żelbetową płytą pomostu o grubości 0,21m i żelbetowymi poprzecznikami nad podporami skrajnymi i pośrednimi. Ustrój opiera się na łożyskach garnkowych (3 szt. na każdej podporze). Przyczółki wykonano jako masywne, z elementów prefabrykowanych zwieńczonych żelbetowym wieńcem. Każdy z filarów składa się z trzech słupów o przekroju prostokątnym. Przyczółki wiaduku są masywne, wykonane z elementów prefabrykowanych. Konstrukcja wiaduku została zaprojektowana na obciążenie klasy A wg PN-85/S-10030.

Podstawowe parametry geometryczne konstrukcji nośnej wiaduktu:

- ✓ Długość obiektu:  $L_c = 202,15$  m
- ✓ Rozpiętość teoretyczna przęseł:  $L_t = 24,40 + 24,80 + 6 \times 21,80 + 21,35$  m
- ✓ Szerokość całkowita:  $B_c = 21,40 \div 21,50$  m
- ✓ Szerokość jezdni:  $B_j = 15,00$  m
- ✓ Kąt skosu wiaduktu:  $\alpha = 90,0^\circ$

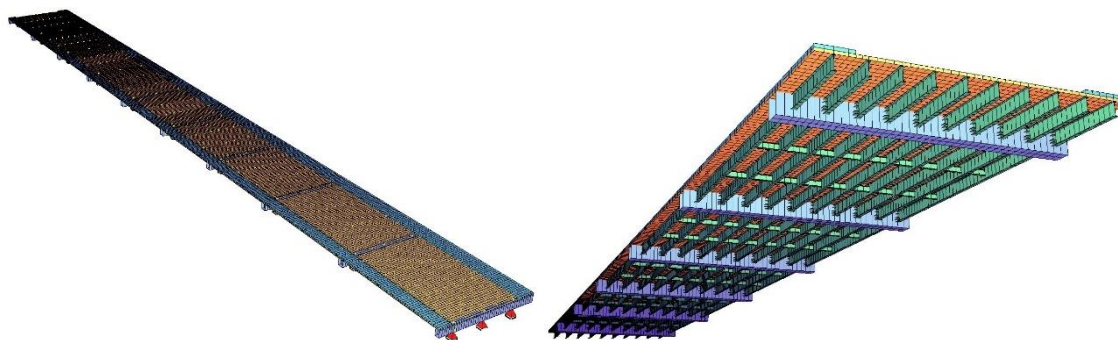
### 6.4.2 Model MES

Model obliczeniowy obiektu to przestrzenny układ powłokowo - belkowy. Obliczenia wykonano Metodą Elementów Skończonych (MES) przy wykorzystaniu programu SOFiStiK (rysunek 6.27).

Płytę pomostu oraz kapy chodnikowe opisano 4-węzłowymi powłokowymi elementami skończonymi. Dźwigiary główne oraz poprzecznice opisano 2-węzłowymi elementami belkowymi z uwzględnieniem mimośrodków. Parametry geometryczne i materiałowe konstrukcji przyjęto na podstawie dokumentacji obiektu, a następnie po badaniach, na podstawie danych dotyczących betonu wbudowanego w płytę konstrukcji, zaktualizowano model obliczeniowy.

Wygenerowany model konstrukcji składał się z:

- ✓ siatki 17.808 węzłów,
- ✓ 21.112 elementów powłokowych,
- ✓ 5.116 elementów belkowych,
- ✓ 41 więzów podporowych.



Rysunek 6.27 Wizualizacje modelu MES wiaduktu Brańskiego w Koninie.

### 6.4.3 Program badań in situ

Wiadukt został poddany badaniom statycznym i dynamicznym. Badania statyczne były elementem badań odbiorowych wiaduktu i polegały na sprawdzeniu odpowiedzi konstrukcji obciążonej samochodami typu MERCEDES-BENZ 4140. Podczas badań mierzono przemieszczenia pionowe - ugięcia konstrukcji przęsła, odkształcenia/naprężenia w dźwigarach głównych, temperaturę konstrukcji w czasie badań, przemieszczenia poziome na łożysku ruchomym od strony Kalisza, oraz osiadania podpór.

Badania dynamiczne obejmowały:

- ✓ pomiary przebiegów przemieszczeń pionowych - ugięć konstrukcji przęsła,
- ✓ pomiary przebiegów przyspieszeń konstrukcji ustroju,
- ✓ pomiary prędkości kątowej wybranych punktów przęsła.

Ogółem podczas badań dynamicznych mierzone i rejestrowane były przebiegi zmienności dla:

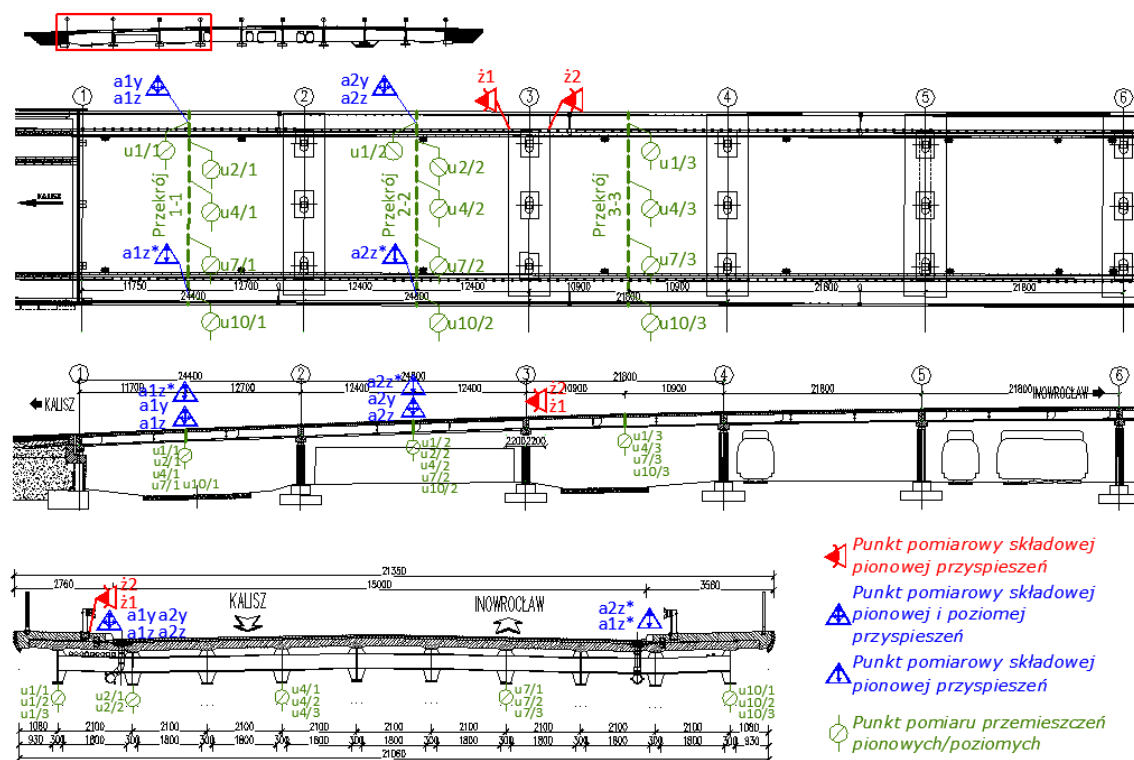
- ✓ 14 punktów pomiarowych przemieszczeń pionowych - ugięć,
- ✓ 6 punktów pomiarowych przyspieszeń konstrukcji przęsła,
- ✓ 2 punktów pomiarowych prędkości kątowej (żyroskopy MEMS).

Dynamiczne pomiary przemieszczeń pionowych – ugięć, odkształceń/naprężeń, przyspieszeń i prędkości kątowych konstrukcji przeprowadzono przy realizacji 20 różnych testów – przejazdów obciążenia próbnego. Do badań dynamicznych przyjęto zestaw obciążenia próbnego złożony z jednego oraz dwóch samochodów 4-osioowych o charakterystyce pojazdu typu MERCEDES-BENZ 4140, poruszających się z różnymi prędkościami po obiekcie.

Przebiegi zmienności mierzonych parametrów rejestrowano przy:

- ✓ przejazdach jednego samochodu poruszającego się z prędkościami  $V = 10, 20, 40, 50$  km/h po gładkiej nawierzchni,
- ✓ przejazdach jednego samochodu poruszającego się z prędkościami  $V = 10, 20$  i  $30$  km/h przez sztuczną przeszkodę w formie progu wysokości  $10$ cm ustawionego w przekroju pomiarowym 1-1 i 2-2,
- ✓ przejazdach dwóch samochodów, jeden za drugim, poruszających się z prędkościami  $V = 10, 20$  i  $30$  km/h, przez sztuczną przeszkodę w formie progu wysokości  $10$ cm ustawionego w przekroju pomiarowym 1-1 i 2-2,
- ✓ jednego samochodu poruszającego się po gładkiej nawierzchni z prędkościami  $V = 20, 30$  km/h i hamującego w przekroju pomiarowym 1-1 i 2-2.

Rozmieszczenie przekrojów i punktów pomiarowych przedstawiono na rysunku 6.28.

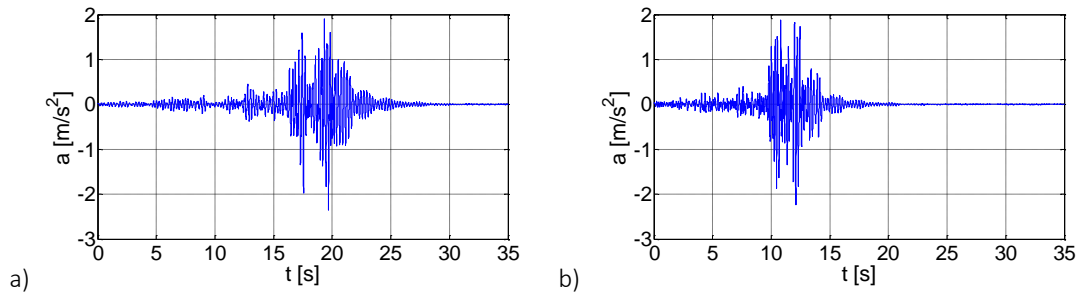


Rysunek 6.28 Rozmieszczenie punktów pomiarowych podczas badań wiaduktu Brińskiego w Koninie.

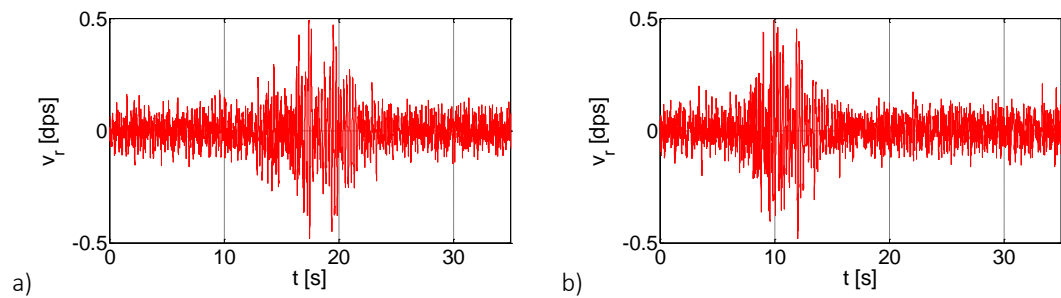
Prędkości obciążenia próbnego uzależnione były od obiektywnych warunków wynikających z możliwości zastosowanych pojazdów oraz stanu technicznego i parametrów geometrycznych dojazdów oraz jezdni na obiekcie (spadki, łuki, stan techniczny dojazdów do obiektu itp.). Maksymalna prędkość poruszającego się obciążenia próbnego nie przekraczała wartości  $V=50$  km/h. W każdym teście dynamicznym pojazdy przejeżdżały przez obiekt ze stałą prędkością. Procedura badań dynamicznych została tak opracowana, aby na obiekcie znajdował się tylko określony zestaw pojazdów obciążających. Kolejny przejazd zestawu następował dopiero po całkowitym wytlumieniu drgań spowodowanych poprzednim testem dynamicznym.

#### 6.4.4 Wyniki pomiarów

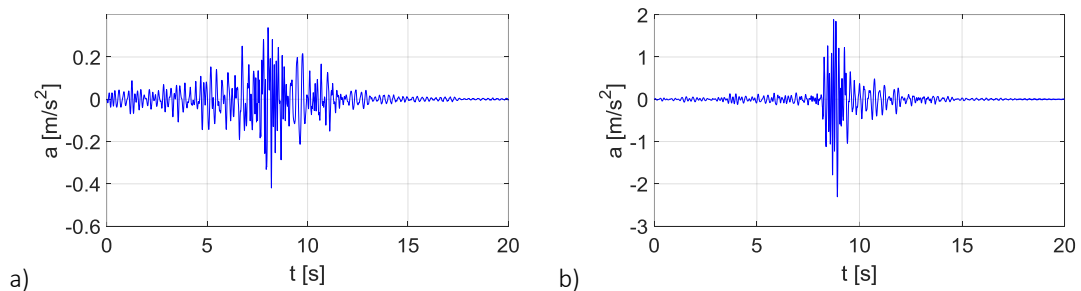
Wykresy reprezentatywnych przebiegów przyspieszeń dla poszczególnych punktów pomiarowych zarejestrowane podczas badań dynamicznych przedstawiono na rysunkach 6.29, 6.31 i 6.33. Wykresy reprezentatywnych przebiegów prędkości kątowych dla poszczególnych punktów pomiarowych zarejestrowane podczas badań dynamicznych przedstawiono na rysunkach 6.30, 6.32 i 6.34.



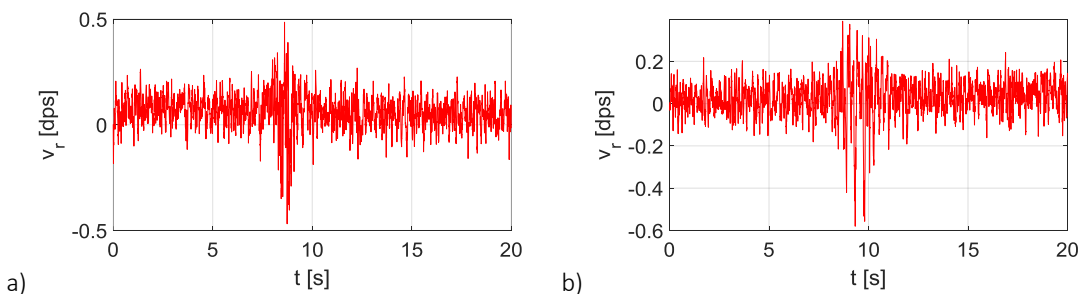
Rysunek 6.29 Przebiegi czasowe przyspieszeń pionowych w punkcie a2z w przekroju 2-2 wiaduktu Brańskiego w Koninie od wymuszenia przejazdem dwóch samochodów, jeden za drugim, przez sztuczną przeszkodę w formie progu wysokości 10 cm ustawionego w przekroju pom. 1-1 a) z prędkością  $v=20$  km/h b) z prędkością  $v=30$  km/h.



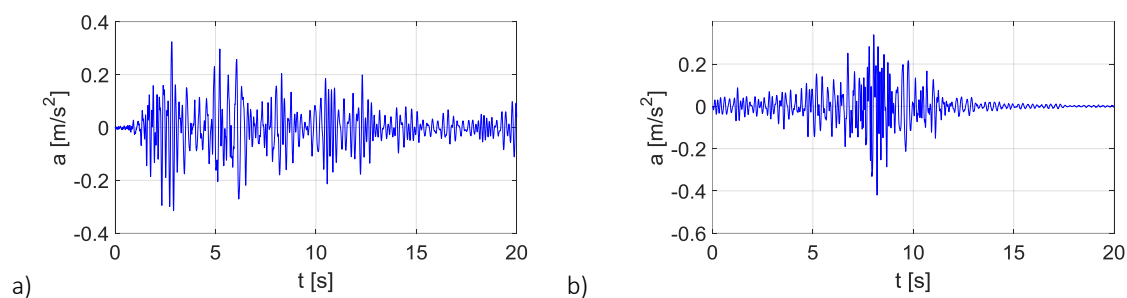
Rysunek 6.30 Przebiegi czasowe prędkości kątowych w punkcie z1 wiaduktu Brańskiego w Koninie od wymuszenia przejazdem dwóch samochodów, jeden za drugim, przez sztuczną przeszkodę w formie progu wysokości 10 cm ustawionego w przekroju pom. 1-1 a) z prędkością  $v=20$  km/h b) z prędkością  $v=30$  km/h.



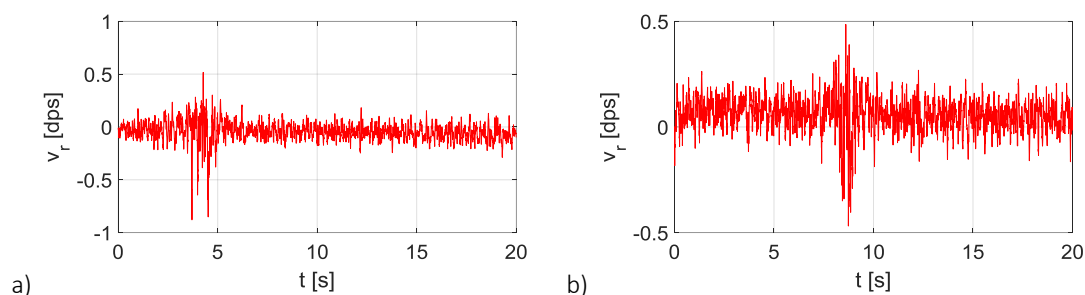
Rysunek 6.31 Przebiegi czasowe przyspieszeń pionowych w punkcie a2z w przekroju 2-2 wiaduktu Brańskiego w Koninie od wymuszenia przejazdem dwóch samochodów, jeden za drugim, przez sztuczną przeszkodę w formie progu wysokości 10 cm ustawionego w przekroju pom. 2-2 a) z prędkością  $v=20$  km/h b) z prędkością  $v=30$  km/h.



Rysunek 6.32 Przebiegi czasowe prędkości kątowych w punkcie z1 wiaduktu Brańskiego w Koninie od wymuszenia przejazdem dwóch samochodów, jeden za drugim, przez sztuczną przeszkodę w formie progu wysokości 10 cm ustawionego w przekroju pom. 2-2 a) z prędkością  $v=20$  km/h b) z prędkością  $v=30$  km/h.



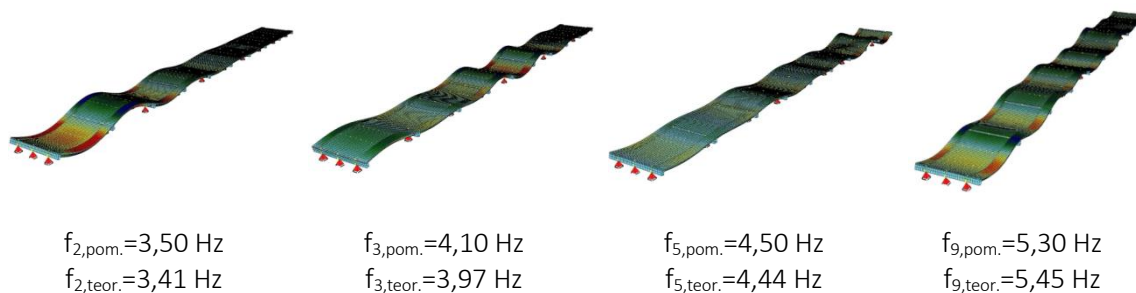
Rysunek 6.33 Przebiegi czasowe przyspieszeń pionowych w punkcie a2z w przekroju 2-2 wiaduku Brańskiego w Koninie od wymuszenia przejazdem jednego samochodu po gładkiej nawierzchni a) z prędkością  $v=40$  km/h b) z prędkością  $v=50$  km/h.



Rysunek 6.34 Przebiegi czasowe prędkości kątowych w punkcie z1 wiaduku Brańskiego w Koninie od wymuszenia przejazdem jednego samochodu po gładkiej nawierzchni a) z prędkością  $v=40$  km/h b) z prędkością  $v=50$  km/h.

Na podstawie analizy wyników badań przemieszczeń pionowych, przyspieszeń i prędkości kątowych zarejestrowanych przy próbach dynamicznych oszacowano następujące parametry dynamiczne konstrukcji przęsta:

- ✓ logarytmiczny dekrement tłumienia konstrukcji nośnej obiektu:  $\nu_{pom} \approx 0,06$ ,
- ✓ częstotliwości drgań własnych konstrukcji wiaduku (rysunek 6.35).



Rysunek 6.35 Zestawienie pomierzonych i numerycznych częstotliwości drgań wiaduku Brańskiego w Koninie.

Przedstawione powyżej przebiegi prędkości kątowych, potwierdzają że użycie żyroskopów podczas badań dynamicznych pod próbnym obciążeniem, pozwala na wyznaczenie częstotliwości drgań własnych i może stanowić dodatkowe źródło informacji o zachowaniu się konstrukcji.

## 6.5 Podsumowanie wyników pomiarów z użyciem czujników rotacji

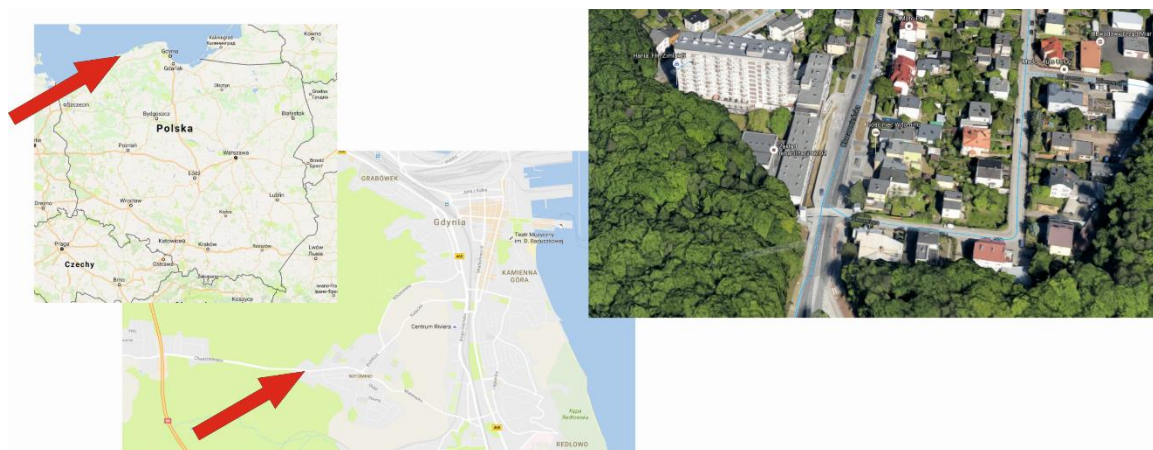
Przeprowadzone, badania in situ na dwóch kładkach oraz wiadukcie drogowym potwierdziły, że pomiar prędkości kątowej przy użyciu żyroskopów typu MEMS dostarcza dodatkowych informacji o stanie konstrukcji. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że zastosowane czujniki żyroskopowe typu MEMS, charakteryzują się relatywnie dużym poziomem szumów w stosunku do wartości mierzonych w przypadku badań odbiorowych konstrukcji mostowych. Istnieją duże ograniczenia możliwości zastosowania czujników bazujących na pomiarze prędkości rotacji. Z praktycznego punktu widzenia, przeszkodą w pomiarze rotacji jest relatywnie duża sztywność przęsła badanej konstrukcji, która powoduje, że amplitudy prędkości rotacji, dla niskich częstotliwości drgań, są bardzo małe. Małe amplitudy pionowych drgań giętnych mostu, które są wzbudzane poprzez dynamiczne oddziaływania środowiskowe lub dedykowane urządzenia typu wzbudniki, skutkują bardzo małymi amplitudami zmian prędkości kątowych wybranych punktów konstrukcji. Jednak, mając na uwadze bardzo szybki rozwój technologii pomiarowych jest bardzo prawdopodobne, że czujniki, które pojawią się wkrótce na rynku, pozwolą na znacznie dokładniejsze pomiary i korzystnym będzie wykorzystywanie ich w standardowych, objętych programem badań in situ, badaniach konstrukcji mostowych.

## 6.6 Kładka nad ulicą Chwarznieńską

Przedmiotowy obiekt (rysunek 6.36) to jednoprzęsłowa kładka dla pieszych nad ul. Chwarznieńską w km 0+966,21 w Gdyni (rysunek 6.37). Budowa kładki jest jednym z elementów rozbudowy ulicy Chwarznieńskiej w Gdyni mającej na celu połączenie jej z ul. Chwaszczyńską.



Rysunek 6.36 Widok na kładkę nad ul Chwarznieńską w Gdyni



Rysunek 6.37 Lokalizacja kładki nad ul Chwarznieńską w Gdyni

### 6.6.1 Opis obiektu

Ustrój nośny kładki stanowią cztery podłużne dźwigary i poprzecznicę blachownicową, w których w płaszczyźnie pasów górnych znajduje się pozioma blacha wzmocniona dodatkowo podłużnymi żebrami otwartymi z płaskowników. Konstrukcja przęsła oparta jest na filarach za pośrednictwem łożysk elastomerowych. Podpory główne wykonano w formie litery „T” ze słupem o przekroju spłaszczonym koła, które zamocowano w ławie fundamentowej w sposób sztywny. Konstrukcja kładki została zaprojektowana na obciążenie tłumem pieszych wg PN-85/S-10030.

Podstawowe parametry geometryczne konstrukcji nośnej kładki:

- ✓ Rozpiętość pomostu:  $L_{tp} = 21,00$  m
- ✓ Szerokość użytkowa kładki:  $B_u = 3,75$  m
- ✓ Szerokość całkowita kładki:  $B_c = 4,968$  m
- ✓ Kąt skrzyżowania z przeszkodą:  $90^\circ$
- ✓ Wysokość konstrukcyjna:  $H_k = 0,530 \div 0,555$  m

### 6.6.2 Modele MES

Model obliczeniowy obiektu zdefiniowano jako przestrzenny układ powłokowo – belkowy (rysunek 6.38). Obliczenia wykonano Metodą Elementów Skończonych (MES) przy wykorzystaniu programu SOFiStiK.

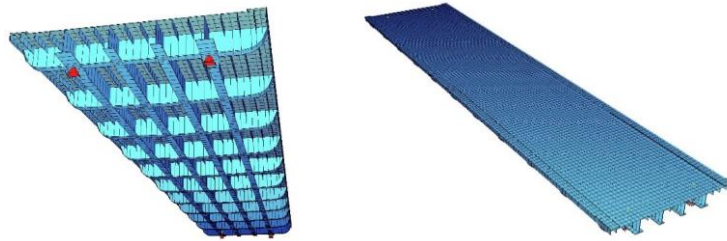
Konstrukcję płyty pomostu opisano 4-węzłowymi powłokowymi elementami skończonymi. Dźwigary główne, poprzecznicę oraz żebra modelowano 2-węzłowymi elementami belkowymi z uwzględnieniem mimośrodów. Parametry geometryczne i materiałowe konstrukcji przyjęto na podstawie rysunków konstrukcyjnych obiektu.



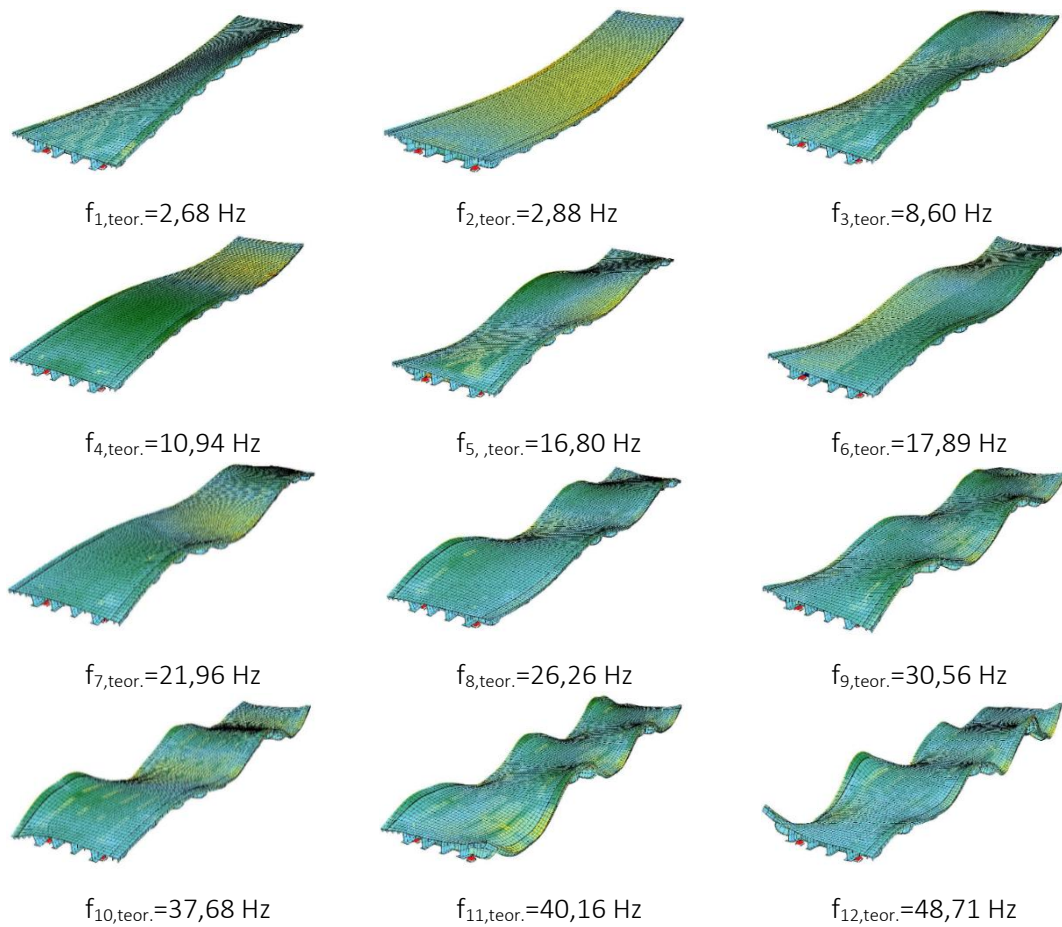
Dla modelu numerycznego wykonano analizę modalną, która pozwoliła na wyznaczenie częstotliwości i postaci drgań własnych modelu (Rysunek 6.39).

Wygenerowany model powłokowo-belkowy konstrukcji przęsła składał się z:

- ✓ siatki 5.551 węzłów,
- ✓ 5.632 elementów powłokowych,
- ✓ 3.190 elementów belkowych,
- ✓ 8 węzłów podporowych.



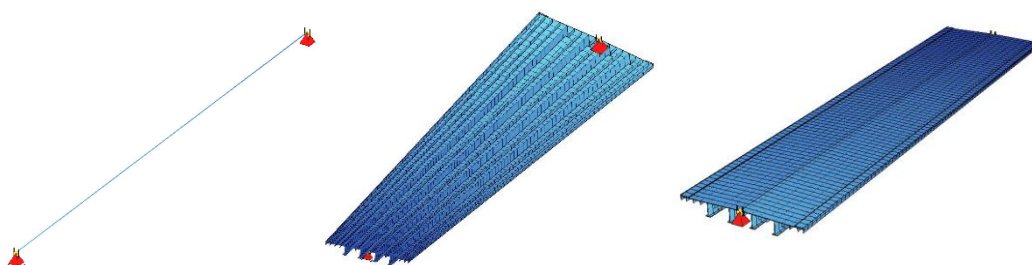
Rysunek 6.38 Wizualizacje modelu MES kładki nad ul. Chwarznieńską w Gdyni



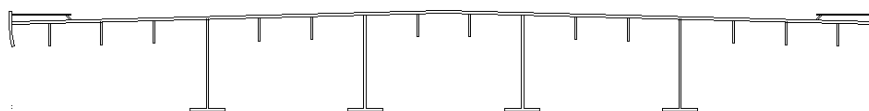
Rysunek 6.39 Zestawienie numerycznych częstotliwości drgań kładki nad ulicą Chwarznieńską dla modelu powłokowo-belkowego

Dodatkowo stworzono uproszczony model belkowy kładki (rysunek 6.40). Składał się on z 81 węzłów, 80 elementów belkowych oraz 5 więzów kinematycznych. Wygenerowano jeden przekrój poprzeczny zgodny z rysunkiem 6.41. Dla modelu uproszczonego również przeprowadzono analizę modalną, której wyniki dla trzech pierwszych częstotliwości i postaci drgań zaprezentowano na rysunku 6.42.

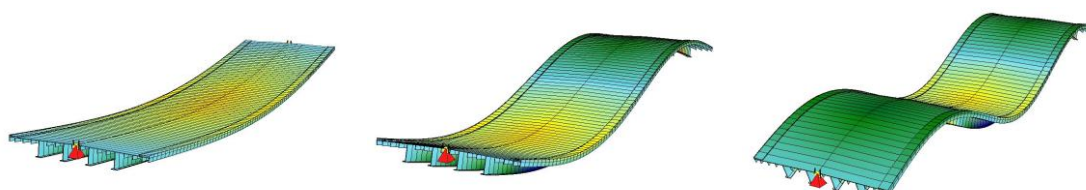
Porównując odpowiadające sobie postacie drgań z modelu belkowo – powłokowego z modelem powłokowym, można zapisać, że dla modelu belkowo – powłokowego pierwsze trzy częstotliwości giętne drgań wynoszą odpowiednio 2,88 Hz, 10,94 Hz oraz 21,96 Hz. Dla modelu czysto belkowego zaś częstotliwości te wynoszą 2,84 Hz, 11,30 Hz oraz 25,28 Hz. Wskazuje to na wysoką zgodność charakterystyk dynamicznych obu modeli. Procentowe różnice pomiędzy modelami dla poszczególnych częstotliwości wynoszą odpowiednio: 1,4 %, 3,2 % oraz 13,1 %.



Rysunek 6.40 Schemat statyczny wraz z wizualizacją uproszczonego modelu MES kładki nad ulicą Chwarznieńską



Rysunek 6.41 Przekrój poprzeczny zaimplementowanych elementów belkowych w uproszczonym modelu MES kładki



$$f_{1, \text{teor.}} = 2,84 \text{ Hz}$$

$$f_{2, \text{teor.}} = 11,30 \text{ Hz}$$

$$f_{3, \text{teor.}} = 25,28 \text{ Hz}$$

Rysunek 6.42 Zestawienie numerycznych częstotliwości drgań kładki nad ulicą Chwarznieńską dla modelu belkowego

### 6.6.3 Program badań in situ

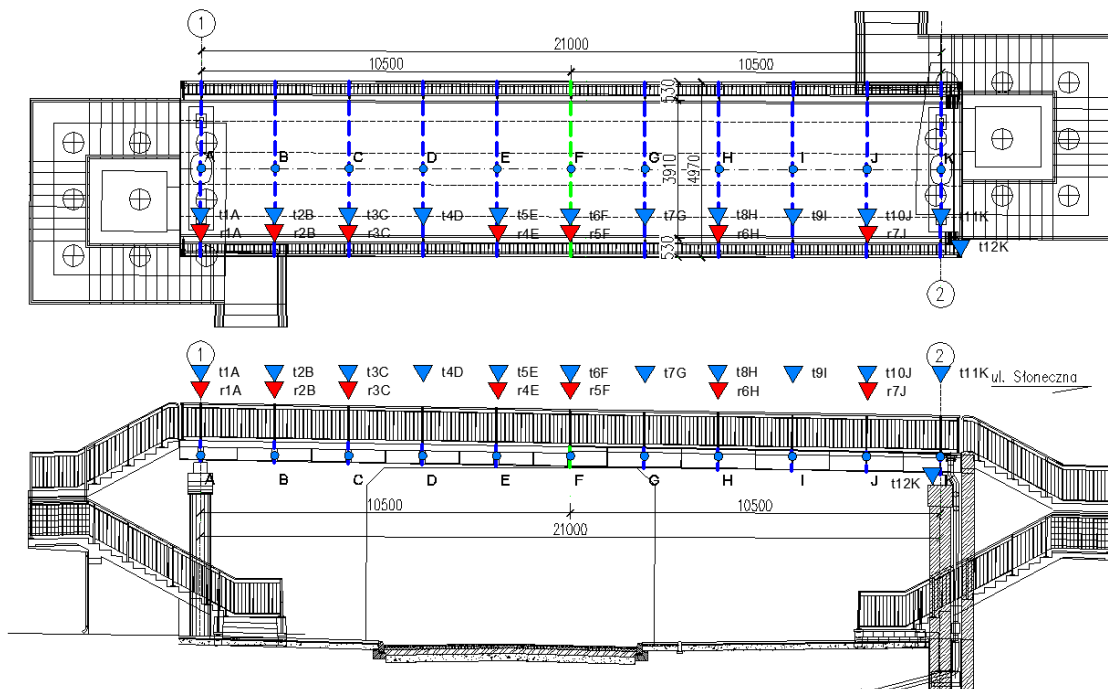
Kładka została poddana badaniom in situ dwukrotnie. W pierwszym etapie przeprowadzono badania odbiorowe kładki, które obejmowały badania statyczne. Odbyły się one 03.04.2014 roku.

Badania statyczne obiektu podczas próbnego obciążenia obejmowały pomiary:

- ✓ przemieszczeń pionowych – ugięć konstrukcji przęsła,
- ✓ pomiary przemieszczeń poziomych na łożysku ruchomym,
- ✓ pomiary przyrostów odkształceń/naprężeń w dźwigarze głównym,
- ✓ pomiary osiadania podpór.

Kolejnym etapem było przeprowadzenie badań dynamicznych, nie objętych programem próbnego obciążenia. Odbyły się one 22.09.2015 roku. Ich celem była identyfikacja paramentów modalnych kładki, w tym głównie jej częstotliwości i postaci drgań oraz diagnostyka obiektu. Badania swoim zakresem obejmowały pomiar (rysunek 6.43 i 6.44):

- ✓ 12 punktów pomiarowych przyspieszeń konstrukcji przęsła,
- ✓ 7 punktów pomiarowych prędkości kątowej (żyroskopy MEMS),
- ✓ 3 punktów pomiaru siły przekazywanej przez wzbudnik na konstrukcję (wybrane testy).



Rysunek 6.43 Rozmieszczenie punktów pomiarowych przyspieszeń (t1A-t12K) oraz prędkości kątowych (r1A-r7J) podczas badań kładki nad ul Chwarzenieńską w Gdyni



Rysunek 6.44 Stanowisko pomiarowe oraz montaż czujników na kładce na ul Chwarznieńską w Gdyni

Przebiegi zmienności mierzonych parametrów rejestrowano przy następujących testach (rysunek 6.45):

- ✓ marsz 1-osoby z częstotliwością kroków zbliżoną do częstotliwości własnej konstrukcji,
- ✓ marsz synchroniczny grupy 3-osobowej z częstotliwością kroków zbliżoną do częstotliwości własnej konstrukcji,
- ✓ marsz synchroniczny grupy 6-osobowej z częstotliwością kroków zbliżoną do częstotliwości własnej konstrukcji,
- ✓ marsz synchroniczny grupy 9-osobowej z częstotliwością kroków zbliżoną do częstotliwości własnej konstrukcji,
- ✓ bieg 1-osoby z częstotliwością kroków zbliżoną do częstotliwości własnej konstrukcji,
- ✓ bieg synchroniczny grupy 3-osobowej z częstotliwością kroków zbliżoną do częstotliwości własnej konstrukcji,
- ✓ bieg synchroniczny grupy 6-osobowej z częstotliwością kroków zbliżoną do częstotliwości własnej konstrukcji,
- ✓ podskoki synchroniczne grupy 7-osobowej w środku rozpiętości kładki,
- ✓ wymuszenie małym wzbudnikiem drgań w segmentach kładki 6(F-G) i 8(H-I),
- ✓ wymuszenie dużym wzbudnikiem drgań w segmentach kładki 6(F-G) i 8(H-I).

Procedura badań dynamicznych została tak opracowana, aby na obiekcie znajdował się tylko określony zestaw - grupa osób realizująca określony schemat dynamiczny, bądź koniecznie z uwagi na sposób prowadzenia badań elementy, które zostały uwzględnione w modelu numerycznym w postaci dodatkowych mas.

Kolejny test był realizowany dopiero po całkowitym wytłumieniu drgań spowodowanych wymuszeniem poprzednim. Sumarycznie przeprowadzono 47 testów dynamicznych.



Rysunek 6.45 Testy dynamiczne przeprowadzone na kładce nad ulicą Chwarznieńską a) marsz synchroniczny b) bieg synchroniczny c) podskoki d) wymuszenie małym wzbudnikiem drgań e) wymuszenie dużym wzbudnikiem drgań

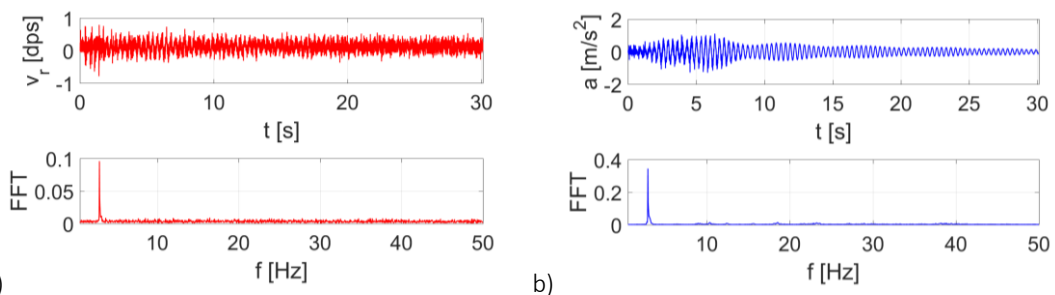
W badaniach diagnostycznych wykonano dodatkowe testy symulujące uszkodzenie konstrukcji kładki, poprzez dodanie masy skupionej. Z uwagi na lokalizację kładki nad ruchliwą trasą i trudności z zainstalowaniem stałej masy skupionej, na przykład w postaci pojemników z wodą lub płyt drogowych, wykorzystywano grupę 11 osób o łącznej masie 778,4 kg. Masa podczas badań umieszczana była kolejno w polu 3 (C-D) i 5 (E-F) badanego obiektu (rysunek 6.46).



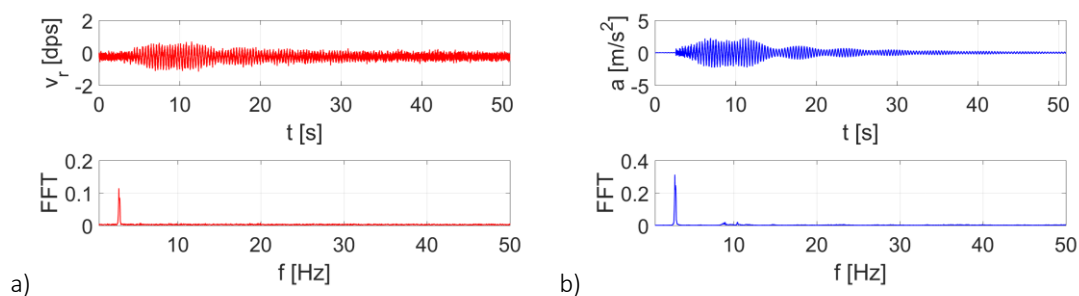
Rysunek 6.46 Położenie masy skupionej złożonej z grupy 11 osób na obiekcie w polu a) 3 (C-D) b) 5 (E-F)

### 6.6.4 Wyniki pomiarów

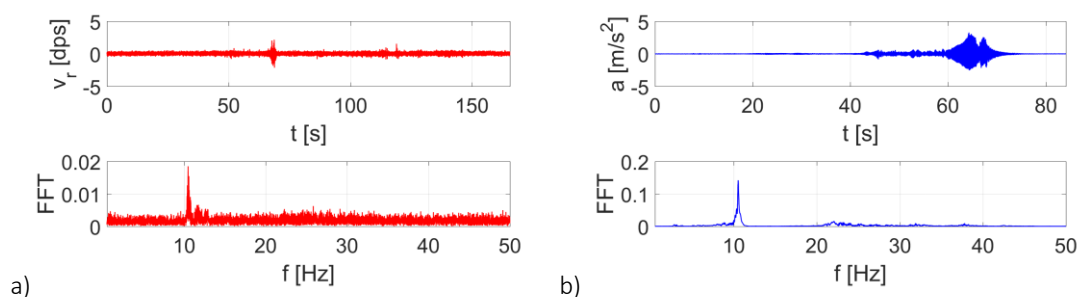
Wykresy reprezentatywnych przebiegów przyspieszeń dla poszczególnych punktów pomiarowych zarejestrowane podczas badań przedstawiono na rysunkach 6.47b, 6.48b i 6.49b. Wykresy reprezentatywnych przebiegów prędkości kątowych dla poszczególnych punktów pomiarowych zarejestrowane podczas badań przedstawiono na rysunkach 6.47a, 6.48a i 6.49a.



Rysunek 6.47 Przebiegi czasowe prędkości kątowej i przyspieszeń kładki wraz z odpowiadającą im FFT z drgań swobodnych od wymuszenia marszem synchronicznym grupy 3 osób a) r1A - prędkość kątowa b) t7G - składowa pionowa przyspieszeń.



Rysunek 6.48 Przebiegi czasowe prędkości kątowej i przyspieszeń kładki wraz z odpowiadającą im FFT z drgań swobodnych od wymuszenia marszem synchronicznym grupy 6 osób a) r2B - prędkość kątowa b) t4D - składowa pionowa przyspieszeń.



Rysunek 6.49 Przebiegi czasowe prędkości kątowej i przyspieszeń kładki wraz z odpowiadającą im FFT z drgań swobodnych od wymuszenia dużym wzbudnikiem drgań w polu nr 6 w zakresie częstotliwości 7-14Hz a) r5F - prędkość kątowa b) t4D - składowa pionowa przyspieszeń.

Pomierzone na podstawie drgań swobodnych częstotliwości drgań kładki wynoszą odpowiednio  $f_1=2,88$  Hz,  $f_2=10,45$  Hz oraz  $f_3= 23,00$  Hz. W tabeli 6.1 zamieszczono porównanie wartości częstotliwości otrzymanych z badań eksperymentalnych z częstotliwościami z modelu numerycznego powłokowo- belkowo i belkowego.

Tabela 6.1 Porównanie wartości częstotliwości drgań własny z badań eksperymentalnych z częstotliwościami drgań własnych z modelu numerycznego belkowo – powłokowego i belkowego bez uszkodzenia

Lp	Badania eksperymentalne		Model belkowo - powłokowy		Model belkowy	
	Częstotliwość $f_p$	Częstotliwość $f_{t\ p-b}$	Błąd $f_p/f_{t\ p-b}$	Częstotliwość $f_{t\ b}$	Błąd $f_p/f_{t\ b}$	
	Hz	Hz	%	Hz	%	
1	2,88	2,88	<b>0,0</b>	2,84	<b>1,4</b>	
2	10,45	10,94	<b>4,7</b>	11,30	<b>8,1</b>	
3	23,00	21,96	<b>4,5</b>	25,28	<b>9,9</b>	

Dodatkowo, zbadano odpowiedź dynamiczną konstrukcji z zasymulowanym, poprzez dodanie masy skupionej, uszkodzeniem w polu 3 (tabela 6.2) oraz w polu 5 (tabela 6.3).

Tabela 6.2 Porównanie wartości częstotliwości drgań swobodnych z badań eksperymentalnych z częstotliwościami drgań własnych z modelu numerycznego belkowo – powłokowego i belkowego z uszkodzeniem (masa)w elemencie 3

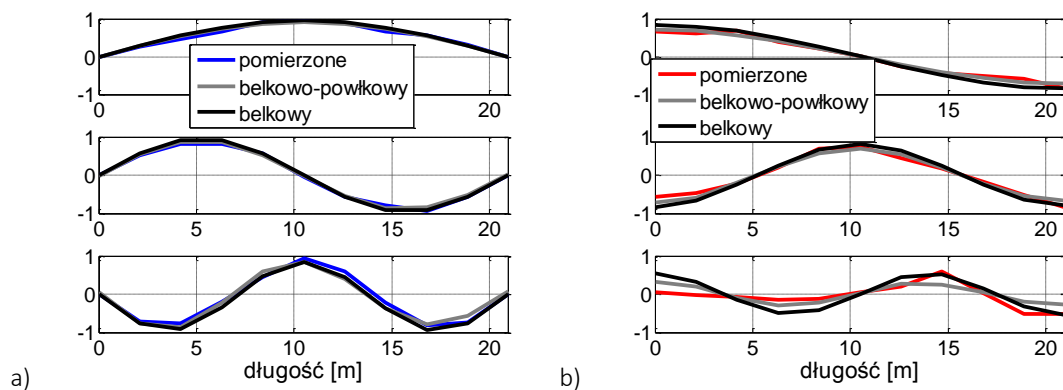
Lp	Badania eksperymentalne	Model belkowo - powłokowy		Model belkowy	
	Częstotliwość $f_p$	Częstotliwość $f_{t\ p-b}$	Błąd $f_p/f_{t\ p-b}$	Częstotliwość $f_{t\ b}$	Błąd $f_p/f_{t\ p-b}$
	Hz	Hz	%	Hz	%
1	2,82	2,84	<b>0,7</b>	2,80	<b>0,7</b>
2	10,15	10,69	<b>5,3</b>	11,05	<b>8,9</b>
3	22,90	21,70	<b>5,2</b>	25,05	<b>9,4</b>

Tabela 6.3 Porównanie wartości częstotliwości drgań swobodnych z badań eksperymentalnych z częstotliwościami drgań własnych z modelu numerycznego belkowo – powłokowego i belkowego z uszkodzeniem (masa)w elemencie 5

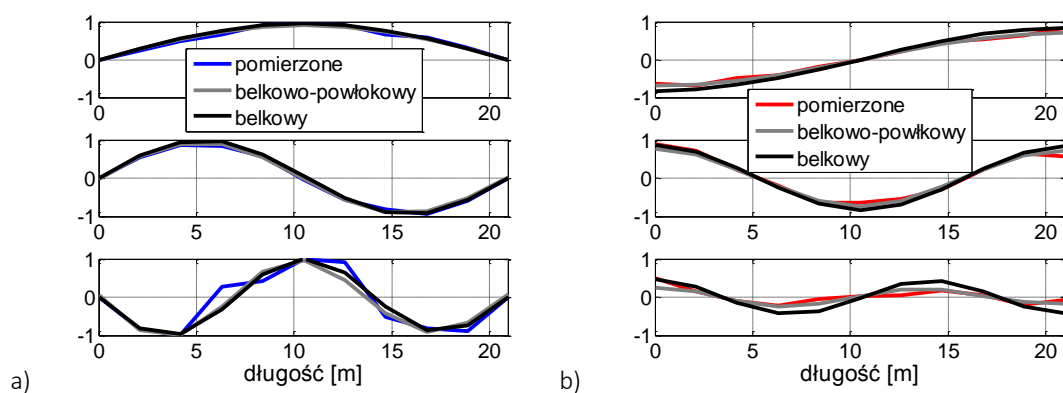
Lp	Badania eksperymentalne	Model belkowo - powłokowy		Model belkowy	
	Częstotliwość $f_p$	Częstotliwość $f_{t\ p-b}$	Błąd $f_p/f_{t\ p-b}$	Częstotliwość $f_{t\ b}$	Błąd $f_p/f_{t\ p-b}$
	Hz	Hz	%	Hz	%
1	2,78	2,81	<b>0,0</b>	2,77	<b>0,4</b>
2	10,42	10,90	<b>4,7</b>	11,28	<b>8,3</b>
3	22,40	21,65	<b>4,5</b>	24,87	<b>11,0</b>

### 6.6.5 Analiza modalna

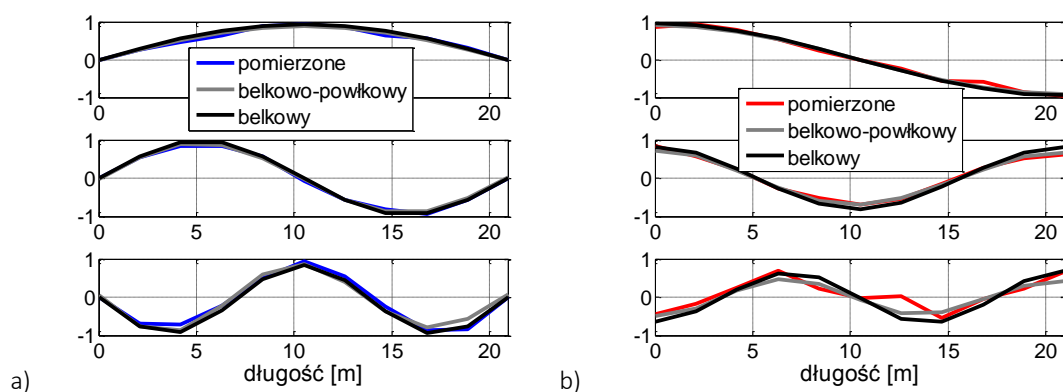
Analiza modalna kładki pozwoliła na wyznaczenie, poza częstotliwościami drgań własnych, odpowiadających im postaci drgań własnych. Postacie drgań własnych z badań eksperymentalnych porównano z wynikami z obliczeń numerycznych dla dwóch modeli MES: belkowo – powłokowego oraz belkowego. Podczas analizy wyznaczono postacie drgań własnych kładki bez uszkodzenia, z uszkodzeniem w elemencie 3 oraz z uszkodzeniem w elemencie 5. Podczas wyznaczania charakterystyk dynamicznych kładki uwzględniono wszystkie dodatkowe masy, znajdujące się na obiekcie podczas badań, niezbędne do wykonania badań w danym etapie. Wyniki analiz przedstawiono w tabelach 6.4 i 6.5 oraz na rysunkach 6.50 – 6.61. W celu porównania postaci drgań własnych posługiwano się kryterium NMD z uwagi na jego większą czułość od kryterium MAC.



Rysunek 6.50 Postacie drgań belki bez uszkodzenia przy wymuszeniu drgań dużym wzbudnikiem umieszczonym w polu 6 a) translacyjne b) rotacyjne

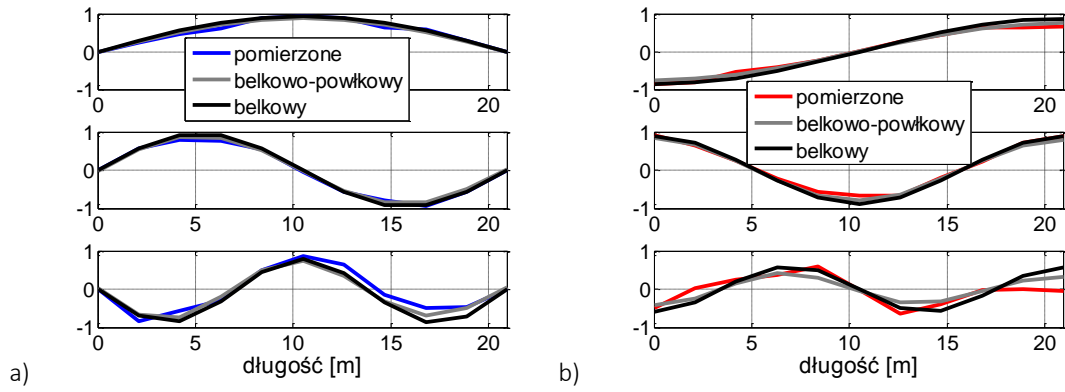


Rysunek 6.51 Postacie drgań belki bez uszkodzenia przy wymuszeniu drgań dużym wzbudnikiem umieszczonym w polu 8 a) translacyjne b) rotacyjne

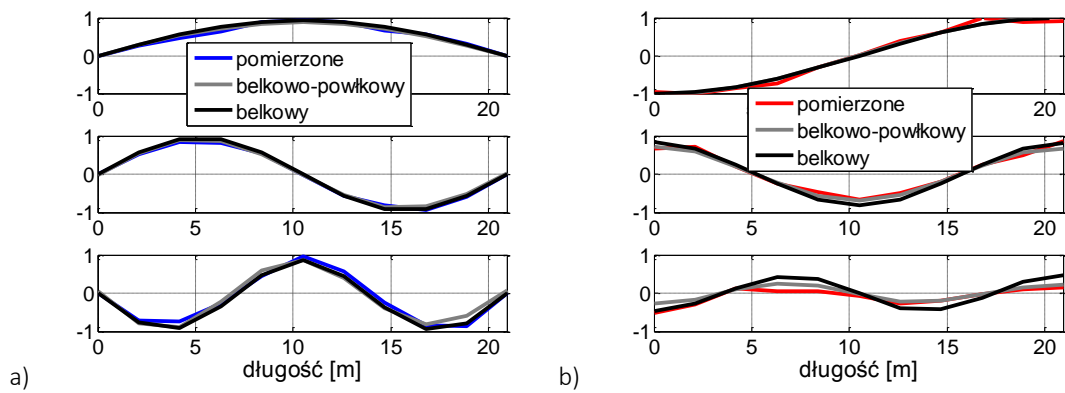


Rysunek 6.52 Postacie drgań belki z uszkodzeniem w segmencie 3 przy wymuszeniu drgań dużym wzbudnikiem umieszczonym w polu 6 a) translacyjne b) rotacyjne

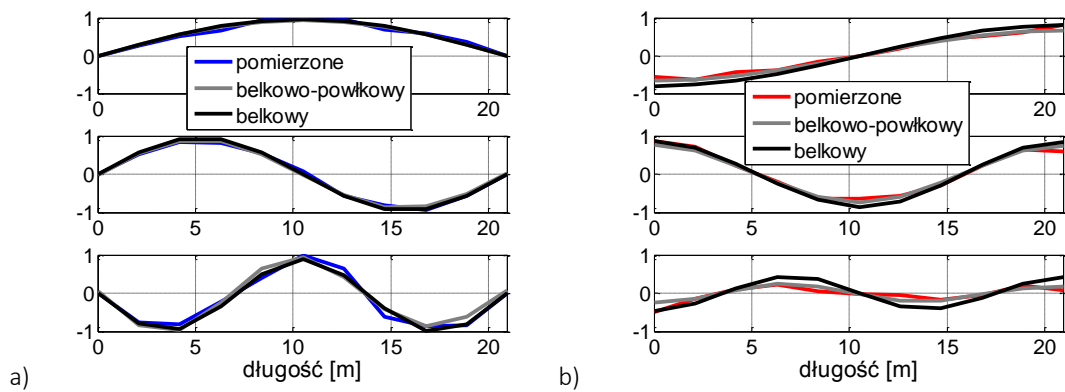




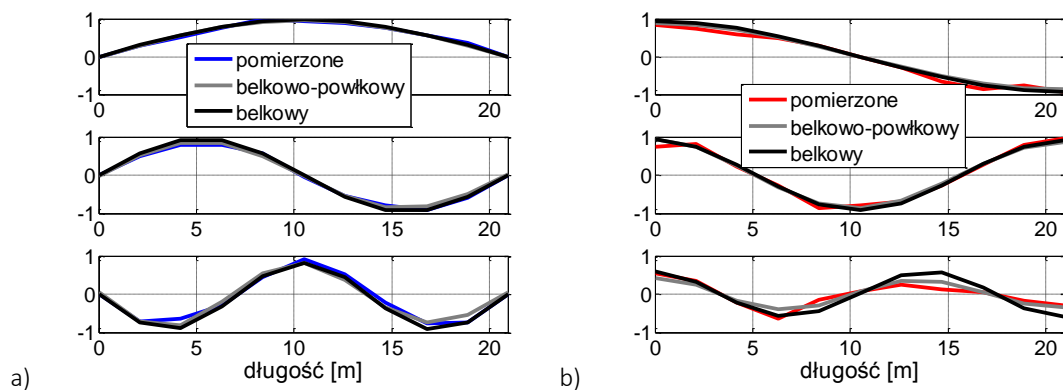
Rysunek 6.53 Postacie drgań belki z uszkodzeniem w segmencie 3 przy wymuszeniu drgań dużym wzbudnikiem umieszczonym w polu 8 a) translacyjne b) rotacyjne



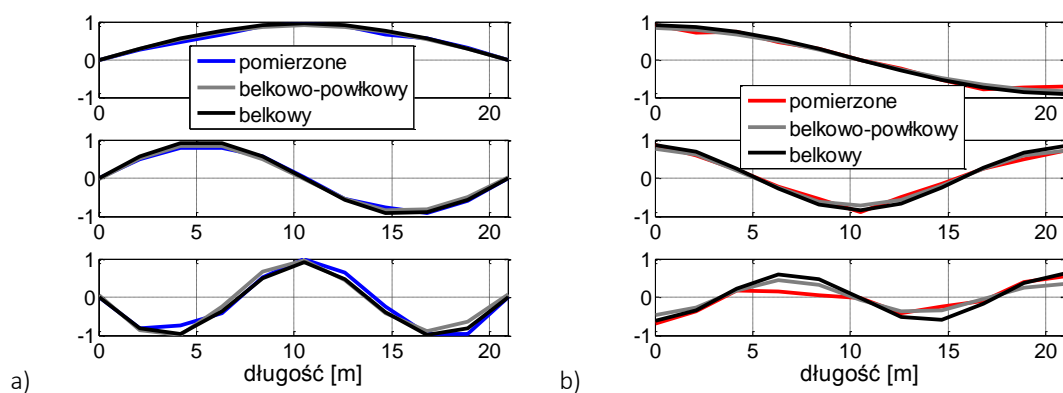
Rysunek 6.54 Postacie drgań belki z uszkodzeniem w segmencie 5 przy wymuszeniu drgań dużym wzbudnikiem umieszczonym w polu 6 a) translacyjne b) rotacyjne



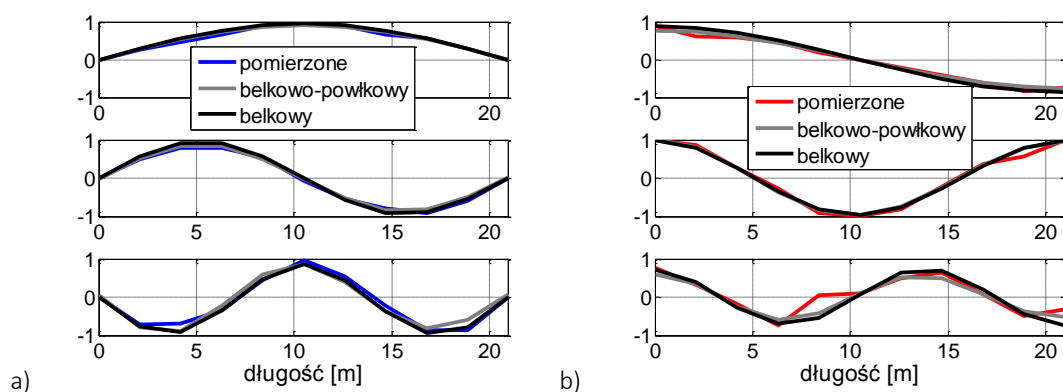
Rysunek 6.55 Postacie drgań belki z uszkodzeniem w segmencie 5 przy wymuszeniu drgań dużym wzbudnikiem umieszczonym w polu 8 a) translacyjne b) rotacyjne



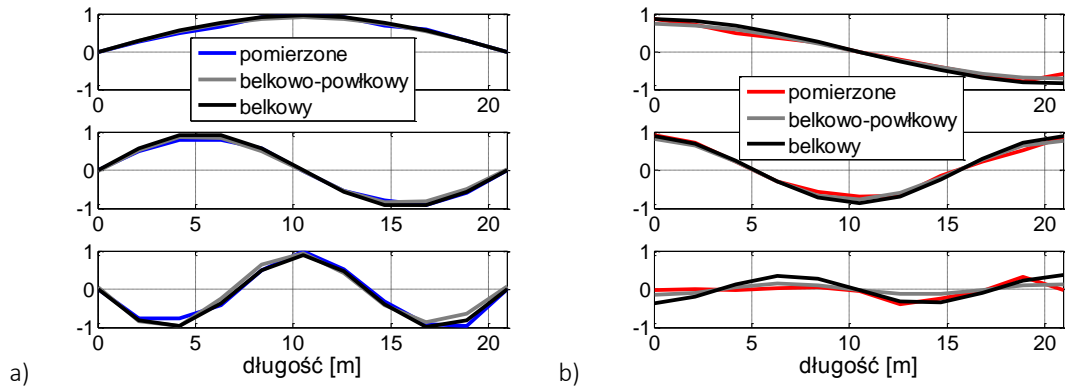
Rysunek 6.56 Postacie drgań belki bez uszkodzenia przy wymuszeniu drgań małym wzbudnikiem umieszczonym w polu 6 a) translacyjne b) rotacyjne



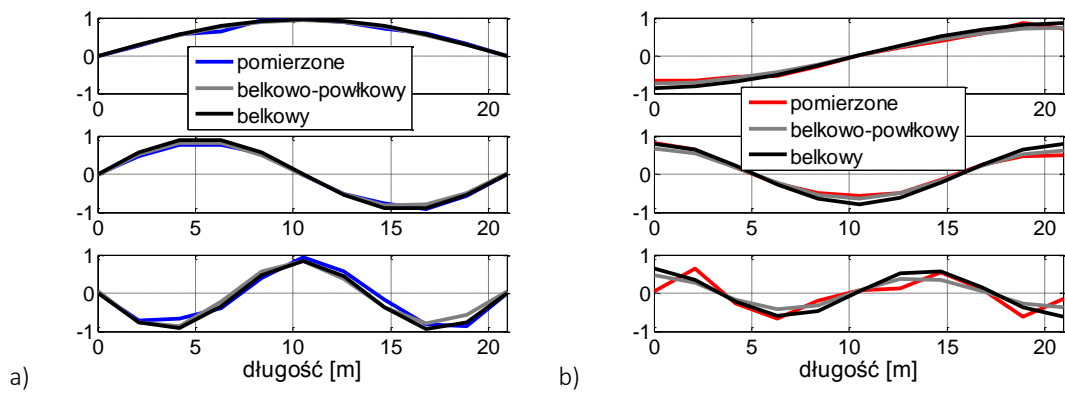
Rysunek 6.57 Postacie drgań belki bez uszkodzenia przy wymuszeniu drgań małym wzbudnikiem umieszczonym w polu 8 a) translacyjne b) rotacyjne



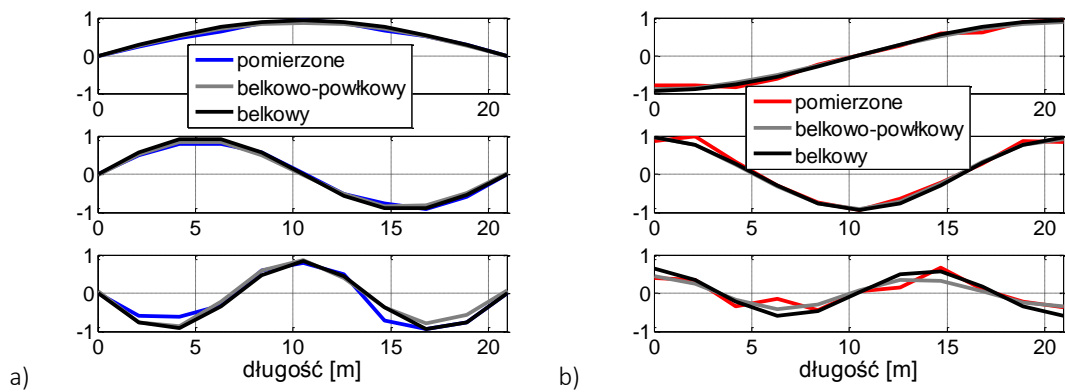
Rysunek 6.58 Postacie drgań belki z uszkodzeniem w segmencie 3 przy wymuszeniu drgań małym wzbudnikiem umieszczonym w polu 6 a) translacyjne b) rotacyjne



Rysunek 6.59 Postacie drgań belki z uszkodzeniem w segmencie 3 przy wymuszeniu drgań małym wzbudnikiem umieszczonym w polu 8 a) translacyjne b) rotacyjne



Rysunek 6.60 Postacie drgań belki z uszkodzeniem w segmencie 5 przy wymuszeniu drgań małym wzbudnikiem umieszczonym w polu 6 a) translacyjne b) rotacyjne



Rysunek 6.61 Postacie drgań belki z uszkodzeniem w segmencie 5 przy wymuszeniu drgań małym wzbudnikiem umieszczonym w polu 8 a) translacyjne b) rotacyjne

Tabela 6.4 Porównanie wartości częstotliwości oraz kryterium NDM dla translacyjnych i rotacyjnych stopni swobody, pomiędzy danymi eksperymentalnymi a numerycznymi w zależności od położenia wzbudnika i miejsca uszkodzenia przy wzbudzeniu dużym wzbudnikiem drgań

Lp	Badania eksp,	Model belkowo - powłokowy				Model belkowy			
	Częstotliwość $f_p$	Częstotliwość $f_{t\ p-b}$	Błąd $f_p/f_{t\ p-b}$	NMD <sub>trans</sub>	NMD <sub>rot</sub>	Częstotliwość $f_{t\ b}$	Błąd $f_p/f_{t\ p-b}$	NMD <sub>trans</sub>	NMD <sub>rot</sub>
	Hz	Hz	%	%	%	Hz	%	%	%
<b>WZBUDNIK DUŻY POLE 6</b>									
<b>BEZ USZKODZENIA</b>									
1	2,68	2,78	<b>3,7</b>	7,16	12,77	2,74	<b>2,2</b>	7,03	12,61
2	10,34	10,88	<b>5,2</b>	7,36	19,01	11,25	<b>8,8</b>	7,41	18,16
3	22,70	21,44	<b>5,6</b>	19,00	89,92	24,68	<b>8,7</b>	11,86	79,35
<b>USZKODZENIE POLE 3</b>									
1	2,68	2,75	<b>2,6</b>	7,68	8,66	2,71	<b>1,1</b>	7,64	8,79
2	10,20	10,64	<b>4,3</b>	7,36	10,34	11,00	<b>7,8</b>	6,46	11,86
3	22,20	21,23	<b>4,4</b>	21,07	53,98	24,45	<b>10,1</b>	10,98	50,78
<b>USZKODZENIE POLE 5</b>									
1	2,63	2,72	<b>3,4</b>	7,44	11,38	2,68	<b>1,9</b>	7,31	11,26
2	10,33	10,85	<b>5,0</b>	7,71	15,95	11,23	<b>8,7</b>	6,78	15,92
3	22,46	21,22	<b>5,5</b>	21,63	63,89	24,35	<b>8,4</b>	14,90	69,62
<b>WZBUDNIK DUŻY POLE 8</b>									
<b>BEZ USZKODZENIA</b>									
1	2,84	2,83	<b>0,4</b>	7,41	10,56	2,79	<b>1,8</b>	7,26	10,61
2	10,01	10,59	<b>5,8</b>	6,80	13,63	10,95	<b>9,4</b>	9,04	15,03
3	22,12	21,71	<b>1,9</b>	36,27	61,14	24,88	<b>12,5</b>	33,34	67,47
<b>USZKODZENIE POLE 3</b>									
1	2,78	2,80	<b>0,7</b>	8,70	11,21	2,75	<b>1,1</b>	8,66	11,42
2	10,25	10,36	<b>1,1</b>	8,93	11,97	10,70	<b>4,4</b>	8,75	12,00
3	22,56	21,49	<b>4,7</b>	30,33	70,66	24,63	<b>9,2</b>	23,76	75,98
<b>USZKODZENIE POLE 5</b>									
1	2,72	2,76	<b>1,5</b>	8,04	12,77	2,72	<b>0,0</b>	7,88	12,77
2	10,32	10,56	<b>2,3</b>	8,37	13,65	10,91	<b>5,7</b>	6,94	15,09
3	22,35	21,45	<b>4,0</b>	22,32	61,17	24,48	<b>9,5</b>	21,48	66,71

Tabela 6.5 Porównanie wartości częstotliwości oraz kryterium NDM dla translacyjnych i rotacyjnych stopni swobody, pomiędzy danymi eksperymentalnymi a numerycznymi w zależności od położenia wzbudnika i miejsca uszkodzenia przy wzbudzeniu małym wzbudnikiem drgań.

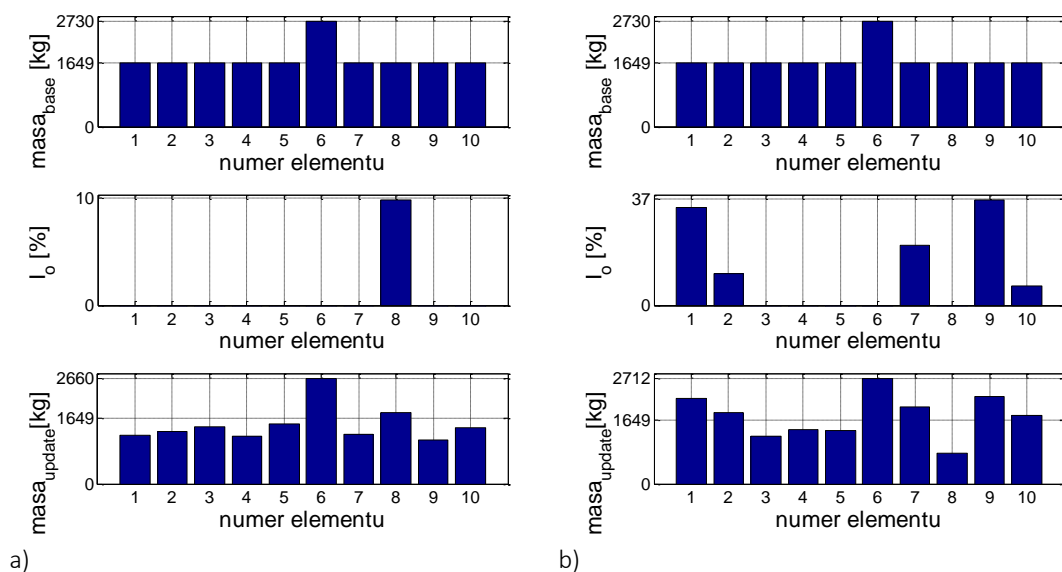
Lp	Badania eksp.	Model belkowo - powłokowy				Model belkowy			
	Częstotliwość $f_p$	Częstotliwość $f_{t\ p-b}$	Błąd $f_p/f_{t\ p-b}$	NMD <sub>trans</sub>	NMD <sub>rot</sub>	Częstotliwość $f_{t\ b}$	Błąd $f_p/f_{t\ p-b}$	NMD <sub>trans</sub>	NMD <sub>rot</sub>
	Hz	Hz	%	%	%	Hz	%	%	%
<b>WZBUDNIK MAŁY POLE 6</b>									
<b>BEZ USZKODZENIA</b>									
1	2.80	2,83	<b>1.1</b>	5,58	13,40	2,79	<b>0.4</b>	5,55	13,20
2	10.20	10,75	<b>5.4</b>	9,73	13,62	11,12	<b>9.0</b>	8,67	12,92
3	23.52	21,44	<b>8.8</b>	21,64	42,42	24,63	<b>4.7</b>	15,94	51,78
<b>USZKODZENIE POLE 3</b>									
1	2.80	2,80	<b>0.0</b>	7,31	11,04	2,76	<b>1.4</b>	7,40	11,10
2	10.02	10,51	<b>4.9</b>	9,68	11,59	10,87	<b>8.5</b>	8,61	11,75
3	22.60	21,22	<b>6.1</b>	23,77	42,65	24,40	<b>8.0</b>	20,50	47,68
<b>USZKODZENIE POLE 5</b>									
1	2.73	2,77	<b>1.5</b>	6,72	13,21	2,73	<b>0.0</b>	6,72	13,15
2	10.20	10,72	<b>5.1</b>	9,91	16,12	11,09	<b>8.7</b>	8,51	18,44
3	22.10	21,14	<b>4.3</b>	28,30	79,35	24,18	<b>9.4</b>	19,75	81,80
<b>WZBUDNIK MAŁY POLE 8</b>									
<b>BEZ USZKODZENIA</b>									
1	2.87	2,85	<b>0.7</b>	7,32	11,75	2,80	<b>2.4</b>	7,29	11,53
2	10.22	10,66	<b>4.3</b>	9,83	13,25	11,02	<b>7.8</b>	8,45	14,08
3	22.65	21,53	<b>4.9</b>	24,70	71,73	24,68	<b>9.0</b>	15,62	52,53
<b>USZKODZENIE POLE 3</b>									
1	2.73	2,81	<b>2.9</b>	7,20	13,11	2,77	<b>1.5</b>	7,27	13,36
2	10.05	10,43	<b>3.8</b>	9,56	13,05	10,78	<b>7.3</b>	8,78	13,55
3	22.45	21,30	<b>5.1</b>	22,53	129,83	24,44	<b>8.9</b>	16,57	128,75
<b>USZKODZENIE POLE 5</b>									
1	2.80	2,78	<b>0.7</b>	6,77	11,23	2,74	<b>2.1</b>	6,74	11,07
2	10.76	10,62	<b>1.3</b>	9,93	12,42	10,99	<b>2.1</b>	8,408	13,37
3	22.2	21,21	<b>4.5</b>	28,25	55,95	24,21	<b>9.1</b>	26,01	50,92

### 6.6.6 Aktualizacja modelu MES kładki

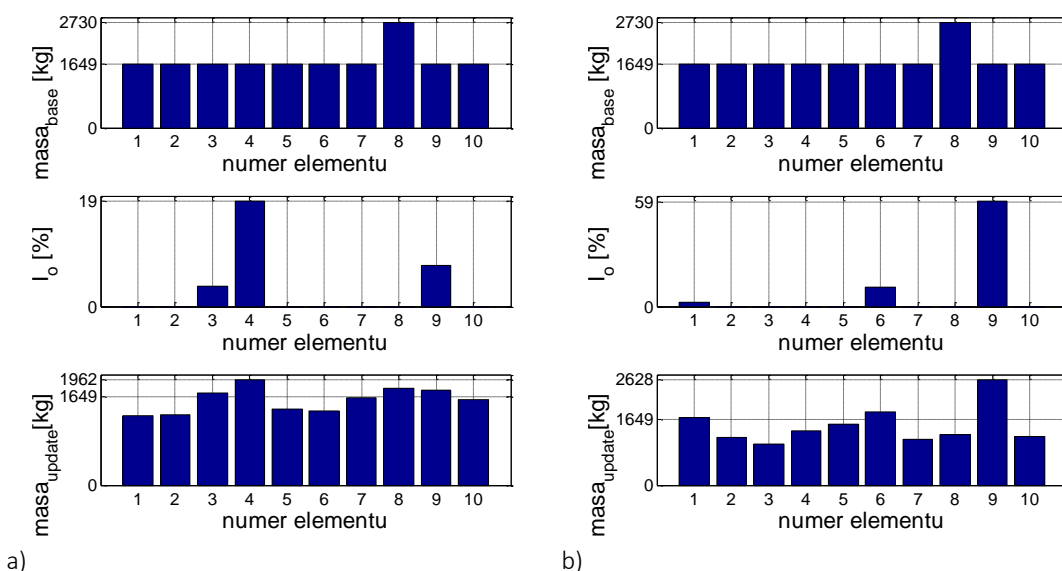
Zastosowana procedura aktualizacji parametrów kładki była analogiczna do tej opisanej w rozdziale 5. Procedura bazowała na macierzy wag w wariancie 4, a wyboru wyników dokonywano za pomocą kryterium NMD2. Z uwagi na małą zgodność rotacyjnej 3 postaci drgań zdecydowano się wykorzystać jedynie 2 postaci drgań do procedury aktualizacji. Cała procedura

bazowała na 7 translacyjnych stopniach swobody lub na 7 rotacyjnych stopniach swobody w analogicznych punktach pomiarowych.

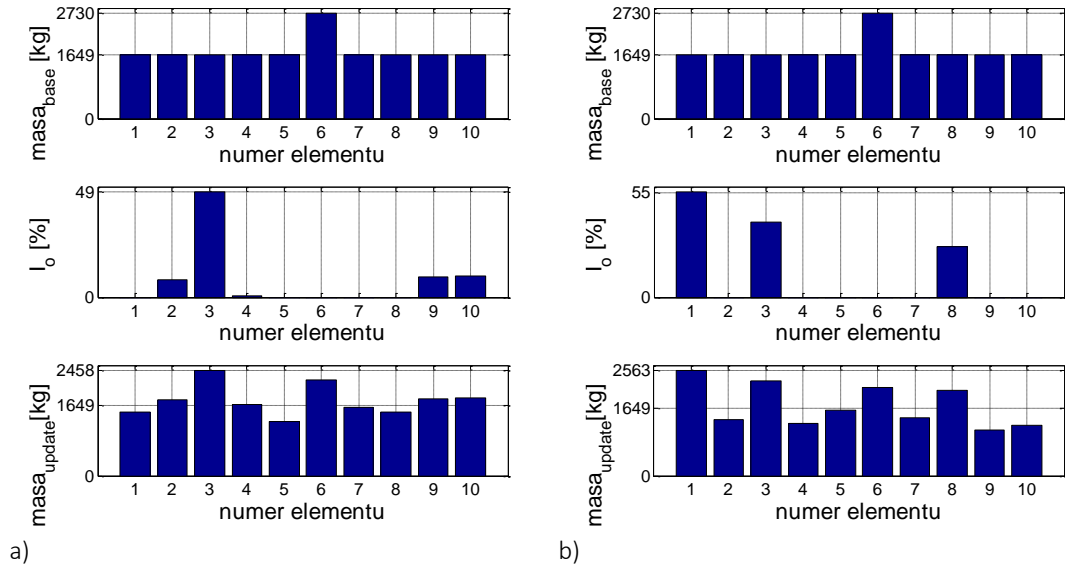
Wyniki przeprowadzonej aktualizacji dla wszystkich przypadków zestawiono na rysunkach 6.62-6.73. W celu poprawnej interpretacji wyników wykorzystano indeksy bazowe bezwzględne, które wraz z wartościami kryterium NMD oraz numerem elementu uszkodzonego oraz procentową zgodnością intensywności uszkodzenia zestawiono w tabelach 6.6-6.9.



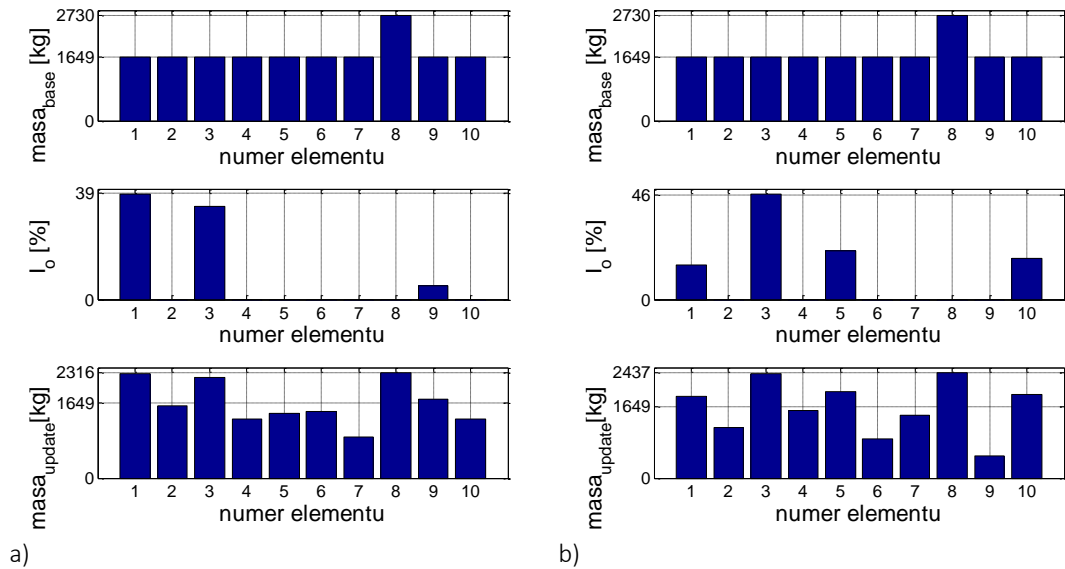
Rysunek 6.62 Masa początkowa segmentów kładki, indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów kładki nieuszkodzonej przy dużym wzbudniku umieszczonym w polu 6 w przypadku aktualizacji na podstawie: a) translacyjnych stopni swobody b) rotacyjnych stopni swobody.



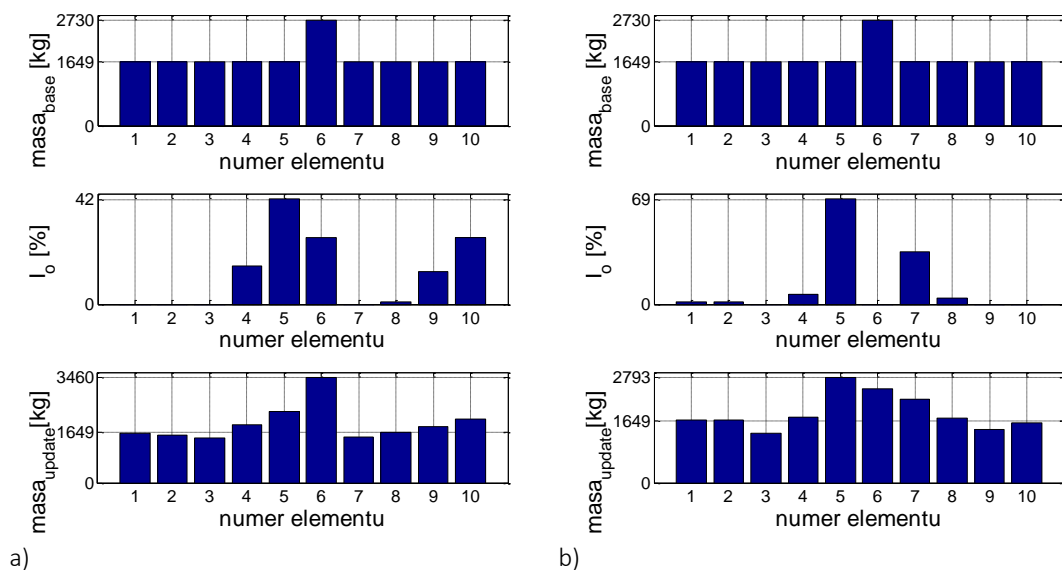
Rysunek 6.63 Masa początkowa segmentów kładki, indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów kładki nieuszkodzonej przy dużym wzbudniku umieszczonym w polu 6 w przypadku aktualizacji na podstawie: a) translacyjnych stopni swobody b) rotacyjnych stopni swobody.



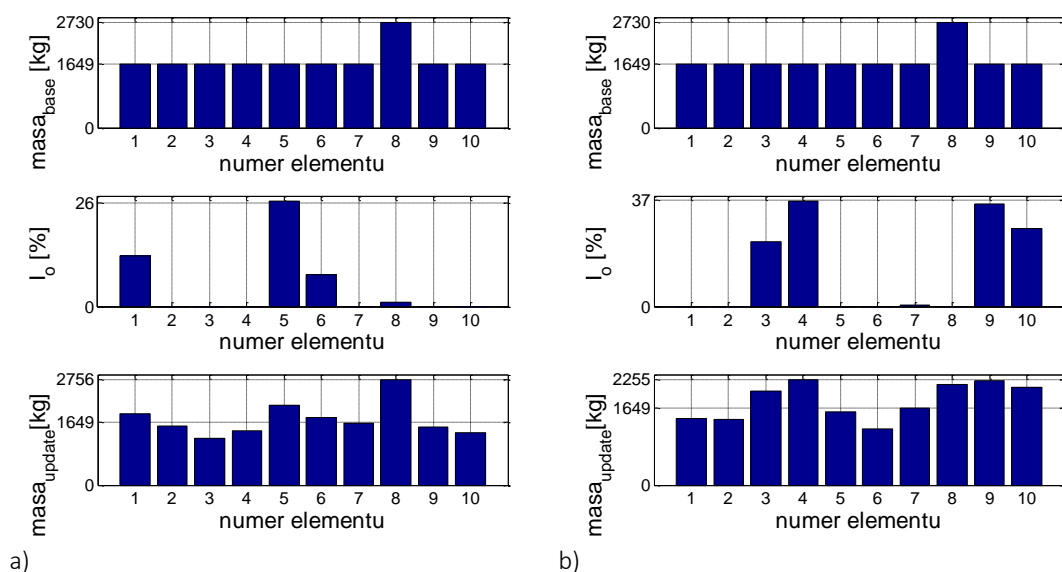
Rysunek 6.64 Masa początkowa segmentów kładki, indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów kładki przy uszkodzeniu segmentu 3 oraz dużym wzbudniku umieszczonym w polu 6 w przypadku aktualizacji na podstawie: a) translacyjnych stopni swobody b) rotacyjnych stopni swobody.



Rysunek 6.65 Masa początkowa segmentów kładki, indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów kładki przy uszkodzeniu segmentu 3 oraz dużym wzbudniku umieszczonym w polu 8 w przypadku aktualizacji na podstawie: a) translacyjnych stopni swobody b) rotacyjnych stopni swobody.

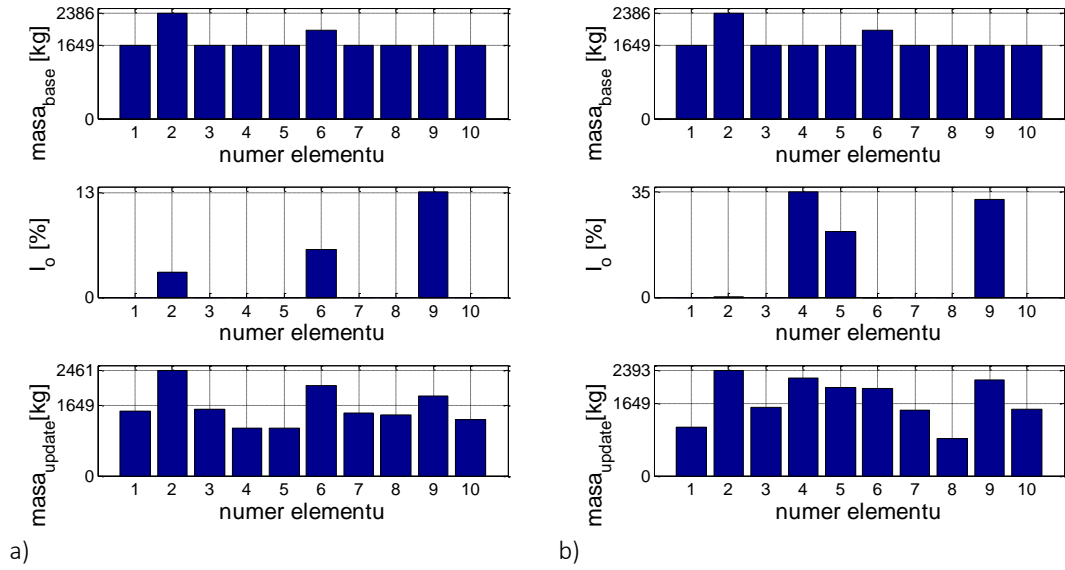


Rysunek 6.66 Masa początkowa segmentów kładki, indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów kładki przy uszkodzeniu segmentu 5 oraz dużym wzbudniku umieszczonym w polu 6 w przypadku aktualizacji na podstawie: a) translacyjnych stopni swobody b) rotacyjnych stopni swobody.

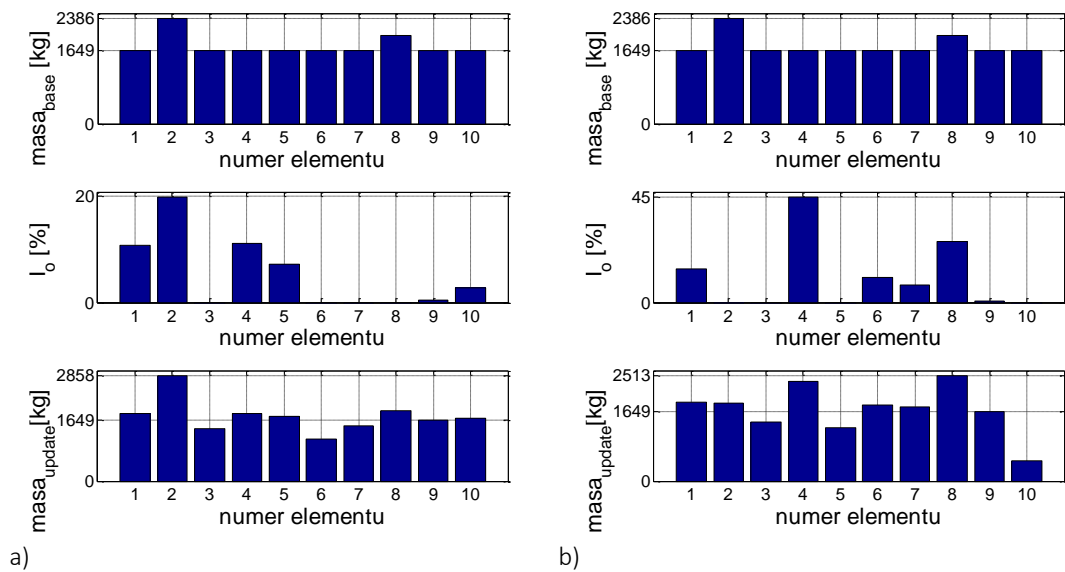


Rysunek 6.67 Masa początkowa segmentów kładki, indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów kładki przy uszkodzeniu segmentu 5 oraz dużym wzbudniku umieszczonym w polu 8 w przypadku aktualizacji na podstawie: a) translacyjnych stopni swobody b) rotacyjnych stopni swobody.

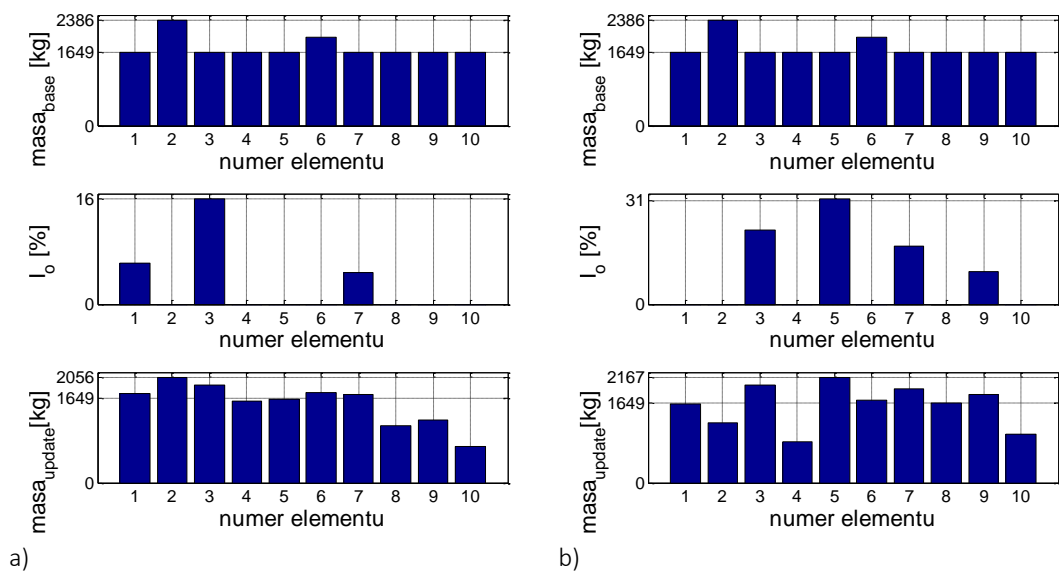




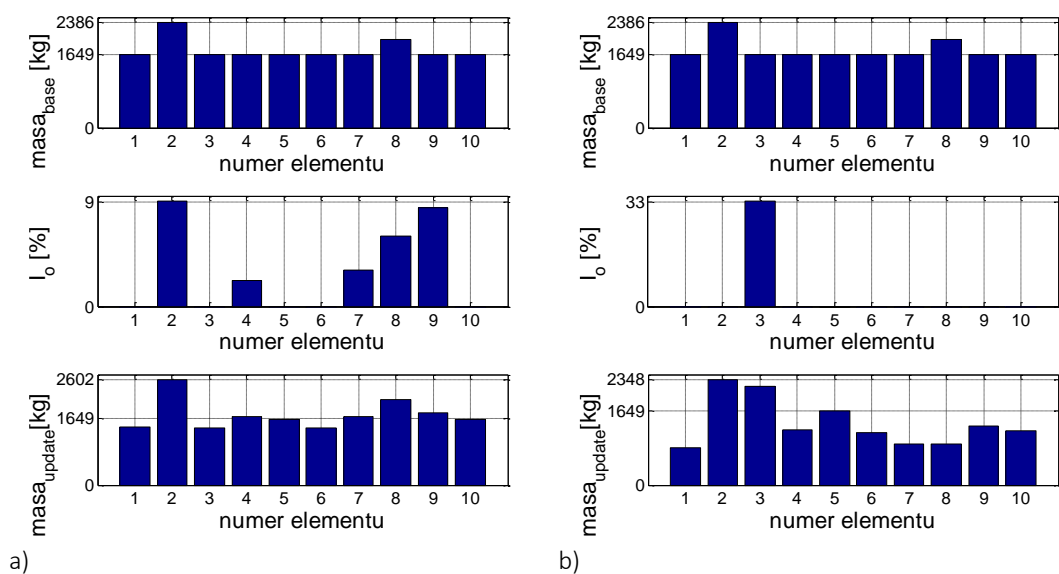
Rysunek 6.68 Masa początkowa segmentów kładki, indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów kładki nieuszkodzonej przy małym wzbudniku umieszczonym w polu 6 w przypadku aktualizacji na podstawie: a) translacyjnych stopni swobody b) rotacyjnych stopni swobody.



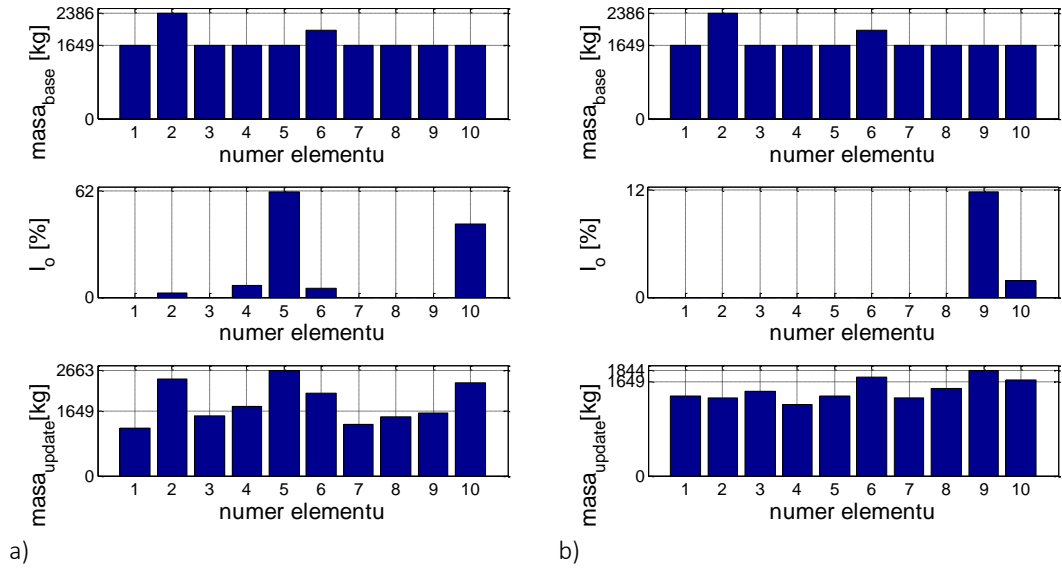
Rysunek 6.69 Masa początkowa segmentów kładki, indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów kładki nieuszkodzonej przy małym wzbudniku umieszczonym w polu 8 w przypadku aktualizacji na podstawie: a) translacyjnych stopni swobody b) rotacyjnych stopni swobody.



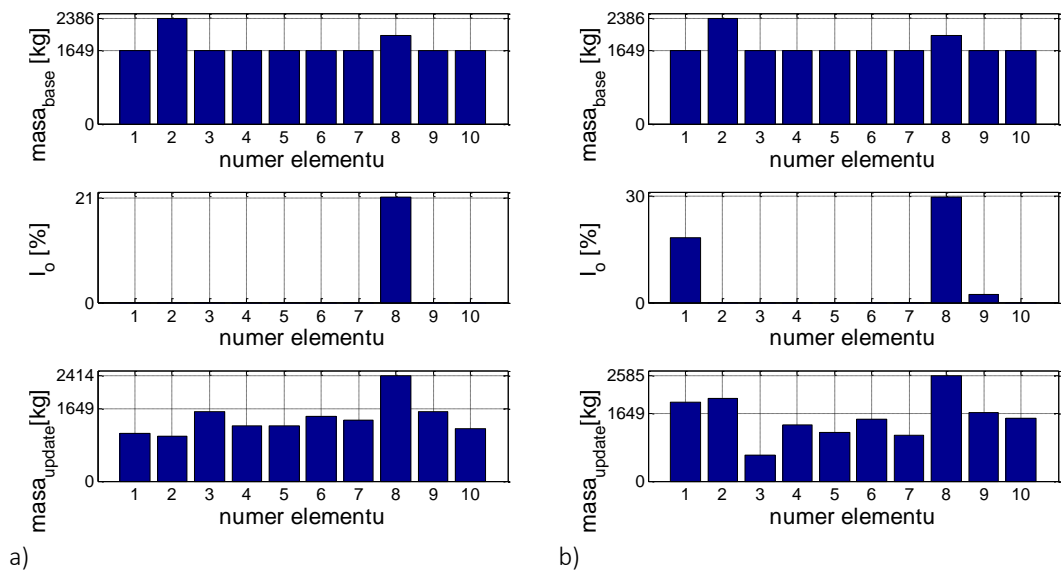
Rysunek 6.70 Masa początkowa segmentów kładki, indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów kładki przy uszkodzeniu segmentu 3 oraz małym wzbudniku umieszczonym w polu 6 w przypadku aktualizacji na podstawie: a) translacyjnych stopni swobody b) rotacyjnych stopni swobody.



Rysunek 6.71 Masa początkowa segmentów kładki, indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów kładki przy uszkodzeniu segmentu 3 oraz małym wzbudniku umieszczonym w polu 8 w przypadku aktualizacji na podstawie: a) translacyjnych stopni swobody b) rotacyjnych stopni swobody.



Rysunek 6.72 Masa początkowa segmentów kładki, indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów kładki przy uszkodzeniu segmentu 5 oraz małym wzbudniku umieszczonym w polu 6 w przypadku aktualizacji na podstawie: a) translacyjnych stopni swobody b) rotacyjnych stopni swobody.



Rysunek 6.73 Masa początkowa segmentów kładki, indeks  $I_0$  oraz zmiana masy elementów kładki przy uszkodzeniu segmentu 5 oraz małym wzbudniku umieszczonym w polu 8w przypadku aktualizacji na podstawie: a) translacyjnych stopni swobody b) rotacyjnych stopni swobody.

Tabela 6.6 Zestawienie indeksów bazowych bezwzględnych oraz kryterium NMD dla aktualizacji na podstawie danych eksperymentalnych z translacyjnych stopni swobody przy wzbudzeniu przy użyciu dużego wzbudnika drgań

AKTUALIZACJA WYMUSZENIE DUŻYM WZBUDNIKIEM - TRANSLACJE									
Uszkodzenie	Pole wzbudnik	Indeksy			NMD [%]		Element z maksymalną zmianą masy	Zgodność wielkości uszkodzenia [%]	Detekcja
Element		$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	1	2			
<b>0</b> brak	6	0,63	0,36	0,29	6,25	6,92	8	0	<b>NIE</b>
	8	1,26	0,56	1,34	6,20	8,89	4,5,10	0	<b>NIE</b>
<b>3</b>	6	4,12	2,10	5,88	4,56	5,87	3	218	<b>TAK</b>
	8	1,85	0,86	9,80	5,21	8,77	1,3	156	<b>NIE</b>
<b>5</b>	6	4,37	1,58	1,58	5,10	5,55	5	187	<b>TAK</b>
	8	2,57	1,06	1,94	6,10	6,01	5	116	<b>TAK</b>

Tabela 6.7 Zestawienie indeksów bazowych bezwzględnych oraz kryterium NMD dla aktualizacji na podstawie danych eksperymentalnych z translacyjnych stopni swobody przy wzbudzeniu przy użyciu małego wzbudnika drgań

AKTUALIZACJA WYMUSZENIE MAŁYM WZBUDNIKIEM - TRANSLACJE									
Uszkodzenie	Pole wzbudnik	Indeksy			NMD [%]		Element z maksymalną zmianą masy	Zgodność wielkości uszkodzenia [%]	Detekcja
Element		$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	1	2			
<b>0</b> brak	6	0,92	0,40	0,63	3,28	9,12	9	0	<b>NIE</b>
	8	2,14	0,65	1,42	5,52	7,12	2	0	<b>NIE</b>
<b>3</b>	6	0,81	0,28	1,16	4,12	7,40	3	71	<b>TAK</b>
	8	1,70	0,65	0,65	6,52	7,13	3	40	<b>TAK</b>
<b>5</b>	6	3,77	1,45	9,28	6,10	5,52	5	276	<b>TAK</b>
	8	0,84	0,37	1,34	5,49	8,60	8	93	<b>NIE</b>

Tabela 6.8 Zestawienie indeksów bazowych bezwzględnych oraz kryterium NMD dla aktualizacji na podstawie danych eksperymentalnych z rotacyjnych stopni swobody przy wzbudzeniu przy użyciu dużego wzbudnika drgań

AKTUALIZACJA WYMUSZENIE DUŻYM WZBUDNIKIEM - ROTACJE									
Uszkodzenie	Pole wzbudnik	Indeksy			NMD [%]		Element z maksymalną zmianą masy	Zgodność wielkości uszkodzenia [%]	Detekcja
Element		$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	1	2			
<b>0</b> brak	6	2,07	1,07	0,71	10,29	18,50	9	0	<b>NIE</b>
	8	3,04	1,55	1,01	8,67	14,00	9	0	<b>NIE</b>
<b>3</b>	6	2,38	1,40	3,15	8,20	10,56	1	245	<b>NIE</b>
	8	1,70	0,68	1,62	10,12	9,82	3	205	<b>TAK</b>
<b>5</b>	6	6,13	2,02	8,06	8,73	9,88	5	307	<b>TAK</b>
	8	1,82	1,03	1,63	11,01	12,54	4	16	<b>NIE</b>

Tabela 6.9 Zestawienie indeksów bazowych bezwzględnych oraz kryterium NMD dla aktualizacji na postawie danych eksperymentalnych z rotacyjnych stopni swobody przy wzbudzeniu przy użyciu małego wzbudnika drgań

AKTUALIZACJA WYMUSZENIE MAŁYM WZBUDNIKIEM - ROTACJE									
Uszkodzenie	Pole wzbudnik	Indeksy			NMD [%]		Element z maksymalną zmianą masy	Zgodność wielkości uszkodzenia [%]	Detekcja
Element		$I_m^{abs}$	$I_{max}^{abs}$	$I_s^{abs}$	1	2			
0 brak	6	1,84	0,71	1,61	13,03	10,84	4	0	NIE
	8	2,07	0,63	1,92	9,47	13,07	4	0	NIE
3	6	1,58	0,65	0,65	10,74	11,23	5	138	NIE
	8	1,03	0,61	1,29	8,77	10,12	3	147	TAK
5	6	0,59	0,27	1,60	12,98	15,67	9	53	NIE
	8	1,36	0,48	0,92	10,59	12,53	8	133	NIE

Aktualizacja wykonana na rzeczywistym obiekcie inżynierskim daje mniej satysfakcjonujące wyniki niż w przypadku badań modelowych. Wynika to przede wszystkim ze skali uszkodzenia, która w tym wypadku była znacznie mniejsza niż w przypadku badań modelowych. Studiując wartości indeksów bazowych (tabela 6.6-6.9) można zaobserwować, że osiągają one znacznie mniejsze wartości niż w przypadku badań modelowych opisanych w rozdziale 5. Świadczy to o mniej precyzyjnej i mniej jednoznacznej lokalizacji uszkodzenia.

Analizując wykresy przedstawione na rysunkach 6.62, 6.63, 6.68 i 6.69 oraz w tabelach 6.6-6.9 można stwierdzić, że wynik aktualizacji parametrów każdorazowo wskazuje uszkodzony element, nawet w przypadku obiektu nieuszkodzonego. Może to prowadzić do mylnych wniosków o stanie awaryjnym samego obiektu, ale może też stanowić wskazówkę do zainicjowania kontroli obiektu w pewnych tylko wybranych obszarach, zawężając tym samym zakres poszukiwań ewentualnej usterki.

W przypadku badań na postawie translacyjnych stopni swobody, zaobserwowano że uszkodzenie wykrywane jest poprawnie w prawie wszystkich przypadkach, bez względu na rodzaj użytego wzbudnika, a tym samym na siłę wymuszenia drgań. Tylko w dwóch przypadkach otrzymano niepoprawną lokalizację uszkodzenia.

W przypadku aktualizacji na postawie rotacyjnych stopni swobody, wyniki aktualizacji parametrów są mniej zadowalające. W tym przypadku przy użyciu dużego wzbudnika drgań w dwóch przypadkach udało się poprawnie zlokalizować uszkodzenie. Natomiast, przy mniejszej sile wzbudzenia, a więc przy użyciu małego wzbudnika drgań tylko w jednym przypadku udało się uzyskać poprawną lokalizację uszkodzonego segmentu. Dysproporcja w poprawności wyników spowodowana jest stosunkowo małą czułością czujników żyroskopowych w stosunku do amplitud

drgań rotacyjnych konstrukcji, a tym samym stosunkowo dużym poziomem szumów w stosunku do wartości mierzonych. Na podstawie otrzymanych sygnałów udało się odtworzyć z dużą zgodnością tylko dwie pierwsze postaci drgań. Analizy opisane w rozdziale 5, pokazują, że najlepsze wyniki aktualizacji parametrów uzyskuje się korzystając z kryterium NMD3 bazującego na trzech postaciach drgań. Zastosowanie czujników o mniejszym szumie pomiarowym, który umożliwiłby dokładne odwzorowanie trzeciej postaci drgań, prawdopodobnie umożliwiłoby poprawę wyników aktualizacji parametrów na podstawie rotacyjnych stopni swobody. Jednak te negatywne doświadczenia dotyczą relatywnie tanich czujników rotacji w technologii MEMS, które były osiągalne na potrzeby tych badań. Rotacyjne czujniki MEMS stały się elementem składowym większości nowoczesnych telefonów oraz są powszechnie stosowane w robotyce oraz mechatronice i bez wątpienia ich rozwój, w tym poprawa czułości i rozdzielczości, będzie przedmiotem intensywnych prac.

## 6.7 Wnioski

Przedstawione powyżej przykłady badań obiektów inżynierskich przy użyciu czujników żyroskopowych typu MEMS potwierdzają, że są one dobrym źródłem danych o charakterystykach dynamicznych konstrukcji. Ich niewielkie rozmiary, niska cena, prostota montażu, zwłaszcza w przypadku konstrukcji stalowych, brak potrzeby instalowania bazy pomiarowej, czy też zajmowania skrajni pod obiektem, czynią je bardzo przydatnym narzędziem pomiarowym. Pozwalają one przy niewielkim nakładzie pracy, przy mniejszym natężeniu ruchu nawet bez wyłączania obiektu z eksploatacji, dokonać rzetelnych pomiarów, które stanowią cenną informację o stanie konstrukcji. Analizując przedawniony przykład kładki nad ulicą Chwarznieńską, czujniki pozwalają nie tylko na poznanie częstotliwości drgań własnych, ale również na wierne odwzorowanie wybranych postaci drgań własnych. Można powiedzieć, że ciągle jednak niedoścignionym wzorem czujników do badań dynamicznych obiektów inżynierskich są akcelerometry. Jednak przy obecnym szybkim rozwoju techniki, żyroskopy mają dużą szansę dogonić stopniem zaawansowania i dokładnością pomiaru nawet obecnie występujące bardzo czułe akcelerometry. System pomiarowy, na bazie którego wykonano badania w niniejszej pracy, jest już w użyciu od 2012 roku. Od tego czasu na rynku pojawiły się już bardziej zaawansowane czujnik o znacznie większej dokładności pomiarowej i niższym poziomie szumów. Żyroskopy MEMS użyte do badań charakteryzowały się deklarowanym przez producenta poziomem szumów równym 0.01 dps/VHz i czułością równą 33.3 mV/dps. Obecnie dostępne są czujniki MEMS G150Z Gyro (produkowane przez Gladiator Technologies Division LKD Aerospace, Inc, USA) charakteryzujące się 10- krotnie niższym poziomem szumów i czułością równą 45 mV/dps.

Rozbudowa systemu i wzbogacenie go o bardziej dokładne czujniki, charakteryzujące się mniejszym poziomem szumów pomiarowych jest planowane w następnych etapach badań diagnostycznych.





## 7 Podsumowanie

W pracy omówiono wybrane problemy i zagadania związane z aktualizacją parametrów projektowych na podstawie częstotliwości i postaci drgań własnych przy użyciu iteracyjnej procedury bazującej na macierzy wrażliwości.

Badania naukowe i prace rozwojowe ukierunkowano na aplikację sygnałów pomiarowych uzyskanych na podstawie pomiarów prędkości kątowych przy użyciu czujników rotacji MEMS zastosowanych do procedury aktualizacji parametrów. Czujniki te wzbogacają możliwości pomiarowo - diagnostyczne metod wibracyjnych bazujących głównie na czujnikach akcelerometrycznych.

W pierwszej części pracy opracowano i wdrożono do procedury diagnostycznej 12 autorskich indeksów umożliwiających precyzyjną ocenę uszkodzeń. Indeksy podzielono na dwie kategorie: indeksy bazowe i indeksy kontrolne. Po przeprowadzeniu analiz na paru przykładach belek swobodnie podpartych wykazano, że najlepszą skuteczność w poprawnym wykrywaniu uszkodzeń umożliwiają indeksy bazujące na wartościach bezwzględnych zmian parametrów projektowych. Indeksy bazowe, odnoszące się do maksymalnej zmiany parametrów projektowych dla dowolnego elementu modelu MES, pozwalają na ogólną ocenę zmian parametrów badanej konstrukcji. Indeksy kontrolne pozwalają na ocenę dowolnego wybranego elementu konstrukcji, w stosunku do pozostałych elementów modelu MES. Obie grupy indeksów wykazują duży potencjał diagnostyczny i pozwalają na ocenę tego, czy w konstrukcji uszkodzony jest tylko jeden element, czy uszkodzenie występuje w pewnej strefie oraz jaki jest stopień uszkodzenia danego elementu w stosunku do pozostałych.

W dysertacji opracowano autorskie definicje macierzy wag parametrów oraz macierzy wag wartości mierzonych. Zaproponowano osiem różnych wariantów definicji macierzy wag i przeprowadzono ich analizy porównawcze. Opracowane modyfikacje macierzy wag okazały się najbardziej skutecznym narzędziem umożliwiającym poprawną aktualizację szukanych parametrów. Najlepsze wyniki uzyskano dla macierzy wag parametrów, z iteracyjnym doбором współczynnika na jej przekątnej oraz modyfikacją blokową. Poprawne wyniki otrzymano zarówno dla danych numerycznych jak i danych eksperymentalnych w przypadku belki modelowej oraz rzeczywistego obiektu inżynierskiego, kładki nad ulicą Chwarznieńską w Gdyni.

Procedury diagnostyczne bazujące na autorskich macierzach wag uzupełniono o tabele zestawiające wyniki aktualizacji i umożliwiające systematyczne przeglądanie wyników oraz ocenę

ich poprawności. W rozprawie zaproponowano algorytmy umożliwiające wybór odpowiedniego wyniku z zaproponowanych zestawień tabelarycznych. Najlepsze wyniki otrzymano korzystając z kryteriów bazujących na minimalizacji kryterium NMD dla postaci drgań. W zależności od dostępnej liczby par modalnych, poprawne rezultaty otrzymano korzystając z kryterium NMD3 i NMD2. W przypadku analiz przeprowadzonych na danych numerycznych oraz na modelowej belce swobodnie popartej, z uwagi na dużą zgodność wszystkich trzech pomierzonych postaci i częstotliwości drgań z postaciami i częstotliwościami drgań własnych otrzymanymi z modelu numerycznego, najlepsze wyniki aktualizacji parametrów uzyskano korzystając z kryterium NMD3. W przypadku rzeczywistego obiektu inżynierskiego, kładki nad ulicą Chwarznieńską w Gdyni, z uwagi na niski poziom zgodności trzeciej rotacyjnej postaci drgań pomiędzy wartością pomierzoną, a uzyskaną na podstawie analiz numerycznych, poprawne wyniki aktualizacji uzyskano bazując na kryterium NMD2.

Ocena efektywności procedur zaproponowanej diagnostyki nieniszczącej na podstawie rotacyjnych stopni swobody wykazała, że stosowanie czujników rotacji może być uzupełnieniem standardowego rozwiązania bazującego na pomiarach wyłącznie translacyjnych stopni swobody. Przeprowadzone analizy wykazały, że zastąpienie pomiaru przyspieszeń pomiarami prędkości kątowych, pozwala na uzyskanie poprawnych wyników aktualizacji parametrów. W każdym jednak przypadku, dla wyników uzyskanych na podstawie badań eksperymentalnych niezależnie od stosowanych czujników, intensywności uszkodzeń były niedoszacowane.

Postawione cele pracy zostały osiągnięte i potwierdzone pozytywnymi wynikami przeprowadzonych analiz aktualizacji parametrów modeli MES, zarówno na danych numerycznych jak i na danych eksperymentalnych uzyskanych na podstawie badań belki modelowej oraz rzeczywistego obiektu kładki nad ulicą Chwarznieńską w Gdyni. Użycie nowoczesnych i stosunkowo tanich czujników rotacji w postaci żyroskopów MEMS umożliwia precyzyjne pomiary rotacji i może służyć, jako dodatkowe narzędzie do diagnostyki konstrukcji inżynierskich.

Kontynuacja prac przedstawionych w niniejszej dysertacji będzie ukierunkowana na:

- ✓ rozwinięciu algorytmu do poszukiwania uszkodzeń o niskich intensywnościach dla rzeczywistych konstrukcji inżynierskich;
- ✓ rozwinięciu algorytmu identyfikującego intensywność uszkodzenia;
- ✓ uwzględnieniu w algorytmach poza postaciami giętymi skrętnych postaci drgań dla modeli przestrzennych MES;

- ✓ dopracowaniu algorytmu optymalnego wyboru rozmieszczenia czujników pomiarowych, zarówno translacji jak i rotacji, w zależności od schematu statycznego konstrukcji;
- ✓ rozbudowie systemu pomiarowego oraz wprowadzeniu do badań żyroskopów niskoszumowych o większym zakresie mierzonych częstotliwości;
- ✓ badaniach konstrukcji o innych schematach statycznych takich jak ramy, kratownice i łuki;
- ✓ rozszerzeniu badań na obiekty inżynierskie o większym rozmiarze i bardziej skomplikowanej konstrukcji.



## 8 Streszczenie

W pracy przedstawiono aktualizację parametrów na podstawie częstotliwości i postaci drgań własnych przy użyciu iteracyjnej procedury bazującej na macierzy wrażliwości z wykorzystaniem pomiarów rotacyjnych i translacyjnych stopni swobody.

W rozdziale 1 pracy opisano rozwój mostownictwa w przeciągu kilku ostatnich lat w Polsce oraz dokonano przeglądu literatury dotyczącej uszkodzeń, awarii i diagnostyki konstrukcji mostowych w Polsce oraz zamieszczono przegląd metod aktualizacji modeli MES stosowanych na świecie. Opisano również czujniki stosowane w badaniach diagnostycznych obiektów mostowych, szczególną uwagę poświęcając czujnikom MEMS.

Rozdział 2 pracy poświęcono zagadnieniom teoretycznym. Opisano metody redukcji bazy stosowane w aktualizacji parametrów, kryteria walidacji postaci drań własnych, aktualizację przy użyciu par modalnych, podstawowe definicje macierzy wag oraz funkcję odpowiedzi częstotliwościowej (FRF). Dodatkowo dokonano szczegółowego przeglądu metod optymalizacji w inżynierii.

Zagadnienia zawarte w rozdziale 3 koncertują się na aktualizacji parametrów modelu MES na podstawie danych numerycznych. W pierwszej części rozdziału zdefiniowano 12 autorskich indeksów. Dokonano aktualizacji sztywności giętych elementów modelu MES na podstawie sygnałów z różnej liczby czujników „pomiarowych” translacji i rotacji rozmieszczonych zgodnie z pięcioma schematami dla modelu belki swobodnie podpartej. Następnie zaproponowano autorskie definicje macierzy wag w 8 wariantach oraz opisano kryteria wyboru poprawnego wyniku aktualizacji parametrów. Dokonano aktualizacji paramentów i opisano wpływ wyboru wariantu macierzy wag i stosowanego kryterium na wynik aktualizacji parametrów. Zbadano także wpływ szumów pomiarowych na wynik aktualizacji parametrów. Następnie wykonano analizy na danych numerycznych dotyczące aktualizacji warunków podporowych oraz sztywności globalnej modelu MES.

W rozdziale 4 opisano stanowisko pomiarowe do badań laboratoryjnych. Przedstawiono model doświadczalny belki swobodnie podpartej, stosowane czujniki pomiarowe, sposób wzbudzenia drgań oraz systemy akwizycji danych. W rozdziale tym zawarto przykładowe wyniki sygnałów pomiarowych wraz z ich transformatami Fouriera oraz wybrane postacie drgań własnych belki.

Rozdział 5 poświęcony jest aktualizacji parametrów na podstawie danych uzyskanych z badań eksperymentalnych belki swobodnie podpartej. W pierwszej części rozdziału dokonano analizy wyników aktualizacji parametrów na podstawie 11 translacyjnych stopni swobody w zależności od wariantu macierzy wag oraz od kryterium wyboru wyniku aktualizacji parametrów. Na tej podstawie w kolejnych podrozdziałach dokonano aktualizacji parametrów na podstawie 6 translacyjnych stopni swobody, 6 rotacyjnych stopni swobody oraz 6 translacyjnych i 6 rotacyjnych stopni swobody.

W rozdziale 6 przedstawiono badania rzeczywistych konstrukcji inżynierskich przy użyciu żyroskopów MEMS. Rozdział rozpoczyna się od opisu czujników stosowanych do pomiaru rzeczywistych konstrukcji inżynierskich. Przedstawiono sposoby wzbudzenia konstrukcji mostowych z użyciem wzbudników, pojazdów, pieszych i innych metod specjalnych w zależności od typu użytkowego obiektu. Następnie przedstawiono wyniki badań in situ dla: kładki łukowej nad drogą S8, kładki nad trasą Ogińskiego w Bydgoszczy oraz wiaduktu Brańskiego w Koninie. Rozdział zakończony jest szczegółowymi wynikami badań przeprowadzonych na kładce nad ulicą Chwarznieńską w Gdyni. Na podstawie uzyskanych sygnałów przyspieszeń oraz prędkości kątowych przeprowadzono aktualizację parametrów kładki z dodatkowymi masami zlokalizowanym w wybranych elementach.

Rozdział 7 jest podsumowaniem pracy oraz wskazaniem dalszych kierunków rozwoju zaprezentowanej tematyki, związanej z użyciem czujników żyroskopowych do celów diagnostyki nieniszczącej.

## 9 Abstract

The thesis is devoted to development of diagnostic procedures for civil engineering structures. The nondestructive method is based on updating of FEM model parameters on the basis of natural frequencies and mode shapes. The presented iterative method uses the sensitivity matrix as well as the measurements of rotational and translational degrees of freedom of the structure.

Chapter 1 describes the achievements of the bridge engineering society in the past few years in Poland. It consists of a review of literature focused on the damage detection and diagnostics of bridge structures in Poland as well as update methods of FEM models. Brief information on sensors used in in situ tests of bridges, with particular attention to the MEMS sensors, have also been presented.

Chapter 2 is devoted to theoretical issues. It describes Model Reduction Methods, Eigenvectors Validation Criteria, definitions of Weighting Matrix, updating of parameters using modal pairs and the frequency response function (FRF). In addition, a review of methods of optimization is presented.

Chapter 3 focuses on updating of parameters of the FEM model of the simply supported beam based on numerical data. In this Chapter new indices are proposed, definitions of Weighting Matrices are developed and the criteria for selecting the correct result of updating of parameters has been proposed. The influence of noise of the measurement signals on updating of parameters result has been examined. The subsequent analysis of parameter updating with respect to the support conditions and global rigidity of FEM model have been performed.

Chapter 4 describes the experimental setup including the model of a simply supported beam, used sensors, vibration excitation methods and data acquisition systems. Selected results of the measured signals are presented.

Chapter 5 is devoted to the updating of parameters on the basis of data obtained from experimental studies of the simply supported beam. The results have been analyzed on the basis of the updating of parameter using 11 translational degrees of freedom, 6 translational degrees of freedom, 6 rotational degrees of freedom and both: 6 translational and 6 rotational degrees of freedom.

The Chapter 6 presents the in situ tests of real engineering structures using MEMS gyroscopes. The results of in situ tests for the arched footbridge over the road S8, footbridges over the route Ogińskiego in Bydgoszcz and viaduct Brański in Konin are presented. Chapter is summarized by detailed results of the tests carried out on the footbridge above the Chwarznieńska street in Gdynia. On the basis of the signals of the accelerations and angular velocities, updating of the FEM model parameters with additional masses located in selected locations is performed.

Chapter 7 contains the concluding remarks drawn from the analysis conducted in the thesis. It is stated that the aim of the thesis has been achieved since the study proved that the measurements of the rotational degrees of freedom enrich the iterative updating procedure based on modal pairs. Some indications of the further directions of research related to the use of MEMS gyroscopes sensors for non-destructive diagnostics are presented.



## Bibliografia

Allemang, R. J. (2003) 'The Modal Assurance Criterion - Twenty Years of Use and Abuse', *Journal of Sound and Vibration*, 1(August), pp. 14–21.

Allemang, R. J. & Brown, D. L. (1982) 'A correlation coefficient for modal vector analysis', *First International Modal Analysis Conference*, pp. 110–116.

Alvin, K. F. (1997) 'Finite Element Model Update via Bayesian Estimation and Minimization of Dynamic Residuals', *AIAA Journal*, 35(5), pp. 879–886.

Amborski, K. (2009) *Podstawy metod optymalizacji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.

Bakir, P. G., Reynders, E. & De Roeck, G. (2007) 'Sensitivity-based finite element model updating using constrained optimization with a trust region algorithm', *Journal of Sound and Vibration*, 305(1–2), pp. 211–225.

Barcik, W. & Sieńko, R. (2012) 'System monitorowania konstrukcji Mostu Rędzińskiego we Wrocławiu', *Mosty*, 2, pp. 56–62.

Baruch, M. & Bar-Itzhack, I. Y. (1978) 'Optimal Weighted Orthogonalization of Measured Modes', *AIAA Journal*, 16(4), pp. 346–351.

Bayraktar, A., Altunisik, A., Sevim, B. & Turker, T. (2009) 'Finite Element Model Updating of Komurhan Highway Bridge', *Technical Journal of turk Chamb of Civil eng*, 20, pp. 4675–4700.

Ben-Haim, Y. & Prells, U. (1993) 'Selective sensitivity in the frequency domain--I. Theory', *Mechanical Systems and Signal Processing*, 7(5), pp. 461–475.

Berman, A. & Nagy, E. J. (1983) 'Improvement of a Large Analytical Model Using Test Data', *AIAA Journal*, 21(8), pp. 1168–1173.

Bętkowski, P., Bednarski, Ł. & Sieńko, R. (2015) 'Doświadczenia z użytkowania systemu monitorowania konstrukcji mostu kolejowego poddanego oddziaływaniu eksploatacji górniczej', *Przełqd Górniczy*, (March), pp. 7–13.

Bień, J. (2010) *Uszkodzenia i diagnostyka obiektów mostowych*. 1st edn. Warszawa: Wydawnictwa Komunikacji i łączności.

Biliszczyk, J. (2003) *Most III Tysiąclecia im. Jana Pawła II w Gdańsku*. Wrocław: Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne.

Biliszczyk, J. (2007) *Podwieszony most przez Wisłę w Płocku*. Wrocław: Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne.

Biliszczyk, J., Hildebrand, M. & Hawryszków, P. (2006) 'System obserwacji ciągłej mostu podwieszonoego przez Wisłę w Płocku', *Inżynieria i Budownictwo*, 7–8, pp. 364–367.

Biliszczyk, J. & Onyks, J. (2012) 'Most Rędziński w ciągu Autostradowej Obwodnicy Wrocławia', *Przegląd Komunikacyjny*, 5–6, pp. 30–37.

Bouhaddi, N. & Fillod, R. (1992) 'A method for selecting master DOF in dynamic substructuring using the Guyan condensation method', *Computers & Structures*, 45, pp. 941–946.

Caesar, B. & Peter, J. (1987) 'Direct update of dynamic mathematical models from modal test data', *AIAA Journal*, 25(11), pp. 1494–1499.

Carvalho, J., Datta, B. N., Gupta, A. & Lagadapati, M. (2007) 'A direct method for model updating with incomplete measured data and without spurious modes', *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(7), pp. 2715–2731.

Cawley, P. & Adams, R. (1979) 'The location of defects in structures from measurements natural frequencies', *Journal of Strain Analysis*, 14, pp. 49–57.

Chen, H.-P. (2008) 'Application of regularization methods to damage detection in large scale plane frame structures using incomplete noisy modal data', *Engineering Structures*, 30(11), pp. 3219–3227.

Chróścielewski, J., Banaś, A., Malinowski, M., Sitarski, A. & Sochacki, J. (2014) 'Stan awaryjny wiaduktu kolejowego w Bydgoszczy', *Przegląd Budowlany*, (R. 85, nr 2), pp. 44–50.

Chróścielewski, J., Kłasztorny, M., Wilde, K., Miśkiewicz, M. & Romanowski, R. (2014) 'Kompozytowa kładka pieszo-rowerowa o konstrukcji przekładkowej', *Materiały Budowlane*, 7, pp. 40–41.

Chróścielewski, J., Mariak, A., Sabik, A., Meronk, B. & Wilde, K. (2016) 'Monitoring of concrete curing in extradosed bridge supported by numerical simulation', *Advances in Science and Technology Research Journal*, 10(32), pp. 254–262.

Chróścielewski, J., Rucka, M., Banaś, A., Malinowski, M., Miśkiewicz, M. & Rutkowski, R. (2011) 'Systemy monitorowania stanu technicznego konstrukcji na przykładzie trzech mostów', *Mosty*, 2, pp. 24–32.

Chróścielewski, J., Witkowski, W., Banaś, A., Daszkiewicz, K., Malinowski, M. & Wąchalcki, K. (2013) 'Kontrola i monitoring tensometryczny w trakcie budowy mostu łukowego przez rzekę Wisłę w Toruniu', *Archiwum Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Poznańskiej*, 16, pp. 37–48.

Chróścielewski, J., Żółtowski, K., Kozakiewicz, A., Miśkiewicz, M., Szafranski, M. & Żółtowski, P. (2005) 'Awaria wiaduktu drogowego nad torami kolejowymi w Gdańsku', *XXII konferencja naukowo-techniczna „Awarie budowlane”*. Szczecin - Międzyzdroje.

Cywiński, Z. & Kido, E. (2000) 'Urban Bridge Aesthetics: Major Challenge of the 21st Century', *IABSE Congress Report*. Lucerne: International Association for Bridge and Structural Engineering, pp. 56–63.

D'Ambrogio, W. & Zobel, P. B. (1994) 'Damage detection in truss structures using a direct updating technique', *The 19th International Seminar for Modal Analysis*, pp. 489–497.

Das, A. S. & Dutt, J. K. (2008) 'Reduced model of a rotor-shaft system using modified SEREP', *Mechanics Research Communications*, 35(6), pp. 398–407.

Douka, E., Loutridis, S. & Trochidis, A. (2004) 'Crack identification in plates using wavelet analysis', *Journal of Sound and Vibration*, 270, pp. 279–295.

Ewins, D. J. (1990) 'Modal testing as an aid to vibration analysis', *23th Conference on Mechanical Engineering*.

Ewins, D. J. (2000) 'Adjustment or updating of models', *Sadhana*, 25(3), pp. 235–245.

Ewins, D. J. (2000) *Modal testing : theory, practice, and application*. Research Studies Press.

Fasel, T. R., Sohn, H. & Farrar, C. R. (2003) 'Application of frequency domain ARX models and extreme value statistics to damage detection', Liu, S.-C. (ed.) *SPIE--The International Society for Optical Engineering*, p. 145.

Filipiuk, S. (2005) *Most przez Dziwnę w Wolinie*. Bydgoszcz-Gdańsk: qax manufaktura artystyczna.

Filipiuk, S. & Stefanowski, T. (2014) 'Most extradosed przez Wisłę koło Kwidzyna', *Inżynieria i Budownictwo*, 70(1), pp. 3–5.

Flaga, K. & Januszkiewicz, K. (2010) *Piękno konstrukcji mostowych*. Kraków: Politechnika Krakowska.

Flaga, K., Januszkiewicz, K., Hrabiec, A. & Cichy-Pazder, E. (2005) *Estetyka konstrukcji mostowych*. Politechnika Krakowska.

Flores-Santiago, O. & Link, M. (1993) 'Localization Techniques for Parametric Updating of Dynamic Mathematical Models', *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*. Strasbourg.

Fox, R. & Kapoor, M. (1968) 'Rate of Change of Eigenvalues and Eigenvectors', *AIAA Journal*, 6, pp. 2426–2429.

Friswell, M. I., Garvey, S. D. & Penny, J. E. T. (1995) 'MODEL REDUCTION USING DYNAMIC AND ITERATED IRS TECHNIQUES', *Journal of Sound and Vibration*, 186(2), pp. 311–323.

Friswell, M. I., Garvey, S. D. and Penny E T (1998) 'The convergence of the iterated IRS method', *Journal of Sound and Vibration*, 211(1), pp. 123–132.

Friswell, M. I. & Mottershead, J. (1995) *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Nowell: Kluwer Academic Publishers Group.

Gawrylczyk, K. M. (2011) 'Metody Optymalizacji - wykład'. Szczecin: Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie.

Gökdağ, H. & Kopmaz, O. (2009) 'A new damage detection approach for beam-type structures based on the combination of continuous and discrete wavelet transforms', *Journal of Sound and Vibration*, 324(3–5), pp. 1158–1180.

Góra, P. (2010) 'Komputerowa analiza zagadnień różniczkowych - 10. Dygresje matematyczne- Wykład'. Kraków: Instytut Fizyki, Uniwersytet Jagielloński.

Góra, P. (2012) 'Wstęp do metod numerycznych - Uwarunkowanie - Eliminacja Gaussa - wykład'. Kraków: Instytut Fizyki, Uniwersytet Jagielloński.

Grej, K., Bąk, J., Sałach, W. & Olesiak, C. (2008) 'Projekt nowego mostu drogowego przez rzekę Wisłę w Puławach', *Inżynieria i Budownictwo*, 64(1–2), pp. 32–36.

Grotte, B., Karwowski, W., Mossakowski, P., Wróbel, M., Zobel, H. & Żółtowski, P. (2009) 'Stalowa łukowa kładka dla pieszych z podwieszonym pomostem z kompozytów polimerowych', *Inżynieria i Budownictwo*, 65(1–2), pp. 69–73.

Guyan, R. J. (1965) 'Reduction of stiffness and mass matrices', *AIAA Journal*, 3(2), pp. 380–380.

Hildebrand, M., Malinowski, M. & Żółtowski, K. (2009) 'Monitoring mostów podwieszonych', *Mosty*, 3, pp. 16–24.

Hirsz, M. (2008) *Finite element model updating on experimental modal parameters*. Politechnika Gdańska.

Hirsz, M. & Wilde, K. (2004) 'Plate mode shape identification by frequency response function', *International Workshop on Simulations in Urban Engineering*. Gdańsk, pp. 125–128.

Hirsz, M. & Wilde, K. (2005) 'Experimental study on plate modal parameters', *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej. Mechanika*, pp. 153–158.

Hirsz, M. & Wilde, K. (2005) 'Identification of plate dynamic parameters for structural health monitoring', *Shell structures: theory and applications: proceedings of the 8th SSTA Conference*. Gdańsk-Jurata: Taylor & Francis, pp. 327–331.

Hirsz, M. & Wilde, K. (2006) 'Kalibracja parametrów modeli MES z użyciem postaci drgań własnych dla układów belkowych', *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej. Budownictwo Lądowe*, pp. 239–246.

Hirsz, M. & Wilde, K. (2010) 'Updating of steel plate FE model on experimental modal pairs', in Pietraszkiewicz, *Shell structures: theory and applications. Volume 2*. CRC Press, p. 344.

Hong, J.-C., Kim, Y., Lee, H. & Y.W, L. (2002) 'Damage detection using Lipschitz exponent estimated by the wavelet transform: applications to vibration modes of beam.', *Journal of Solid and Structures*, 39, pp. 1803–1846.

Huang, M., Guo, W., Zhu, H. & Li, L. (2008) 'Dynamic test and finite element model updating of bridge structures based on ambient vibration', *Frontiers of Architecture and Civil Engineering in China*. SP Higher Education Press, 2(2), pp. 139–144.

Huang, Y. & Nemat-Nasser, S. (2006) 'Damage detection with spatially distributed 2D continuous wavelet transform', Tomizuka, M., Yun, C.-B., and Giurgiutiu, V. (eds), p. 61742M.

Ibrahim, S. R. (1988) 'Correlation of Analysis and Test in Modeling of Structures: Assessment and Review', *Structural Safety Evaluation Based on System Identification Approaches*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, pp. 195–211.

Irons, B. (1965) 'Structural eigenvalue problems - elimination of unwanted variables', *AIAA Journal*, 3(5), pp. 961–962.

Jaishi, B. & Ren, W.-X. (2007) 'Finite element model updating based on eigenvalue and strain energy residual using multiobjective optimization technique', *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(5), pp. 2295–2317.

Jung, D.-S. & Kim, C.-Y. (2009) 'FE model updating based on hybrid genetic algorithm and its verification on numerical bridge model', *Structural Engineering and Mechanics*. Techno-Press, 32(5), pp. 667–683.

Kabe, A. M. (1985) 'Stiffness matrix adjustment using mode data', *AIAA Journal*, 23(9), pp. 1431–1436.

Kaliński, W., Kiedrowski, R., Prądyński, S. & Malinowski, M. (2004) 'Realizacja projektu wzmocnienia mostu przez rzekę wisłę w Kiezmarku', *Współczesne metody wzmacniania i przebudowy mostów XIV seminarium*. Poznań: Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, pp. 145–154.

Kim, H. & Cho, M. (2008) 'Sub-domain reduction method in non-matched interface problems', *Journal of Mechanical Science and Technology*. Korean Society of Mechanical Engineers, 22(2), pp. 203–212.

Kim, J.-T., Ryu, Y.-S., Cho, H.-M. & Stubbs, N. (2003) 'Damage identification in beam-type structures: frequency based method vs mode-shape-based method.', *Engineering Structures*, 25, pp. 57–67.

Klikowicz, P., Salamak, M. & Łaziński, P. (2016) 'Monitoring mostów betonowych przy użyciu metod akustycznych', *Materiały Budowlane*, 4, pp. 44–46.

Klikowicz, P., Salamak, M. & Poprawa, G. (2016) 'Structural Health Monitoring of Urban Structures', *Procedia Engineering*, 161, pp. 958–962.

Kucharski, T. (2002) *System pomiaru drgań mechanicznych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.

Lee, J. & Kim, S. (2007) 'Structural Damage Detection in the Frequency Domain using Neural Networks', *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. Sage Publications Sage UK: London, England, 18(8), pp. 785–792.

Li, H., Zhang, M. & Hu, S.-L. J. (2008) 'Refinement of reduced-models for dynamic systems', *Progress in Natural Science*, 18(8), pp. 993–997.

Li, Y.-Q. & Du, Y.-L. (2009) 'Dynamic finite element model updating of stay-cable based on the most sensitive design variable', *Journal of Vibration and Shock*, 28(3), pp. 141–143.

Lieven, N. A. & Waters, T. P. (1994) 'Error Location Using Normalised Cross Orthogonality', *Proceeding of the 12th International Modal Analysis Conference (IMAC XII)*. Honolulu, pp. 761–764.

Lin, R. M., Lim, M. K. & Du, H. (1995) 'Improved Inverse Eigensensitivity Method for Structural Analytical Model Updating', *Journal of Vibration and Acoustics*. American Society of Mechanical Engineers, 117(2), p. 192.

Lin, R. M., Lim, M. K. & Du, H. (1995) 'Improved inverse eigensensitivity method for structural analytical model updating.', *Journal of Vibration and Acoustic*, 117, pp. 192–198.

Link, M. (1993) 'Updating of analytical models – procedures and experiments', *Conference on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis*, pp. 35–52.

Liu, Y., Duan, Z. D. & Li, H. (2009) 'Updating of Finite Element Model in Considering Mode Errors with Fuzzy Theory', *Key Engineering Materials*. Trans Tech Publications, 413–414, pp. 785–792.

Łagoda, M. & Łagoda, G. (2014) *Piękno mostów / Beauty of bridges*. IBDiM Studia i materiały, zeszyt 75.

Łapko, A. (2010) 'Estetyka mostów a postęp naukowo-techniczny', *Czasopismo Techniczne. Architektura*, 107(7–A/2), pp. 230–232.

Maia, N. M. M. & Silva, J. M. M. (1997) *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Letchworth: Research Studies Press.

Majumder, L. & Manohar, C. S. (2003) 'A time-domain approach for damage detection in beam structures using vibration data with a moving oscillator as an excitation source', *Journal of Sound and Vibration*, 268(4), pp. 699–716.

Malinowski, M. (2003) 'Monitoring der "Brücke des III. Jahrtausends" in Danzig', *Stahlbau*, 72(8), pp. 567–573.

Malinowski, M., Banaś, A., Cywiński, Z. & Wąchalowski, K. (2015) 'Die neue Straßenbrücke in Toruń, Polen - Teil 2: Nachweise', *Stahlbau*, 84(5), pp. 305–313.

Malinowski, M., Banaś, A., Kosecki, W. & Windorpski, H. (2016) 'Drogowy most przez rzekę Wisłę w Tczewie przeszłość – terażniejszość – przyszłość', *Duże Mosty Wieloprzesłowe*. Wrocław: Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, pp. 447–456.

Malinowski, M., Klocek, T. & Wysiatycki, K. (1988) 'Uszkodzenia przęseł zalewowych mostu przez Wisłę w Kiezmarku.', *Konferencja naukowo - techniczna pt. Naprawa i wzmacnianie betonowych i zespolonych konstrukcji mostowych*'. Kielce, pp. 93–100.

Malinowski, M., Sitarski, A., Banaś, A. & Rutkowski, R. (2015) 'Monitoring technologicznych ram zabezpieczenia przejść poprzecznych tunelu pod martwą Wisłą w Gdańsku', *Archiwum Instytutu Inżynierii Lądowej / Politechnika Poznańska*, 19, pp. 165–175.

Marwala, T. (2000) *Fault Identification Using Neural Networks And Vibration Data*. St. John's College.

Marwala, T. (2009) *Computational Intelligence for Missing Data Imputation, Estimation, and Management*. IGI Global.

Marwala, T. (2010) *Finite element model updating using computational intelligence techniques: applications to structural dynamics*. Springer-Verlag London.

McConnell, K. G. (2008) *Vibration testing : theory and practice*. Wiley.

Minshui, H. & Hongping, Z. (2008) 'Finite element model updating of bridge structures based on sensitivity analysis and optimization algorithm', *Wuhan University Journal of Natural Sciences*. Wuhan University, 13(1), pp. 87–92.

Mottershead, J. E., Link, M. & Friswell, M. I. (2011) 'The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial', *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(7), pp. 2275–2296.

Mottershead, J. & Friswell, M. I. (1993) 'Model Updating in Structural Dynamics: A Survey', *Journal of Sound and vibration*, 167(2), pp. 347–375.

Nelwamondo, F. V. & Marwala, T. (2006) 'Faults Detection Using Gaussian Mixture Models, Mel-Frequency Cepstral Coefficients and Kurtosis', *2006 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. IEEE, pp. 290–295.

Noor, A. K. (1994) 'Recent Advances and Applications of Reduction Methods', *Applied Mechanics Reviews*. American Society of Mechanical Engineers, 47(5), p. 125.



O'Callahan, J. C. (1989) 'A Procedure for an Improve Reduced System (IRS) Model', *7th International Modal Conference*. Las Vegas, pp. 17–21.

O'Callahan, J. C., Avitabile, O. & Riemer, R. (1989) 'System Equivalent Reduction Expansion Process', *7th International Modal Conference*. Las Vegas, pp. 29–37.

Ojalvo, I. & Pilon, D. (1988) 'Diagnostics for geometrically locating structural math model errors from modal test data', *29th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics.

Olaszek, P. (2015) *Cyfrowe metody pomiarowe w zastosowaniu do badań mostów*. Warszawa: Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN.

Olaszek, P. & Łagoda, M. (2011) 'Uniknięcie awarii mostu w wyniku badań pod próbnym obciążeniem', *XXV Konferencja 'Awarie budowlane'*. Zeszyt 'Zapobieganie, diagnostyka, naprawy, rekonstrukcje', pp. 1219–1226.

Onysyk, H. (2011) 'Analiza wybranych wyników pomiarów elektronicznych mostu przez Wisłę w Puławach', *Inżynieria i Budownictwo*, 67(7–8), pp. 426–428.

Park, W., Park, J. & Kim, H.-K. (2015) 'Candidate model construction of a cable-stayed bridge using parameterised sensitivity-based finite element model updating', *Structure and Infrastructure Engineering*, 11(9), pp. 1163–1177.

Prakash, B. G. & Prabhu, M. S. S. (1986) 'Reduction techniques in dynamic substructures for large problems', *Computers & Structures*, 22(4), pp. 539–552.

Qu, W. and Peng, Q. (2007) 'Damage detection method for vertical bars of mast structure in time domain', *Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 27, pp. 110–116.

Regińska, T. (2013) 'Zastosowanie metod numerycznych'. Warszawa: Instytut Matematyczny PAN, Politechnika Warszawska.

Rudzik, A., Pradelok, S. & Poprawa, G. (2014) 'Changes natural frequency of the truss railway bridge due to the progressive damage', *Journal of Civil Engineering, Environment and Architecture*, XXXI(61 (4/14)), pp. 179–191.

Salamak, M. & Fross, K. (2010) 'Mosty, które zmieniają miasta', *Mosty*, 3, pp. 70–77.

Sastry, C. V. S., Roy Mahapatra, D., Gopalakrishnan, S. & Ramamurthy, T. S. (2003) 'An iterative system equivalent reduction expansion process for extraction of high frequency response from reduced order finite element model', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(15), pp. 1821–1840.

Schlune, H., Plos, M. & Gylltoft, K. (2009) 'Improved bridge evaluation through finite element model updating using static and dynamic measurements', *Engineering Structures*, 31(7), pp. 1477–1485.

Schultz, M. J., Pai, P. F. & Abdelnaser, A. S. (1996) 'Frequency Response Function Assignment Technique for Structural Damage Identification (7 pages) – Society for Experimental Mechanics', *IMAC XIV – 14th International Modal Analysis Conference*, pp. 105–111.

Schwarz, B., Richardson, M. & Formenti, D. L. (2007) 'FEA Model Updating Using SDM', *Journal of Sound And Vibration*, 41, pp. 18–23.

Shahdin, A., Mezeix, L., Bouvet, C., Morlier, J. & Gourinat, Y. (2009) 'Monitoring the effects of impact damages on modal parameters in carbon fiber entangled sandwich beams', *Engineering Structures*, 31(12), pp. 2833–2841.

Sieńko, R. (2013) 'Systemy monitorowania mostów– przykładowe realizacje w Polsce', *Mosty*, 5, pp. 24–29.

Siwowski, T. & Czarnik, K. (2014) 'Most podwieszony przez Wisłok w Rzeszowie', *Mosty*, 4, pp. 26–29.

Siwowski, T., Kaleta, D., Kulpa, M. & Poneta, P. (2014) 'Pierwszy polski most kompozytowy – koncepcja techniczna i badania wstępne', *Archiwum Instytutu Inżynierii Lądowej / Politechnika Poznańska*.

Sohn, H., Farrar, C. R., Hemez, F., Stinemates, D. W., Nedler, B. & Czarnecki, J. (2004) *A Review of Structural Health Monitoring Literature 1996 – 2001*. Los Alamos National Laboratory. doi: LA-13976-MS.

Stachurski, A. (2009) *Wprowadzenie do optymalizacji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.

Stefanowski, T. & Filipiuk, S. (2015) 'Most Uniwersytecki przez Brdę w Bydgoszczy', *Mosty*, 2, pp. 58–60.

Szymczak, C. (1998) *Elementy teorii projektowania*. Wydawnictwo Naukowe PWN.

Waters, T. P. (1995) *Finite Element Model Updating Using Measured Frequency Response Function*. University of Bristol.

Wąchalcki, K. & Cywiński, Z. (2015) 'Die neue Strassenbruecke in Torun, Polen. Teil 1: Planung und Bau', *Stahlbau*, 84(4), pp. 267–274.

Wenzel, H. (2008) *Health Monitoring of Bridges*. John Wiley & Sons.

Weseli, J., Radziecki, A. & Salamak, M. (2007) 'Monitoring mostów autostradowych na terenach podlegających wpływom eksploatacji górniczej', *Magazyn Autostrady*, 5, pp. 126–135.

Wilde, K. (2014) 'systemy Monitoringu Konstrukcji obiektów budowlanych cz. 1', *Builder Budownictwo-Architektura*, 5, pp. 66–69.

Wilde, K. (2016) 'Systemy monitoringu technicznego w obiektach mostowych - niezbędne czy przydatne?', *Duże Mosty Wieloprzesłowe*. Wrocław: Dolnośląskie Wydawnictwo Edykatyjne, pp. 497–506.

Wong, J.-M., Mackie, K. & Stojadinovic, B. (2006) 'Bayesian updating of bridge fragility curves using sensor data', *Third International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management*. Porto, : CRC Press 2006, pp. 613–614.

Xiao, X., Xu, Y. L. & Zhu, Q. (2015) 'Multiscale Modeling and Model Updating of a Cable-Stayed Bridge. II: Model Updating Using Modal Frequencies and Influence Lines', *Journal of Bridge Engineering*, 20(10), p. 4014113.

Yan, G., Duan, Z., Ou, J. & De Stefano, A. (2010) 'Structural damage detection using residual forces based on wavelet transform', *Mechanical Systems and Signal Processing*. Academic Press Inc., 24(1), pp. 224–239.

Yue, L. N. & Li, S. (2014) 'The Finite Element Model Updating of Long Span Cable-Stayed Bridge Based on Static and Dynamic Loading Test', *Applied Mechanics and Materials*. Trans Tech Publications, 644–650, pp. 5014–5018.

Zheng, Y. M., Sun, H. H., Zhao, X., Chen, W., Zhang, R. H. & Shen, X. D. (2009) 'Finite element model updating of a long-span steel skybridge', *Journal of Vibration Engineering*, 22, pp. 105–110.

Zhong, R., Zong, Z., Niu, J., Liu, Q. & Zheng, P. (2016) 'A multiscale finite element model validation method of composite cable-stayed bridge based on Probability Box theory', *Journal of Sound and Vibration*, 370, pp. 111–131.

Zienkiewicz, O. C. (1986) *The Finite Element Method*. New York: McGraw-Hill.

Zimin, V. D. & Zimmerman, D. C. (2009) 'Structural Damage Detection Using Time Domain Periodogram Analysis', *Structural Health Monitoring*. SAGE Publications Sage UK: London, England, 8(2), pp. 125–135.

Zimmerman, D. C. & Kaouk, M. (1992) 'Eigenstructure assignment approach for structural damage detection', *AIAA Journal*, 30(7), pp. 1848–1855.

Živanović, S., Pavić, A. & Reynolds, P. (2007) 'Finite element modelling and updating of a lively footbridge: The complete process', *Journal of Sound and Vibration*, 301(1), pp. 126–145.

Zobel, H., Karwowski, W. & Wróbel, M. (2003) 'Kładka z kompozytu polimerowego zbrojonego włóknem szklanym', *Inżynieria i Budownictwo*, 59(2), pp. 108–109.

Żółtowski, K. (2015) 'Monitoring konstrukcji mostu podwieszonoego i extradosed', *Mosty*, 6, pp. 34–38.

Żółtowski, K., Binczyk, M. & Kalitowski, P. (2016) 'Most Cłowy w Szczecinie. Historia i przyszłość', *Duże Mosty Wieloprzesłowe*. Wrocław: Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, pp. 467–474.

### **Słowniki i encyklopedie**

Słownik PWN- Słownik języka polskiego PWN (<http://sjp.pwn.pl/>)

### **Normy i przepisy prawne:**

PB 1994 - Prawo budowlane a dnia 7 lipca 1994r. (Dz.U. Nr 89, poz 414) tj. z dnia 9 lutego 2016r. (Dz.U. z 2016r. poz 290) zm. Dz.U.z 2016r. poz.1250, Dz.U. z 2016r. poz 1165, Dz.U.z 2016r. poz. 961

I1 2005 – Instrukcje przeprowadzania przeglądów drogowych obiektów inżynierskich, Załącznik do Zarządzenia nr 14 Generalnego Dyrektora Dróg Krajowych i Autostrad z dnia 7 lipca 2005 roku, Warszawa 2005

# Załącznik 1

## Budowa tabeli wynikowej aktualizowanych parametrów

macierz wag dla wybranego wariantu - rozmieszczenie czujników wg schematu nr 5																								
NP.	liczba postaci brana do procedury	postacie	$n_{max}$	$n_d$	indeksy bazowe			kryterium NMD [%]			f [Hz]			funkcja kary $J_p$	liczba iteracji	współczynnik $w_p$	położenie macierzy blokowej	sztywność elementów po aktualizacji parametrów			indeks $l_0$ dla poszczególnych elementów po aktualizacji			
					$i_m^{obs}$	$i_{max}^{obs}$	$i_s^{obs}$	1	2	3	1	2	3					1	...	$n$	1	...	$n$	
liczba wierszy macierzy wag w zależności od wybranego wariantu	liczba postaci drgań własnych wykorzystywana w procedurze aktualizacji parametrów	postacie drgań własnych wykorzystywane w procedurze aktualizacji parametrów	numer elementu modelu MES o największej bezwzględnej sztywności lub masy otrzymanej w wyniku procedury aktualizacji	numer dowolnego elementu modelu MES wytypowanego (potencjalnie uszkodzonego)	zestawienie indeksów bazowych odnoszących się do indeksu wektorowego $I_0^{abs}$	kryterium NMD 1			kryterium $f_\Delta$			kryterium $J_p$	liczba iteracji procedury aktualizacji parametrów	wartość współczynnika $w_p$ skalującego macierz wag parametrów $W_{\theta\theta}$	numer iteracji podstawienia blokowej macierzy diagonalnej $W_{mm}$	wartości sztywności $E_i$ , $n$ elementów modelu MES po procedurze aktualizacji parametrów	wartości indeksu $l_0^{abs}$ dla $n$ elementów modelu MES							
						minimalna wartość różnicy kryterium NMD pierwszej postaci drgań własnych pomiędzy wartością pomierzoną a zaktualizowaną																		
						kryterium NMD 2																		
						minimalna wartość różnicy kryterium NMD dwóch pierwszych postaci drgań własnych pomiędzy wartością pomierzoną a zaktualizowaną																		
						kryterium NMD 3																		
minimalna wartość różnicy kryterium NMD wszystkich trzech postaci drgań własnych pomiędzy wartością pomierzoną a zaktualizowaną																								

Tabele wynikowe aktualizacji parametrów dla zestawów macierzy wag wariantach 1-3 5-8 przy uszkodzeniu elementu numer 3 o intensywności 15%

macierze wag wariant 1 - rozmieszczenie czujników wg schematu nr 5																																								
NP.	liczba postaci brana do procedury	postacie	P <sub>max</sub>	P <sub>0</sub>	indeksy bazowe			kryterium NMD [%]			f [Hz]			funkcja kary J <sub>f</sub>	liczba iteracji	współczynnik wp	położenie macierzy blokowej	stżywność elementów po aktualizacji parametrów										indeks I <sub>f</sub> dla poszczególnych elementów po aktualizacji												
					I <sub>1</sub>	I <sub>2</sub>	I <sub>3</sub>	1	2	3	1	2	3					1	2	3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1 2	3	3	5.12	1.04	13.70	1.064	1.653	2.264	19.44	77.16	175.11	58345	101	1	0	2197.2	2159.1	1999.8	2167.4	2175.6	2173.1	2166.3	2007.0	2164.0	2198.1	-1.18	0.58	7.91	0.19	-0.18	-0.07	0.25	7.58	0.35	-1.22			

macierze wag wariant 2 - rozmieszczenie czujników wg schematu nr 5																																								
NP.	liczba postaci brana do procedury	postacie	P <sub>max</sub>	P <sub>0</sub>	indeksy bazowe			kryterium NMD [%]			f [Hz]			funkcja kary J <sub>f</sub>	liczba iteracji	współczynnik wp	położenie macierzy blokowej	stżywność elementów po aktualizacji parametrów										indeks I <sub>f</sub> dla poszczególnych elementów po aktualizacji												
					I <sub>1</sub>	I <sub>2</sub>	I <sub>3</sub>	1	2	3	1	2	3					1	2	3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1 1 2	3	3	1.89	0.42	2.31	1.210	1.301	6.807	19.42	77.16	175.11	50368	101	1	1	2546.3	2102.7	2012.7	2169.6	2176.6	2165.5	2145.1	2042.3	2129.0	2177.4	-17.25	3.17	7.32	1.22	-0.23	0.28	1.22	5.96	1.97	-0.26			
2	2	1 1 2	3	3	5.01	1.20	3.77	1.096	1.424	4.993	19.45	77.16	175.11	58739	101	1	2	2203.3	2123.5	1990.2	2162.4	2181.0	2171.5	2164.8	2020.3	2190.6	2206.5	-1.46	2.22	8.35	0.10	-0.43	0.00	0.32	6.97	-0.87	-1.60			
3	2	1 1 2	3	3	577700.00	129700.00	2371000.00	0.000	0.000	0.000	19.44	77.16	175.11	1.0641	101	1	3	2171.6	2171.6	1845.9	2171.6	2171.6	2171.6	2171.6	2171.6	2171.6	2171.6	2171.6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
4	2	1 1 2	3	3	5.78	1.18	9.94	1.099	1.135	5.118	19.44	77.16	175.11	58877	101	1	4	2156.7	2153.3	1989.6	2164.5	2177.6	2168.7	2167.8	2017.2	2199.9	2171.7	2199.9	-1.16	0.84	8.38	0.13	-0.28	0.14	0.18	7.11	-1.30	0.00		
5	2	1 1 2	3	3	5.33	1.18	9.72	1.224	1.139	5.694	19.44	77.16	175.11	58832	101	1	5	2196.4	2153.0	1990.0	2168.6	2186.2	2162.5	2162.5	2017.1	2169.9	2199.2	-1.14	0.86	8.36	0.14	-0.67	0.42	0.30	7.12	0.08	-1.27			

macierze wag wariant 3 - rozmieszczenie czujników wg schematu nr 5																																								
NP.	liczba postaci brana do procedury	postacie	P <sub>max</sub>	P <sub>0</sub>	indeksy bazowe			kryterium NMD [%]			f [Hz]			funkcja kary J <sub>f</sub>	liczba iteracji	współczynnik wp	położenie macierzy blokowej	stżywność elementów po aktualizacji parametrów										indeks I <sub>f</sub> dla poszczególnych elementów po aktualizacji												
					I <sub>1</sub>	I <sub>2</sub>	I <sub>3</sub>	1	2	3	1	2	3					1	2	3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1 1 2	3	3	5.12	1.04	13.70	1.064	1.653	2.264	19.44	77.16	175.11	58345	101	1	0	2197.2	2159.1	1999.8	2167.4	2175.6	2173.1	2166.3	2007.0	2164.0	2198.1	-1.18	0.58	7.91	0.19	-0.18	-0.07	0.25	7.58	0.35	-1.22			
2	2	1 1 2	3	3	5.18	1.04	15.52	1.056	1.625	2.220	19.44	77.16	175.11	5849.3	101	0.1	0	2197.7	2162.5	1999.4	2166.3	2174.0	2171.7	2165.5	2098.8	2198.6	2177.4	-1.20	0.51	7.93	0.24	-0.11	0.00	0.28	7.59	0.28	-1.24			
3	2	1 1 2	3	3	5.18	1.04	15.81	1.055	1.622	2.213	19.44	77.16	175.11	585.13	101	0.01	0	2197.8	2160.7	1999.4	2166.2	2173.8	2171.5	2165.3	2066.7	2165.7	2198.7	-1.21	0.50	7.93	0.25	-0.10	0.01	0.29	7.59	0.27	-1.25			
4	2	1 1 2	3	3	5.18	1.04	15.87	1.055	1.621	2.212	19.44	77.16	175.11	58.321	101	0.001	0	2197.8	2160.8	1999.4	2166.2	2173.8	2171.5	2165.3	2066.7	2165.7	2198.7	-1.21	0.50	7.93	0.25	-0.10	0.01	0.29	7.59	0.27	-1.25			
5	2	1 1 2	3	3	5.17	1.04	16.21	1.055	1.619	2.202	19.44	77.16	175.11	5.8584	101	0.0001	0	2197.9	2161.0	1999.4	2166.2	2173.9	2171.4	2165.3	2066.7	2165.5	2198.6	-1.21	0.49	7.93	0.25	-0.10	0.01	0.29	7.59	0.28	-1.24			
6	2	1 1 2	3	3	5.06	1.04	20.32	1.062	1.602	2.109	19.44	77.16	175.11	0.59196	101	0.00001	0	2198.6	2163.2	1999.4	2166.6	2175.1	2170.1	2164.9	2066.7	2163.3	2197.9	-1.24	0.39	7.93	0.23	-0.16	0.07	0.31	7.60	0.38	-1.21			
7	2	1 1 2	3	3	4.38	1.05	23.62	1.110	1.482	1.426	19.44	77.16	175.11	0.064138	101	0.000001	0	2204.2	2168.5	1999.4	2169.5	2184.5	2161.0	2161.8	2066.9	2147.6	2192.4	-1.50	0.34	7.93	0.10	-0.59	0.49	0.45	7.59	1.10	-0.96			
8	2	1 1 2	3	3	3.80	1.21	4.79	1.121	1.181	0.113	19.44	77.16	175.11	0.010014	101	0.0000001	0	2216.3	2210.0	1987.9	2171.3	2206.2	2140.9	2158.4	2019.8	2117.4	2181.0	-2.05	-1.77	8.46	0.01	-1.59	1.42	0.61	6.99	2.50	-0.43			
9	2	1 1 2	3	3	6.46	2.68	11.37	0.650	0.693	0.248	19.44	77.16	175.11	0.0018014	101	0.0000001	0	2214.4	2192.9	1930.1	2155.8	2213.3	2175.9	2081.4	2134.6	2176.6	2197.6	-1.97	-0.98	11.12	0.73	-1.92	1.75	4.16	1.91	-0.37				
10	2	1 1 2	3	3	8.68	5.03	8.15	0.325	0.478	0.141	19.44	77.16	175.11	0.0018014	9	0.00000001	0	2211.6	2180.0	1897.6	2138.0	2217.2	2139.0	2196.6	2117.1	2147.2	2179.8	-1.84	-0.38	9.12	1.55	-1.66	1.50	2.51	1.13	1.57	-0.38			
11	2	1 1 2	3	3	9.38	6.11	9.50	0.275	0.402	0.090	19.44	77.16	175.11	0.0018014	13	1E-10	0	2208.5	2170.0	1890.0	2142.0	2217.8	2133.7	2193.9	2125.5	2147.2	2179.8	-1.70	-0.06	12.97	1.36	-1.90	1.75	2.12	0.79	-0.40				
12	2	1 1 2	3	3	120.70	16.53	0.74	105.860	51.185	65.851	19.44	77.16	175.11	0.0018014	6	1E-11	0	-1407400000000000.0	1914000000000000.0	851280000000000.0	63344000000000.0	-441860000000000.0	-41030000000000.0	-16484000000000.0	-24189000000000.0	42612000000000.0	-48239000000000.0	648070000000000.0	-881180000000000.0	-39200000000000.0	-29169000000000.0	75952000000000.0	111390000000000.0	-19622000000000.0	22213000000000.0					
13	2	1 1 2	3	3	1.04	0.16	9.99	106.640	53.182	228.800	19.44	77.16	175.11	0.0018014	8	1E-12	0	-2918500000000000.0	-1407700000000000.0	1405500000000000.0	-11258000000000000.0	-6465000000000000.0	7170300000000000.0	-5304400000000000.0	-16896000000000000.0	72058000000000000.0	13439000000000000.0	6482100000000000.0	51841000000000000.0	29750000000000000.0	-33018000000000000.0	24426000000000000.0	77805000000000000.0	-331810000000000000.0						
14	2	1 1 2	3	3	1.71	0.33	20.63	132.640	250.970	59.164	19.44	77.16	175.11	0.0018014	7	1E-13	0	3969300000000000.0	-7262000000000000.0	-21480000000000000.0	-3177700000000000.0	7399200000000000.0	-10115000000000000.0	-13007000000000000.0	20790000000000000.0	-17640000000000000.0	14092000000000000.0	-18276000000000000.0	33460000000000000.0	38912000000000000.0	-14633000000000000.0	-34070000000000000.0	48670000000000000.0	51895000000000000.0	-64680000000000000.0					
15	2	1 1 2	3	3	0.21	0.04	425.54	143.360	36.904	187.250	19.44	77.16	175.11	0.0018014	8	1E-14	0	1340900000000000.0	-28438000000000000.0	93278000000000000.0	217520000000000000.0	-1126100000000000000.0	6681200000000000000.0	-4648600000000000000.0	4846620000000000000.0	-36023000000000000000.0	42452000000000000000.0	-132410000000000000000.0	143950000000000000000.0	-207660000000000000000.0	324600000000000000000.0	-1164000000000000000000.0	3898600000000000000000.0	16590000000000000000000.0						
16	2	1 1 2	3	3	63.86	7.99	96.01	275.920	741.930	539.920	19.44	77.16	175.11	0.0018014	8	1E-15	0	-17824000000000000.0	5406940000000000000.0	1108100000000000000.0	7548400000000000000.0	-11345000000000000000.0	-16996000000000000000.0	45303400000000000000.0	-432340000000000000000.0	82037000000000000000.0	-249050000000000000000.0	-510200000000												



Tabele wyników aktualizacji parametrów dla zestawów macierzy wag w wariantach 1-3 5-8 przy uszkodzeniu elementu numer 5 o intensywności 15%

macierz wariant 1 - rozmieszczenie czujników wg schematu nr 5																																								
NP.	liczba postaci brana do procedury	postacie	n <sub>max</sub>	n <sub>s</sub>	indeksy bazowe			kryterium NMD [%]			f [Hz]			funkcja kryl.	liczba iteracji	współczynnik wp	położenie macierzy blokowej	słowność elementów po aktualizacji parametrów										indeks I <sub>L</sub> dla poszczególnych elementów po aktualizacji												
					1 <sup>min</sup>	1 <sup>max</sup>	1 <sup>avg</sup>	1	2	3	1	2	3					1	2	3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1 2	5	5	20.17	8.14	1.01	0.369	0.304	0.870	19.33	78.28	174.34	56207	101	1	1	2169.9	2152.1	2171.3	2163.1	2012.3	2014.2	2185.6	2174.8	2155.8	2170.8	0.08	0.90	0.01	-0.53	7.34	7.25	-0.64	-0.14	0.73	0.04			

macierz wariant 2 - rozmieszczenie czujników wg schematu nr 5																																								
NP.	liczba postaci brana do procedury	postacie	n <sub>max</sub>	n <sub>s</sub>	indeksy bazowe			kryterium NMD [%]			f [Hz]			funkcja kryl.	liczba iteracji	współczynnik wp	położenie macierzy blokowej	słowność elementów po aktualizacji parametrów										indeks I <sub>L</sub> dla poszczególnych elementów po aktualizacji												
					1 <sup>min</sup>	1 <sup>max</sup>	1 <sup>avg</sup>	1	2	3	1	2	3					1	2	3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1 2	5	5	16.18	7.92	1.01	0.362	0.310	0.839	19.33	78.28	174.34	56190	101	1	1	2151.5	2155.1	2169.6	2184.3	2012.4	2014.5	2186.7	2172.6	2158.8	2172.6	0.93	0.76	0.09	-0.58	7.33	7.24	-0.70	-0.06	0.59	-0.04			
2	2	1 2	5	5	12.97	3.24	1.02	0.359	0.580	0.757	19.34	78.28	174.34	55390	101	1	2	2177.2	2123.1	2173.7	2183.1	2014.6	2017.4	2186.4	2177.0	2174.1	2177.7	-0.26	2.23	-0.09	-0.53	7.23	7.10	-0.68	-0.25	-0.11	-0.28			
3	2	1 2	5	5	15.93	8.15	1.01	0.367	0.304	0.873	19.33	78.28	174.34	55209	101	1	3	2169.9	2152.1	2171.0	2181.1	2012.3	2014.2	2185.6	2175.1	2155.9	2172.6	0.08	0.90	0.03	-0.53	7.34	7.25	-0.64	-0.16	0.73	0.04			
4	2	1 2	5	5	23.79	8.12	1.01	0.422	0.322	0.885	19.33	78.28	174.34	55866	101	1	4	2168.8	2152.1	2171.4	2195.7	2013.1	2014.8	2174.1	2174.5	2155.4	2174.8	0.14	0.90	0.01	-1.11	7.30	7.22	-0.11	-0.13	0.75	0.10			
5	2	1 2	5	5	2148300.00	862400.00	143250.00	0.000	0.000	0.000	19.28	78.28	174.34	1.0611	101	1	5	2171.6	2171.6	2171.6	2171.6	1845.9	2171.6	2171.6	2171.6	2171.6	2171.6	0.00	0.00	0.00	0.00	15.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00			

macierz wariant 3 - rozmieszczenie czujników wg schematu nr 5																																								
NP.	liczba postaci brana do procedury	postacie	n <sub>max</sub>	n <sub>s</sub>	indeksy bazowe			kryterium NMD [%]			f [Hz]			funkcja kryl.	liczba iteracji	współczynnik wp	położenie macierzy blokowej	słowność elementów po aktualizacji parametrów										indeks I <sub>L</sub> dla poszczególnych elementów po aktualizacji												
					1 <sup>min</sup>	1 <sup>max</sup>	1 <sup>avg</sup>	1	2	3	1	2	3					1	2	3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1 2	5	5	20.17	8.14	1.01	0.369	0.304	0.870	19.33	78.28	174.34	56207	101	1	1	2169.9	2152.1	2171.3	2183.1	2012.3	2014.2	2185.6	2174.8	2155.8	2170.8	0.08	0.90	0.01	-0.53	7.34	7.25	-0.64	-0.14	0.73	0.04			
2	2	1 2	5	5	52.29	28.38	1.02	0.286	0.375	1.170	19.29	78.28	174.34	6209.5	101	0.1	1	2175.9	2167.0	2168.6	2173.8	1995.2	1998.4	2177.0	2172.3	2171.6	2177.1	-0.19	0.21	0.14	-0.10	8.12	7.98	-0.25	-0.03	0.00	-0.25			
3	2	1 2	5	5	52.29	28.38	1.02	0.276	0.400	1.217	19.28	78.28	174.34	6287.7	101	0.1	1	2176.7	2169.0	2168.2	2172.6	1993.0	1996.3	2175.8	2173.6	2173.0	2177.0	-0.23	0.12	0.16	-0.05	8.23	8.08	-0.19	-0.02	-0.09	-0.29			
4	2	1 2	5	5	52.13	28.01	1.02	0.275	0.403	1.221	19.28	78.28	174.34	6295.4	101	0.001	1	2176.7	2169.1	2168.2	2172.5	1992.7	1996.1	2175.7	2171.9	2173.0	2178.0	-0.23	0.11	0.16	-0.04	8.24	8.08	-0.19	-0.01	-0.10	-0.29			
5	2	1 2	5	5	51.24	27.71	1.02	0.274	0.403	1.214	19.28	78.28	174.34	6301	101	0.0001	1	2176.7	2169.0	2168.2	2172.4	1992.5	1996.2	2175.8	2171.9	2174.1	2178.1	-0.23	0.12	0.16	-0.04	8.25	8.08	-0.19	-0.01	-0.15	-0.30			
6	2	1 2	5	5	44.14	25.36	1.04	0.267	0.395	1.140	19.28	78.28	174.34	63489	101	0.00001	1	2176.7	2168.1	2167.2	2172.1	1991.1	1997.7	2175.9	2172.0	2173.0	2178.8	-0.20	0.21	0.16	-0.02	8.31	8.08	-0.21	-0.02	-0.33	-0.33			
7	2	1 2	5	5	22.83	11.01	1.17	0.218	0.374	0.648	19.28	78.28	174.34	0.068411	101	0.000001	1	2171.3	2154.3	2167.8	2183.5	1980.4	2008.7	2178.7	2172.6	2183.5	2178.8	0.01	0.80	0.11	0.81	7.50	7.50	-0.32	-0.04	-0.79	-0.55			
8	2	1 2	5	5	11.59	5.29	1.58	0.170	0.490	0.844	19.28	78.28	174.34	0.012283	101	1E-07	1	2161.9	2131.1	2145.5	2164.4	1936.2	1952.2	2161.8	2167.2	2122.4	2193.2	0.45	1.87	-0.13	0.33	9.92	6.29	-0.47	0.21	-1.88	-0.99			
9	2	1 2	5	5	9.81	5.59	1.15	0.364	0.467	0.827	19.28	78.28	174.34	0.030608	101	1E-08	1	2161.1	2147.7	2168.5	2168.5	1932.8	2000.5	2178.2	2129.0	2195.5	2192.7	0.48	2.12	-1.07	0.15	11.00	5.12	-1.10	1.96	-1.10	-1.96			
10	2	1 2	5	5	10.34	3.76	3.03	0.463	0.489	0.502	19.28	78.28	174.34	0.001137	101	1E-09	1	2163.8	2168.7	2168.7	2163.9	1910.3	2085.5	2173.4	2104.8	2186.5	2174.4	0.36	0.14	-3.20	0.36	12.03	3.97	0.08	-0.08	-0.68	-0.68			
11	2	1 2	5	5	17.55	6.04	4.40	0.353	0.348	0.434	19.28	78.28	174.34	0.001137	9	1E-10	1	2171.4	2165.7	2165.7	2171.4	1892.4	2172.8	2172.8	2171.4	2179.7	2179.7	0.01	0.27	-2.13	0.12	12.86	2.92	-0.05	2.08	-0.21	-0.37			
12	2	1 2	9	5	48.38	21.14	0.61	136.010	278.660	240.050	19.28	78.28	174.34	0.001137	5	1E-11	1	-1998000000000000.0	1367000000000000.0	2842000000000000.0	1872000000000000.0	3634000000000000.0	6878000000000000.0	12659000000000000.0	-7684300000000000.0	2522000000000000.0	9203400000000000.0	-6297500000000000.0	-13189000000000000.0	-8620000000000000.0	-16737000000000000.0	-31675000000000000.0	-156870000000000000.0	-582940000000000000.0	353850000000000000.0	-1161300000000000000.0				
13	2	1 2	2	5	1235.40	159.80	4.33	120.830	50.781	64.513	19.28	78.28	174.34	0.001137	6	1E-12	1	-770210000000000000.0	333700000000000000.0	349550000000000000.0	-361900000000000000.0	-18346000000000000.0	7471300000000000.0	-4483780000000000.0	-1407400000000000.0	15346000000000000.0	115100000000000000.0	8348000000000000.0	8081200000000000.0	3440400000000000.0	2084600000000000.0	6480500000000000.0	2084600000000000.0	6480500000000000.0						
14	2	1 2	1	5	4546.00	1363.60	2.00	104.300	47.079	246.470	19.28	78.28	174.34	0.001137	9	1E-13	1	-144120000000000000.0	7021700000000000.0	-1056900000000000.0	1805500000000000.0	-1805500000000000.0	3253000000000000.0	1263300000000000.0	6526200000000000.0	-33181000000000000.0	-9088000000000000.0	4866600000000000.0	-8313000000000000.0	-3005200000000000.0	-5817200000000000.0	-31566000000000000.0	-151640000000000000.0	305240000000000000.0	-222740000000000000.0					
15	2	1 2	1	5	3817.40	610.22	8.30	147.910	30.569	336.642	19.28	78.28	174.34	0.001137	7	1E-14	1	-154250000000000000.0	-185770000000000000.0	-252780000000000000.0	-14649000000000000.0	10327000000000000.0	-8753000000000000.0	-39090000000000000.0	14546000000000000.0	-11632000000000000.0	-12486000000000000.0	71029000000000000.0	63655000000000000.0	116400000000000000.0	67665000000000000.0	403460000000000000.0	180000000000000000.0	-669840000000000000.0	535640000000000000.0					
16	2	1 2	9	5	0.14	0.02	3.77	170.350	380.780	30.692	19.28	78.28	174.34	0.001137	8	1E-15	1	1300400000000000000.0	4724300000000000000.0	1194100000000000000.0	-4949300000000000000.0	4195700000000000000.0	-4949300000000000000.0	-9981800000000000000.0	-2645900000000000000.0	-5898200000000000000.0	-5489500000000000000.0	2606100000000000000.0	2272500000000000000.0	-19321000000000000000.0	45964000000000000000.0	-49493000000000000000.0	45964000000000000000.0	121840000000000000000.0						
17	2	1 2	10	5	92.48	145.09																																		





Tabele wyników aktualizacji parametrów dla zestawu macierzy wag w wariancie 3 przy uszkodzeniu elementu numer 5 o intensywności 15% uporzędkowane względem kryteriów Jp, B, NMD3, NMD2, NMD1

**macierz wag warianc 3 - rozmieszczenie czujników wg schematu nr 5 - uporzędkowana według kryteriów Jp, B, NMD3, NMD2, NMD1**

NP.	liczba postaci brana do procedury	postacie	P <sub>max</sub>	P <sub>0</sub>	indeksy bazowe										kryterium NMD [%]										f [Hz]										funkcja kary I	liczba iteracji	współczynnik wsp	położenie macierzy blokowej	stężenie elementów na aktualizacji parametrów										indeks I dla poszczególnych elementów na aktualizacji																			
					1					2					3					1					2					3									1					2					3					1					2					3				
					1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5					1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
10	2	1	2	5	5	10,34	1,76	3,01	0,463	0,489	0,502	1,248	16,28	78,28	174,34	1,00	0,011137	101	16-09	1	2161,9	2168,7	2174,1	2183,5	2194,1	2174,4	2188,5	2194,8	2198,8	2178,4	2126,4	2176,1	2196,7	2196,0	0,36	0,14	0,22	-2,13	-0,12	12,86	1,97	-0,61	1,08	-0,08	12,01	0,07	-0,05	2,08	-0,21	-0,17	0,08	-0,37																

**macierz wag warianc 3 - rozmieszczenie czujników wg schematu nr 5 - uporzędkowana według kryteriów Jp, B, NMD3, NMD2, NMD1**

NP.	liczba postaci brana do procedury	postacie	P <sub>max</sub>	P <sub>0</sub>	indeksy bazowe										kryterium NMD [%]										f [Hz]										funkcja kary I	liczba iteracji	współczynnik wsp	położenie macierzy blokowej	stężenie elementów na aktualizacji parametrów										indeks I dla poszczególnych elementów na aktualizacji									
					1					2					3					1					2					3									1					2					3									
					1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5					1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
10	2	1	2	5	5	10,34	1,76	3,01	0,463	0,489	0,502	1,248	16,28	78,28	174,34	1,00	0,011137	101	16-09	1	2161,9	2168,7	2174,1	2183,5	2194,1	2174,4	2188,5	2194,8	2198,8	2178,4	2126,4	2176,1	2196,7	2196,0	0,36	0,14	0,22	-2,13	-0,12	12,86	1,97	-0,61	1,08	-0,08	12,01	0,07	-0,05	2,08	-0,21	-0,17	0,08	-0,37						

**macierz wag warianc 3 - rozmieszczenie czujników wg schematu nr 5 - uporzędkowana według kryteriów Jp, B, NMD3, NMD2, NMD1**

NP.	liczba postaci brana do procedury	postacie	P <sub>max</sub>	P <sub>0</sub>	indeksy bazowe										kryterium NMD [%]										f [Hz]										funkcja kary I	liczba iteracji	współczynnik wsp	położenie macierzy blokowej	stężenie elementów na aktualizacji parametrów										indeks I dla poszczególnych elementów na aktualizacji									
					1					2					3					1					2					3																												
					1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5					1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5					
10	2	1	2	5	5	10,34	1,76	3,01	0,463	0,489	0,502	1,248	16,28	78,28	174,34	1,00	0,011137	101	16-09	1	2161,9	2168,7	2174,1	2183,5	2194,1	2174,4	2188,5	2194,8	2198,8	2178,4	2126,4	2176,1	2196,7	2196,0	0,36	0,14	0,22	-2,13	-0,12	12,86	1,97	-0,61	1,08	-0,08	12,01	0,07	-0,05	2,08	-0,21	-0,17	0,08	-0,37						

**macierz wag warianc 3 - rozmieszczenie czujników wg schematu nr 5 - uporzędkowana według kryteriów Jp, B, NMD3, NMD2, NMD1**

NP.	liczba postaci brana do procedury	postacie	P <sub>max</sub>	P <sub>0</sub>	indeksy bazowe										kryterium NMD [%]										f [Hz]										funkcja kary I	liczba iteracji	współczynnik wsp	położenie macierzy blokowej	stężenie elementów na aktualizacji parametrów										indeks I dla poszczególnych elementów na aktualizacji									
					1					2					3					1					2					3																												
					1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5					1	2	3	4	5	1	2	3	4	5										
10	2	1	2	5	5	10,34	1,76	3,01	0,463	0,489	0,502	1,248	16,28	78,28	174,34	1,00	0,011137	101	16-09	1	2161,9	2168,7	2174,1	2183,5	2194,1	2174,4	2188,5	2194,8	2198,8	2178,4	2126,4	2176,1	2196,7	2196,0	0,36	0,14	0,22	-2,13	-0,12	12,86	1,97	-0,61	1,08	-0,08	12,01	0,07	-0,05	2,08	-0,21	-0,17	0,08	-0,37						

**macierz wag warianc 3 - rozmieszczenie czujników wg schematu nr 5 - uporzędkowana według kryteriów Jp, B, NMD3, NMD2, NMD1**

NP.	liczba postaci brana do procedury	postacie	P <sub>max</sub>	P <sub>0</sub>	indeksy bazowe										kryterium NMD [%]										f [Hz]										funkcja kary I	liczba iteracji	współczynnik wsp	położenie macierzy blokowej	stężenie elementów na aktualizacji parametrów										indeks I dla poszczególnych elementów na aktualizacji									
					1					2					3					1					2					3																												
					1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5					1	2	3	4	5	1	2	3	4	5										
10	2	1	2	5	5	10,34	1,76	3,01	0,463	0,489	0,502	1,248	16,28	78,28	174,34	1,00	0,011137	101	16-09	1	2161,9	2168,7	2174,1	2183,5	2194,1	2174,4	2188,5	2194,8	2198,8	2178,4	2126,4	2176,1	2196,7	2196,0	0,36	0,14	0,22	-2,13	-0,12	12,86	1,97	-0,61	1,08	-0,08	12,01	0,07	-0,05	2,08	-0,21	-0,17	0,08	-0,37						

MOST WEDZY Pobrano z mostwedzy.pl