



**POLITECHNIKA
GDAŃSKA**

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI
I AUTOMATYKI

ROZPRAWA DOKTORSKA

**Tłumienie drgań
w elektromechanicznych
strukturach periodycznych**

Autor:
mgr inż. Wiktor
WASZKOWIAK

Promotor:
dr hab. inż. Arkadiusz ŻAK
prof. nadzw. PG

Gdańsk 2017

Przedmowa

Niniejsza praca stanowi podsumowanie kilkuletnich badań związanych z dynamiką struktur okresowych prowadzonych w Katedrze Mechatroniki i Inżynierii Wysokich Napięć na Wydziale Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej. Badania były związane z realizacją projektu NCN *Propagacja fal sprężystych w strukturach okresowych*, o numerze UMO-2012/07/B/ST8/03741.

W tym miejscu chciałbym wyrazić podziękowania dla Pana profesora Arkadiusza Żaka i Pana profesora Marka Krawczuka, kierownika Katedry Mechatroniki i Inżynierii Wysokich Napięć, za umożliwienie mi prowadzenia badań oraz cenne rady i wyrozumiałość. Chciałbym podziękować również wszystkim pracownikom z Katedry Mechatroniki i Inżynierii Wysokich Napięć za życzliwe przyjęcie i miłą atmosferę, która przyczyniła się do powstania tej pracy.

Pracę tę dedykuję ojcu, całej rodzinie i przyjaciołom, którzy wykazali się ogromnym wsparciem i jeszcze większą cierpliwością.

Spis treści

1	Wstęp	5
1.1	Struktury periodyczne	5
1.2	Struktury periodyczne w przyrodzie	6
1.3	Struktury periodyczne w inżynierii	8
1.4	Obecny stan wiedzy	9
1.5	Teza, cel i zakres pracy	11
2	Modelowanie struktur periodycznych	13
2.1	Metody modelowania struktur periodycznych	13
2.2	Teoria Blocha	20
2.3	Struktury dwuwymiarowe	24
2.4	Metoda Elementów Skończonych	27
2.5	Metoda Spektralnych Elementów Skończonych	28
2.5.1	Funkcje kształtu	30
2.5.2	Całkowanie numeryczne wielomianów aproksymujących	34
2.6	Redukcja Blocha	36
3	Pasywne struktury periodyczne	38
3.1	Jednowymiarowe struktury periodyczne	40
3.1.1	Model numeryczny	42
3.1.2	Analiza widm drgań własnych	44
3.2	Dwuwymiarowe struktury periodyczne	81
3.2.1	Model numeryczny	82

3.2.2	Drgania wzdłużne	84
3.2.3	Drgania poprzeczne	92
4	Elektromechaniczne struktury periodyczne	102
4.1	Opis matematyczny zjawiska piezoelektrycznego	103
4.2	Modelowanie belki z piezoelektrycznymi elementami aktywnymi	106
4.3	Elektromechaniczne struktury periodyczne	107
4.4	Analiza drgań wymuszonych	109
4.5	Propagacja fal	116
5	Badania eksperymentalne	127
5.1	Drgania wzdłużne	128
5.2	Drgania giętne	130
5.2.1	Drgania wymuszone	130
5.2.2	Propagacja fal	132
6	Podsumowanie	135
	Bibliografia	137

Rozdział 1

Wstęp

Człowiek od zarania dziejów bada strukturę materii. W znakomitej większości przypadków okazuje się, że materia składa się z powtarzających się elementów. Elementy te mogą być rozmieszczone w przestrzeni w sposób uporządkowany jak i nieuporządkowany. Struktury uporządkowane można rozpatrywać zarówno ze względu na właściwości indywidualnych elementów, jak i ze względu na właściwości struktury jako całości. Daje to możliwość obserwacji symetrii, a co za tym idzie różniących się właściwości fizycznych w zależności od kierunku obserwacji czy pobudzenia.

1.1 Struktury periodyczne

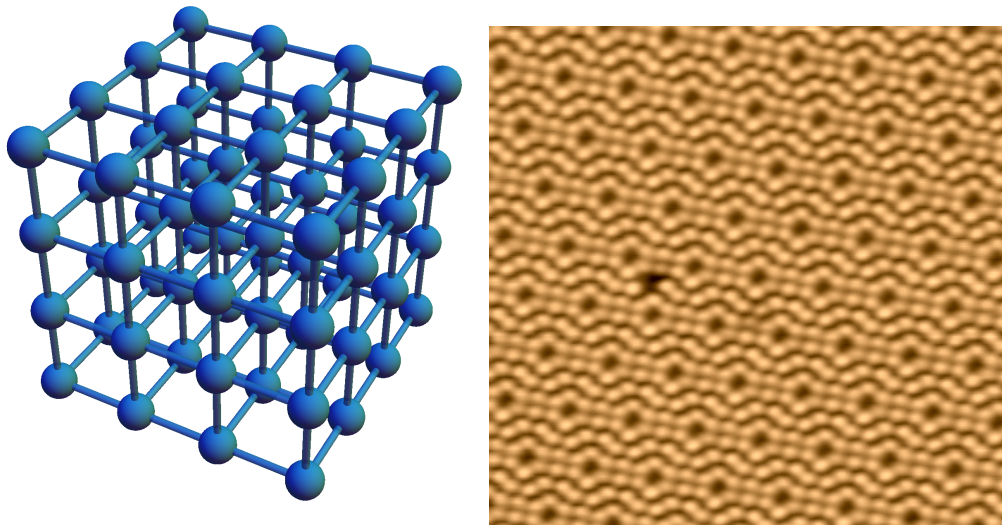
Struktury i sieci periodyczne są to układy składające się z serii powtarzających się identycznych segmentów, które są takie same pod względem właściwości fizycznych oraz rozmiarów. Najmniejsza odległość pomiędzy powtarzającymi się blokami nazywa się okresem sieci i jest oznaczana jako d [1]. Rozważania teoretyczne dla takich układów prowadzi się przy założeniu nieskończonych wymiarów. Takie przybliżenie jest słuszne przy wystarczająco dużej liczbie segmentów, których liczba zwykle wynosi 100 lub więcej.

Charakterystyczna dla struktur periodycznych jest pasmowa struktura widma częstotliwości. Występujące pasma zabronione określają energię drgań, które nie mogą być propagowane w danej strukturze. Charakterystyka pasma zabronionego silnie za-

leży od okresu sieci d , stąd też zjawiska optyczne lub elektryczne, z pozoru bardzo różne, tłumaczone przez tę samą teorię.

1.2 Struktury periodyczne w przyrodzie

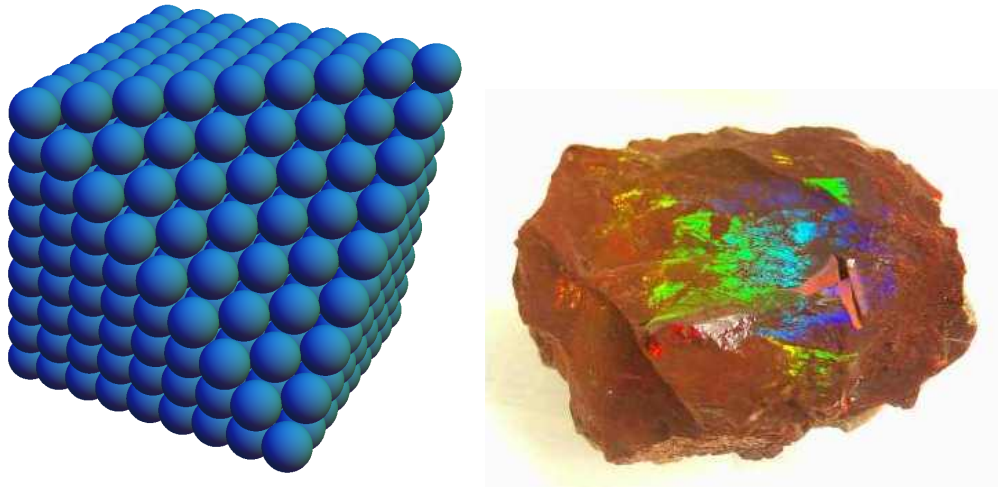
Dobrze znanymi i występującym w przyrodzie strukturami periodycznymi są kryształy. Są to ciała stałe, w których cząsteczki, atomy lub jony ułożone są w komórkach elementarnych powtarzających się w trzech wymiarach. W kryształach obserwować można zjawisko występowania pasm zabronionych w widmie drgań mechanicznych oraz w widmie energii elektronów. Ze względu na zakres wymiarów komórek elementarnych kryształów promieniowanie rentgenowskie ulega na nich dyfrakcji.



Rysunek 1.1: Sieć krystaliczna regularna oraz obraz powierzchni sieci krystalicznej krzemu z mikroskopu tunelowego

Jednym z przykładów struktur periodycznych występujących w przyrodzie są opale. Są to mineraloidy z grupy krzemianów. Opale składają się z amorficznych kul o średnicach 150 do 300 nm ułożonych w sieć heksagonalną gęsto upakowaną (HCP) lub regularną powierzchniowo centrowaną (FCC) [1]. Taka wielkość komórki elementarnej prowadzi do dyfrakcji promieniowania elektromagnetycznego w zakresie światła widzialnego, co daje efekt iryzacji, czyli powstawania tęczy rozbłysków na po-

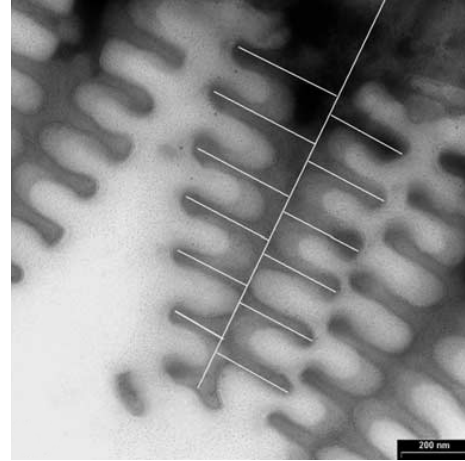
wierzchni. W pracy [2] wykazano, że opale są kryształami fonicznymi i posiadają pasmo zabronione w zakresie światła widzialnego.



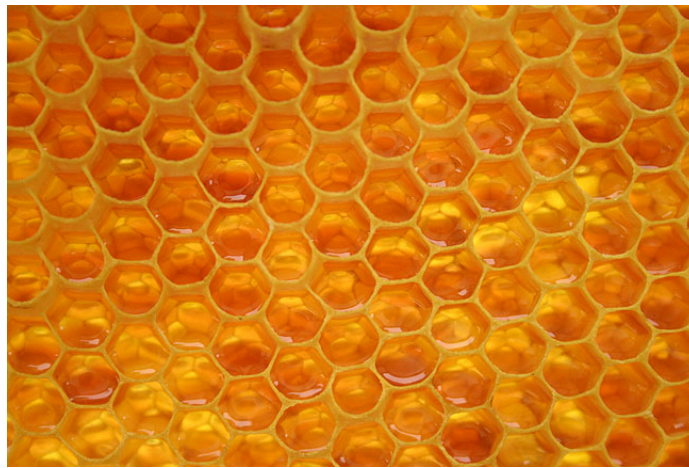
Rysunek 1.2: Struktura oraz obraz przedstawiający iryzację opalu

Podobnie jak w przypadku opali, zjawisko iryzacji można zaobserwować na skrzydłach motyli z rodzaju *morpho*. Jest to spowodowane występowaniem grzebieniowych struktur na całej powierzchni skrzydeł tworzących warstwową strukturę periodyczną, która efektywnie zmienia współczynnik załamania światła w zakresie światła widzialnego [3].

Kolejnym przykładem w skali makroskopowej jest struktura plastra miodu opisywana już przez Karola Darwina jako optymalna do składowania miodu przy minimalnym zużyciu wosku [4]. Wspominana była już wcześniej przez Galileusza i Hooke'a jako bardzo wytrzymała mechanicznie. Ze względu na rozmiary komórki elementarnej w tej strukturze silnie tłumione są fale mechaniczne.



Rysunek 1.3: Motyl *Morpho Menelaus* i obraz z TEM przedstawiający przekrój przez strukturę skrzydła [3]



Rysunek 1.4: Struktura plastra miodu

1.3 Struktury periodyczne w inżynierii

W inżynierii struktury periodyczne są wykorzystywane bardzo często, nie zawsze jednak są optymalizowane ze względu na właściwości wynikające z ich periodyczności. W niektórych przypadkach jest to próba naśladowania przyrody, jak wykorzystanie struktury plastra miodu w konstrukcjach samolotów w celu poprawy proporcji masy do wytrzymałości. Zjawiska wynikające z periodyczności struktury to czasami efekt uboczny innych funkcji, jak w przypadku iryzacji płyt kompaktowych.

Jednak struktury periodyczne mogą być projektowane w taki sposób, żeby wykorzystać ich właściwości w konkretnym celu. Materiały, które są projektowane w taki sposób noszą nazwę metamateriałów.

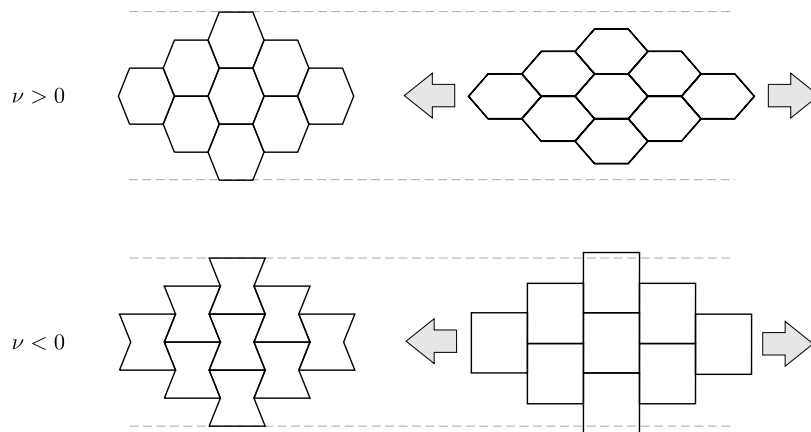
Znanym przykładem metamateriałów wykorzystywanych w codziennym życiu są siatki ochronne montowane w drzwiczkach kuchenek mikrofalowych. Jest to metalowa struktura periodyczna, która pozwala obserwować wnętrze, ale stanowi barierę dla fal elektromagnetycznych z zakresu mikrofal. Dlatego cała energia mikrofal jest zatrzymana wewnątrz kuchenki, zwiększając wydajność i bezpieczeństwo użytkowania.

Istnienia materiałów, które będą wykazywały jednocześnie ujemne wartości przenikalności elektrycznej ϵ i przenikalności magnetycznej μ , a co za tym idzie ujemną wartość współczynnika załamania były rozważane teoretycznie w pracy [5] już w 1968 roku. Materiał, który wykazywał takie właściwości dla mikrofal został wytworzony i opisany na początku XX wieku w pracach [6, 7], a w zakresie światła widzialnego w pracach [8, 9].

Innym przykładem metamateriałów są auksetyki, czyli materiały lub struktury o makroskopowej ujemnej wartości współczynnika Poissona [10, 11]. Najczęściej mamy do czynienia ze strukturami mechanicznymi o strukturze periodycznej sieci heksagonalnej, których komórka elementarna stanowi wklęsły sześciokąt. Przy rozciąganiu komórka elementarna zmienia się w figurę wypukłą i zwiększa swoją powierzchnię, co jest widoczne jako powiększenie struktury w kierunku prostopadłym do rozciągania. Na rysunku 1.5 znajduje się schemat struktur o dodatnim i ujemnym współczynniku Poissona.

1.4 Obecny stan wiedzy

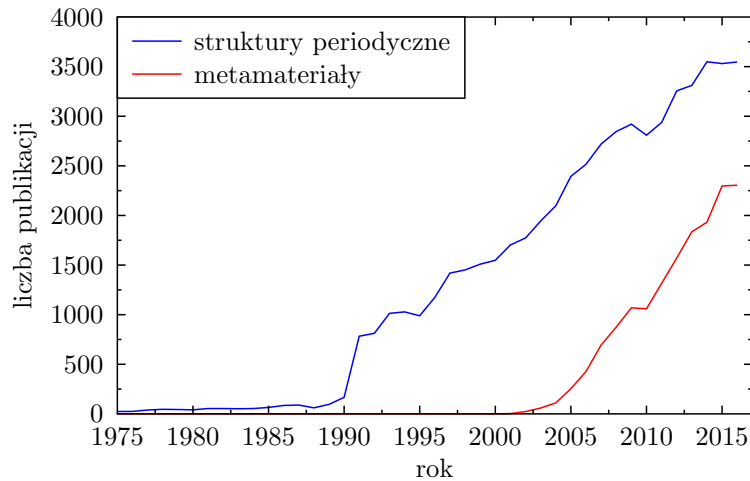
Obecnie prace nad metamateriałami są prowadzone bardzo szeroko. Świadczy o tym liczba publikacji na ten temat wydanych w ciągu ostatnich 15 lat, co pokazuje wykres 1.6. Zainteresowanie strukturami periodycznymi rośnie nie tylko ze względu na możliwości, które wynikają z teorii tych materiałów, ale również ze względu na rozwój technologii umożliwiający ich wytworzenie.



Rysunek 1.5: schemat struktury dwuwymiarowego materiału o dodatniej (góra) i ujemnej (dół) wartości współczynnika Poissona przed i po przyłożeniu naprężeń rozciągających

Zjawiska występujące w metamateriałach są silnie związane z długością fali mechanicznej lub elektromagnetycznej propagującej w danej strukturze. Natomiast o niezwykłych właściwościach metamateriałów stanowi stosunek długości fali do wielkości komórki elementarnej danej struktury. Dlatego metamateriały projektuje się w taki sposób, aby skala długości fali oczekiwanego zjawiska odpowiadała skali wielkości komórki elementarnej. Z tego względu do wytwarzania metamateriałów stosuje się szerokie spektrum metod. W skali nano, gdzie wykorzystuje się nanolitografię, chemiczne lub fizyczne osadzanie z fazy gazowej [12, 13]. W niektórych przypadkach wykorzystuje się właściwości materiałów do samoorganizacji [14, 15]. W skali makro wytwarzanie struktur periodycznych z odpowiednią precyzją jest możliwe przy użyciu obrabiarek numerycznych lub drukarek 3D [16].

Wykorzystanie metamateriałów najczęściej opiera się na możliwości tworzenia selektywnych barier częstotliwości za pomocą pasma zabronionego. Można to wykorzystać w celu eliminacji drgań w wybranym zakresie widma lub uniemożliwienia propagacji fal. Prowadzi to do budowy bardzo wydajnych tłumików lub filtrów częstotliwości.



Rysunek 1.6: Zależność liczby publikacji od roku wydania dotycząca tematów struktur periodycznych i metamateriałów. Źródło: Web of Science

1.5 Teza, cel i zakres pracy

Struktury periodyczne, przede wszystkim ze względu występowanie pasm zabronionych, mogą mieć bardzo szerokie spektrum zastosowań. Jednak brak możliwości sterowania właściwościami struktury sprawia, że nie można w pełni wykorzystać ich potencjału w celu eliminacji drgań. Wszystkie parametry struktury, które mają wpływ na jej właściwości muszą być określone na etapie projektowania. Możliwość dostrojenia parametrów struktury periodycznej do oczekiwanych właściwości pozytywnie wpłynęłaby na zastosowanie struktur periodycznych.

Wykorzystanie właściwości tłumienia drgań w strukturach periodycznych pozwala na stworzenie bardzo wydajnych tłumików drgań. Struktury z aktywnymi elementami piezoelektrycznymi umożliwiają konwersję energii drgań mechanicznych na energię drgań elektrycznych i w ten sposób umożliwiają sterowanie właściwościami tłumienia układu. Jednak dopiero wykorzystanie synergii pomiędzy pasywnym i aktywnym procesem tłumienia drgań pozwala na maksymalizację jego efektywności oraz pozwala na kontrolę procesu tłumienia.

Cel pracy

Celem pracy jest opracowanie modeli numerycznych jedno- i dwuwymiarowych struktur periodycznych, zarówno pasywnych jak i aktywnych wykorzystujących elementy piezoelektryczne, oraz przeprowadzenie symulacji komputerowych, a także weryfikujących badań eksperymentalnych. Badania były prowadzone pod kątem możliwości wykorzystania struktur periodycznych w celu tłumienia drgań elementów konstrukcyjnych.

Zakres wykonanych badań

Zakres pracy obejmuje opracowanie modeli numerycznych, przeprowadzenie badań symulacyjnych oraz weryfikację eksperymentalną otrzymanych wyników obliczeń.

W odniesieniu do jedno- i dwuwymiarowych pasywnych struktur periodycznych analizie poddano drgania własne: wzdłużne, giętne i skrętne belek izotropowych oraz tarcz i płyt. Zbadano również efektywność tłumienia fal sprężystych w strukturach jedno i dwuwymiarowych.

W odniesieniu do struktur aktywnych wykorzystujących elementy piezoelektryczne, pracujące w układzie rezonansowym RLC, analizie poddano drgania wymuszone wzdłużne i giętne oraz badano propagację fal wzdłużnych i giętnych. Sprawdzone również wpływ parametrów układu rezonansowego RLC na drgania i fale propagowane w strukturach.

Weryfikacji eksperymentalnej poddano wyniki symulacji komputerowych otrzymanych dla jednowymiarowych pasywnych struktur periodycznych. Zmierzono giętne i wzdłużne drgania własne oraz propagację fal giętnych w wybranych układach jednowymiarowych.

Rozdział 2

Modelowanie struktur periodycznych

2.1 Metody modelowania struktur periodycznych

Do modelowania struktur periodycznych wykorzystywanych jest wiele metod począwszy od metod analitycznych po nowoczesne metody numeryczne. Każda wykorzystywana w praktyce metoda ma zarówno zalety, jak i ograniczenia, dlatego aby dobrać odpowiednią metodę należy dokładnie je przeanalizować. W tabeli 2.1 zebrano metody używane do opisywanych zagadnień związanych ze strukturami periodycznymi. Angielskie nazwy metod oraz oparte na nich skróty przyjęte w pracy również znajdują się w tabeli.

Pierwsze próby podejścia do zagadnienia zbliżonego do propagacji fal w układach periodycznych były podejmowane już przez Newtona [17]. Założył on, że dźwięk w powietrzu rozchodziłby się w ten sam sposób jak fala mechaniczna w sieci złożonej z punktów materialnych. Przyjęta sieć była najprostszą z możliwych. Reprezentowały ją jednakowe masy oddziałujące tylko z najbliższymi sąsiadami za pomocą sił sprężystości, a całość rozłożona była wzdłuż kierunku propagacji. Model ten był później rozszerzany przez Johna i Daniela Bernoullich. Wykazali oni, że model składający się z n mas będzie mieć tyle samo niezależnych od siebie postaci drgań. Później Daniel Bernoulli sformułował zasadę superpozycji, która mówi, że ogólne rozwiązanie równań ruchu układu drgającego jest superpozycją jego drgań własnych.

Tabela 2.1: Metody modelowania struktur periodycznych. Pochyłą czcionką oznaczona jest angielska nazwa metody oraz przyjęty w pracy skrót

Metoda	Literatura
Metody analityczne	[17–23]
Metoda macierzy przejścia <i>Transfer Matrix Method, TMM</i>	[24–32]
Metoda rozwinięcia fali płaskiej <i>Plane Wave Expansion Method, PWEM</i>	[33–39]
Metoda różnic skończonych w dziedzinie czasu <i>Time Domain Finite-Difference Method, TD-FDM</i>	[40–46]
Metoda Elementów skończonych <i>Finite Element Method, FEM</i>	[47–52]
Metody spektralne <i>Spectral Element Method, SEM</i>	[53, 54]
Metoda Spektralnych Elementów Skończonych <i>Time-Domain Spectral Finite Element Method, TD-SFEM</i> <i>Frequency-Domain Spectral Finite Element Method, FD-SFEM</i>	[55–59]
Metoda Redukcji Blocha	[60–65]

Nowe podejście do tego zagadnienia proponowane jest przez autorów w pracy [66]. Analizowano w niej dynamikę gęstej sieci periodycznej. Modelowanie odbywało się w dwóch etapach. W pierwszym tworzony był dyskretny model reprezentowany przez układ równań różnicowych, rozpiętych w przestrzeni. Powstałe w ten sposób równanie opisywało wysoko i niskoczęstotliwościowe zagadnienie propagacji fali. W drugim etapie ciągły model był wyprowadzany z równań różnicowych dając w rezultacie cząstkowe równania różniczkowe drugiego i czwartego rzędu ze stałymi współczynnikami. Podejście to ma sens fizyczny pod warunkiem, że propagowana fala jest długa.

Metoda macierzy przejścia (TMM) jest metodą używaną głównie do analizy propagacji fal w ośrodkach warstwowych. Metoda ta, zgodnie z równaniami Maxwella, pozwala obliczyć wartość pola elektrycznego na jednym końcu warstwy znając jego wartość na drugim końcu. Obliczenia prowadzi się za pomocą prostej macierzy zwanej macierzą przejścia. W przypadku materiałów warstwowych, gdzie każda warstwa jest reprezentowana przez macierz, macierz całego układu jest iloczynem wyjścio-

wych macierzy. Ze względu na kaskadową strukturę tej metody jest ona odpowiednia do rozwiązywania zagadnień jednowymiarowych.

Autorzy pracy [29] pokazali, że TMM może być użyta do badań struktur periodycznych. Obliczenia wykonano dla nieskończonej prostej trójwymiarowej rury z periodycznie powtarzającymi się zmianami właściwości materiałowych. Wyniki otrzymane za pomocą metody macierzy przejścia zostały również zweryfikowane za pomocą komercyjnego oprogramowania MSC.Actran. Obliczenia wykazały pasmowy charakter widma częstotliwości, co pozwala na potencjalne wykorzystanie tych własności do redukcji drgań rur.

W pracach [30, 31] autorzy użyli tej samej metody do modelowania zaprojektowanej podstawy pasywnie tłumiącej drgania, a złożonej z periodycznie powtarzających się elementów. Badania eksperymentalne przeprowadzone na tak zaprojektowanej podstawie pokazały nie tylko bardzo dobrą wydajność tego projektu, ale również zgodność obliczeń za pomocą TMM z badaniami empirycznymi.

W artykule [32] autorzy zastosowali TMM do wyznaczania odpowiedzi dynamicznej belkowych struktur periodycznych. Zwrócili oni również uwagę na ograniczenia numeryczne związane z macierzą przejścia. W pracy [67] wykazane wcześniej ograniczenia udało się poprawić m.in. poprzez zmniejszenie liczby wartości własnych o połowę, ze względu na występowanie ich w parach.

Metoda rozwinięcia fali płaskiej (PWEM) jest metodą często stosowaną do rozwiązywania równań Maxwella, ale może być wykorzystana do innych zagadnień o naturze falowej. Jest to dobra metoda do rozpatrywania struktur jedno, dwu i trójwymiarowych ze względu na fakt, że opiera się na formułowaniu zagadnienia wartości własnych. Główną wadą metody jest duże zapotrzebowanie na moc obliczeniową ($O(n)$) wraz ze wzrostem liczby harmonicznych rozwiązań (n). Metoda ta doskonale nadaje się do modelowania niejednorodnej albo periodycznej geometrii. Z drugiej strony PWEM nie nadaje się do modelowania niedoskonałości czy ograniczeń, zakłada bowiem nieskończone wymiary badanej struktury.

W pracy [38] PWEM została użyta, aby uzyskać pasmowe widmo drgań ołowianych cylindrów zatopionych w żywicy epoksydowej. W dalszej części zaburzenie zo-

stało wprowadzone do sieci i badano zależność wpływu średnicy defektu na pozycję modów drgań. Wykazano, że typy drgań pochodzące od defektów przemieszczały się w kierunku wyższych częstotliwości wraz ze zmniejszaniem średnicy defektu.

Dzięki tej metodzie w pracy [39] przeanalizowano wpływ kształtów i orientacji różnego typu centrów rozpraszania na strukturę pasmową. Autorzy badali wpływ różnego rodzaju sieci trójkątnej, kwadratowej, heksagonalnej i prostokątnej oraz centra rozpraszania o różnej geometrii: trójkąt, sześciokąt, kwadrat, prostokąt i elipsę. Całą sieć stanowiła dielektryczna płyta z otworami lub struktura stanowiąca w pewnym sensie negatyw, czyli złożona z dielektrycznych prętów w otoczeniu powietrza. Ogólne wnioski z przeprowadzonych badań wykazały, że najszersze pasma zabronione występowały dla centrów drgań mających dopasowaną symetrię do całej sieci, np. trójkąty w sieci trójkątnej lub heksagonalnej.

Metoda różnic skończonych w dziedzinie czasu (TD-FDM) jest metodą numeryczną służącą do znajdowania przybliżonych rozwiązań układów równań różniczkowych. Metoda ta pozwala znaleźć rozwiązania w szerokim spektrum częstotliwości za pomocą jednej symulacji oraz, jako metoda oparta na sieci, w naturalny sposób pozwala na modelowanie nieliniowych właściwości materiału. Zasada działania tej metody polega na zdyskretyzowaniu dziedziny i przybliżenie pochodnych wyjściowych równań za pomocą ilorazów różnicowych.

TD-FDM była wykorzystana przez autorów [45] do badań struktury pasmowej dwuwymiarowego kryształu fononicznego. Analizowano układ składający się z płynnych cylindrów w stałej matrycy oraz układ trójskładnikowy z dużą różnicą modułu sprężystości. Autorzy wykazali, że TD-FDM jest efektywną metodą do obliczania widmowej struktury drgań układów periodycznych.

TD-FDM może być również wykorzystana do badania propagacji fal w strukturach periodycznych. Autorzy [46] analizowali za jej pomocą propagację fal w płytach będących kryształem fononicznym lub falowodem. Na początku wyznaczono widmo całej struktury oraz zidentyfikowano typy drgań pochodzące od periodyczności struktury, przez porównanie do zwykłej płyty. Następnie zaprojektowano falowód dla fal o częstotliwości znajdującej się wewnątrz pasma zabronionego. Tak przygotowany falowód

ma wiele modów drgań, które będą propagowane wzdłuż niego, ale będą tłumione w kierunkach poprzecznych. Zgodnie z założeniami autorów możliwe jest stworzenie obwodów akustycznych na bazie kryształów fononicznych tego rodzaju.

Metoda Elementów Skończonych (FEM) jest numeryczną metodą rozwiązywania układów równań różniczkowych poprzez podział badanej struktury na mniejsze obszary, czyli elementy skończone i rozwiązanie zagadnienia tylko dla węzłów tego podziału. FEM jest popularną metodą wykorzystywaną w inżynierii, z tego powodu rozwinięto wiele różnych jej odmian zoptymalizowanych do konkretnych zadań.

Do badań struktur periodycznych metoda elementów skończonych była wykorzystana między innymi przez autorów pracy [52]. Wyznaczyli oni dynamiczną charakterystykę pojedynczej komórki i użyli teorii Blocha-Floqueta żeby rozciągnąć otrzymane wyniki na nieskończoną powierzchnię. Istotnym elementem pracy było dodanie masy w taki sposób, aby uzyskać pożądane właściwości powierzchni. Poprzez odpowiednie lokowanie dodatkowej masy uzyskano pasma zabronione o szerokości i lokalizacji oczekiwanej przez autorów.

Metody spektralne (SEM) są klasą technik rozwiązywania równań różniczkowych, zwykle poprzez użycie transformacji Fouriera. Metody te polegają na przybliżeniu rozwiązania sumą pewnych funkcji bazowych i szukania współczynników kombinacji liniowej, dla których rozwiązanie będzie najlepiej spełniało wyjściowe równanie. Metody spektralne charakteryzują się globalnym podejściem do rozwiązania, co wyróżnia je od metod opartych na siatce. Metody spektralne mogą być używane do rozwiązywania równań różniczkowych zwykłych i cząstkowych oraz problemów poszukiwania wartości własnych w równaniu różniczkowym.

Wykorzystanie tej metody w badaniach struktur periodycznych zostało opisane w pracy [53]. Autorzy zanalizowali periodyczną płytę złożoną z powtarzających się naprzemiennie pod płyt wykonanych z innych materiałów podpartą na dwóch przeciwnych brzegach. Porównanie wyników otrzymanych metodami FEM i SEM pokazuje, że lepsze przybliżenie widma w zakresie wysokich częstotliwości uzyskano za pomocą SEM. Badania wykazały, że wpływ na pasmo zabronione w widmie takiej struktury periodycznej mają zarówno parametry materiałowe jak i liczba segmentów.

Innym przykładem wykorzystania SEM jest praca [54]. Autorzy badali wpływ równomiernie rozłożonych w sieci heksagonalnej dodatków stali, Mo, Fe lub Pb w pleksi. Wykazali istnienie przerw w widmie częstotliwości pochodzących od periodyczności.

Metoda Spektralnych Elementów Skończonych jest metodą stanowiącą połączenie metod spektralnych oraz metody elementów skończonych. SFEM polega na podziale badanego obiektu na małe obszary zwane elementami skończonymi i poszukiwanie rozwiązania tylko dla węzłów elementu. W odróżnieniu od FEM, węzłów jest więcej i rozwiązanie przybliża się wielomianami wyższych rzędów. Dzięki podejściu znanemu z FEM możliwa jest analiza skomplikowanych geometrycznie obiektów, przy jednoczesnym zachowaniu spektralnej zbieżności rozwiązań, związanej z aproksymacją funkcjami wyższych rzędów.

Redukcja Blocha jest metodą łączącą ze sobą metody analityczne z numerycznymi. Pozwala na zredukowanie zagadnienia Blocha w strukturze periodycznej do pojedynczej komórki elementarnej, poprzez zamknięcie jej w periodyczne warunki brzegowe. W tej metodzie rozwiązań poszukuje się w postaci kombinacji liniowej wektorów własnych macierzy, wyznaczonych dla pojedynczej komórki elementarnej oraz uwzględnienie warunków funkcji Blocha pochodzących z rozwiązania analitycznego [60, 61].

Każda z wymienionych metod może być wykorzystana do badania struktur periodycznych, jednak dobór metody odpowiedniej do danego zagadnienia i danej struktury jest kluczowy. Poniżej w tabeli 2.2 zestawiono zalety i ograniczenia każdej z wymienionych wcześniej metod.

W pracy wykorzystano dwie z opisanych metod, metodę redukcji Blocha oraz SFEM. Redukcja Blocha ze względu na szybkość obliczeń jest najlepsza do wyznaczania drgań własnych oraz wymuszonych w mechanicznych oraz elektromechanicznych strukturach periodycznych. Metoda SFEM doskonale nadaje się zarówno do wyznaczania drgań własnych jak i do symulacji propagacji fal, a z punktu widzenia modelowania elementów piezoelektrycznych możliwość formułowania zagadnień w dziedzinie czasu lub częstotliwości jest dodatkowym atutem.

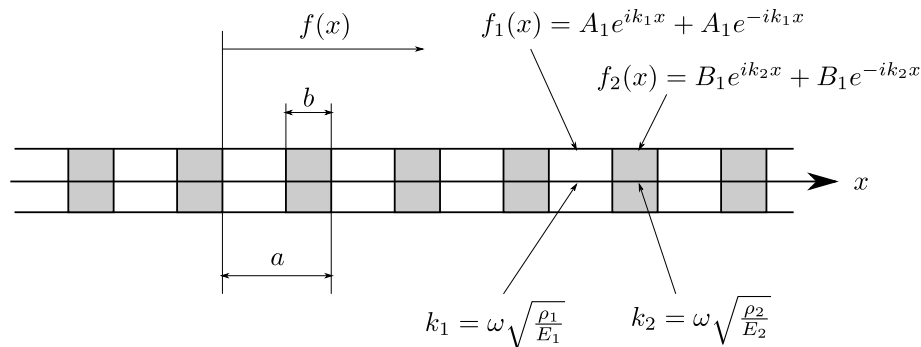
Tabela 2.2: Zestawienie metod modelowania struktur periodycznych

Metoda	Zalety	Wady
Metody Analityczne	podjęcie analityczne daje dokładne rozwiązania	ograniczenie do prostych struktur, które można modelować oraz brak możliwości modelowania defektów
Metoda macierzy przejścia <i>Transfer Matrix Method, TMM</i>	prostota w implementacji	ograniczenie do struktur jednowymiarowych i stosunkowo prostych oraz brak możliwości modelowania defektów
Metoda rozwinięcia fali płaskiej <i>Plane Wave Expansion Method, PWEM</i>	możliwość modelowania struktur jedno-, dwu- i trój-wymiarowych oraz łatwość w implementacji	duże zapotrzebowanie na moc obliczeniową, brak możliwości modelowania defektów, wyniki dostępne są jedynie w dziedzinie częstotliwości
Metoda różnic skończonych w dziedzinie czasu <i>Time Domain Finite-Difference Method TD-FDM</i>	możliwość modelowania struktur jedno-, dwu- i trój-wymiarowych, możliwość modelowania struktur złożonych, defektów w strukturze czy falowodów	możliwość otrzymania wyników wyłącznie w dziedzinie czasu oraz duże zapotrzebowanie na moc obliczeniową, dokładność jest ograniczona poprzez liczbę węzłów
Metoda Elementów skończonych <i>Finite Element Method FEM</i>	możliwość modelowania struktur jedno-, dwu- i trój-wymiarowych, możliwość modelowania struktur złożonych, defektów w strukturze czy falowodów. Wyniki można otrzymać zarówno w dziedzinie czasu jak i częstotliwości	duże zapotrzebowanie na moc obliczeniową, poprawna implementacja metody wymaga dużej wiedzy na temat jej szczegółów oraz badanej struktury, odpowiedzi wysokoczęstotliwościowe są ograniczone liczbą węzłów
Metoda Spektralnych Elementów Skończonych <i>Time-Domain Spectral Finite Element Method TD-SFEM</i> <i>Frequency-Domain Spectral Finite Element Method, FD-SFEM</i>	możliwość modelowania struktur jedno-, dwu- i trój-wymiarowych, możliwość modelowania struktur złożonych, defektów w strukturze czy falowodów. Wyniki można otrzymać zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości, lepsze modelowanie zakresu wysokich częstotliwości niż w przypadku FEM	poprawna implementacja metody wymaga dużej wiedzy na temat jej szczegółów oraz badanej struktury, zbieżność spektralna typowa dla metod spektralnych
Metoda Redukcji Blocha	małe zapotrzebowanie na moc obliczeniową	możliwość modelowania tylko nieskończonych struktur periodycznych

2.2 Teoria Blocha

Teoria Blocha została zaproponowana przez szwajcarskiego fizyka Felixa Blocha do opisu zjawisk falowych w potencjale periodycznym [18]. Teoria ta jest często wykorzystywana do opisu przewodnictwa elektronowego w kryształach, ale można ją zastosować również do makroskopowych struktur periodycznych.

W jednowymiarowym przypadku mamy do czynienia ze strukturą złożoną z powtarzających się komórek o długości a składających się z dwóch materiałów o różnych wartościach modułów Younga E_1 i E_2 oraz gęstości odpowiednio ρ_1 i ρ_2 , a także długościach wynoszących odpowiednio $a - b$ i b . Schemat takiego układu przedstawia rysunek 2.1.



Rysunek 2.1: Schemat jednowymiarowej struktury periodycznej

Różnice w parametrach materiałowych wpływają na różnice w prędkościach propagacji fal w poszczególnych materiałach, można to opisać równaniami:

$$c_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}. \quad (2.1)$$

Są one powiązane ze sobą za pomocą wspólnej częstości jako:

$$\omega = k_1 c_1 = k_2 c_2, \quad (2.2)$$

a rozwiązaniem takiego zagadnienia jest funkcja Blocha, będąca iloczynem funkcji o periodyczności struktury i fali płaskiej:

$$f(x) = g(x)e^{ikx} \quad (2.3)$$

gdzie k jest liczbą falową a $i^2 = -1$ jednostką urojoną.

Funkcja $g(x)$ musi spełniać warunek periodyczności $g(x) = g(x+a)$, można zatem zapisać odpowiednie zależności:

$$f(x+a) = e^{ik(x+a)}g(x+a) = e^{ika}e^{ikx}g(x) = e^{ika}f(x). \quad (2.4)$$

Mimo, że teoria Blocha dotyczy nieskończonych struktur periodycznych, to można jej użyć również do struktur o skończonych wymiarach, składających się z odpowiednio dużej liczby komórek elementarnych $N \gg 1$ oraz przyjmując periodyczne warunki brzegowe $f(x+aN) = f(x)$. Prowadzi to do zależności:

$$f(x+aN) = f(x) = e^{ikaN}f(x) \quad (2.5)$$

stąd:

$$e^{ikaN} = 1 \rightarrow k = \frac{2\pi n}{aN}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.6)$$

gdzie N jest liczbą komórek elementarnych. W praktyce, żeby wyraźnie widoczny był wpływ periodyczności na właściwości struktury należy przyjąć liczbę komórek elementarnych większą od 100.

Należy również wziąć pod uwagę, że zarówno funkcja Blocha $f(x)$ jak i jej pochodna musi być ciągła w zadanych granicach, oraz że funkcja $g(x)$ i jej pochodna

musi być ciągła na granicy obydwu materiałów, co daje warunki brzegowe:

$$\begin{cases} f_1(0^+) = f_2(0^-) \\ f_1'(0^+) = f_2'(0^-) \\ g_1(a-b) = g_2(b) \\ g_1'(a-b) = g_2'(b) \end{cases} \quad (2.7)$$

gdzie funkcje $g_1(x)$ i $g_2(x)$ można zapisać jako:

$$\begin{cases} g_1(x) = A_1 e^{i(k_1-k)x} + A_2 e^{-i(k_1+k)x} \\ g_2(x) = B_1 e^{i(k_1-k)x} + B_2 e^{-i(k_1+k)x} \end{cases} \quad (2.8)$$

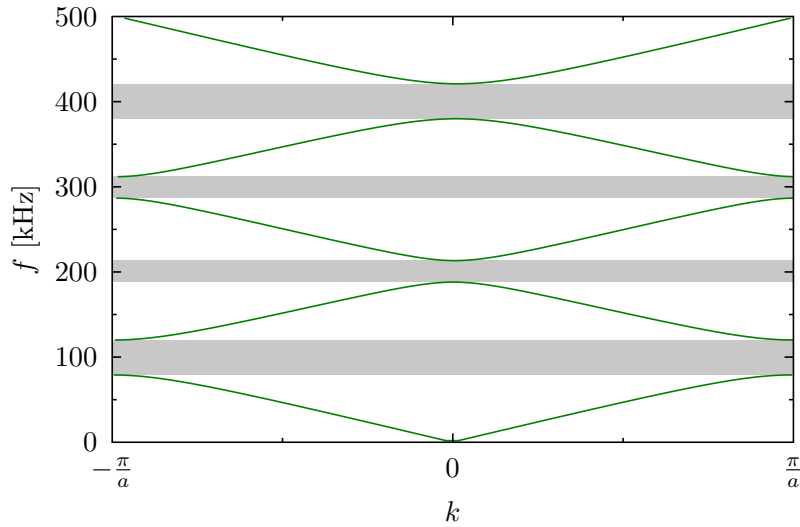
Równanie charakterystyczne łączące powyższe zależności poprzez liczby falowe k , k_1 i k_2 można otrzymać po kilku prostych przekształceniach algebraicznych i przyjmuje ono formę:

$$\cos(ka) = \cos[k_1(a-b)]\cos(k_2b) - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1k_2} \sin[k_1(a-b)]\sin(k_2b) \quad (2.9)$$

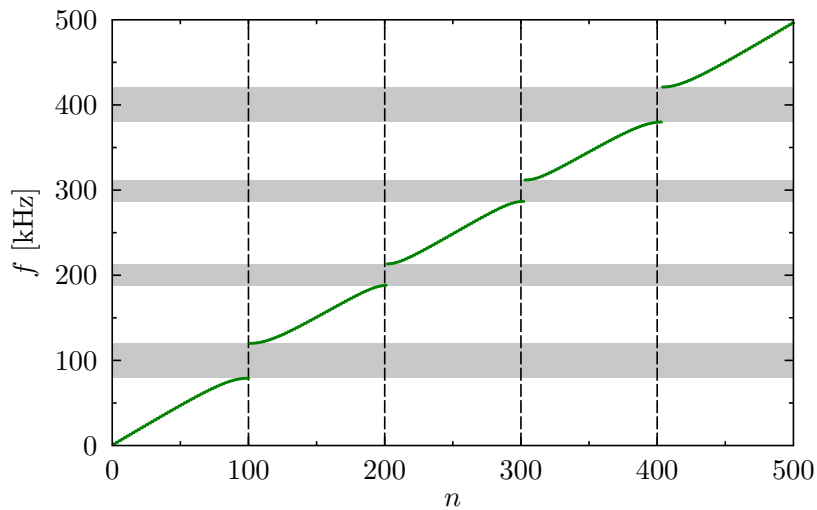
Równanie to pozwala określić zakresy częstotliwości ω dla których rozwiązania równania są w zbiorze liczb rzeczywistych, inaczej mówiąc fale o częstotliwości ω będą propagować w strukturze.

Rysunki 2.2 i 2.3 przedstawiają przykładowe rozwiązanie zagadnienia Blocha w jednowymiarowej strukturze periodycznej o długości $l = 2$ m, 100 komórkach elementarnych o proporcjach $a/b = 1/0.25$ i wartości modułu Younga $E_a/E_b = 1/0,25$. Wyniki przedstawione są w dwóch postaciach. Na rysunku 2.2 widoczna jest zależność częstotliwości w funkcji wektora falowego w schemacie strefy zredukowanej [1]. Jest często używaną reprezentacją zagadnienia Blocha w krystalografii. Więcej informacji o redukcji wektorów falowych do pierwszej strefy Brillouina znajduje się w rozdziale 2.3. Rysunek 2.3 jest to reprezentacja w formie zależności częstotliwości od numeru czę-

stotliwości. Reprezentacja ta jest bliższa zagadnieniom związanym z FEM, ale pomija informacje o wektorach falowych.



Rysunek 2.2: Rozwiązania zagadnienia teorii Blocha przykładowej jednowymiarowej struktury periodycznej. Wyniki przedstawione w układzie strefy zredukowanej.

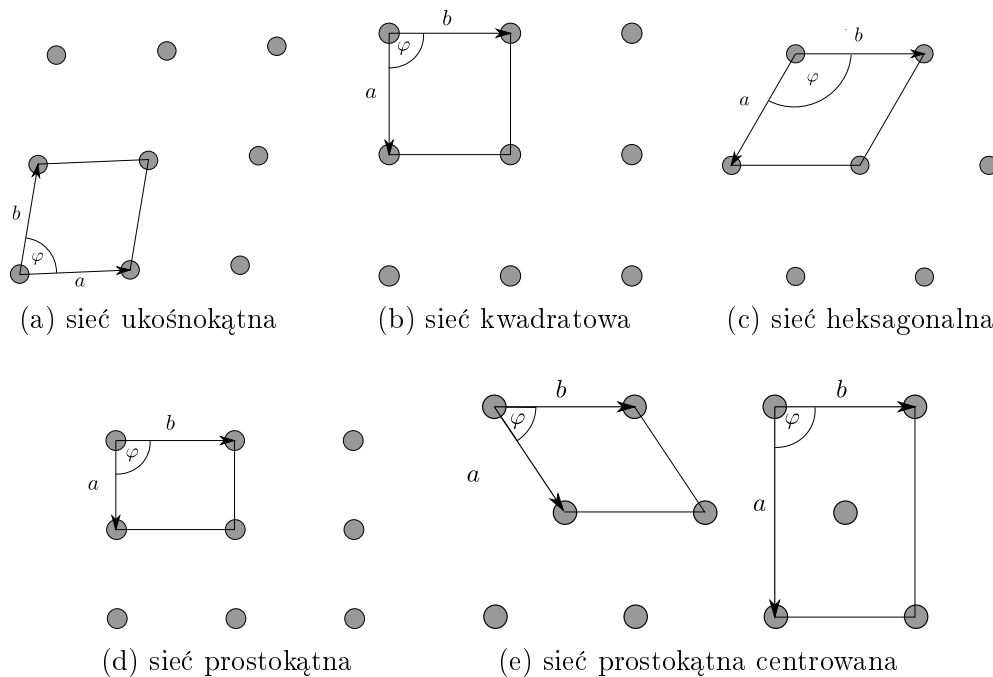


Rysunek 2.3: Rozwiązania zagadnienia teorii Blocha przykładowej jednowymiarowej struktury periodycznej.

2.3 Struktury dwuwymiarowe

Ze względu na dużo większą złożoność zagadnienia dwuwymiarowego w stosunku do zagadnień jednowymiarowych, aparat matematyczny niezbędny do scharakteryzowania struktur dwuwymiarowych został zaczerpnięty z fizyki ciała stałego, dlatego konieczne jest przybliżenie opisu kryształów.

W przestrzeni dwuwymiarowej istnieje 5 różnych rodzajów sieci: sieć ukośnokątna, kwadratowa, heksagonalna, prostokątna i prostokątna centrowana [1]. Schemat każdej z sieci przedstawiony jest na rysunku 2.4. Parametry opisujące sieci przedstawione są w tabeli 2.3.



Rysunek 2.4: sieci w przestrzeni dwuwymiarowej

Celem analizy zjawiska falowych w sieci krystalicznej wprowadza się pojęcie sieci odwrotnej, czyli powiązanej z daną siecią rzeczywistą sieci wektorów falowych. Podstawowe wektory sieci odwrotnej można zapisać za pomocą zależności:

$$\mathbf{A} = 2\pi \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}} \quad \mathbf{B} = 2\pi \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}} \quad \mathbf{C} = 2\pi \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}} \quad (2.10)$$



Tabela 2.3: parametry sieci dwuwymiarowych

sieć	umowna komórka elementarna	parametry sieciowe komórki elementarnej
ukośnokątna	równoległobok	$a \neq b; \varphi \neq 90^\circ$
kwadratowa	kwadrat	$a = b; \varphi = 90^\circ$
heksagonalna	romb 60°	$a = b; \varphi = 120^\circ$
prostokątna	prostokąt	$a \neq b; \varphi = 90^\circ$
prostokątna centrowana	prostokąt	$a \neq b; \varphi = 90^\circ$

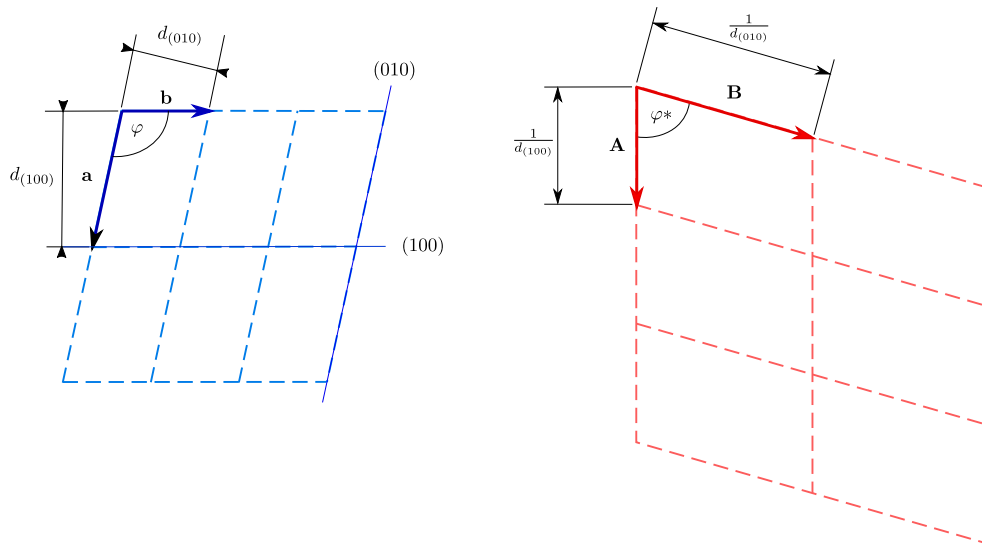
gdzie \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{C} są wektorami bazowymi sieci odwrotnej, a \mathbf{a} , \mathbf{b} i \mathbf{c} są wektorami podstawowymi sieci prostej. W sieci dwuwymiarowej przyjmuje się, że wektor \mathbf{c} jest równoległy do osi z i ma wartość jednostkową.

Węzły sieci odwrotnej można określić jako całkowite wielokrotności wektorów bazowych:

$$\mathbf{G} = (h\mathbf{A} + k\mathbf{B} + l\mathbf{C}) \quad (2.11)$$

gdzie h , k i l są liczbami całkowitymi zwanymi wskaźnikami Millera, zwyczajowo oznaczanymi przy pomocy liter (hkl) . Za pomocą tych wskaźników określa się wektory sieci odwrotnej, które zgodnie z równaniami 2.10 są prostopadłe do odpowiadających im płaszczyzn krystalograficznych.

Konstrukcję dwuwymiarowej sieci odwrotnej przedstawia rysunek 2.5. Przykładowa sieć przedstawiona jest kolorem niebieskim, gdzie \mathbf{a} i \mathbf{b} są wektorami bazowymi sieci, (100) i (010) oznaczają płaszczyzny krystalograficzne, a $d_{(100)}$ i $d_{(010)}$ długościami odpowiednich wektorów bazowych. Sieć odwrotna przedstawiona jest kolorem czerwonym, gdzie \mathbf{A} i \mathbf{B} są wektorami bazowymi sieci odwrotnej, a $\frac{1}{d_{(100)}}$ i $\frac{1}{d_{(010)}}$ są odpowiednio długościami wektorów bazowych sieci odwrotnej. Zgodnie z równaniami 2.10 wektory sieci odwrotnej przedstawione na rysunku 2.5 są prostopadłe do wektorów bazowych sieci prostej oraz do płaszczyzn krystalograficznych opisanych tymi samymi wskaźnikami Millera, a kąty φ i φ^* spełniają zależność $\varphi + \varphi^* = 180^\circ$.



Rysunek 2.5: Przykładowa konstrukcja sieci odwrotnej.

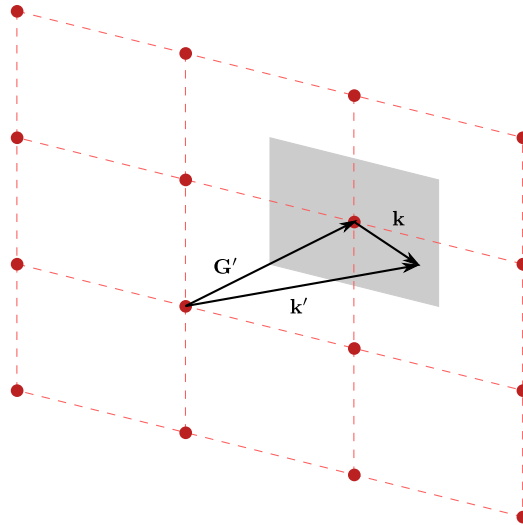
Pierwsza Strefa Brillouina

W dowolnej sieci można znaleźć taką przestrzeń, która jest bliżej jednego węzła niż pozostałych. W przypadku sieci odwrotnej przestrzeń tę nazywa się pierwszą strefą Brillouina [68, 69]. Jako, że sieć odwrotna znajduje się w przestrzeni Fouriera pierwsza strefa Brillouina zawiera wektory falowe o wartościach od $-\pi/a$ do π/a [1].

Wszystkie możliwe wektory falowe \mathbf{k}' możemy zapisać jako sumę pewnego wektora falowego wewnątrz pierwszej strefy Brillouina \mathbf{k} i odpowiedniego wektora sieci odwrotnej \mathbf{G}'

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{G}' \quad (2.12)$$

możliwe jest zatem zredukowanie całej dostępnej przestrzeni wektorów falowych do pierwszej strefy Brillouina, co przedstawiono na rysunku 2.6.



Rysunek 2.6: Sieć odwrotna z zaznaczoną pierwszą strefą Brillouina

2.4 Metoda Elementów Skończonych

Metoda Elementów Skończonych (FEM) jest jedną z podstawowych metod używanych we współczesnej inżynierii. Jej idea zakłada podział badanej struktury na mniejsze obszary, czyli elementy skończone, rozwiązanie zagadnienia dla węzłów tego podziału i scaleniu poszczególnych wyników. Podejście takie skutkuje znacznym uproszczeniem potrzebnego aparatu matematycznego kosztem ilości obliczeń, co w obecnych czasach nie stanowi problemu.

Całe postępowanie obliczeniowe można podzielić na kilka etapów:

1. Dziedzinę dzieli się na geometrycznie proste obszary, tzw. elementy skończone.
2. Zakłada się, że elementy są ze sobą połączone na brzegach w ograniczonej liczbie węzłów.
3. Wybiera się pewne funkcje, które określają rozkład analizowanych wielkości fizycznych, w zależności i wartości tych wielkości w węzłach, tzw. funkcji kształtu.
4. Równanie różniczkowe opisujące badane zjawisko przekształca się do równań FEM, które prowadzą do równań algebraicznych.
5. Na podstawie równań FEM przeprowadza się agregację układu równań, czyli oblicza wartości współczynników stojących przy niewiadomych i odpowiadające im

wartości prawych stron. Gdy dane zagadnienie jest niestacjonarne, do obliczeń wartości prawych stron wykorzystuje się warunki początkowe. Liczba równań w układzie jest równa liczbie węzłów pomnożonych przez liczbę stopni swobody węzłów, czyli liczby niewiadomych występujących w pojedynczym węźle.

6. Rozwiązanie układu równań stanowi zbiór wartości poszukiwanych wielkości fizycznych we wszystkich węzłach.
7. Jeśli dane zagadnienie tego wymaga oblicza się dodatkowe wielkości fizyczne.
8. w przypadku zagadnień niestacjonarnych punkty od 5 do 8 powtarza się do momentu spełnienia warunków zakończenia obliczeń.

Najtrudniejszym etapem rozwiązania danego problemu jest dyskretyzacja. Zazwyczaj podział na mniejsze elementy skutkuje zwiększeniem dokładności obliczeń kosztem zapotrzebowania na moc obliczeniową. Należy mieć jednak na uwadze możliwość nawarstwiania się błędów zaokrągleń. Dlatego należy wyniki otrzymane za pomocą FEM weryfikować również innymi drogami.

2.5 Metoda Spektralnych Elementów Skończonych

Metoda Spektralnych Elementów Skończonych (SFEM) jest relatywnie nową metodą numeryczną będącą połączeniem metody MES oraz Metod Spektralnych.

Metody spektralne są klasą metod numerycznych bardzo dobrze nadających się do rozwiązywania zagadnień opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi, takich jak wszelkiego rodzaju zagadnienia falowe, czyli propagacja, dyfrakcja i interferencja fal w różnego rodzaju ośrodkach ciągłych. W metodach spektralnych do znalezienia rozwiązania wykorzystuje się szeregi Fouriera lub różnego rodzaju aproksymujące wielomiany ortogonalne. Najczęściej są to ortogonalne wielomiany Czebyszewa lub Lobato. Użycie wielomianów ortogonalnych rozpiętych na nierówno odległych węzłach pozwala na zwiększenie ich stopnia, a w konsekwencji zmniejszeniu błędu obliczeń, który jest funkcją stopnia wielomianu $\epsilon = O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^n\right]$. Metody Spektralne wymagają

dużej mocy obliczeniowej i nie są na ogół dostosowane do rozwiązywania problemów złożonych geometrycznie.

W Metodzie Elementów Skończonych niezbędna jest dyskretyzacja dziedziny na mniejsze części zwane elementami skończonymi. Wewnątrz tych obszarów poszukuje się rozwiązań opisanych za pomocą wielomianów aproksymujących rozpiętych na równoodległych węzłach. Ze względu na zjawisko Rungego zazwyczaj przyjmuje się jako funkcje aproksymujące wielomiany niższych rzędów, najczęściej pierwszego lub drugiego. Takie podejście prowadzi do konieczności gęstej dyskretyzacji badanego obiektu, a co za tym idzie zwiększenia zapotrzebowania na moc obliczeniową.

SFEM jest techniką numeryczną, która dobrze nadaje się do badania dynamiki konstrukcji inżynierskich, szczególnie zjawisk propagacji fal. Opiera się na przybliżeniu rozwiązania ortogonalnymi funkcjami kształtu. W sformułowaniu w dziedzinie czasu (TD-SFEM) funkcje kształtu dobiera się w postaci wielomianów ortogonalnych Lobatto, Czebyszewa lub Legendre'a [70], natomiast w sformułowaniu w dziedzinie częstotliwości (FD-SFEM) funkcje kształtu są funkcjami trygonometrycznymi [71]. Dzięki takiemu podejściu zbieżność wyników TD-SFEM rośnie wykładniczo wraz z rzędem wielomianów aproksymujących, natomiast dla FD-SFEM wraz z liczbą punktów FFT. W tabeli 2.4 znajduje się zestawienie zalet i wad TD-SFEM i FD-SFEM.

Tabela 2.4: Porównanie sformułowań SFEM w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości

FD-SFEM	TD-SFEM
Strukturę można modelować jednym spektralnym elementem skończonym	Struktura wymaga równomiernej dyskretyzacji wieloma spektralnymi elementami skończonymi
Bardzo małe zapotrzebowanie na moc obliczeniową	Większe zapotrzebowanie na moc obliczeniową
Odpowiednie do rozwiązywania prostych jednowymiarowych zagadnień	Odpowiednie do rozwiązywania wielowymiarowych zagadnień o skomplikowanej geometrii
Konieczne jest tworzenie dodatkowych elementów w celu modelowaniu struktur skończonych	Modelowanie struktur o skończonych rozmiarach nie wymaga dodatkowych zabiegów
Trudna implementacja metody dla struktur dwu i trójwymiarowych	Jakość rozwiązań z zakresu wysokich częstotliwości jest ograniczona ze względu na periodyczne właściwości modelu

Metoda elementów skończonych w dziedzinie częstotliwości (FD-SFEM) jest metodą pozwalającą na szybkie i dokładne obliczenia komputerowe prostych konstrukcji jednowymiarowych lub dwuwymiarowych dzięki zastosowaniu szybkiej transformacji Fouriera (FFT) [71]. W metodzie korzysta się zazwyczaj z tylko jednego spektralnego elementu skończonego, co znacznie zmniejsza zapotrzebowanie na moc obliczeniową, ale niesie za sobą ograniczenie zastosowania metody tylko do stosunkowo prostych jednowymiarowych lub dwuwymiarowych struktur. W przypadku symulacji propagacji zjawisk falowych w strukturze konieczne jest zastosowanie specjalnie zaprojektowanych elementów wygaszających falę na końcach struktury [72]. Tego rodzaju elementy muszą być wyliczone analitycznie, stąd ograniczenie do prostych teorii jedno lub dwumodowych [71].

Metoda spektralnych elementów skończonych w dziedzinie czasu (TD-SFEM) jest mniej wydajną techniką numeryczną w porównaniu ze sformułowaniem w dziedzinie częstotliwości, ze względu na typową dla FEM dyskretyzację [73]. TD-SFEM jednak nadaje się do modelowania układów nie tylko do jednowymiarowych, ale też dwu- i trójwymiarowych o złożonej geometrii, nie wymaga również dodatkowych elementów na końcach struktury. Modelowanie struktur nieskończonych jest trudne szczególnie, jeśli mówimy o propagacji fal, ze względu na to, że metoda wymaga równomiernie rozłożonej siatki w całej strukturze. Należy wziąć również pod uwagę problemy związane z samym modelem numerycznym. Istotnym parametrem określającym model numeryczny jest stopień wielomianu aproksymującego, który jest związany z poziomem nieciągłości pola naprężeń na granicach elementów. Nieciągłości te występują periodycznie i mają one wpływ na dynamikę w zakresie wysokich częstotliwości [74]. Jest to szczególnie ważne w badaniach struktur periodycznych, gdzie periodyczność modelu numerycznego może zakłócić lub przesłonić zjawiska związane z periodycznością struktury.

2.5.1 Funkcje kształtu

Funkcje kształtu, ze względu na konieczność zbieżności z rozwiązaniami dokładnych, muszą spełniać konkretne warunki:

1. Funkcje kształtu opisujące pole szukanych wielkości fizycznych, powinny gwarantować ich ciągłość wewnątrz elementów oraz zgodność na granicach elementów, do rzędu pochodnej o jeden mniejszego niż najwyższy rząd pochodnej występującej w równaniu różniczkowym
2. Funkcje kształtu muszą zapewnić możliwość opisu stałych wartości poszukiwanych wielkości fizycznych lub ich pochodnych wewnątrz elementu, do rzędu pochodnej o jeden mniejszego niż rząd najwyższej pochodnej występującej w równaniu różniczkowym zagadnienia

Funkcje spełniające powyższe warunki zapewniają monotoniczną zbieżność do rozwiązania dokładnego w miarę zwiększania gęstości dyskretyzacji.

Zadanie związane z przybliżeniem nieznanej funkcji $f(x)$ jest podstawowym problemem tej metody. Funkcję $f(x)$ najczęściej przybliża się za pomocą kombinacji liniowej wielomianów ortogonalnych Czebyszewa, Lobatto lub Laguerre'a.

Wielomiany Lobatto

Wielomiany Lobatto n -tego rzędu są pierwszą pochodną wielomianu Legendre'a rzędu o jeden większego, mogą zatem być przedstawione wzorem:

$$L_n(\xi) = \frac{d}{d\xi} P_{n+1}(\xi), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

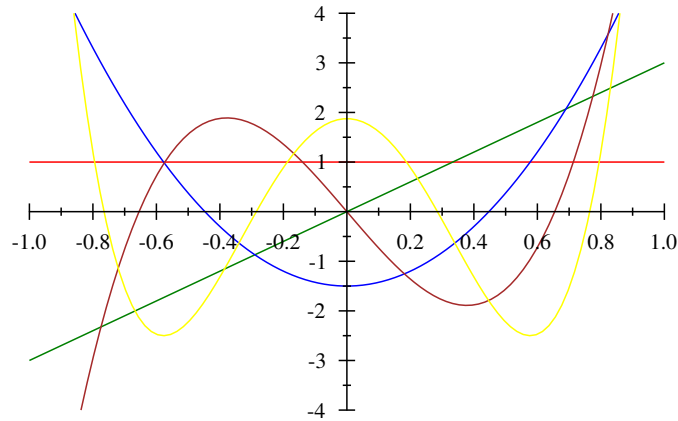
gdzie wielomian Legendre'a wyrażony jest za pomocą wzoru:

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Wielomiany te są ortogonalne z wagą $(1 - \xi^2)$ w przedziale $\xi \in [-1, 1]$ co oznacza, że spełniają zależność:

$$\int_{-1}^1 L_i(\xi) L_j(\xi) (1 - \xi^2) d\xi = \frac{2(i+1)(i+2)}{2i+3} \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

gdzie δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera.



Rysunek 2.7: Wykresy pierwszych pięciu wielomianów Lobatto $L_n(\xi)$ w przedziale $\xi \in [-1, 1]$

W Metodzie Spektralnych Elementów Skończonych węzły elementu rzędu n przyjmuje się jako pierwiastki wielomianu Lobatto rzędu $n - 2$ wraz z węzłami brzegowymi danego elementu. W znormalizowanym układzie położenie węzłów można wyznaczyć z zależności

$$L_n^C(\xi) \equiv (1 - \xi^2) L_{n-2}(\xi) = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.16)$$

Wielomian $L_n^C(\xi)$ nazywany jest kompletnym wielomianem Lobatto n -tego rzędu.

Wielomiany Czebyszewa

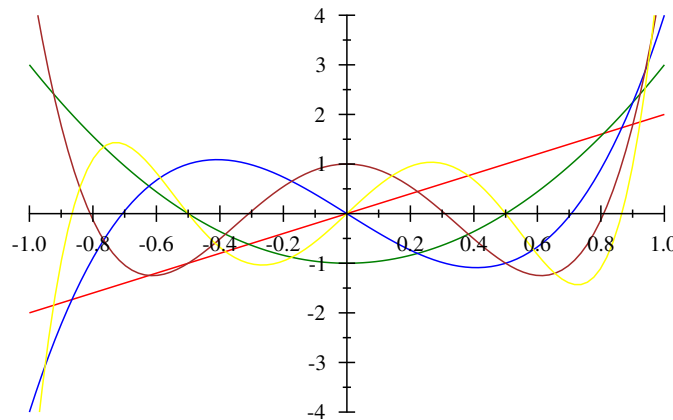
Wielomiany Czebyszewa drugiego rodzaju $U_n(\xi)$ można wyznaczyć za pomocą wzoru rekurencyjnego Rodriguesa:

$$\begin{cases} U_0(\xi) = 1 \\ U_1(\xi) = 2\xi \\ \dots \\ U_{n+1}(\xi) = 2\xi U_n(\xi) - U_{n-1}(\xi), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.17)$$

Wielomiany Czebyszewa drugiego rodzaju są ortogonalne z wagą $\sqrt{1 - \xi^2}$ w przedziale $\xi \in [-1, 1]$, czyli spełniają równanie:

$$\int_{-1}^1 U_i(\xi) U_j(\xi) \sqrt{1 - \xi^2} d\xi = \frac{\pi}{2} \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

gdzie δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera.



Rysunek 2.8: Wykresy pierwszych pięciu wielomianów Czebyszewa $U_n(\xi)$ w przedziale $\xi \in [-1, 1]$

W Metodzie Spektralnych Elementów Skończonych węzły elementu skończonego n -tego rzędu wyznaczone są jako pierwiastki wielomianu rzędu $n - 2$ oraz krańce tego elementu, w znormalizowanym układzie współrzędnych przyjmuje się je jako:

$$\xi_1 = -1, \quad \xi_2 = r_1, \quad \xi_3 = r_2, \dots, \quad \xi_{n-1} = r_{n-2}, \quad \xi_n = 1, \quad (2.19)$$

gdzie r_1, r_2, \dots, r_{n-2} są wspomnianymi wcześniej pierwiastkami wielomianu. Współrzędne węzłów można wyznaczyć również z zależności:

$$T_n(\xi) \equiv (1 - \xi^2) U_{n-2}(\xi) = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.20)$$

Wielomian $T_n(\xi)$ zwany jest pełnym wielomianem Czebyszewa n -tego rzędu. Wartości współrzędnych węzłów można również obliczyć z prostszej zależności:

$$\xi_i = \cos\left(\frac{n_i}{n-1}\right) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.21)$$

2.5.2 Całkowanie numeryczne wielomianów aproksymujących

Procedura numerycznego całkowania, zwana w literaturze kwadraturą numeryczną, znacząco wpływa na dokładność metody. Dobór kwadratury zależy od wykorzystanych do tworzenia funkcji kształtu wielomianów aproksymacyjnych. Dla wielomianów Lobatto stosuje się kwadraturę Gaussa-Lobatto lub Gaussa-Lobatto-Legendre'a, w przypadku wielomianów Czebyszewa kwadraturę Gaussa-Legendre'a, a w przypadku wielomianów Laguerre'a kwadraturę Gaussa-Laguerre'a.

Całkowanie numeryczne wielomianu $F(\xi, \eta, \zeta)$ polega na przybliżeniu całek za pomocą sum. Można więc zapisać:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=1}^{q_2} \sum_{k=1}^{q_3} w_i w_j w_k F(a_i a_j a_k), \quad (2.22)$$

gdzie w_i, w_j i w_k są wagami kwadratury, $a_i a_j$ i a_k oznaczają odpowiednie odcięte, a q_1, q_2 i q_3 są liczbą punktów kwadratury.

Kwadratura Gaussa-Lobatto

Całkowanie numeryczne przy użyciu kwadratury Lobatto przeprowadza się korzystając z formuły:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \frac{2}{q(q-1)} [f(-1) + f(1)] \sum_{i=1}^{q-2} w_i f(a_i) + \delta_L, \quad (2.23)$$

gdzie q jest liczbą punktów kwadratury, a δ_L jest błędem kwadratury.

Wagi kwadratury można obliczyć korzystając z formuły:

$$w_i = \frac{2}{q(q-1)P_{q-1}(a_i)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (2.24)$$

gdzie $P_{q-1}(\xi)$ jest wielomianem Legendre'a rzędu $q-1$. Odcięte a_i można obliczyć ze wzoru:

$$(1 - a_i^2) \frac{d}{d\xi} P_{q-1}(a_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (2.25)$$

i są one również współrzędnymi węzłów elementu skończonego ($\xi_i = a_i$) Błąd kwadratury Lobatto można przedstawić jako

$$\delta_L = \frac{q(q-1)^3 2^{2p-1} ((q-2)!)^4}{(2q-1) ((2q-2)!)^3} f^{2q-2}(\eta), \quad \eta \in [-1, 1] \quad (2.26)$$

Z powyższej zależności widać, że błąd kwadratury zanika dla funkcji $f(\xi)$ będących wielomianami rzędu n nie większego niż $2q-3$.

Kwadratura Gaussa

Formuła pozwalająca na całkowanie numeryczne przy użyciu kwadratury Gaussa wygląda następująco:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^q w_i f(a_i) + \delta_G \quad (2.27)$$

gdzie q jest liczbą punktów kwadratury, a δ_G jest błędem kwadratury.

Wagi kwadratury Gaussa można obliczyć korzystając z formuły:

$$w_i = \frac{2}{(1 - a_i^2) (P_q'(a_i))^2}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (2.28)$$

gdzie $P_q(\xi)$ jest wielomianem Legendre'a rzędu q , a a_i są jego pierwiastkami Błąd kwadratury Gaussa δ_G można przedstawić jako:

$$\delta_G = \frac{2^{2q+1} (q!)^4}{(2q+1) ((2q)!)^3} f^{2q}(\eta), \quad \eta \in [-1, 1] \quad (2.29)$$

Analiza powyższej zależności pozwala stwierdzić, że błąd zanika dla funkcji $f(\xi)$ będących wielomianami rzędu n nie większego niż $2q-1$.

W przypadku pełnych wielomianów Czebyszewa $T_n(\xi)$ współrzędne odciętych kwadratury nie są współrzędnymi węzłów elementu skończonego.

2.6 Redukcja Blocha

Redukcja Blocha jest metodą łączącą ze sobą metody analityczne z numerycznymi. Pozwala ona na zredukowaniu zagadnienia Blocha w strukturze periodycznej do pojedynczej komórki elementarnej poprzez zamknięcie jej w periodyczne warunki brzegowe. W takim układzie rozwiązań poszukuje się w postaci kombinacji liniowej wektorów własnych macierzy dla pojedynczej komórki oraz uwzględnienie warunków brzegowych funkcji Blocha z rozwiązania analitycznego [60, 61].

Aby znaleźć częstotliwości drgań własnych struktury periodycznej metodą redukcji Blocha należy rozwiązać zagadnienie własne, które można opisać równaniem:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (2.30)$$

gdzie \mathbf{M} i \mathbf{K} oznaczają odpowiednio macierze bezwładności i sztywności, a \mathbf{q} jest wektorem przemieszczeń węzłowych.

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_j\}, \quad q_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{n_sj}), \quad j = 1, \dots, n_w \quad (2.31)$$

gdzie $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{n_sj}$ są stopniami swobody w węźle j , a n_s jest liczbą stopni swobody w każdym węźle. Węzły w elemencie skończonym można podzielić na dwie grupy tj. węzły brzegowe i węzły znajdujące się wewnątrz elementu.

Stosując twierdzenie Blocha możemy zredukować zagadnienie wartości własnych całego układu do zagadnienia wartości własnych pojedynczej komórki elementarnej z uwzględnieniem zmian wprowadzonych przez twierdzenie Blocha. W prostym przypadku jednowymiarowym przemieszczenia w węzłach brzegowych spełniają zależność:

$$q_1 = q_{n_w} e^{i \frac{2\pi n}{N}} \quad n = 0, \dots, N \quad , \quad (2.32)$$

gdzie N jest liczbą komórek elementarnych. Wówczas równanie 2.30 przyjmie wówczas postać:

$$[\mathbf{K}_r(n) - \omega^2 \cdot \mathbf{M}_r(n)] \cdot \mathbf{q}_r(n) = 0, \quad n = 0, \dots, N \quad (2.33)$$

Gdzie $\mathbf{K}_r(n)$ i $\mathbf{M}_r(n)$ są zredukowanymi macierzami odpowiednio sztywności i masy opisanymi za pomocą równań:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_r(n) &= \mathbf{A}^t(n) \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}(n) \\ \mathbf{M}_r(n) &= \mathbf{A}^t(n) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}(n)\end{aligned}\tag{2.34}$$

a \mathbf{A} jest macierzą której niezerowe elementy mają postać:

$$\begin{aligned}A_{j,j} &= 1 \quad \text{dla węzłów wewnętrznych} \\ A_{j,1} &= e^{i\frac{2\pi n}{N}} \quad \text{dla węzłów brzegowych}\end{aligned}\tag{2.35}$$

Macierze sztywności i masy są zredukowane do wielkości odpowiadającej liczbie stopni swobody komórki elementarnej, a nie jak w przypadku metody elementów skończonych liczby stopni swobody całej struktury, co znacznie zmniejsza zapotrzebowanie na moc obliczeniową.

Rozdział 3

Pasywne struktury periodyczne

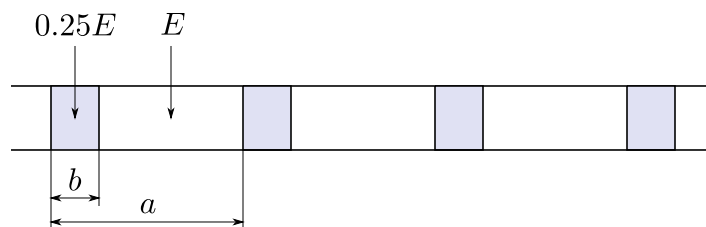
Pasywne struktury periodyczne są to struktury o charakterystyce periodyczności nadanej podczas projektowania i bez możliwości wpływania na nie z zewnątrz.

Badanie właściwości struktur pasywnych stanowi klucz do zrozumienia zależności pomiędzy wielkościami opisującymi periodyczność, a dynamiką zjawisk falowych zachodzących w strukturze.

Modelując struktury periodyczne należy mieć na uwadze efekty związane z samym modelem. Ze względu na dyskretyzację konieczną dla SFEM, w widmie częstotliwości mogą pojawić się dodatkowe pasma zabronione związane z modelem numerycznym. Pasma takie będą występować zawsze w zakresie wysokich częstotliwości przy numerach częstotliwości, będących całkowitymi wielokrotnościami periodyczności modelu. Dlatego przyjęte w pracy modele muszą być większe niż przyjęta periodyczność badanej struktury. Z drugiej strony właściwości struktury wynikające z jej periodycznego charakteru ujawniają się przy dużych wartościach periodyczności.

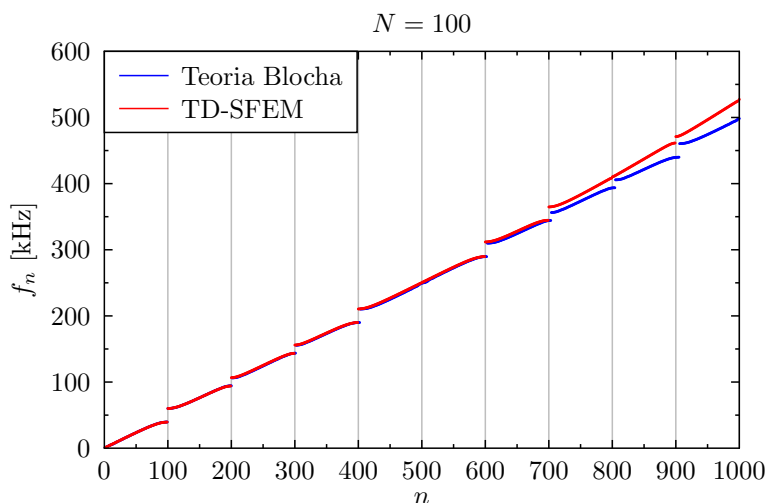
Porównano widma częstotliwości drgań własnych uzyskane metodą TD-SFEM z wynikami analitycznymi. Schematy struktury składającej się z periodycznie powtarzających się elementów o różnej wartości modułu Younga, znajduje się na rysunku 3.1. Struktura periodyczna ma długość $l = 2$ m i składa się ze 100 komórek elementarnych o proporcjach długości $a/b = 1/0,25$ i wartości modułu Younga $E_a/E_b = 1/0,25$.

Widmo częstotliwości drgań własnych wyznaczone za pomocą TD-SFEM oraz analitycznie przedstawione są na wykresie 3.2. Model numeryczny składał się z 400



Rysunek 3.1: Schemat jednowymiarowej struktury periodycznej

elementów skończonych, z których co 4 miał zmieniony moduł Younga. Opis modelu numerycznego znajduje się w sekcji 3.1. Charakterystyczne dla struktur periodycznych pasma zabronione są widoczne dla częstotliwości o numerach, będących całkowitą wielokrotnością periodyczności struktury. Dla małych numerów częstotliwości wyniki numeryczne wykazują dużą zgodność z wynikami uzyskanymi za pomocą teorii Blocha. Przy dużych numerach częstotliwości, czyli w zakresie wysokich częstotliwości, wyniki numeryczne znacznie odbiegają od wyników teoretycznych. Jest to związane z reprezentacją wyników na dyskretnej siatce powyżej częstotliwości Nyquista [71, 75]. Z tego względu w całej pracy żadne wyniki z części widma znajdującej się w zakresie wysokich częstotliwości nie są brane pod uwagę, tj. z drugiej połowy widma [74].



Rysunek 3.2: Porównanie wyników numerycznych z wynikami uzyskanymi według teorii Blocha

3.1 Jednowymiarowe struktury periodyczne

Badane struktury jednowymiarowe są periodycznymi belkami wykonanymi z aluminium o wymiarach: długość $l = 4000$ mm, szerokość $b = 10$ mm i wysokość $h = 10$ mm. Stosunkowo duża długość belki pozwala na dokładniejsze modelowanie dynamiki struktury nie wymagając jednocześnie nadmiernego komplikowania modelu numerycznego, lub zmniejszania periodyczności. Właściwości materiałowe użyte do obliczeń były następujące: moduł Younga $E = 67,5$ GPa, liczba Poissona $\nu = 0,33$ i gęstość $\rho = 2700$ kg/m³.

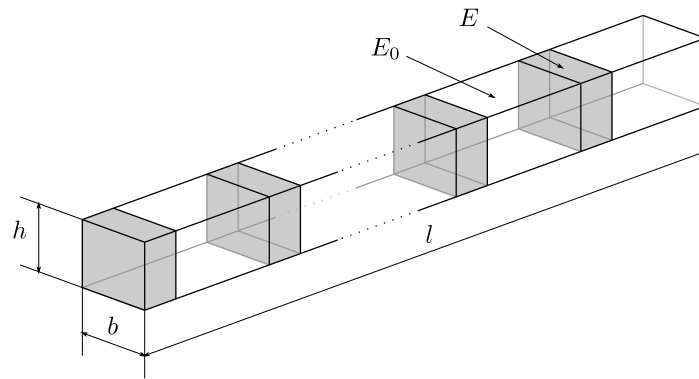
Każdą z modelowanych struktur periodycznych można opisać dwiema wielkościami:

- periodyczność N , tj. liczba powtarzających się w strukturze komórek elementarnych,
- intensywność periodyczności α , tj. wielkość, która jest miarą wielkości periodycznie występujących zmian, należy zdefiniować oddzielnie dla każdego rodzaju struktury

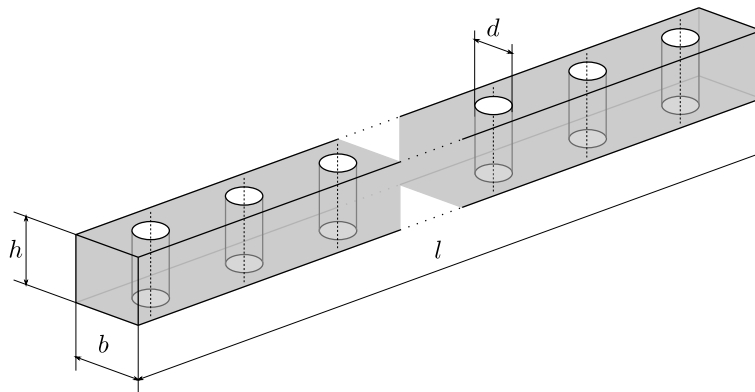
Modelowano trzy rodzaje struktur periodycznych:

- struktury z powtarzającymi się zmianami w geometrii wykonanymi poprzez nawiercenie otworów,
- struktury z powtarzającymi się zmianami właściwości materiałowych,
- struktury z powtarzającymi się zmianami w geometrii w przekroju poprzecznym.

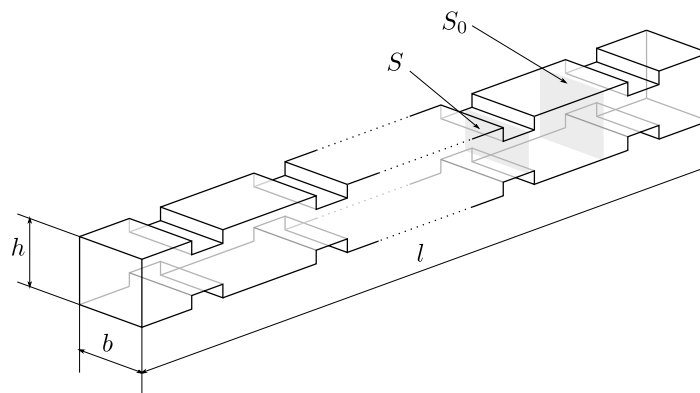
Schematy struktur przedstawione są na rysunkach 3.3, 3.4 i 3.5



Rysunek 3.3: Belka z periodycznymi zmianami moduły Younga



Rysunek 3.4: Belka z periodycznie nawierconymi otworami



Rysunek 3.5: Belka z periodycznymi zmianami pola przekroju poprzecznego

Intensywność periodyczności α każdej z wyżej wymienionych struktur zdefiniowano odpowiednio jako:

$$\begin{aligned}\alpha_H &= \frac{d}{b} \\ \alpha_E &= 1 - \frac{E}{E_0} \\ \alpha_S &= 1 - \frac{S}{S_0}\end{aligned}\tag{3.1}$$

gdzie d to średnica otworu, b szerokość belki, E i E_0 to odpowiednio moduł Younga zmodyfikowany i wyjściowy, a S i S_0 to odpowiednio pole przekroju poprzecznego zmienione i wyjściowe.

3.1.1 Model numeryczny

Do modelowania jednowymiarowych struktur periodycznych wykorzystano TD-SFEM. Dobór modelu poza wymaganą zbieżnością musiał spełniać dodatkowo warunek związany z periodycznością modelu, czyli liczba elementów skończonych powinna być większa od periodyczności struktury, zatem liczba elementów skończonych musi być większa niż 100.

Model numeryczny zakładał niezależne modelowanie drań wzdłużnych, giętnych i skrętnych. Pole przemieszczeń i pole naprężeń wykorzystane w obliczeniach są połączeniem elementarnej teorii prętów dla drgań podłużnych, teorii Timoshenko dla drgań giętnych oraz elementarnej teorii wałów dla drgań skrętnych. Zastosowane pola mają postać:

Pole przemieszczeń:

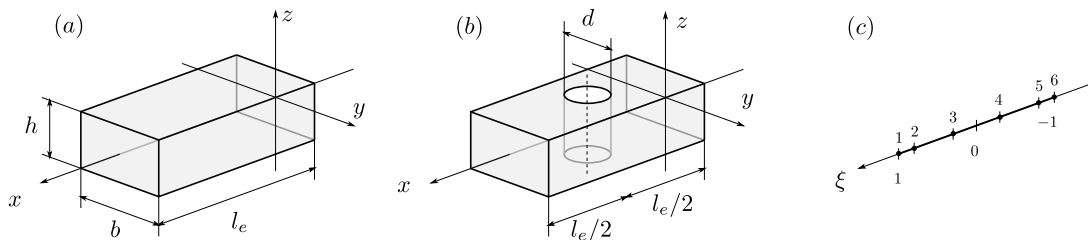
$$\begin{cases} u(x) = u_0(x) - z\phi_y(x) - y\phi_z(x) \\ v(x) = v_0(x) - z\phi_x(x) \\ w(x) = w_0(x) + y\phi_x(x) \end{cases}\tag{3.2}$$



zaś pole odkształceń:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{du_0(x)}{dx} - z \frac{d\phi(x)}{dx} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v(x)}{\partial x} + \frac{\partial u(x)}{\partial y} = \frac{dv_0(x)}{dx} - z \frac{d\phi_x(x)}{dx} - \phi_z(x) \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u(x)}{\partial z} + \frac{\partial w(x)}{\partial x} = \frac{dw_0(x)}{dx} + y \frac{d\phi_x(x)}{dx} - \phi_y(x) \end{cases} \quad (3.3)$$

W modelu użyto spektralnych elementów skończonych, których schemat przedstawi rysunek 3.6. Węzły elementów zostały wyznaczone za pomocą wielomianów Czebyszewa piątego rzędu.



Rysunek 3.6: Pojedynczy element skończony bez zmian (a) i z otworem (b), znormalizowany lokalny układ współrzędnych ξ z zaznaczonymi węzłami (c)

Otwory w strukturze były modelowane poprzez odjęcie objętości otworu z dziedziny całkowania. Aby wziąć pod uwagę koncentrację naprężeń w okolicach otworów [76–78] oraz deplanację pola przekroju poprzecznego, macierz sztywności została zmodyfikowana zgodnie z formułą [79]:

$$[D^*] = [D] \cdot \alpha \cdot f\left(\frac{d}{l_e}\right) \quad \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l_e}\right)^m} \quad m = 1.7 \quad (3.4)$$

gdzie $f\left(\frac{d}{l_e}\right)$ jest funkcją uwzględniającą skończone wymiary elementu [80, 81]

W celu określenia optymalnej liczby elementów użytych do modelu wykonano analizę zbieżności modelu numerycznego, a uzyskane wyniki porównano z wynikami analitycznymi. W FEM bardzo ważna jest gęstość podziału struktury na elementy skończone, dlatego konieczna jest analiza wpływu liczby elementów skończonych na częstotliwości drgań własnych struktury. Należy jednak zwrócić uwagę, iż analiza

struktur periodycznych przy zmiennej liczbie elementów nie jest możliwa ze względu zależność periodyczności struktury od liczby elementów. Z tego powodu analiza zbieżności dotyczy modelu nieperiodycznego.

Do analizy przyjęto pręt o długości $l = 4000$ mm, szerokość $b = 10$ mm i wysokość $h = 10$ mm o swobodnych końcach. Wyznaczono pięć pierwszych i dziesiątą częstotliwości drgań wzdłużnych oraz dodatkowo w przypadkach większych modeli również częstotliwość numer 50 i 250. W tabeli 3.1 zebrano wyniki obliczeń numerycznych oraz wyniki teoretyczne z klasycznej teorii prętów [79].

Tabela 3.1: Analiza zbieżności wyników obliczeń za pomocą TD-SFEM

Liczba elementów	f_2 [kHz]	f_2 [kHz]	f_3 [kHz]	f_4 [kHz]	f_5 [kHz]	f_{10} [kHz]	f_{50} [kHz]	f_{250} [kHz]
2	0,625	1,250	1,875	2,509	3,159	10,820	-	-
3	0,625	1,250	1,875	2,500	3,126	6,772	-	-
4	0,625	1,250	1,875	2,500	3,125	6,318	-	-
5	0,625	1,250	1,875	2,500	3,125	6,273	-	-
10	0,625	1,250	1,875	2,500	3,125	6,250	54,800	-
100	0,625	1,250	1,875	2,500	3,125	6,250	31,250	157,900
400	0,625	1,250	1,875	2,500	3,125	6,250	31,250	156,300
rozwiązanie analityczne	0,625	1,250	1,875	2,500	3,125	6,250	31,250	156,250

Widoczna jest szybka zbieżność wyników oraz duża zgodność pomiędzy wynikami numerycznymi i analitycznymi. Błąd względny dla częstotliwości nr 10 spada do 0% już dla modelu złożonego z 10 elementów. Do wyznaczenia częstotliwości w zakresie od 0 do 150 [kHz] wystarczający byłby model złożony ze 100 elementów, jednak w celu uniknięcia problemów związanych z periodycznością modelu numerycznego do obliczeń przyjęto model nadmiarowy, złożony z 400 elementów skończonych.

3.1.2 Analiza widm drgań własnych

Analiza uzyskanych widm częstotliwości struktury skupia się głównie na obszarach, gdzie propagacja fal nie jest możliwa. Obszary te nazywane są w literaturze

paszami zabronionymi. Na pasma zabronione mają wpływ dwie wielkości. Pierwszą z nich jest periodyczność N , czyli liczba powtarzających się bloków w strukturze, ma kluczowe znaczenie przy określeniu zarówno położenia jak i liczby pasm zabronionych. Drugą z nich jest intensywność periodyczności α , która jest miarą wielkości periodycznie powtarzającej się modyfikacji i wpływa przede wszystkim na szerokość pasm zabronionych.

Belka z otworami

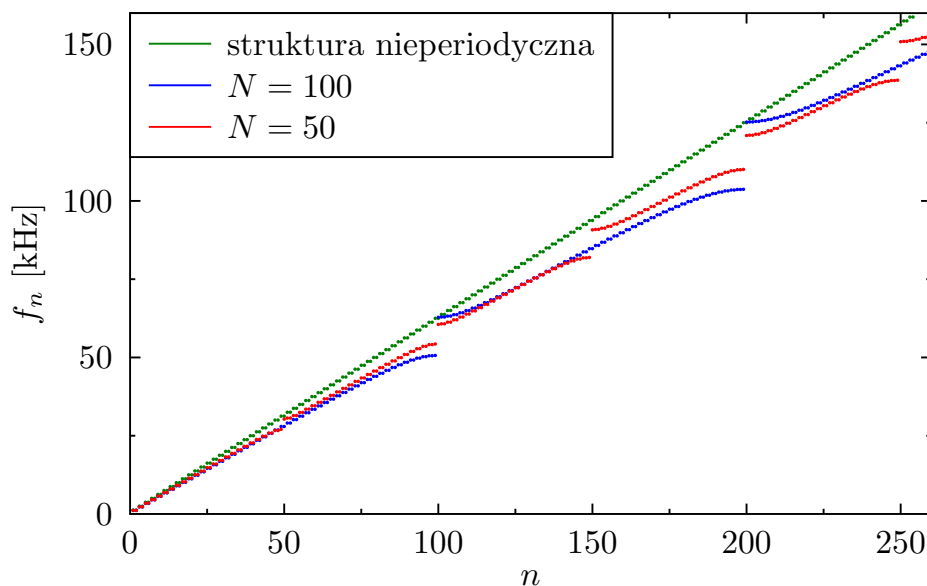
W strukturze widma belki z periodycznie występującymi otworami występują pasma zabronione, których szerokość i położenie zależy głównie od dwóch parametrów:

- periodyczność N , tj. liczba otworów występujących w strukturze
- intensywność periodyczności α_H , tj. miary wielkości periodycznych zmian określonej jako względna średnica otworów $\alpha_H = d/b$ gdzie b jest szerokością struktury.

Poza tymi zmiennymi, na etapie projektowania możliwa jest jeszcze zmiana geometrii i parametrów materiałowych, ale te zmiany wpływają na wartości, a nie na charakter zmian wynikających z występowania periodyczności. Ze względu na przejrzystość drgania wzdłużne, giętne i skrętne są analizowane niezależnie od siebie. Nie uwzględniono więc ewentualnych sprzężeń pomiędzy nimi.

Drgania wzdłużne

W widmie częstotliwości wzdłużnych drgań własnych periodycznej belki można zaobserwować nieciągłości wynikające z periodyczności układu. Występują one przy częstościach o numerach będących całkowitymi wielokrotnościami periodyczności danej struktury. Na wykresie 3.7 pokazane są widma struktur nieperiodycznej i o periodyczności 50 oraz 100, których intensywność periodyczności $\alpha_H = 0,6$. Położenie pasm zabronionych w widmie częstotliwości jest zależne od periodyczności i jednocześnie szerokość pasma zabronionego jest różna dla różnych periodyczności oraz zależna



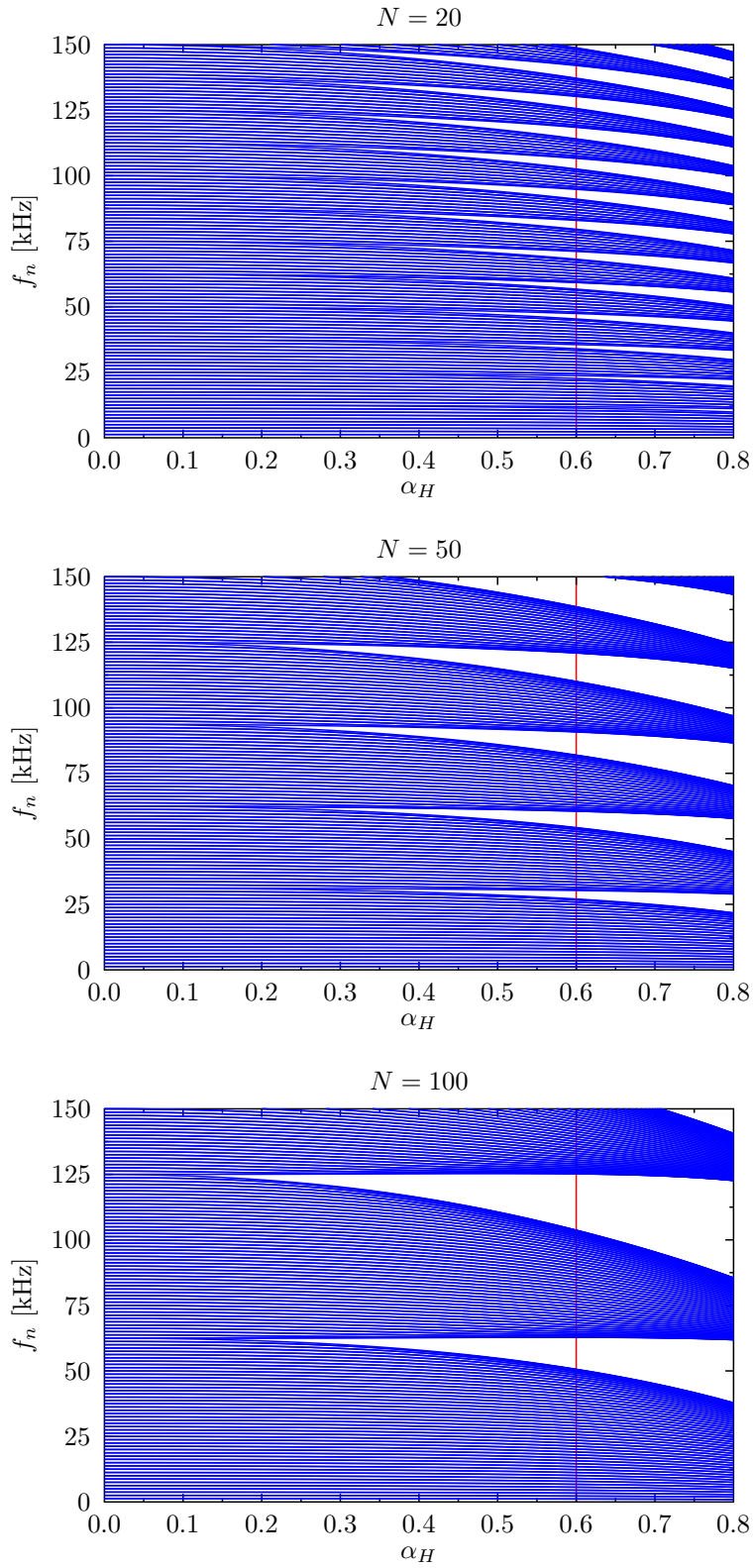
Rysunek 3.7: Widma częstotliwości wzdłużnych drgań własnych dla układu nieperioodycznego (kolor zielony) i układów o perioodyczności 50 (czerwony) i 100 (niebieski)

od zakresu częstotliwości przy którym występuje. Aby określić te zależności przeprowadzono dwa zestawy obliczeń. Pierwszy przy ustalonej intensywności α_H i zmiennej perioodyczności N oraz drugi przy ustalonej perioodyczności N i zmiennej intensywności α_H .

W pierwszej kolejności przeprowadzono analizę zależności częstotliwości drgań własnych od intensywności perioodyczności α_H . Na wykresie 3.8 zestawiono zależności widm częstotliwości drgań własnych w funkcji α_H struktur perioodycznych o perioodycznościach $N = 20, 50, i 100$.

Wyraźnie widoczne są ogólne zależności pomiędzy szerokością i położeniem pasm, a perioodycznością i jej intensywnością. Intensywność perioodyczności wpływa istotnie na szerokość pasm zabronionych nie zmieniając ich liczby, ani położenia w widmie częstotliwości. Im większa perioodyczność, tym pasma są szersze i wyżej położone, ale ich liczba jest mniejsza.

Aby sprawdzić wpływ perioodyczności na pasma zabronione występujące w widmie wyznaczono widma częstotliwości drgań własnych struktur o tej samej liczbie



Rysunek 3.8: Widma częstotliwości wzdłużnych drgań własnych jako funkcja intensywności α_H przy wybranych okresowościach

Tabela 3.2: Zestawienie parametrów pasm zabronionych dla drgań wzdłużnych belki z otworami o intensywności periodyczności $\alpha_H = 0,6$

N	n_P	$\overline{\Delta g}$	$\max \Delta g$	$\sum \Delta g$	f_{g_1}
20	12	3,15	5,23	42,41	10,40
25	10	4,16	6,34	41,61	13,74
50	5	8,46	12,39	42,32	27,03
80	3	14,07	19,31	42,22	41,52
100	2	16,90	21,52	33,80	50,65
200	1	42,31	42,31	42,31	92,30

elementów skończonych, tej samej wartości intensywności periodyczności $\alpha_H = 0,6$ ale o zmiennej liczbie otworów N . Na wykresie 3.8 struktury te zaznaczone są czerwoną linią.

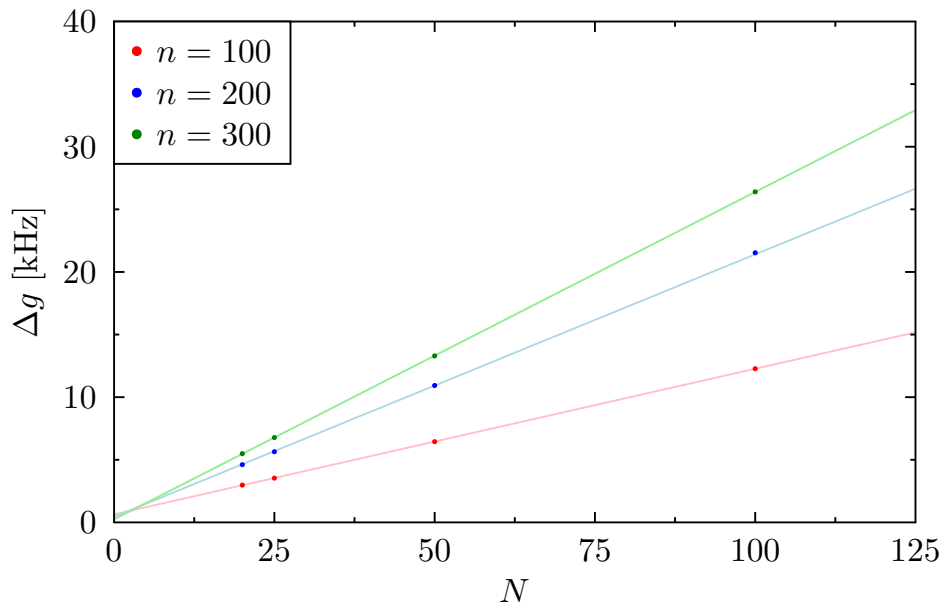
Badając zależność parametrów pasm od periodyczności należy mieć na uwadze ograniczenia wynikające z modelowania. w przestrzeni ciągłej dostępne periodyczności są liczbami naturalnymi, jednak w przestrzeni dyskretnej narzuconej przez TD-SFEM możliwe jest modelowanie struktur, których periodyczności są całkowitymi dzielnikami liczby elementów.

W tabeli 3.2 zestawiono parametry pasm zabronionych dla wybranych periodyczności w zakresie od 0 do 150 kHz, gdzie n_P oznacza liczbę pasm, $\overline{\Delta g}$ oznacza średnią szerokość pasm, $\max \Delta g$ najszersze pasmo w zadanym zakresie, $\sum \Delta g$ jest sumą szerokości wszystkich pasm zabronionych występujący w tym zakresie, a f_{g_1} jest dolną granicą pierwszego pasma zabronionego.

Z zebranych danych wynika, że niezależnie od periodyczności struktury suma szerokości wytłumionych pasm w danym zakresie jest zbliżona i stanowi około 28% spektrum. Wahania tych wartości wynikają z narzucenia górnej granicy zakresu częstotliwości, co w większym stopniu wpływa na struktury o małej liczbie pasm zabronionych w przyjętym zakresie częstotliwości.

Szerokość pasma zabronionego jest funkcją periodyczności, ale jest również zależna od częstotliwości, w sąsiedztwie której występuje. Nie należy zatem porównać ze sobą pierwszego pasma zabronionego, bo zależność taka byłaby funkcją dwóch zmiennych,

a wpływ jaki ma periodyczność na szerokość pasma zabronionego mógłby być przesłonięty przez inne czynniki. Dlatego analiza zależności szerokości od periodyczności możliwa jest tylko wybranych pasm, które występują w strukturach o różnych periodycznościach, ale przy tej samej częstotliwości, co bezpośrednio wiąże się z tym samym numerem częstotliwości. Na wykresie 3.9 widoczna jest zależność szerokości



Rysunek 3.9: Zależność szerokości pasma zabronionego w funkcji periodyczności

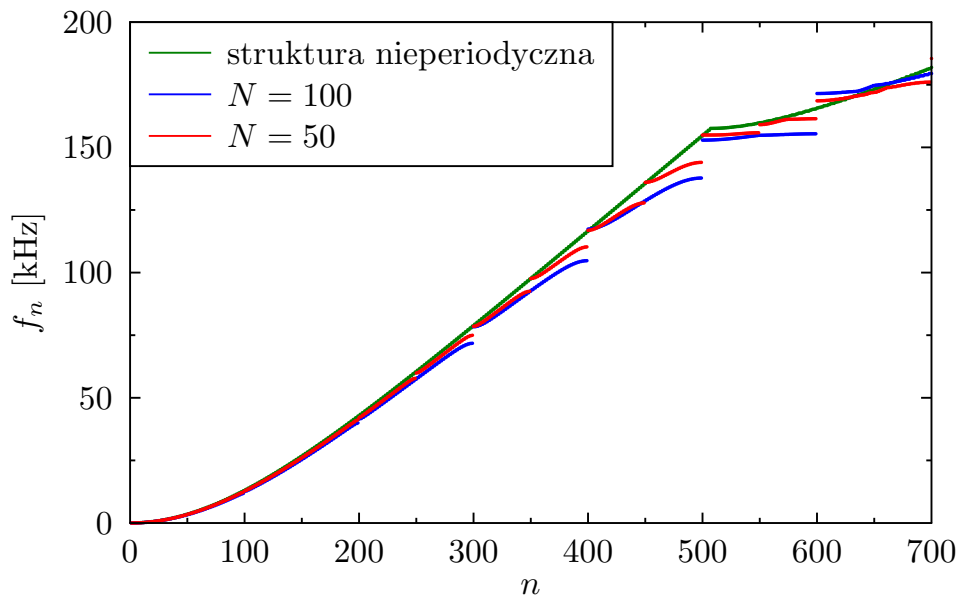
pasma zabronionego od periodyczności dla pasm występujących przy częstościach o numerach 100 (kolor czerwony), 200 (niebieski) i 300 (zielony). Wyraźnie widoczny jest liniowy charakter tej zależności, który jest związany ze stosunkiem długości fali do wielkości komórki elementarnej. Parametry dopasowania funkcji liniowych w postaci $\Delta g = an + b$ są zebrane w tabeli 3.3, gdzie a to współczynnik kierunkowy prostej, b wartość funkcji dla periodyczności równej 0, a R^2 jest współczynnikiem ufności dopasowania.

Tabela 3.3: Zestawienie parametrów dopasowanych funkcji liniowych zależność szerokości pasma zabronionego od periodyczności

n	a	b	R^2
100	0,1163	0,6368	0,9999
200	0,2096	0,4488	0,9999
300	0,2615	0,2418	0,9999

Drgania giętne

Na wykresie 3.10 pokazane są widma drgań własnych belek o periodycznościach 50 i 100 i intensywności periodyczności $\alpha_H = 0,6$ oraz belki nieperiodycznej. Przerwy występują przy częstotliwościach, których numery są całkowitymi wielokrotnościami periodyczności. Są one wyraźnie widoczne dopiero dla wyższych częstotliwości.



Rysunek 3.10: Widma częstotliwości giętnych drgań własnych układu nieperiodycznego i układów o periodyczności $N = 50$ i $N = 100$

Zebrane na rysunku 3.11 wykresy przedstawiają widma drgań giętnych w zależności od intensywności periodyczności α_H struktur o periodycznościach 20, 50 i 100. Ogólne zależności pozostają takie same jak w przypadku drgań wzdłużnych, czyli

wraz ze wzrostem periodyczności wzrasta szerokość pasm zabronionych, ale maleje ich liczba. Pasma są tym szersze im większa jest intensywność periodyczności. Pasma zabronione położone w zakresie niskich częstotliwości są znacząco węższe niż ich odpowiedniki dla drgań wzdłużnych i są widoczne tylko dla dużej wartości intensywności periodyczności.

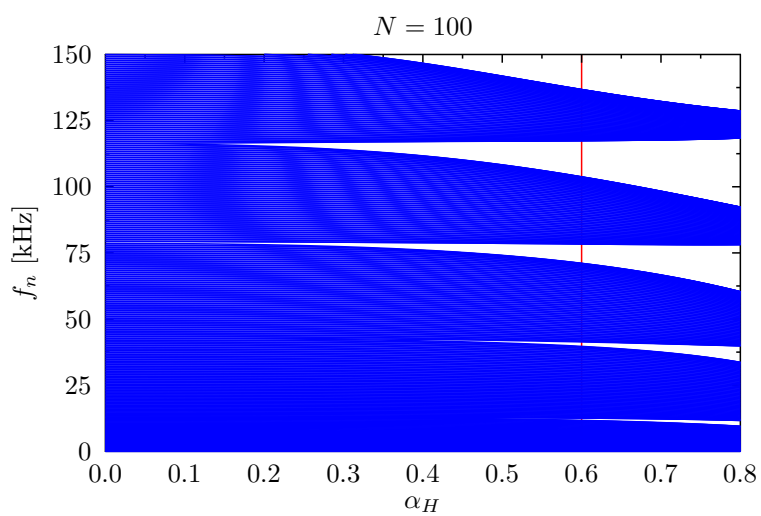
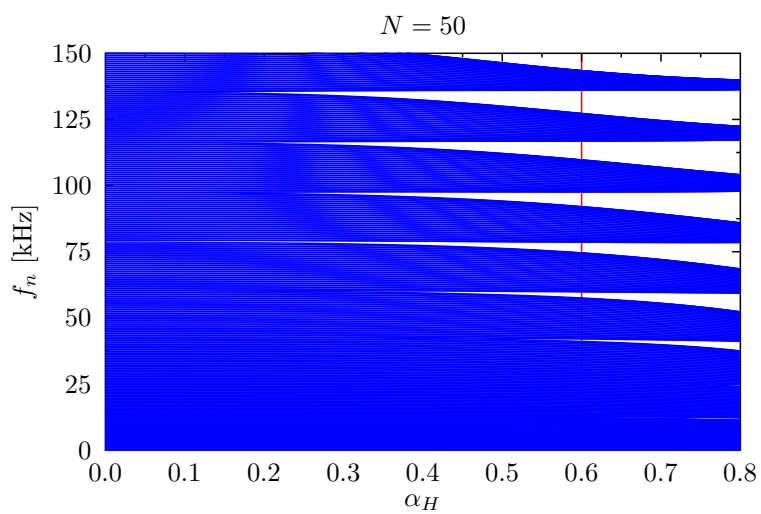
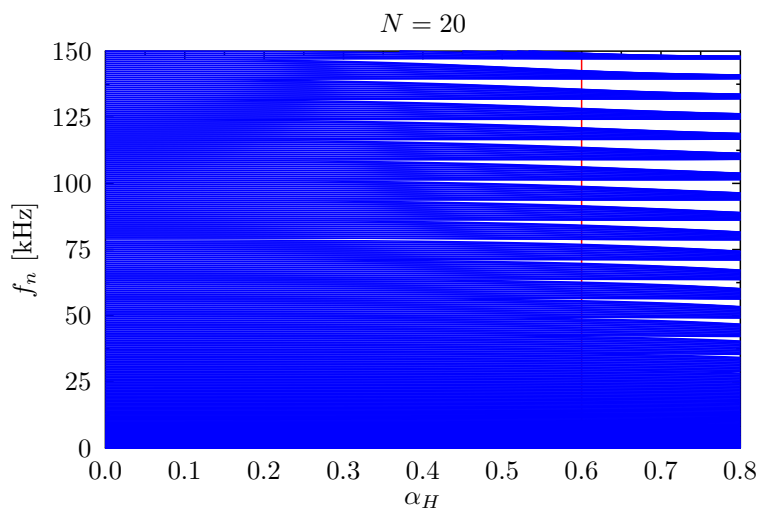
Parametry pasm zabronionych wyznaczone dla wybranych periodyczności belki o intensywności periodyczności $\alpha_H = 0,6$, oznaczonej na wykresie 3.11 jako czerwona linia, zostały zebrane w tabeli 3.4. n_P oznacza liczbę pasm, $\overline{\Delta g}$ oznacza średnią szerokość pasm, $\max \Delta g$ najszersze pasmo w zadanym zakresie, $\sum \Delta g$ jest sumą szerokości wszystkich pasm zabronionych występujący w tym zakresie, a f_{g_1} jest dolną granicą pierwszego pasma zabronionego.

Tabela 3.4: Zestawienie parametrów pasm zabronionych dla drgań poprzecznych układu z otworami o intensywności periodyczności $\alpha_H = 0,6$.

N	n_P	$\overline{\Delta g}$	$\max \Delta g$	$\sum \Delta g$	f_{g_1}
20	25	1,77	5,24	39,60	0,54
25	20	2,08	6,31	36,94	0,80
50	10	3,99	10,92	39,77	3,26
80	6	5,91	14,55	35,45	7,88
100	5	7,42	15,13	34,22	11,85
200	2	13,73	25,88	27,46	32,92

w zakresie częstotliwości do 150 kHz liczba pasm zabronionych jest około 2 razy większa niż w tym samym zakresie dla drgań podłużnych. Całkowite tłumienie w tym zakresie nie zależy od periodyczności struktury i stanowi około 23% widma. Wahania tych wartości wynikają z narzucenia górnej granicy zakresu częstotliwości.

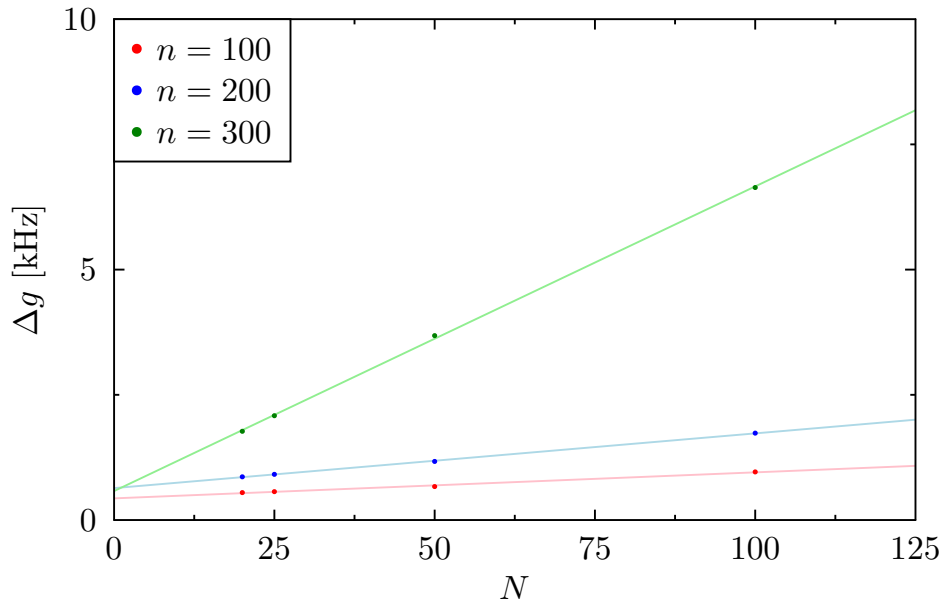
Na wykresie 3.12 przedstawiona jest zależność szerokości pasma zabronionego od periodyczności dla pasm występujących przy częstościach o numerach 100 (kolor czerwony), 200 (niebieski) i 300 (zielony). Wyraźnie widoczny jest liniowy charakter tej zależności jest związany ze stosunkiem długości fali do wielkości komórki elementarnej. Parametry dopasowania funkcji liniowych w postaci $\Delta g = an + b$ są zebrane



Rysunek 3.11: Widma częstości giętych drgań własnych jako funkcja intensywności α_H przy wybranych okresowościach



w tabeli 3.5, gdzie a to współczynnik kierunkowy prostej, b wartość funkcji dla periodyczności równej 0, a R^2 jest współczynnikiem ufności dopasowania.



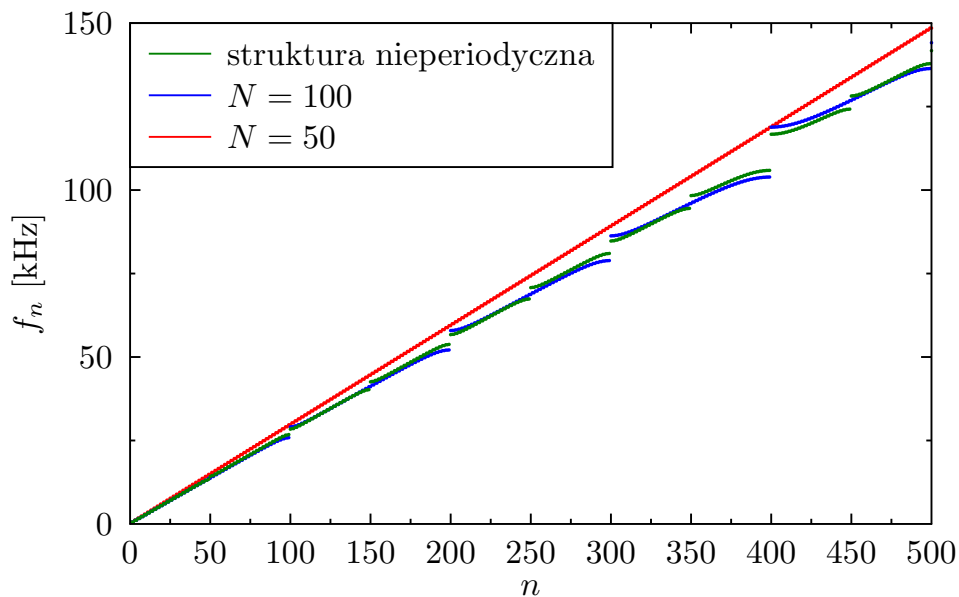
Rysunek 3.12: Zależność szerokości pasma zabronionego od periodyczności struktury z otworami o intensywności periodyczności $\alpha_H = 0,6$

Tabela 3.5: Zestawienie parametrów dopasowanych funkcji liniowych zależność szerokości pasma zabronionego od periodyczności

n	a	b	R^2
100	0,0052	0,4327	0,9927
200	0,0109	0,6374	0,9994
300	0,0608	0,5788	0,9997

Drgania skrętne

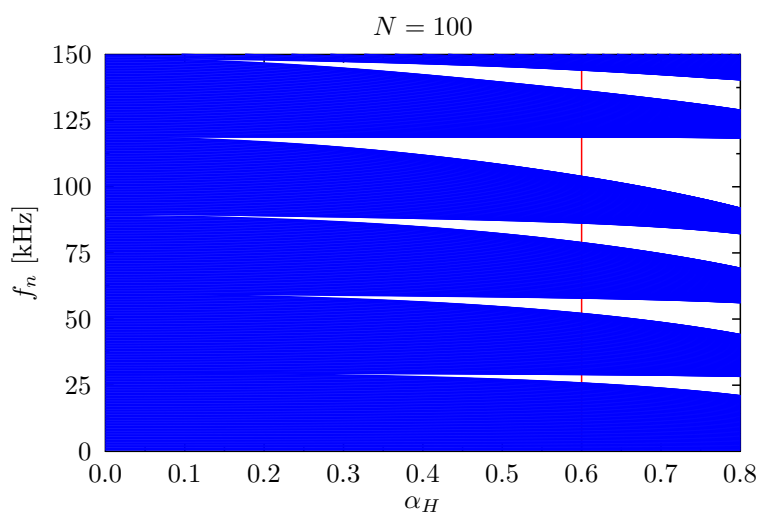
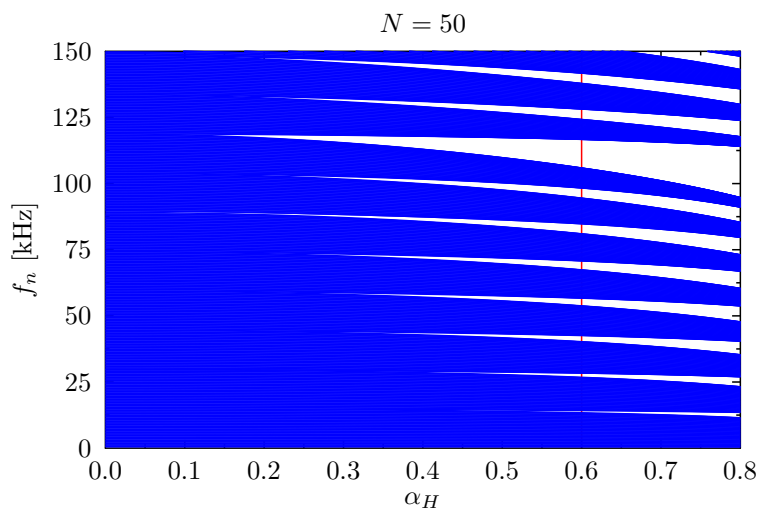
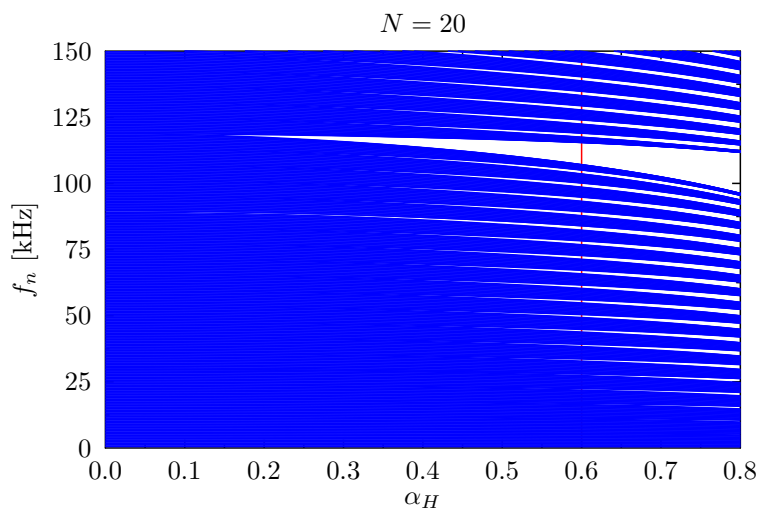
Widma skrętnych drgań własnych belek o periodycznościach 50 i 100 i wartości intensywności periodyczności $\alpha_H = 0,6$ oraz belki nieperiodycznej przedstawione są na wykresie 3.13. Widoczne są wyraźne nieciągłości występujące przy częstotliwości, której numer odpowiada całkowitej wielokrotności periodyczności.



Rysunek 3.13: Widma skrętnych częstotliwości drgań własnych układu nieperiodycznego i układów o periodyczności $N = 50$ i $N = 100$

Zebrane widma częstotliwości skrętnych drgań własnych w funkcji intensywności periodyczności α_H zebrane zostały na wykresie 3.14. Widma drgań skrętnych wykazują te same ogólne zależności, co widma drgań wzdłużnych i giętnych. Pasma zabronione poszerzają się wraz ze wzrostem periodyczności, a ich liczba maleje. Szerokość pasm zabronionych rośnie wraz ze wzrostem intensywności periodyczności, ale ich liczba nie zależy od intensywności.

Szerokość pasm zabronionych ich liczba i położenie zależne są zarówno od periodyczności, jak i intensywności periodyczności. Dla obranej intensywności $\alpha_H = 0,6$, zaznaczonej na wykresie 3.14 w postaci czerwonej linii, parametry pasm zabronionych



Rysunek 3.14: Widma częstości skrzętnych drgań własnych jako funkcja intensywności periodyczności $\alpha_H = 0,6$ dla wybranych periodyczności



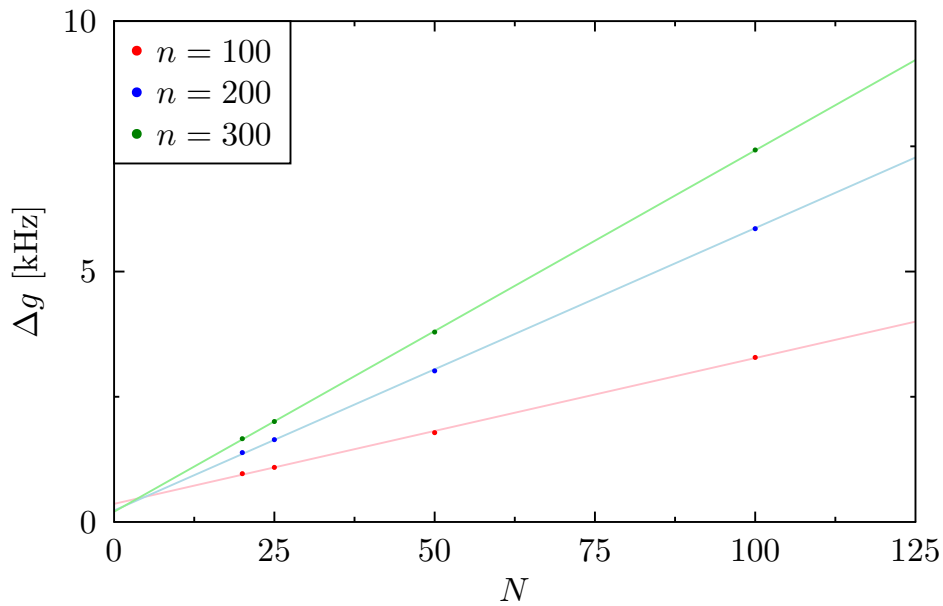
zebrano w tabeli 3.6, gdzie n_P oznacza liczbę pasm, $\overline{\Delta g}$ oznacza średnią szerokość pasm, $\max \Delta g$ najszersze pasmo w zadanym zakresie, $\sum \Delta g$ jest sumą szerokości wszystkich pasm zabronionych występujących w tym zakresie, a f_{g_1} jest dolną granicą pierwszego pasma zabronionego. Podobnie jak w przypadku drgań poprzecznych i wzdłużnych całkowity zakres tłumionych częstotliwości jest niezależny od periodyczności i pokrywa około 25% widma. Szukając najszerszego pasma w zakresie do 150 kHz nie wzięto pod uwagę pasma występującego przy częstotliwości o numerze $n = 400$. Pasma to jest poszerzone ze względu na nałożenie się na siebie pasm zabronionych wynikających z periodyczności struktury oraz periodyczności modelu numerycznego. Nie ma niestety możliwości odseparowania od siebie tych dwóch zjawisk.

Tabela 3.6: Zestawienie parametrów pasm zabronionych dla drgań skrętnych układu z otworami o intensywności periodyczności $\alpha_H = 0,6$

N	n_P	$\overline{\Delta g}$	$\max \Delta g$	$\sum \Delta g$	f_{g_1}
20	27	1,66	1,75	43,39	5,47
25	21	1,87	2,11	41,27	6,62
50	10	3,83	4,00	38,29	13,37
80	6	6,20	6,31	37,22	20,95
100	5	7,86	7,77	39,29	25,85
200	2	17,41	11,52	34,81	48,99

Charakter zmian szerokości pasm zabronionych w zależności od periodyczności należy rozpatrywać dla pasm występujących w tym samym zakresie częstotliwości. Na wykresie 3.15 są zebrane szerokości pasm zabronionych występujących przy częstotliwościach o numerach 100, 200 i 300 w funkcji periodyczności.

Wyraźnie widoczna liniowa zależność szerokości pasma zabronionego od periodyczności jest związana ze stosunkiem długości fali do wielkości komórki elementarnej struktury periodycznej. Parametry dopasowania dopasowania funkcją liniową w postaci $\Delta g = an + b$ zebrane są w tabeli 3.7, gdzie a to współczynnik kierunkowy prostej, b wartość funkcji dla periodyczności równej 0, a R^2 jest współczynnikiem ufności dopasowania.



Rysunek 3.15: Zależność szerokości pasma zabronionego od okresowości

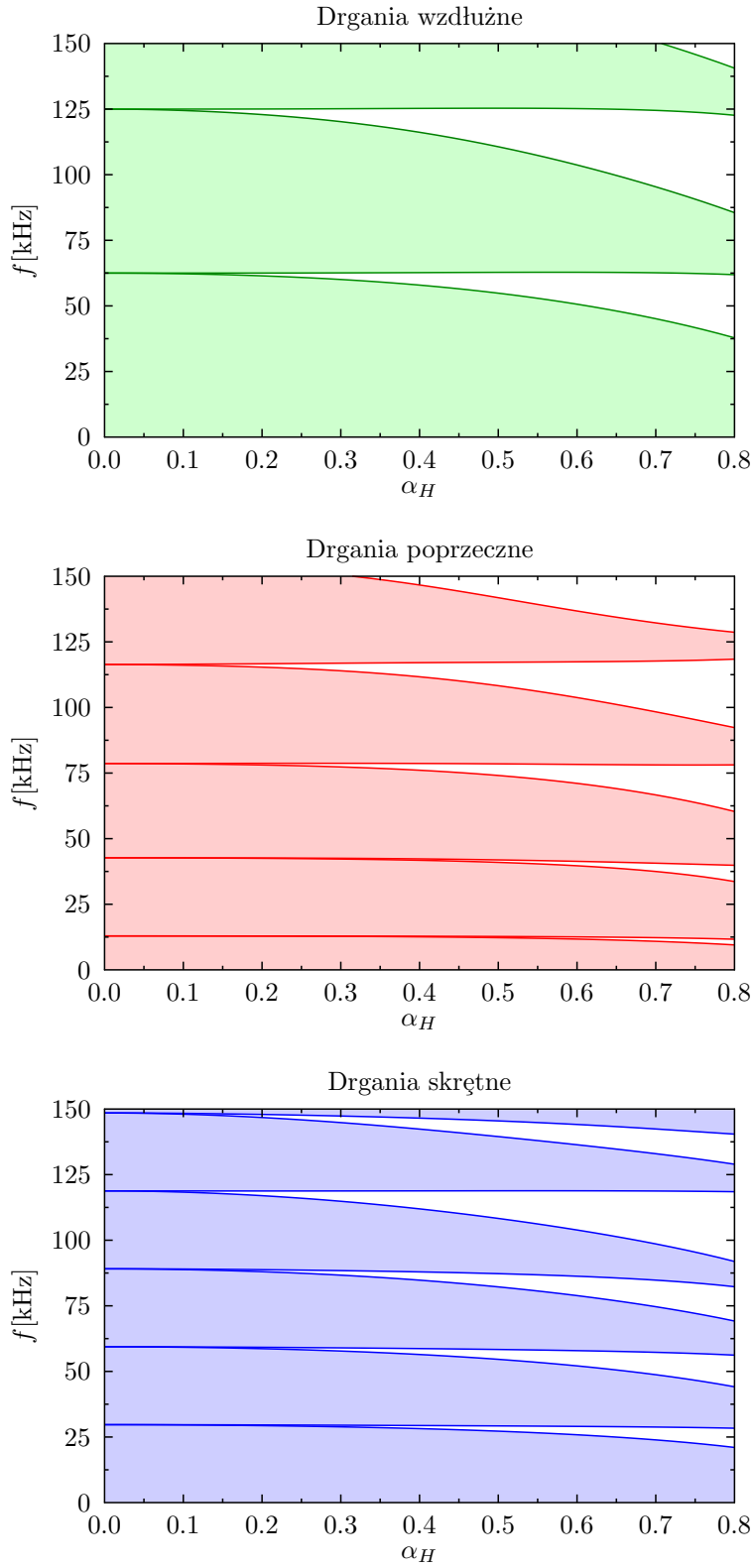
Tabela 3.7: Zestawienie parametrów dopasowanych funkcji liniowych zależność szerokości pasma zabronionego od okresowości

n	a	b	R^2
100	0,0291	0,3619	0,9995
200	0,0563	0,2296	0,9999
300	0,0722	0,2048	0,9999

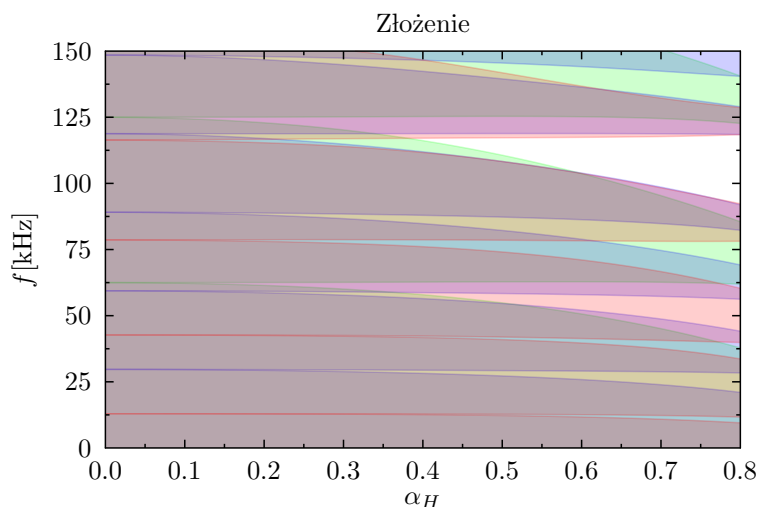
Podsumowanie

Dane każdego typu drgań analizowane niezależnie pokazują charakterystykę dla wyidealizowanego układu działającego tylko pod obciążeniami jednego rodzaju. W rzeczywistości nigdy nie mamy do czynienia z wyłącznie jednym typem drgań. Nakłada to pewne ograniczenia, ale daje też nowe możliwości.

Na wykresie 3.16 są przedstawione zależności różnych typów drgań własnych belki o okresowości $N = 100$ w funkcji intensywności okresowości, gdzie każdy rodzaj drgań przedstawiony jest inną barwą podstawową.



Rysunek 3.16: Widma częstotliwości drgań własnych wzdłużnych, giętnych i skrętnych w zależności od intensywności periodyczności struktur periodycznych z otworami o periodyczności $N = 100$



Rysunek 3.17: Widma częstotliwości własnych w zależności od intensywności periodyczności periodycznych z otworami o periodyczności $N = 100$

Można łatwo zauważyć, że złożone pasma zabronione przedstawione na wykresie 3.28, w zakresie których nie występują żadne drgania własne są znacznie węższe i występują dla większych wartości intensywności periodyczności α_H . Przy dużych wartościach intensywności periodyczności znacząco spada sztywność belek, co ogranicza ich potencjalne zastosowanie jako elementy konstrukcji, ale nie wyklucza ich wykorzystania w celu tłumienia drgań.

Można również zaobserwować obszary, które mogą posłużyć jako filtry konkretnych rodzajów drgań, które przepuszczają pozostałe drgania. Obszary które na wykresie 3.28 są w kolorze purpurowym reprezentują struktury, które nie przepuszczają drgań drgań wzdłużnych, a przepuszczają drgania poprzeczne i skrętne. Obszary w kolorze niebieskozielonym reprezentują struktury periodyczne, które stanowią barierę dla drgań poprzecznych, a przepuszczają drgania giętne oraz skrętne.

Zmiany wartości modułu Younga

Widmo belki z okresowo zmieniającymi się wartościami modułu sprężystości ma charakter pasmowy, co znaczy, że w widmie występują pasma zabronione. Fale o częstotliwościach z zakresu pasm zabronionych nie mogą być propagowane. Szerokość i położenie pasm zabronionych zależy od dwóch parametrów:

- okresowość N określa liczbę powtarzających się segmentów w strukturze o innej wartości modułu Younga,
- intensywność okresowości jest miarą wielkości okresowych zmian określona jako względna zmiana modułu Younga $\alpha_E = 1 - E/E_0$ gdzie E_0 jest wyjściową wartością modułu sprężystości a E wartością okresowej modyfikacji.

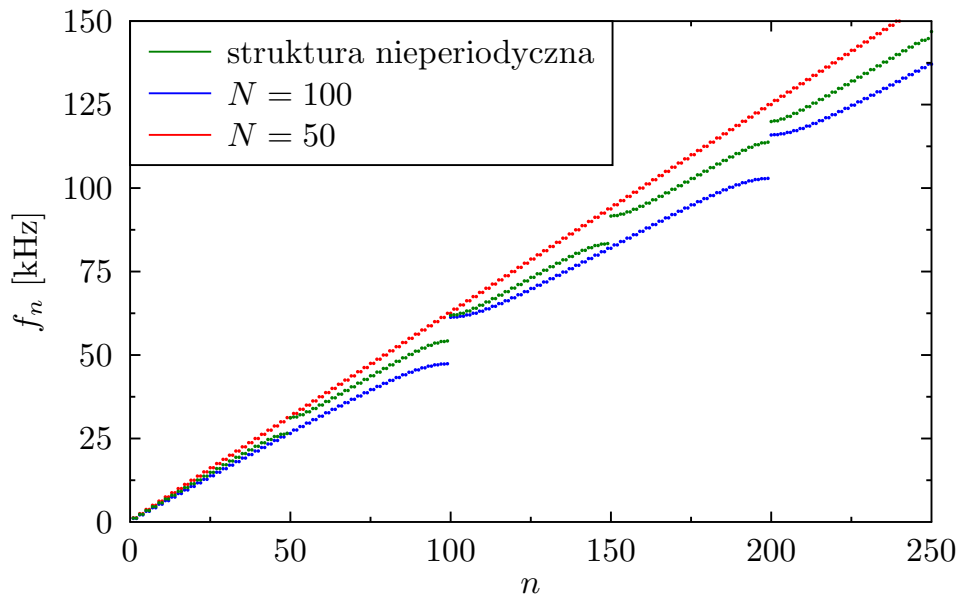
Poza tymi zmiennymi, na etapie projektowania możliwa jest jeszcze zmiana geometrii i parametrów materiałowych, ale te zmiany wpływają na wartości, a nie na charakter zmian wynikających z występowania okresowości. Drgania wzdłużne, giętne i skrętne są analizowane niezależnie od siebie, nie uwzględniono więc ewentualnych sprzężeń pomiędzy nimi.

Drgania wzdłużne

Na wykresie 3.18 znajdują się widma belek o okresowości 50 i 100 oraz belki nieokresowej. W przypadku struktur okresowych wartości intensywności okresowości wynosi $\alpha_E = 0,6$. Widać, że nieciągłości pojawiają się dla częstotliwości, których numery są całkowitą wielokrotnością okresowości.

Złożone widma częstotliwości wzdłużnych drgań własnych w funkcji intensywności okresowości α_E struktur o wybranych okresowościach zostały zebrane na wykresie 3.19. Niebieskie obszary reprezentują dostępne mody drgań.

Jak widać zakresy gdzie drgania są propagowane, są przeplatane przez obszary gdzie drgania nie mogą występować. Widoczna jest ogólna zależność pomiędzy szerokością pasma zabronionego a intensywnością okresowości. Im intensywność jest

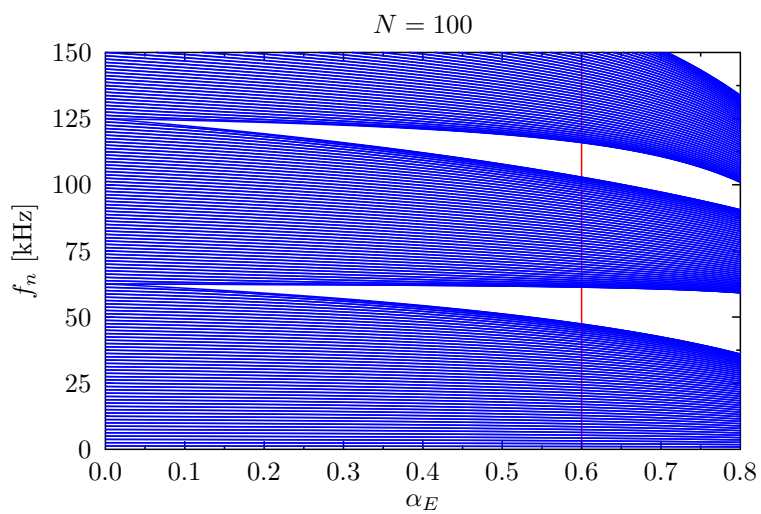
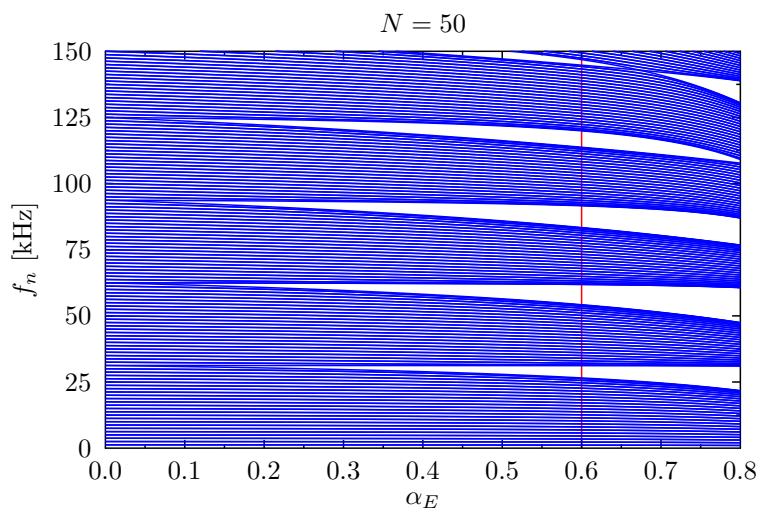
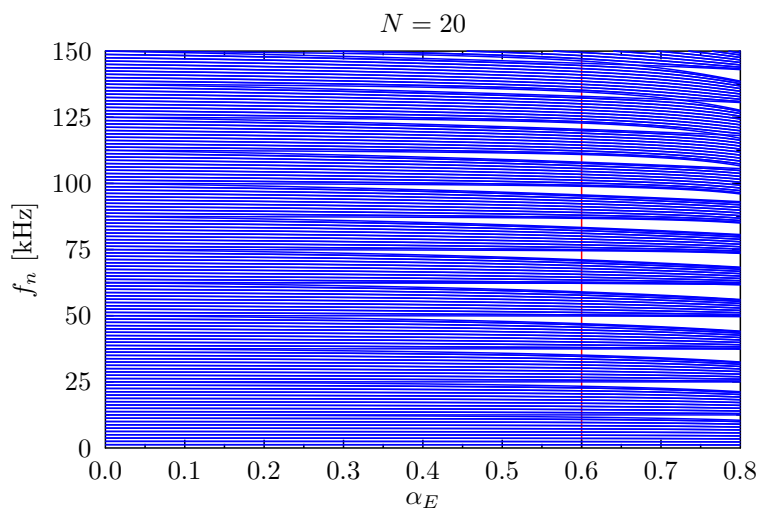


Rysunek 3.18: Widma częstotliwości wzdłużnych drgań własnych struktury nieperiodycznej i struktur o periodycznościach 50 i 100

większa, tym szersze jest pasmo zabronione. Wraz ze wzrostem intensywności można zaobserwować przesunięcie pasm w kierunku niższych częstotliwości, co jest związane ze zmniejszeniem sztywności całej struktury. Wraz ze wzrostem periodyczności rośnie również szerokość pasm zabronionych przy równoczesnym zmniejszaniu się ich liczby.

W tabeli 3.8 zebrane zostały parametry pasm zabronionych dla różnych periodyczności struktury, gdzie n_P jest liczbą pasm zabronionych w zakresie od 0 do 150 kHz, $\overline{\Delta g}$ oznacza średnią szerokość pasma zabronionego, $\max \Delta g$ szerokość najszerszego pasma zabronionego w danym zakresie, $\sum \Delta g$ oznacza całkowity zakres częstotliwości które nie mogą występować w strukturze, w zakresie od 0 do 150 kHz, a f_{g1} jest częstotliwością dolnej granicy pierwszego pasma zabronionego.

Dane zawarte w tabeli 3.8 pozwalają sformułować ogólne zależności położenia i szerokości pasm zabronionych od periodyczności. Im większa periodyczność tym mniej jest pasm zabronionych, środek pierwszego pasma zabronionego jest położony w zakresie wyższych częstotliwości, a pasma są szersze. Sumaryczne tłumienie w za-



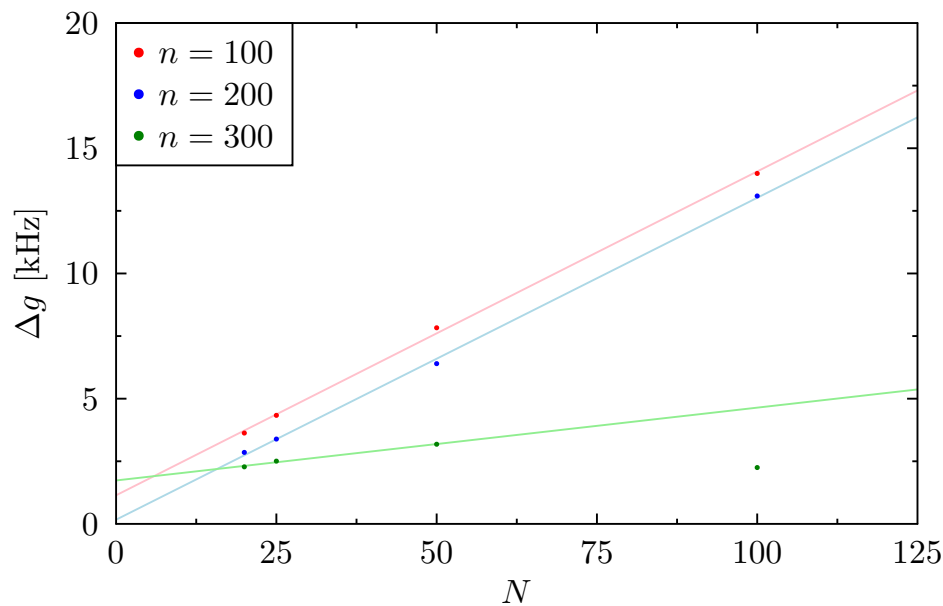
Rysunek 3.19: Widma częstości wzdłużnych drgań własnych jako funkcja intensywności periodyczności

Tabela 3.8: Zestawienie parametrów pasm zabronionych dla drgań wzdłużnych układu z periodycznie zmienną wartością modułu Younga $1 - E/E_0 = 0,6$

N	n_P	$\overline{\Delta g}$	$\max \Delta g$	$\sum \Delta g$	f_{g_1}
20	12	2,93	3,79	35,28	10,79
25	10	3,11	4,49	32,74	14,08
50	5	6,02	8,38	30,11	26,54
80	3	9,45	12,71	22,87	39,46
100	2	13,54	13,99	27,87	47,39
200	1	26,26	26,26	26,26	83,51

kresie od 0 do 150 kHz wraz ze wzrostem periodyczności maleje, co ma związek ze spadkiem całkowitej sztywności belki.

Dla porównania szerokości pasm zabronionych wybrano pasma, które znajdują się w okolicach tych samych częstotliwości, a które występują dla częstotliwości o numerach 100, 200 i 300. Zależność szerokości pasm zabronionych od periodyczności pokazana jest na wykresie 3.20, a parametry dopasowania funkcja liniową w postaci $\Delta g = an + b$ znajdują się w tabeli 3.9.



Rysunek 3.20: Zależność szerokości pasma zabronionego od periodyczności

Tabela 3.9: Zestawienie parametrów dopasowanych funkcji liniowych zależność szerokości pasma zabronionego od periodyczności

n	a	b	R^2
100	0,1293	1,1422	0,9990
200	0,1306	0,0806	0,9998
300	0,0291	1,7367	0,9720

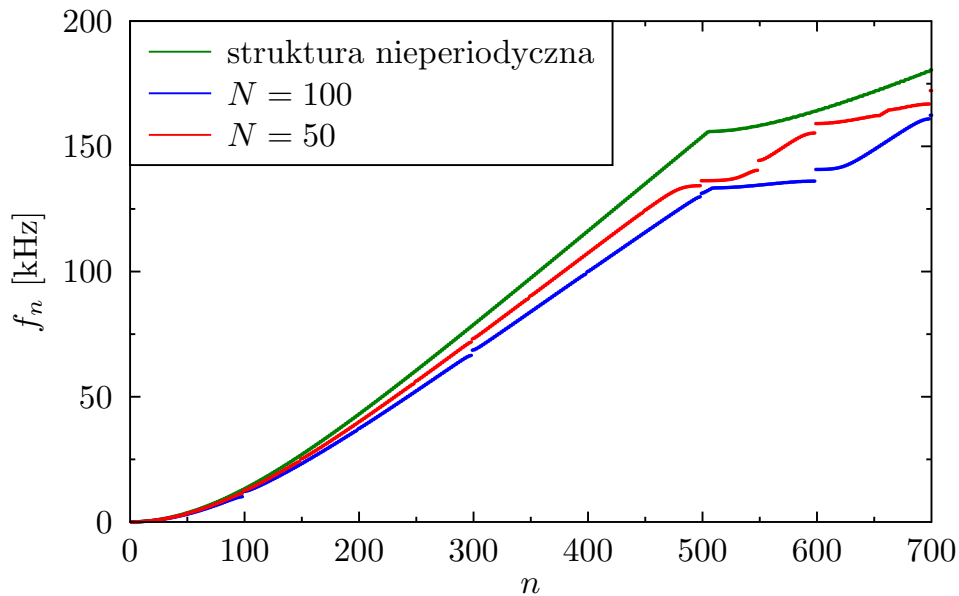
Widoczny jest charakter liniowy zależności od periodyczności, co jest związane ze stosunkiem długości fali o określonej częstotliwości do wymiarów komórki elementarnej struktury.

Drgania giętne

Na wykresie 3.21 przedstawiono widmo częstotliwości giętnych drgań własnych belki o periodyczności 50 i 100 oraz nieperiodycznej. W strukturach periodycznych wartości intensywności wynosi $\alpha_E = 0,6$. W widmie struktur periodycznych pojawiają się charakterystyczne nieciągłości, które występują przy częstotliwościach, których numery są całkowitą wielokrotnością periodyczności. Nieciągłości te występują przy każdej kolejnej wielokrotności, ale nie wszystkie są wyraźnie widoczne.

Wykres 3.22 przedstawia zależności częstotliwości giętnych drgań własnych od intensywności periodyczności przykładowych periodyczności. Można zauważyć, że pomimo iż pasma zabronione są wyraźnie węższe niż w pozostałych przypadkach to wraz z intensywnością periodyczności ich szerokość rośnie, a liczba maleje.

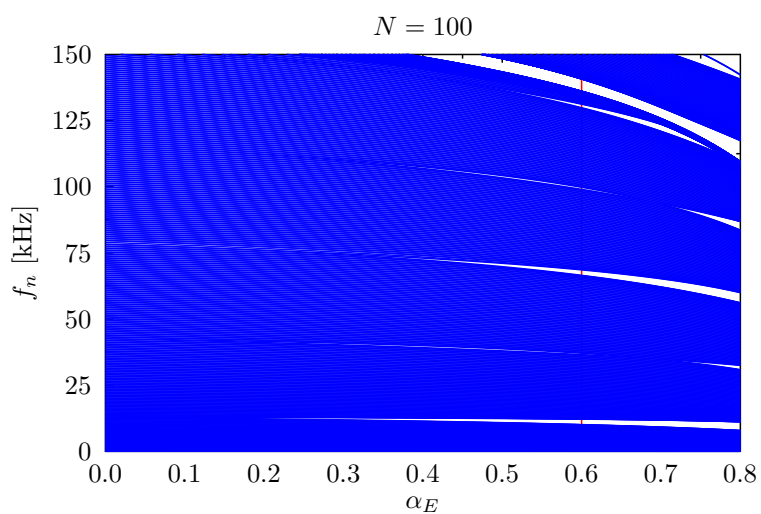
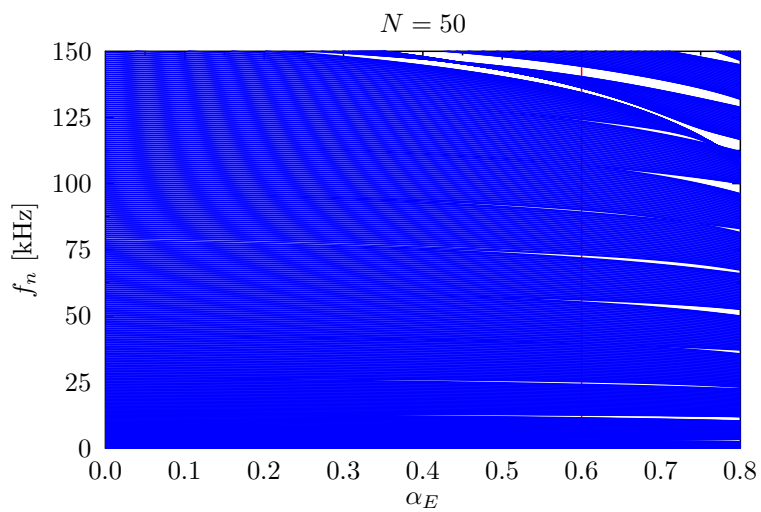
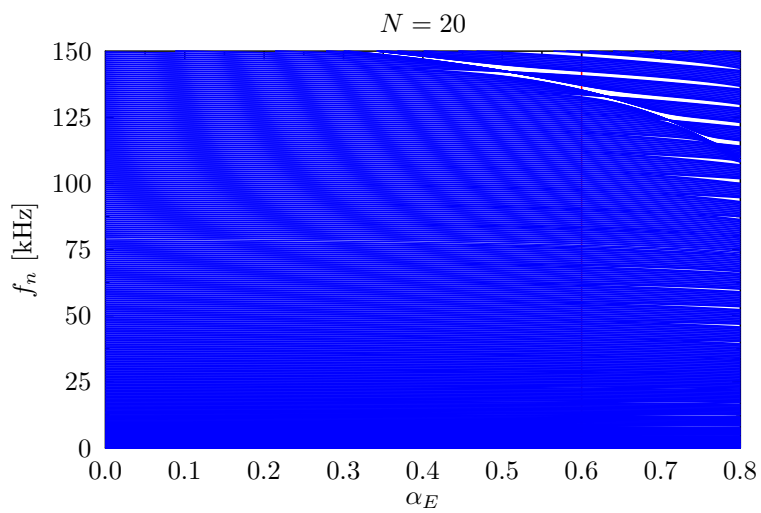
W przypadku drgań giętnych, mimo iż ogólne wnioski dotyczące zależności od intensywności periodyczności oraz od periodyczności są takie same, to pasma zabronione występują w zakresie wyższych częstotliwości i są one bardzo wąskie. Parametry szerokości pasm zostały zebrane w tabeli 3.10 gdzie n_P oznacza liczbę pasm zabronionych w zakresie od 0 do 150 kHz, $\overline{\Delta g}$ średnią szerokość pasma zabronionego, $\max \Delta g$ szerokość najszerszego pasma zabronionego w danym zakresie, $\sum \Delta g$ całkowity zakres częstotliwości które są tłumione, w zakresie od 0 do 150 kHz, a f_{g1} jest częstotliwością dolnej granicy pierwszego pasma zabronionego.



Rysunek 3.21: Widma częstości giętnych drgań własnych struktury nieperiodycznej i struktur o periodyczności 50 i 100

Średnia i maksymalna szerokość pasm zabronionych jest wyraźnie mniejsza niż przypadku drgań wzdłużnych i skrętnych struktury ze zmianami modułu Younga. Sumaryczne tłumienie w zakresie od 0 do 150 kHz wyraźnie maleje wraz ze wzrostem periodyczności, co jest związane ze zmniejszeniem sztywności całej struktury.

Dla pasm występujących przy tych samych numerach częstotliwości można wyznaczyć zależność ich szerokości od periodyczności. Zależność ma charakter liniowy co wynika z proporcji wielkości komórki elementarnej do długości fali o częstotliwości z zakresu danego pasma zabronionego. Wykres 3.23 przedstawia szerokość pasma zabronionego w funkcji periodyczności, a parametry dopasowania funkcją liniową w postaci $\Delta g = an + b$ zebrane są w tabeli 3.11



Rysunek 3.22: Widma częstości giętnych drgań własnych jako funkcja względnej zmiany modułu Younga dla wybranych periodyczności

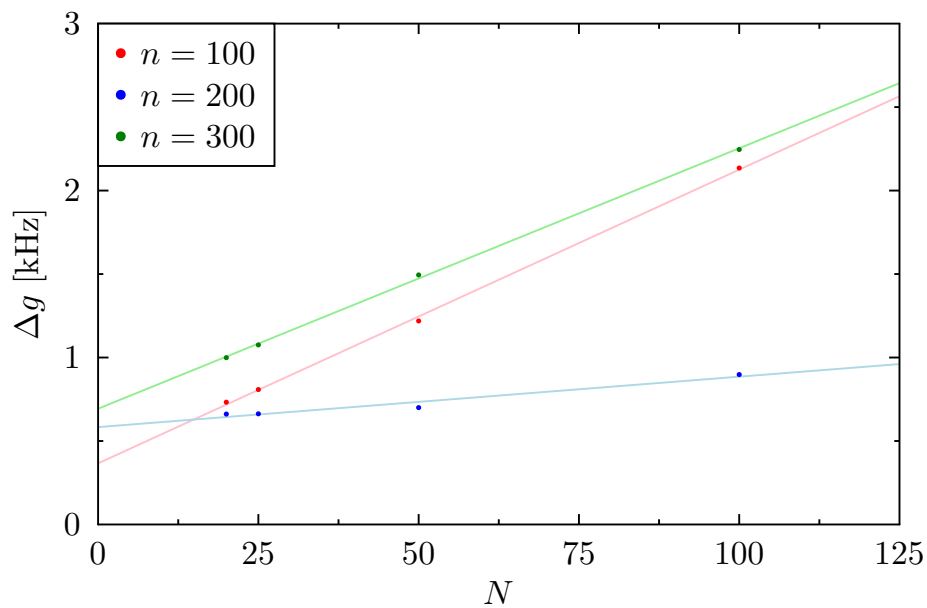


Tabela 3.10: Zestawienie parametrów pasm zabronionych dla drgań giętnych struktury ze zmienną wartością modułu Younga o intensywności $\alpha_E = 0,6$

N	n_P	$\overline{\Delta g}$	$\max \Delta g$	$\sum \Delta g$	f_{g_1}
20	26	0,89	2,02	23,30	0,53
25	21	0,95	2,61	19,86	0,92
50	11	1,39	4,00	15,31	2,96
80	7	1,23	2,03	8,59	8,26
100	6	2,10	4,66	12,61	12,17
200	3	2,89	5,69	8,68	33,60

Tabela 3.11: Zestawienie parametrów dopasowanych funkcji liniowych zależność szerokości pasma zabronionego od periodyczności

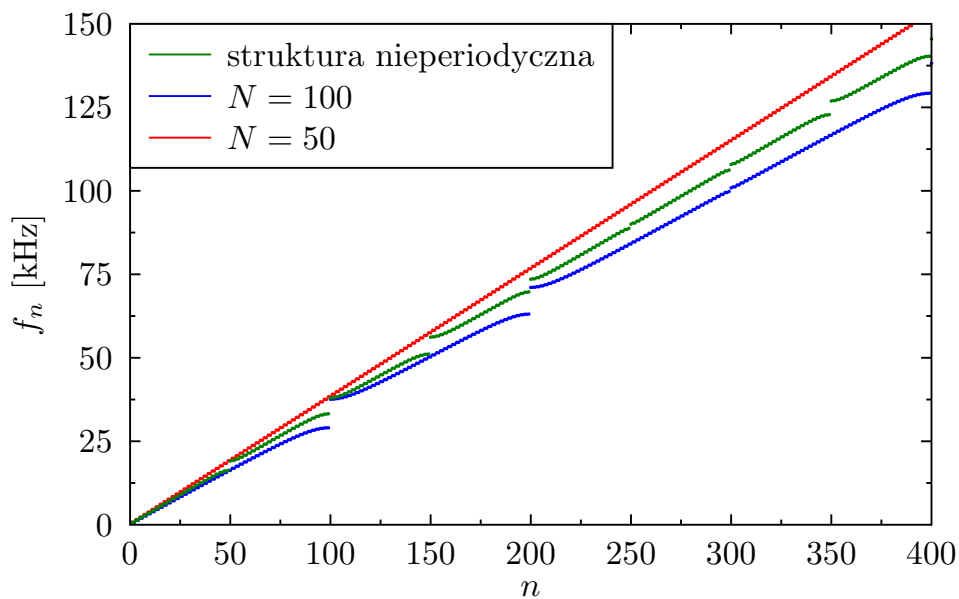
n	a	b	R^2
100	0,0176	0,3661	0,9992
200	0,0030	0,5834	0,9566
300	0,0156	0,6933	0,9994



Rysunek 3.23: Zależność szerokości pasma zabronionego od periodyczności

Drgania skrętnie

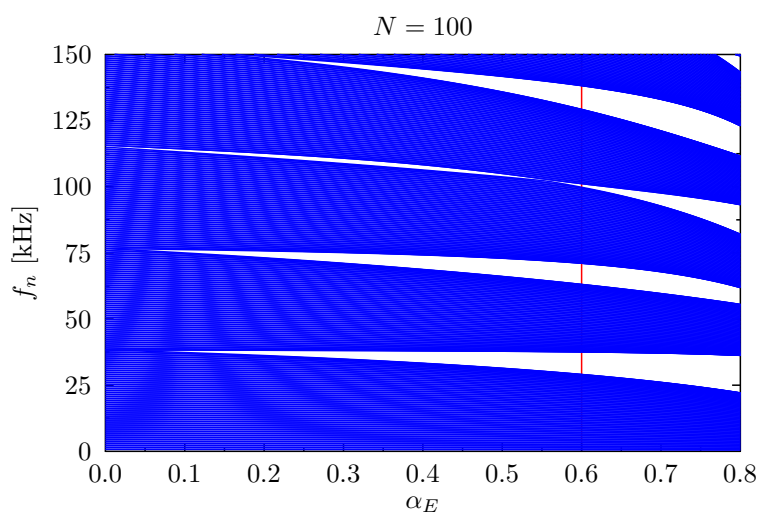
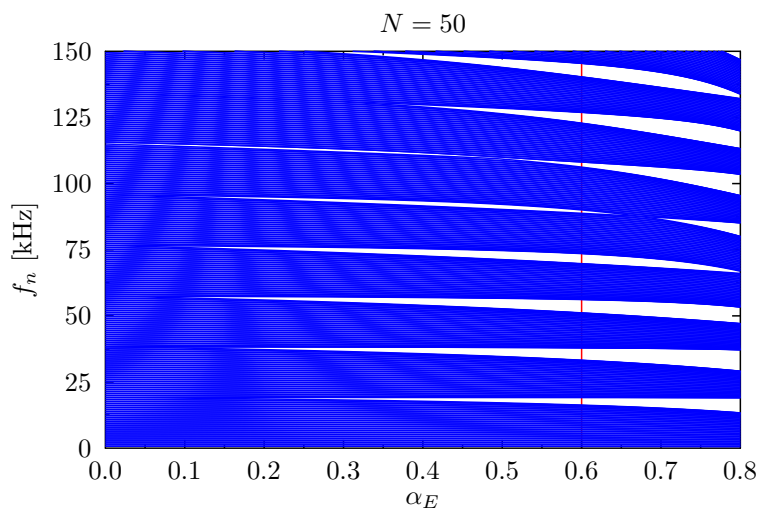
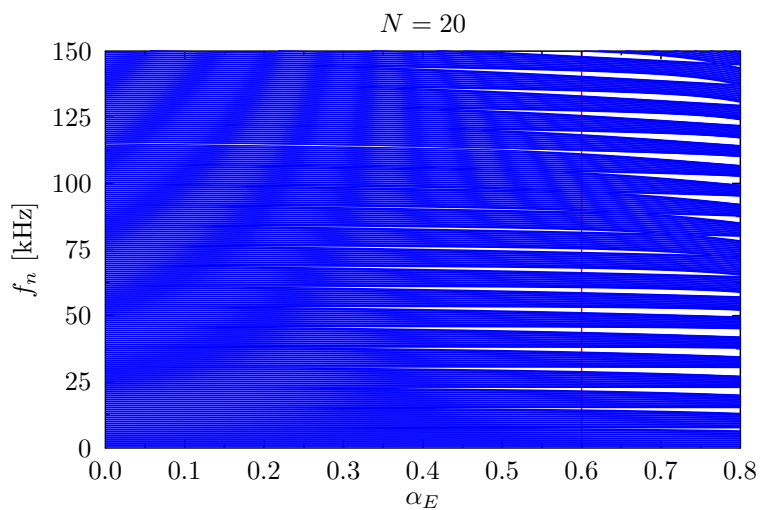
Na wykresie 3.24 zebrano widma własnych drgań skrętnych belki nieperiodycznej i periodycznych o periodyczności 50 i 100 oraz wartości intensywności periodyczności $\alpha_E = 0,6$. Podobnie jak w pozostałych przypadkach widoczne są nieciągłości w widmie występujące przy częstotliwościach o numerach, będących całkowitymi wielokrotnościami periodyczności.



Rysunek 3.24: Widma częstotliwości skrętnych drgań własnych struktury nieperiodycznej i struktur o periodycznościach 50 i 100

Zebrane widma skrętnych drgań własnych w zależności od intensywności periodyczności dla periodyczności 20, 50 i 100 są przedstawione na wykresie 3.25. Niebieskie obszary reprezentują dostępne postacie drgań, białe zaś pasma zabronione. Czerwoną linią zaznaczona jest wartość intensywności periodyczności $\alpha_E = 0,6$.

Przy obranej wcześniej wartości intensywności periodyczności $\alpha_E = 0,6$ parametry pasm zabronionych dla różnych periodyczności zebrano w tabeli 3.12 gdzie n_P oznacza liczbę pasm, $\overline{\Delta g}$ średnią szerokość pasm, $\max \Delta g$ maksymalną zaobserwo-



Rysunek 3.25: Widma częstości skrzętnych drgań własnych jako funkcja intensywności periodyczności α_E



Tabela 3.12: Zestawienie parametrów pasm zabronionych dla drgań skrętnych układu ze zmienną wartością modułu Younga o wartości $1 - E/E_0 = 0,6$

N	n_P	$\overline{\Delta g}$	$\max \Delta g$	$\sum \Delta g$	f_{g_1}
20	20	0,98	2,33	35,17	6,61
25	16	2,03	2,80	32,41	8,63
50	8	3,72	5,18	29,78	16,27
80	5	5,76	7,79	28,80	24,20
100	4	6,75	9,02	27,01	29,05
200	2	13,62	16,10	27,24	51,20

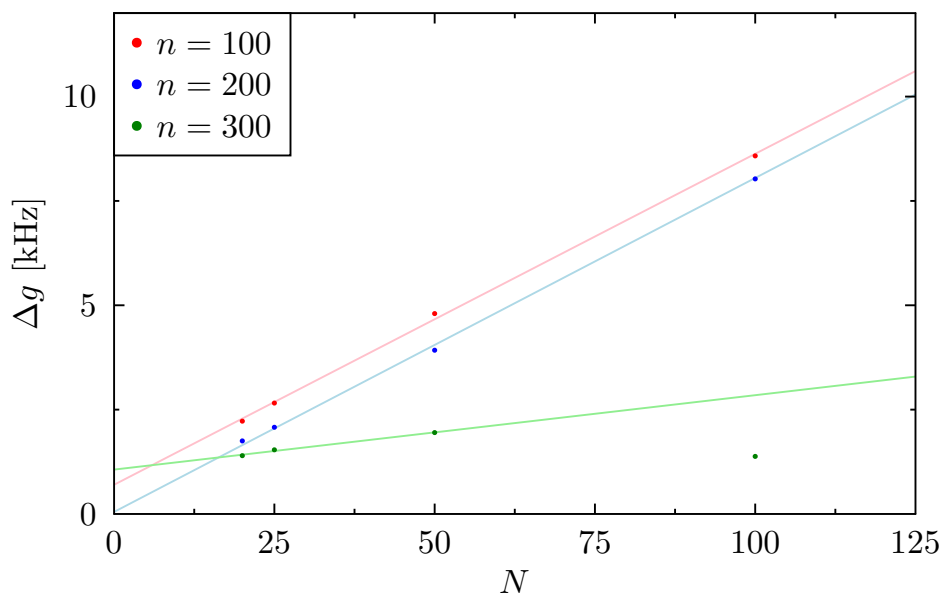
Tabela 3.13: Zestawienie parametrów dopasowanych funkcji liniowych zależność szerokości pasma zabronionego od periodyczności

n	a	b	R^2
100	0,0793	0,7003	0,9993
200	0,0800	0,0494	0,9999
300	0,0178	1,0636	0,9999

waną szerokość pasma, a f_{g_1} położenie dolnej granicy pierwszego pasma zabronionego. Sumaryczne tłumienie w zakresie do 150 kHz oznaczono jako $\sum \Delta g$.

Z zebranych danych wynika, że wraz ze wzrostem periodyczności rośnie szerokość pasm zabronionych i częstotliwość, przy której występuje pierwsze pasmo ale spada liczba pasm zabronionych. Sumaryczne tłumienie maleje wraz z periodycznością, co jest spowodowane zmniejszaniem się sztywności całej struktury.

Porównując pasma zabronione które występują przy tych samych numerach częstotliwości można zaobserwować liniową zależność szerokości pasm od periodyczności pokazaną na wykresie 3.26. Parametry dopasowania funkcją liniową w postaci $\Delta g = an + b$ znajdują się w tabeli 3.13. Liniowy charakter tej zależności związany jest ze stosunkiem długości fali do wymiarów komórki elementarnej struktury periodycznej.

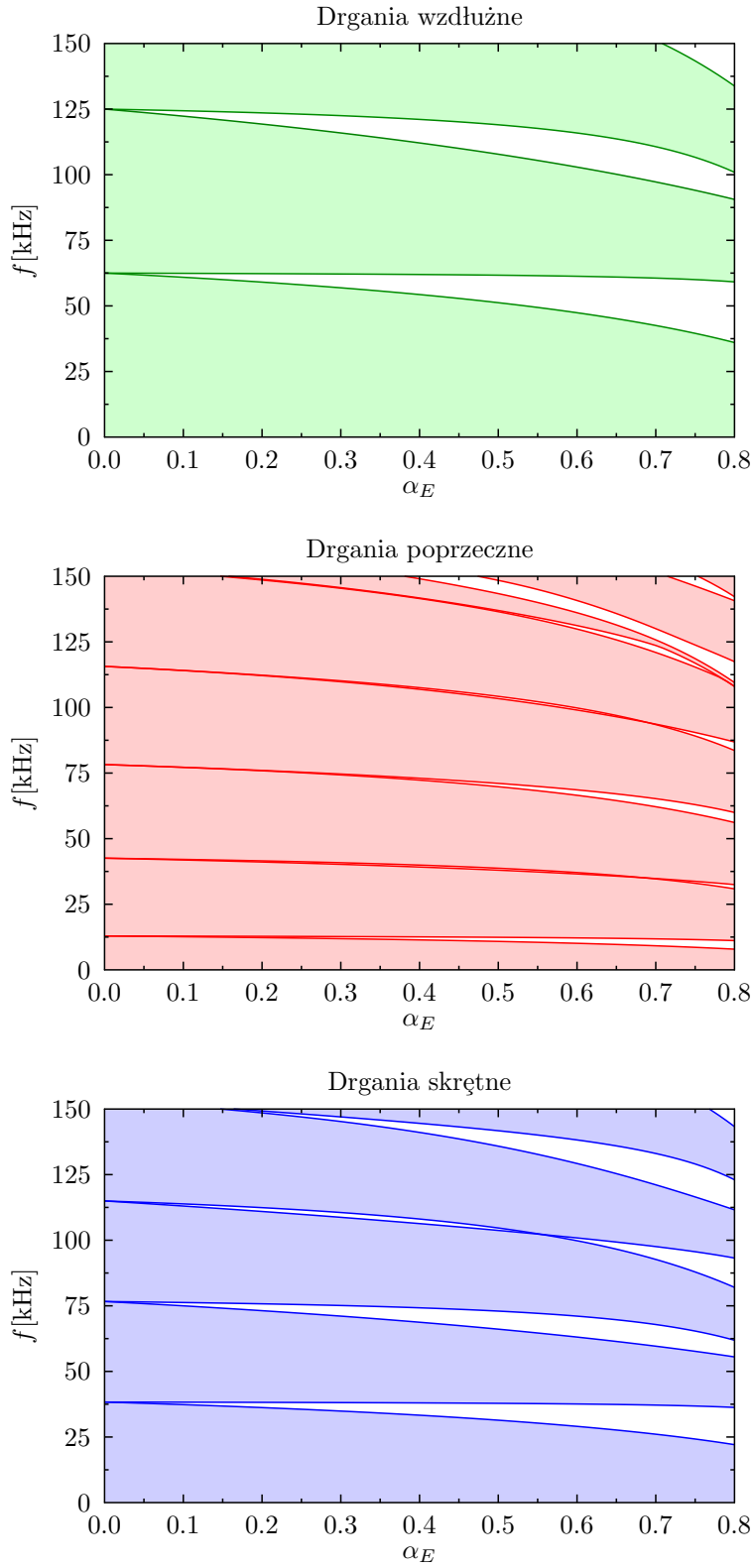


Rysunek 3.26: Zależność szerokości pasma zabronionego od periodyczności

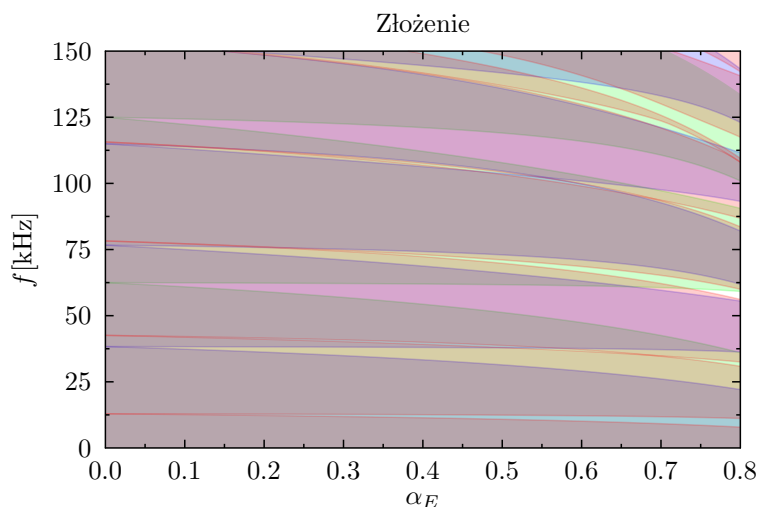
Podsumowanie

Na wykresie 3.27 są przedstawione zależności różnych typów drgań własnych belki o periodyczności $N = 100$ w funkcji intensywności periodyczności, gdzie każdy rodzaj drgań przedstawiony jest inną barwą podstawową, oraz ich złożenie.

Zbierając dane dotyczące belki periodycznej o periodyczności 100 można zaobserwować, że nie posiada ona żadnych obszarów wolnych od jakichkolwiek drgań, co dyskwalifikuje taką strukturę w zastosowaniach jako tłumik drgań. Z powodzeniem może być jednak użyta jako filtr drgań danego typu, np. przepuszczać jedynie drgania giętne, a tłumić wzdłużne i skrętne.



Rysunek 3.27: Widma częstotliwości drgań własnych wzdłużnych, giętnych i skrętnych w zależności od intensywności periodyczności struktur periodycznych ze zmianami modułu Younga o periodyczności $N = 100$



Rysunek 3.28: Złożone widma częstotliwości drgań własnych w zależności od intensywności periodyczności struktur periodycznych ze zmianami modułu Younga o periodyczności $N = 100$

Zmiany pola przekroju poprzecznego

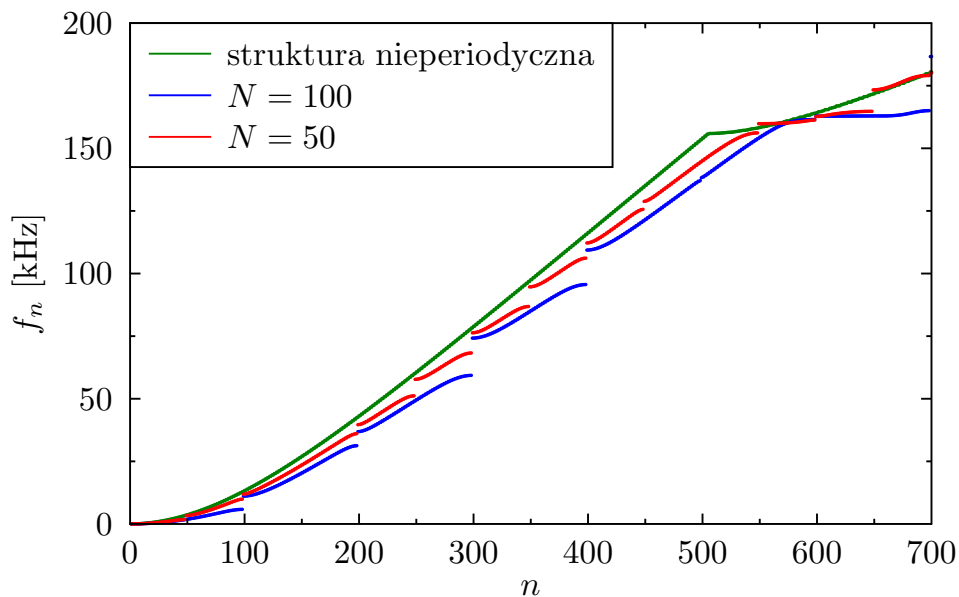
Periodyczne zmiany pola przekroju poprzecznego powodują charakterystyczne dla układów periodycznych zmiany w widmie. Szerokość i częstotliwość przy których występują pasma zabronione zależy przede wszystkim od dwóch wielkości:

- periodyczność, określa liczbę powtarzających się segmentów o innym przekroju poprzecznym w strukturze,
- intensywność periodyczności jest miarą wielkości periodycznych zmian określona jako względna zmiana pola przekroju poprzecznego $\alpha_S = 1 - S/S_0$ gdzie S_0 jest wyjściową wartością pola przekroju poprzecznego a S jest polem przekroju periodycznej modyfikacji.

Parametry materiałowe i geometria również wpływają na widmo, ale tylko jako wielkości skalujące, nie mające wpływu na charakter zmian wywołanych przez sztucznie wprowadzoną periodyczność względem belki nieperiodycznej. Drgania poprzeczne i skrętne są analizowane niezależnie od siebie. W przypadku zmian pola przekroju poprzecznego nie uwzględniono drgań wzdłużnych, ze względu na ograniczenia modelu, który jest od tych zmian niezależny.

Drgania giętne

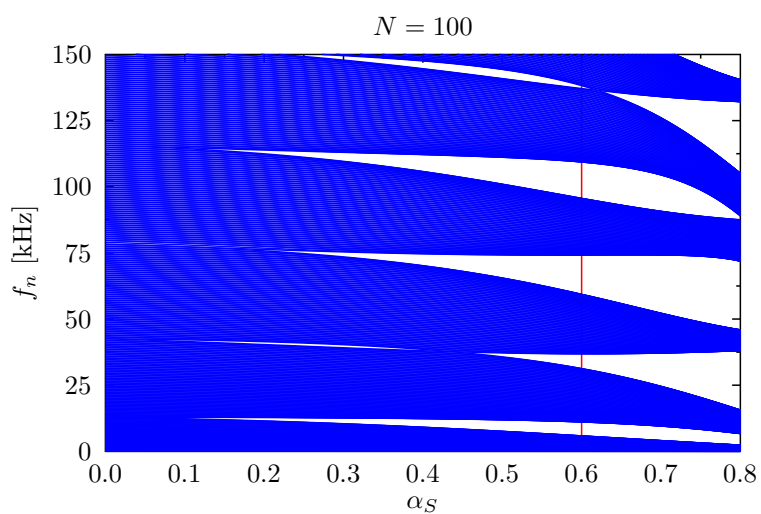
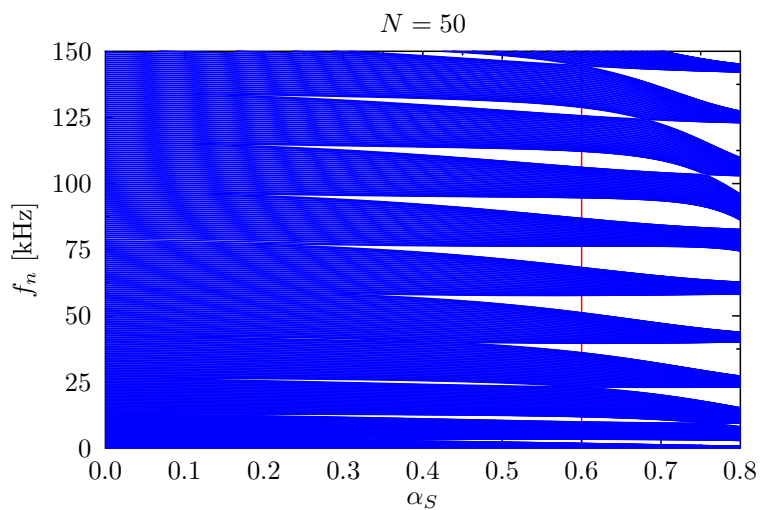
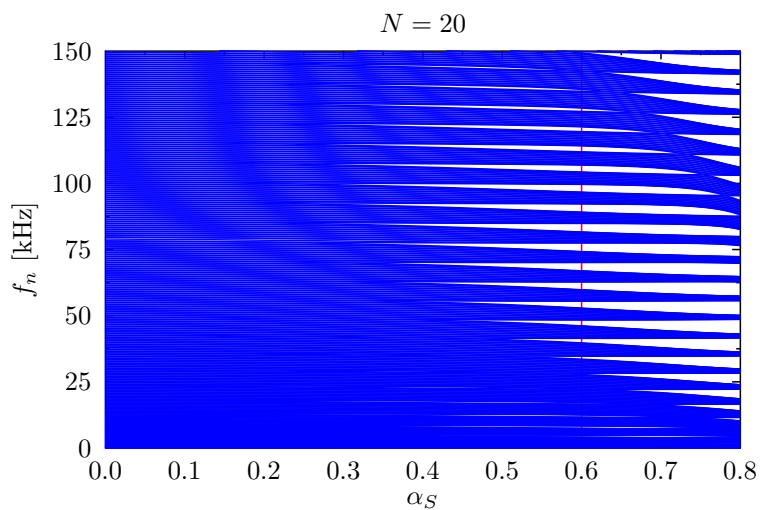
Na rysunku 3.29 zestawiono widma belki nieperiodycznej oraz periodycznych o periodyczności 50 i 100, dla intensywności periodyczności $\alpha_S = 0,6$. Charakterystyczne dla struktur periodycznych nieciągłości w widmie częstotliwości są w tym przypadku wyraźnie widoczne.



Rysunek 3.29: Widma częstotliwości giętych drgań własnych struktury nieperiodycznej i struktur o periodycznościach 50 i 100

Widma periodycznej belki w zależności od intensywności periodyczności α_S przy wybranych periodycznościach zebrano na wykresie 3.30. Szerokość pasm zabronionych w ogólności rośnie wraz z intensywnością periodyczności, są jednak odstępstwa od tej reguły i pojawiają się przewężenia a nawet całkowite zanikanie pasm.

W tabeli 3.14 zestawiono parametry pasm zabronionych wyznaczone przy różnych periodycznościach, gdzie n_P oznacza liczbę, $\overline{\Delta g}$ średnią, a $\max \Delta g$ maksymalną szerokość pasm zabronionych w zakresie do 150 kHz, f_{g1} oznacza częstotliwość która jest dolną granicą pierwszego pasma zabronionego, a $\sum \Delta g$ to suma wszystkich pasm zabronionych w zakresie do 150 kHz.



Rysunek 3.30: Widma częstości giętnych drgań własnych jako funkcja względnej zmiany pola przekroju poprzecznego dla wybranych periodyczności



Tabela 3.14: Zestawienie parametrów pasm zabronionych dla drgań skrętnych struktur ze zmienną wartością pola przekroju poprzecznego $\alpha_S = 0,6$

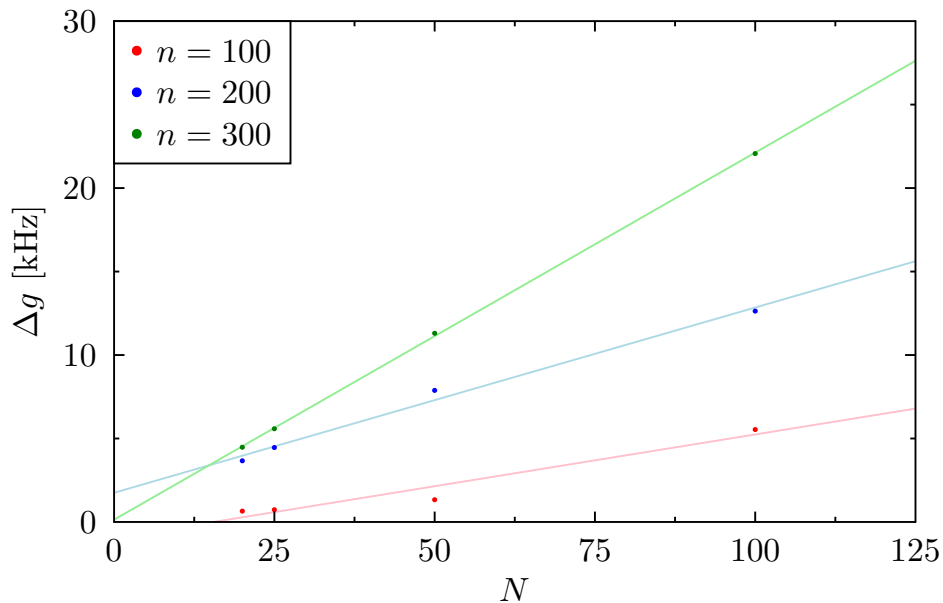
N	n_P	$\overline{\Delta g}$	$\max \Delta g$	$\sum \Delta g$	f_{g_1}
20	25	2,54	4,58	63,50	0,28
25	20	3,07	5,68	61,37	0,39
50	10	5,89	11,30	59,86	1,25
80	7	7,96	17,92	61,83	2,76
100	5	12,42	22,07	62,11	4,05
200	3	33,57	43,56	80,31	13,56

Zebrane dane pokazują ogólne zależności takie same jak w przypadkach opisanych we wcześniejszych sekcjach. Wraz ze wzrostem periodyczności maleje liczba pasm zabronionych ale rośnie ich szerokość i częstotliwości przy których dane pasmo występuje. Sumaryczne tłumienie w zakresie do 150 kHz w przybliżeniu można uznać za stałe, a pewne fluktuacje tej wartości związane są z przebiegiem granicy przedziału wewnątrz pasma zabronionego.

Ale żeby dokładnie przyjrzeć się tej zależności szerokości pasma zabronionego od periodyczności należy wziąć pod uwagę jeszcze częstotliwość, przy której to pasmo występuje. Dlatego możliwe jest tylko sprawdzenie tej zależności dla pasm które występują przy tych samych numerach częstotliwości. Zależność szerokości pasma od periodyczności zebrano na wykresie 3.31. Widoczny jest liniowy charakter tej zależności, dopasowano zatem funkcje liniowe, a parametry dopasowania funkcji w postaci $\Delta g = an + b$ znajdują się w tabeli 3.15

Tabela 3.15: Zestawienie parametrów dopasowanych funkcji liniowych zależność szerokości pasma zabronionego od periodyczności

n	a	b	R^2
100	0,0620	0,9600	0,9999
200	0,1109	1,7502	0,9999
300	0,2198	0,1379	0,9999



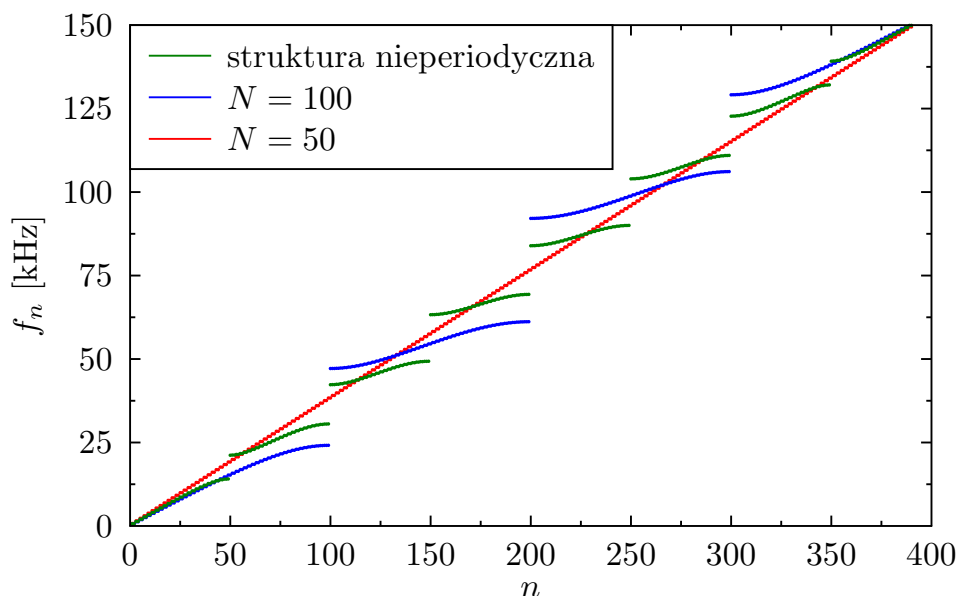
Rysunek 3.31: Zależność szerokości pasma zabronionego od periodyczności

Drgania skrętne

Widma własnych drgań skrętnych periodycznej belki nieperiodycznej i o periodycznościach 50 i 100 oraz intensywności periodyczności $\alpha_S = 0,6$ przedstawia wykres 3.32. Widoczne przerwy przy częstotliwościach o numerach, będących całkowitymi wielokrotnościami periodyczności są obszarami częstotliwości drgań, które nie będą propagowane w belce.

Zależność widma od intensywności periodyczności dla wybranych periodyczności znajdują się na wykresie 3.33. Szerokość pasm zabronionych niezależnie od periodyczności rośnie liniowo wraz z intensywnością periodyczności. Pasma zabronione są szerokie i stanowią dużą część widma w badanym zakresie.

Wielkości opisujące pasma zabronione w zależności od periodyczności zebrano w tabeli 3.16, gdzie n_P oznacza liczbę, $\overline{\Delta g}$ średnią, a $\max \Delta g$ maksymalną szerokość pasm zabronionych w zakresie do 150kHz , f_{g_1} oznacza częstotliwość, która jest dolną granicą pierwszego pasma zabronionego, a $\sum \Delta g$ to sumaryczne tłumienie w zakresie do 150 kHz.



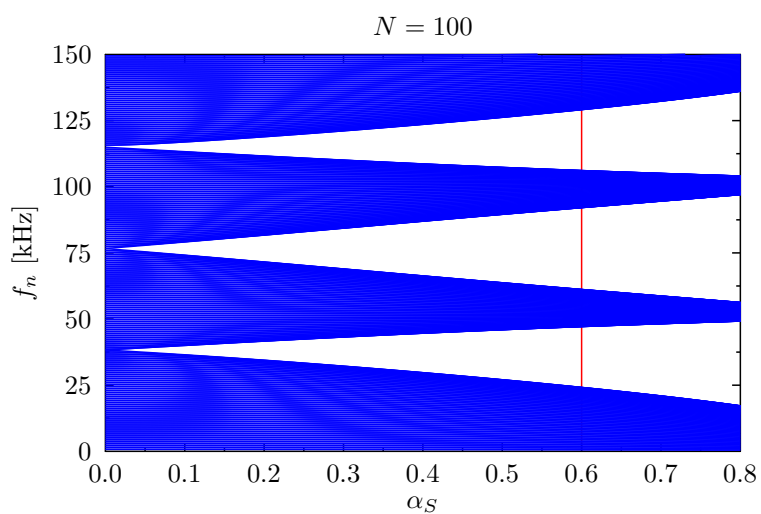
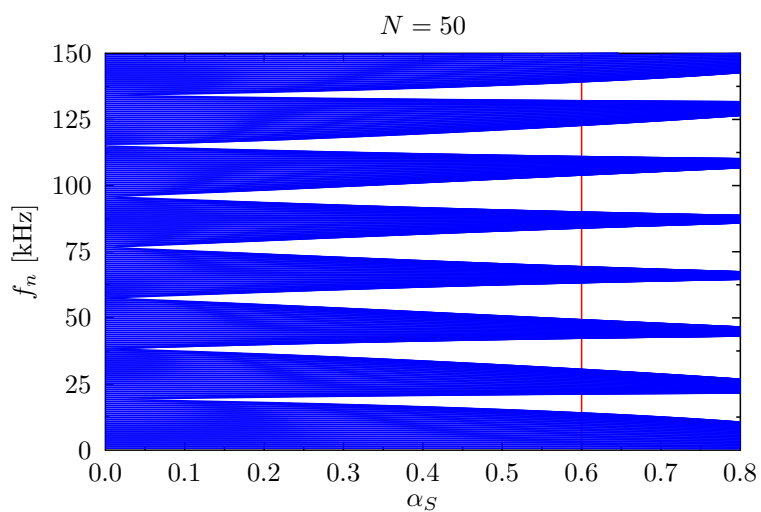
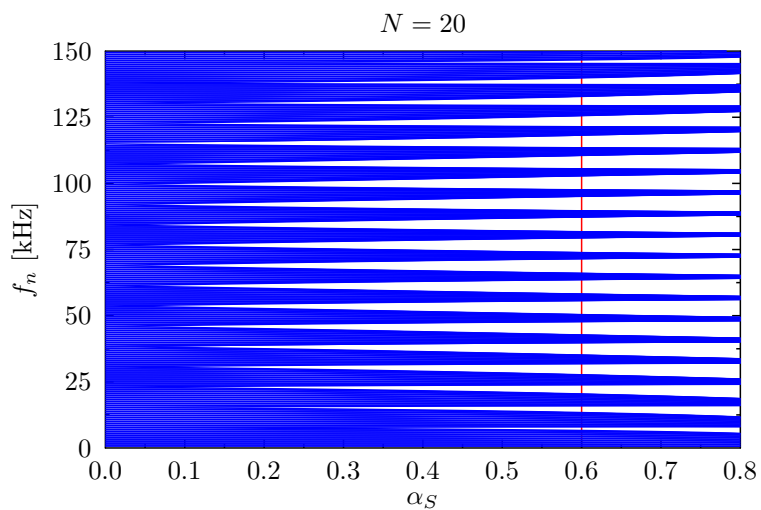
Rysunek 3.32: Widma częstotliwości skrętnych drgań własnych struktury nieperiodycznej i struktury o periodyczności 50 i 100

Tabela 3.16: zestawienie parametrów pasm zabronionych dla drgań skrętnych układu ze zmienną wartością modułu Younga o wartości $1 - S/S_0 = 0,6$

N	n_P	$\overline{\Delta g}$	$\max \Delta g$	$\sum \Delta g$	f_{g_1}
20	19	5,33	5,65	83,35	6,61
25	15	6,66	7,09	82,00	7,94
50	7	16,08	14,58	80,38	14,09
80	4	19,62	23,39	78,48	20,31
100	3	25,66	30,94	76,98	24,16
200	1	65,69	65,69	65,69	43,80

Liczba pasm spada wraz ze wzrostem periodyczności, a szerokość i położenie w widmie pojedynczego pasma rośnie. Sumaryczne tłumienie w zakresie do 150 kHz spada wraz ze wzrostem periodyczności.

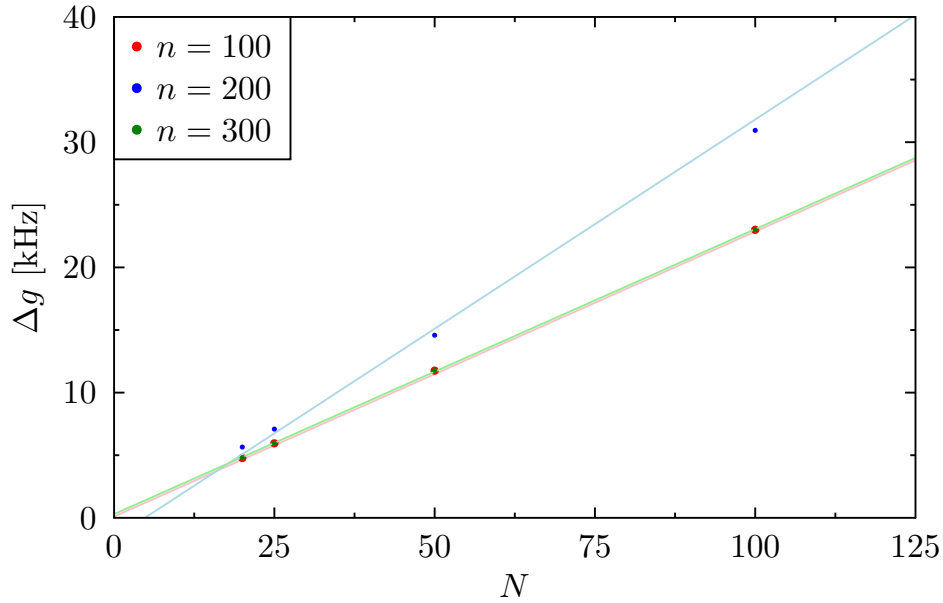
Zależność szerokości pasm występujących przy częstotliwościach o numerach 100, 200 i 300 przedstawia wykres 3.34. Widoczny jest liniowy charakter tej zależności, który wynika ze stosunku długości fali do wymiarów komórki elementarnej struktury



Rysunek 3.33: Widma częstości skrętnych drgań własnych w funkcji intensywności periodyczności dla wybranych periodyczności



periodycznej. Parametry dopasowania funkcją liniową w postaci $\Delta g = an + b$ są zebrane w tabeli 3.17.



Rysunek 3.34: Zależność szerokości pasma zabronionego od periodyczności

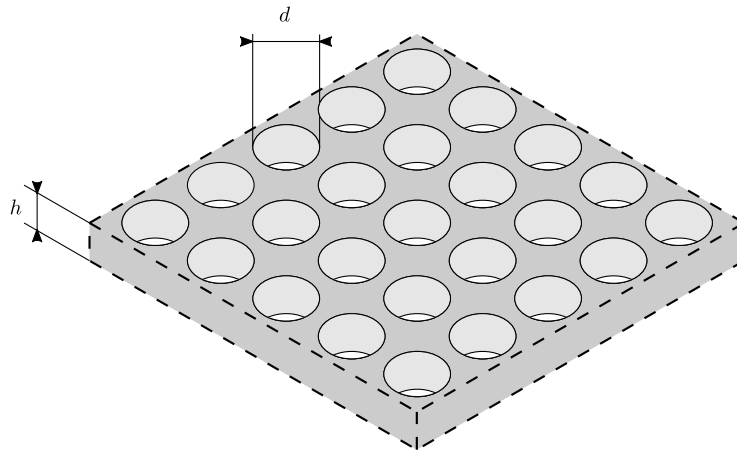
Tabela 3.17: Zestawienie parametrów dopasowanych funkcji liniowych zależności szerokości pasma zabronionego od periodyczności

n	a	b	R^2
100	0,2276	-)0,2008	0,9999
200	0,3341	-1,6084	0,9999
300	0,2276	-)0,2952	0,9999

3.2 Dwuwymiarowe struktury periodyczne

Badanymi układami dwuwymiarowymi były tarcza i płyta obciążona siłami wzdłużnymi i poprzecznymi. Obydwa przypadki rozpatrywane były niezależnie.

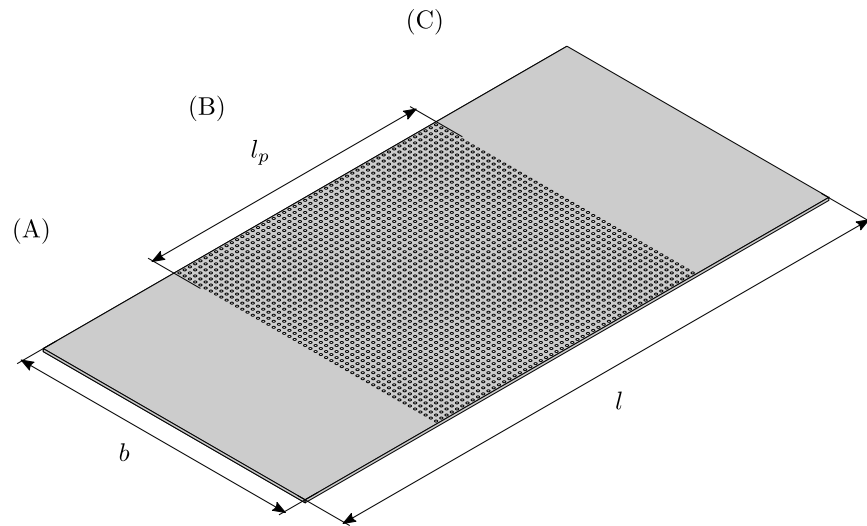
Do wyznaczenia częstotliwości własnych za pomocą metody redukcji Blocha analizowano aluminiową tarczę i płytę o wymiarach $l = 0,5$ m na $b = 0,5$ m i grubości $h = 5$ mm. W płycie było 2500 okrągłych otworów o średnicy $d = 8$ mm, każdy rozłożonych równomiernie na sieci kwadratowej, schemat przedstawiony na rysunku 3.35. Z racji na stosowaną metodę zastosowane są periodyczne warunki brzegowe. Parametry materiałowe aluminium zastosowane do obliczeń to: moduł Younga $E = 67.5$ GPa, gęstość $\rho = 2700$ kg/m³, liczba Poissona $\nu = 0.33$.



Rysunek 3.35: Schemat fragmentu dwuwymiarowej struktury periodycznej

Do symulacji propagacji fal w strukturze należy wziąć pod uwagę, że struktura musi mieć skończone wymiary. Zastosowany układ jest aluminiową płytą składającą się z trzech obszarów jak przedstawiono na rysunku 3.36. Cała płyta ma wymiary $b = 0.5$ m, $l = 1$ m i wysokości $h = 5$ mm i jest podzielona na trzy obszary. Pierwszy obszar (A) o długości $0,25$ m jest obszarem od strony wymuszenia, pozwala na rozwinięcie się fali przed wejściem w strukturę periodyczną, co ułatwia interpretację wyników. Drugi obszar (B) o długości $l_p = 0,5$ m stanowi badaną strukturę periodyczną, która składa się z 2500 otworów o średnicy $d = 8$ mm, położonych równomiernie na sieci kwadratowej. Trzeci obszar (C) nieperiodyczny o długości $0,25$

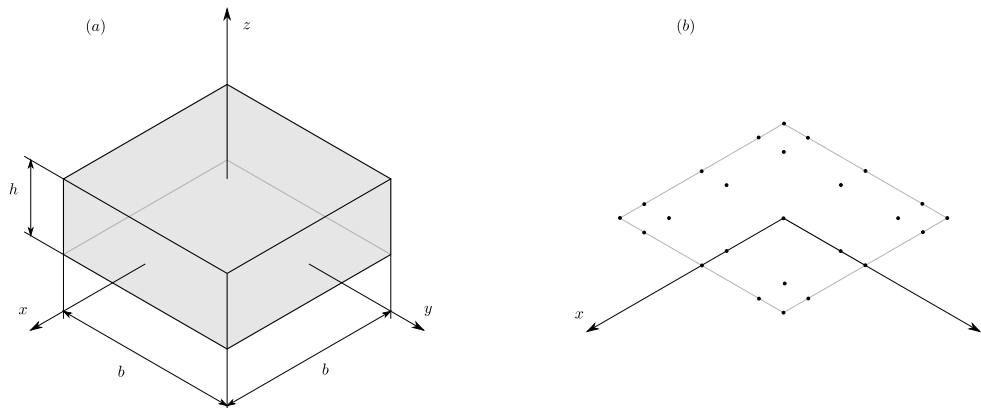
m pozwala określić właściwości fali która przeszła przez strukturę periodyczną. Do obliczeń przyjęto tłumienie materiału na poziomie $\eta = 10^{-4}$.



Rysunek 3.36: Schemat periodycznej płyty

3.2.1 Model numeryczny

Analiza drgań wzdłużnych i poprzecznych była prowadzona niezależnie od siebie, dlatego nie wzięto pod uwagę ewentualnych sprzężeń pomiędzy nimi. Obliczenia były prowadzone w oparciu o element skończony, którego schemat przedstawiony jest na rysunku 3.37, o wymiarach $b = 1$ cm, $h = 0,5$ cm.



Rysunek 3.37: Schemat dwuwymiarowego elementu skończonego (a) schemat rozkładu węzłów elementu skończonego (b)

Dla drgań wzdłużnych macierz sztywności i masy opracowano na podstawie standardowej dwumodowej teorii tarcz . Do obliczeń przyjęto pole przemieszczeń [82]:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = \phi_0(x, y) \\ u_y(x, y, z) = \psi_0(x, y) \end{cases} \quad (3.5)$$

i pole odkształceń:

$$\begin{cases} \epsilon_x(x, y, z) = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} \\ \epsilon_y(x, y, z) = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} \\ \gamma_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} \end{cases} \quad (3.6)$$

W przypadku drgań poprzecznych pole przemieszczeń było oparte na teorii Kirchhoffa [82] w formie:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = z\phi_1(x, y) \\ u_y(x, y, z) = z\psi_1(x, y) \\ u_z(x, y, z) = \theta_0(x, y) \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\phi_1(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x}\theta_0(x, y)$$

$$\psi_1(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y}\theta_0(x, y)$$

natomiast pole odkształceń:

$$\begin{cases} \epsilon_x(x, y, z) = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \theta_0(x,y)}{\partial x^2} \\ \epsilon_y(x, y, z) = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \theta_0(x,y)}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -2\frac{\partial^2 \theta_0(x,y)}{\partial x \partial y} z \end{cases} \quad (3.8)$$

Do obliczeń częstotliwości drgań własnych za pomocą metody redukcji Blocha przyjęto komórkę elementarną, będącą jednym spektralnym elementem skończonym. Cała struktura była płytą o wymiarach $b = 0,5$ m i $l = 0,5$ m i składała się z 2500

komórek elementarnych rozłożonych równomiernie w sieci kwadratowej. Ze względu na obraną metodę przyjęte zostały okresowe warunki brzegowe.

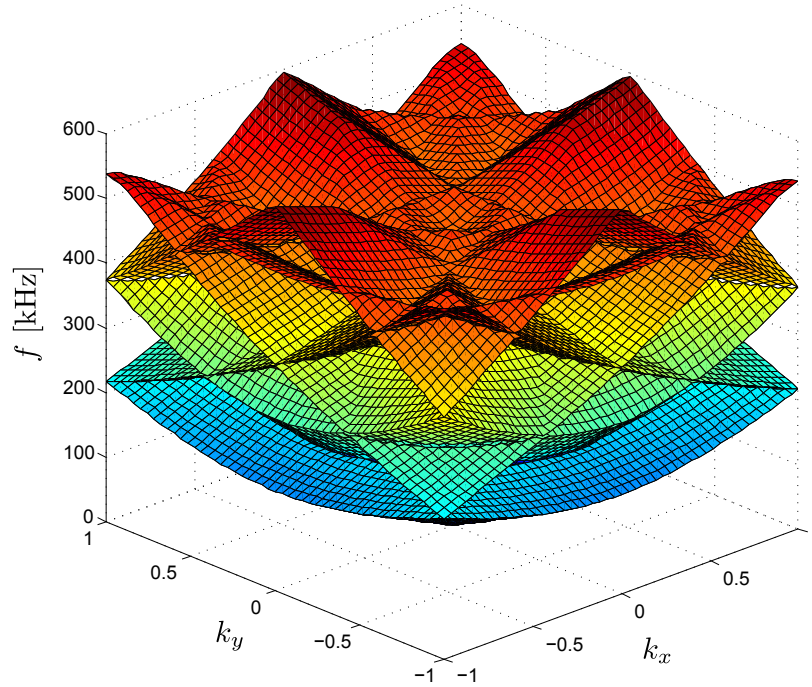
Do symulacji propagacji fal przyjęto płytę opisaną w paragrafie 3.2. Obszary pierwszy i trzeci o wymiarach $b = 0,5$ m i $l = 0,25$ m, składały się z 1250 spektralnych elementów skończonych każdy, natomiast obszar okresowy o wymiarach $b = 0,5$ m i $l_p = 0,5$ m składał się z 2500 spektralnych elementów skończonych z otworami. Otwory były modelowane poprzez odjęcie objętości otworu z dziedziny całkowania, tak samo jak miało to miejsce przypadku struktur jednowymiarowych opisanych w paragrafie 3.1.1.

3.2.2 Drgania wzdłużne

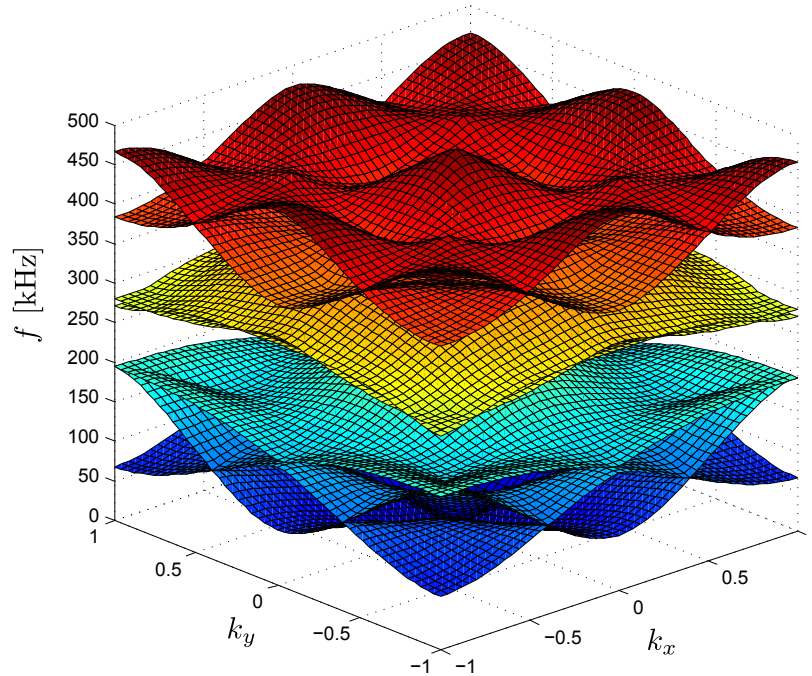
Drgania własne

Wyniki symulacji drgań własnych uzyskane dla układów dwuwymiarowych, ze względu na ich złożoność, wygodniej jest interpretować w układzie strefy zredukowanej, czyli rozpatrując tylko pierwszą strefę Brillouina. W przypadku tarczy, czyli układzie odniesienia, w którym nie występuje żadna okresowość, pierwsza strefa Brillouina ma tylko sens matematyczny, ale pozwala na proste porównanie ze strukturą okresową. Obraz zależności częstotliwości propagacji fal od ich wektorów falowych dla tarczy i tarczy okresowej przedstawione są na wykresach 3.38 i 3.39

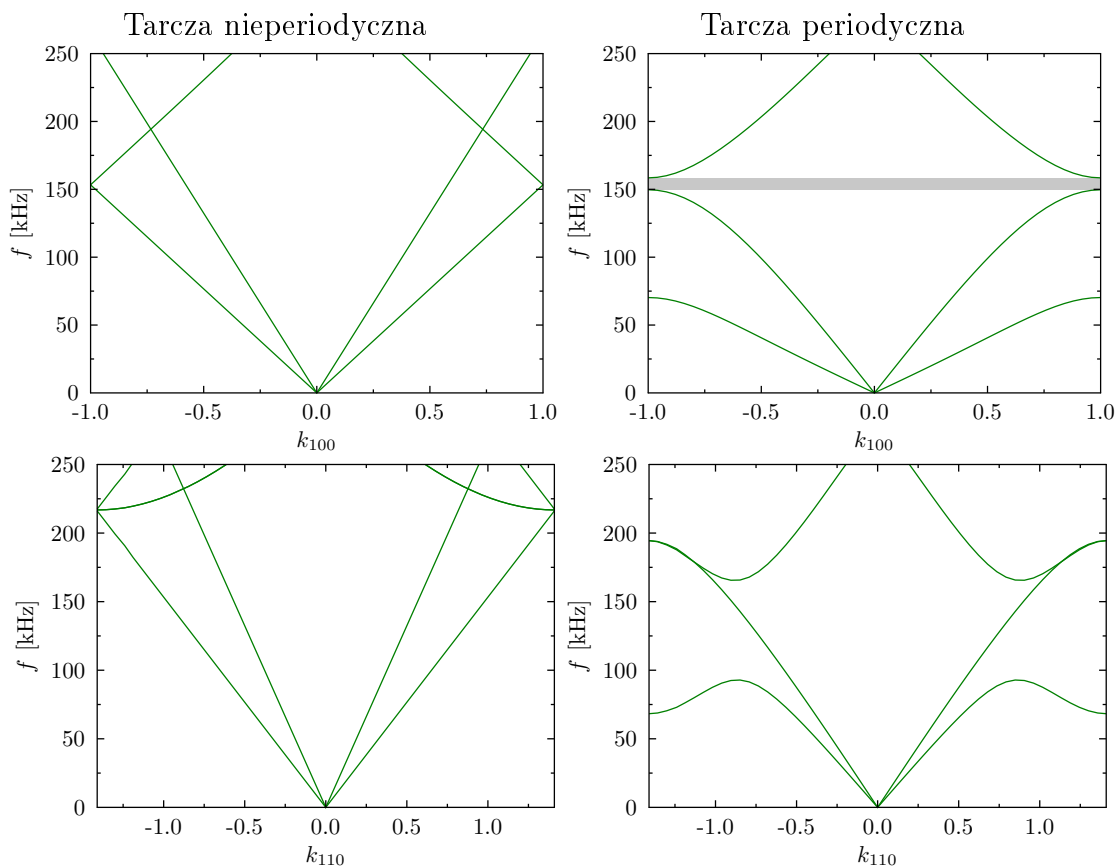
Każda płaszczyzna przedstawiona na wykresach 3.38 i 3.39 reprezentuje mody drgań i odpowiadające im wektory falowe w każdym kierunku. Ze względu na czytelność tych wyników dużo łatwiej jest interpretować przekroje przez powyższe wykresy, zarówno w płaszczyźnie poziomej, czyli możliwe kierunki propagacji fal przy ustalonej częstotliwości, jaki i płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez punkt $(0, 0)$, czyli dostępne częstotliwości dla wybranych kierunków propagacji fal.



Rysunek 3.38: Zależność częstotliwości drgań własnych od wektorów falowych w pierwszej strefie Brillouina dla tarczy nieperiodycznej ($b = 0,5$ m i $l = 0,5$ m)



Rysunek 3.39: Zależność częstotliwości drgań własnych od wektorów falowych w pierwszej strefie Brillouina dla tarczy periodycznej ($b = 0,5$ m i $l = 0,5$ m) z otworami ułożonymi równomiernie na sieci kwadratowej, liczba otworów wynosi 2500

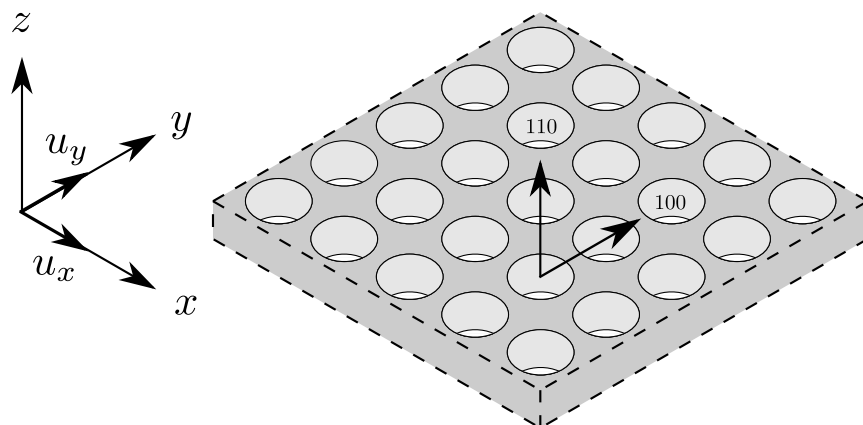


Rysunek 3.40: Pierwsza strefa Brillouina, przekroje w kierunkach 100 i 110 tarczy nieperiodycznej o wymiarach $b = 0,5$ m i $l = 0,5$ m oraz tarczy periodycznej o tych samych wymiarach z 2500 otworów w ułożonych równomiernie na sieci kwadratowej

Na wykresie 3.40 przedstawione są zależności częstotliwości od długości wektora falowego w kierunku 100, czyli kierunku wzdłuż boku kwadratu w sieci kwadratowej i 110 czyli kierunku wzdłuż przekątnej kwadratu w komórce elementarnej, kierunki te pokazane są na rysunku 3.41. W odniesieniu do struktury, która nie jest periodyczna kierunki można obrać dowolnie, w przypadku przeprowadzonych obliczeń numerycznych są narzucone przez metodę.

Na wykresach po lewej stronie znajdują się charakterystyki tarczy. Pomimo, że układ taki jest izotropowy, występują pewne różnice w zależności od kierunków. Jest to spowodowane podziałem na kwadratowe komórki elementarne, wymaganym przez model numeryczny, co powoduje, że kierunek 110 reprezentuje większy zakres wektorów falowych (od 0 do $\sqrt{2}$) niż kierunek 100. Po prawej stronie znajdują charakterystyki struktury periodycznej odpowiednio w kierunkach 100 i 110. Odbiegają one

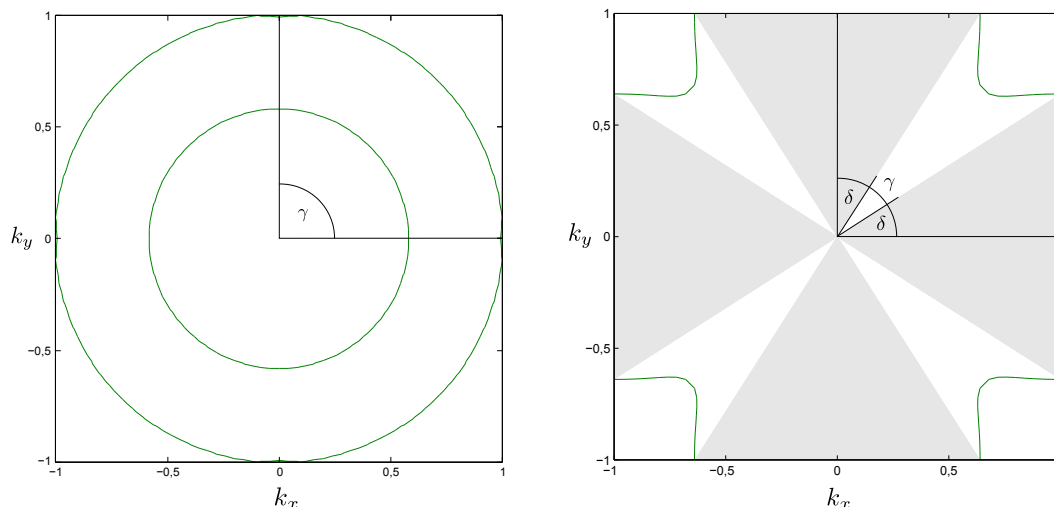




Rysunek 3.41: Schemat fragmentu periodycznej tarczy z zaznaczonymi kierunkami przemieszczeń, oraz kierunkami propagacji fal

wyraźnie od wyników uzyskanych dla tarczy oraz znacząco różnią się między sobą, co jest spowodowane różnymi odległościami periodycznie powtarzających się otworów w tych kierunkach. Pełne pasmo zabronione powinno występować w każdym kierunku, jednak przy przyjętej strukturze periodycznej nie udało się znaleźć takich wielkości parametrów otworów i sieci, aby takie pasmo powstało. Jednakże w kierunku 100 powstaje pasmo zabronione w okolicy 154 kHz, które nie pojawia się w ogóle na kierunku 110.

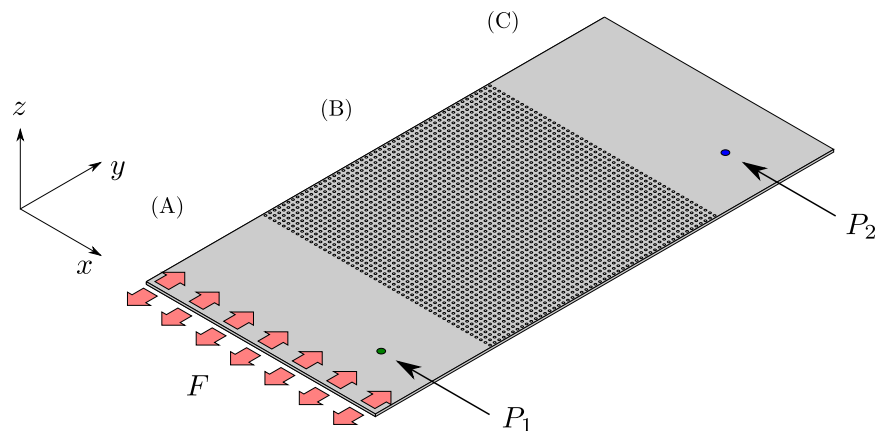
Dokładniejszy obraz pasma zabronionego pokazany jest na wykresie 3.42. Linie o stałych częstotliwościach pokazują jakie wektory falowe, których początek znajduje się w środku układu współrzędnych, a koniec na danej linii, są dozwolone, czyli w jakich kierunkach propagacja może zachodzić. Jeśli mówimy o tarczy izotropowej przy każdej częstotliwości taki przekrój będzie przedstawiał okręgi. Struktura periodyczna charakteryzuje się różnymi właściwościami propagacji fal od kierunku, a w przypadku wskazanej wcześniej częstotliwości 154 kHz również pasmo zabronione dla jednego kierunku. Zacieniony obszar na wykresie 3.42 obrazuje kierunki w jakim fale propagowane być nie mogą. Wycinek kąta, pod którym tak się dzieje to $2\delta = 65,24^\circ$ co stanowi 72,5% kąta prostego. Tak duży kąt sprawia, że pasmo zabronione stanowi tak naprawdę barierę dla fal poruszających się w kierunku 100. Zaznaczony na wykresach kąt γ jest wycinkiem kąta określającym możliwe kierunki propagacji fali.



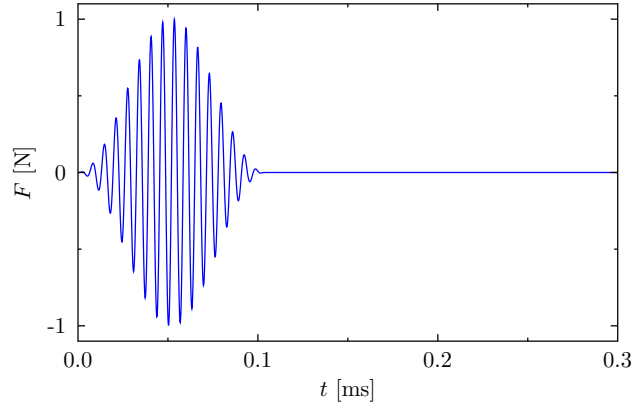
Rysunek 3.42: Pierwsza strefa Brillouina, linie o stałej częstotliwości 154 kHz tarczy nieperiodycznej o wymiarach $b = 0,5$ m i $l = 0,5$ m oraz tarczy periodycznej o tych samych wymiarach z 2500 otworów w ułożonych równomiernie na sieci kwadratowej

Propagacja fali

Tarcza opisana w paragrafie 3.2 została pobudzona do drgań podłużnych w kierunku y na całej długości krawędzi. Siła wymuszająca o wartości $F = 1$ N i częstotliwości 154 kHz była modulowana za pomocą okna Hanninga. Sygnał wymuszający pokazany jest na wykresie 3.44. Wybrana częstotliwość znajduje się w paśmie zabronionym w kierunku wzdłuż stałej sieci struktury. Schemat pobudzenia przedstawiony jest na rysunku 3.43.



Rysunek 3.43: Schemat wymuszenia

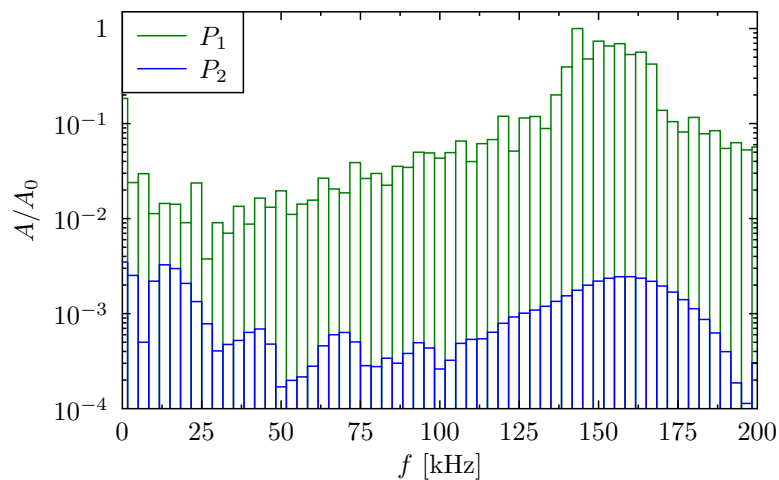
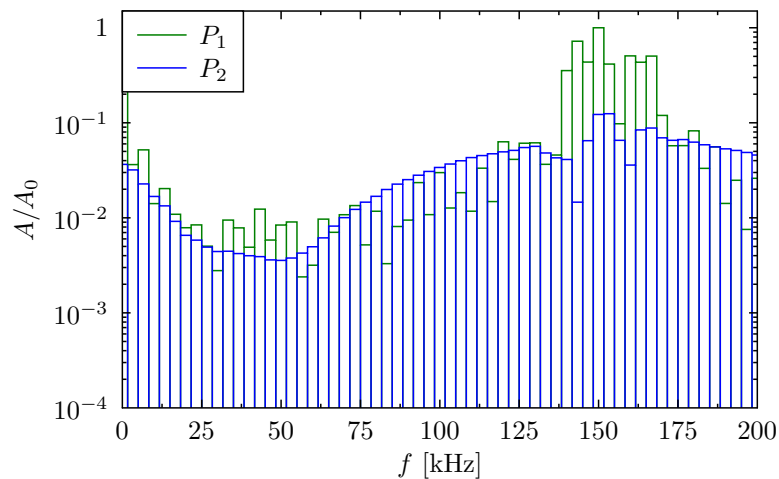


Rysunek 3.44: Sygnał wymuszający o częstotliwości 154 kHz, składający się z 16 impulsów sinusoidalnych modulowanych oknem Hanninga

Obliczenia prowadzono przy wykorzystaniu TD-SFEM i opracowanego tarczowego elementu skończonego. Rozwiązania równań ruchu wykorzystano metodę Newmarka [82], dla wartości parametrów $\alpha = 0,25$ i $\beta = 0,5$. Na rysunku 3.46 przedstawiony jest rozkład amplitud tarczy oraz tarczy periodycznej w każdym punkcie w wybranych chwilach. Przemieszczenia zdefiniowano jako $A = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$.

Amplitudę drgań wyznaczono w punktach oznaczonych na rysunku 3.43 jako P_1 , czyli punkcie, do którego fala dociera przed przejściem przez strukturę periodyczną i P_2 czyli punkt, do którego fala dochodzi po przejściu przez strukturę periodyczną.

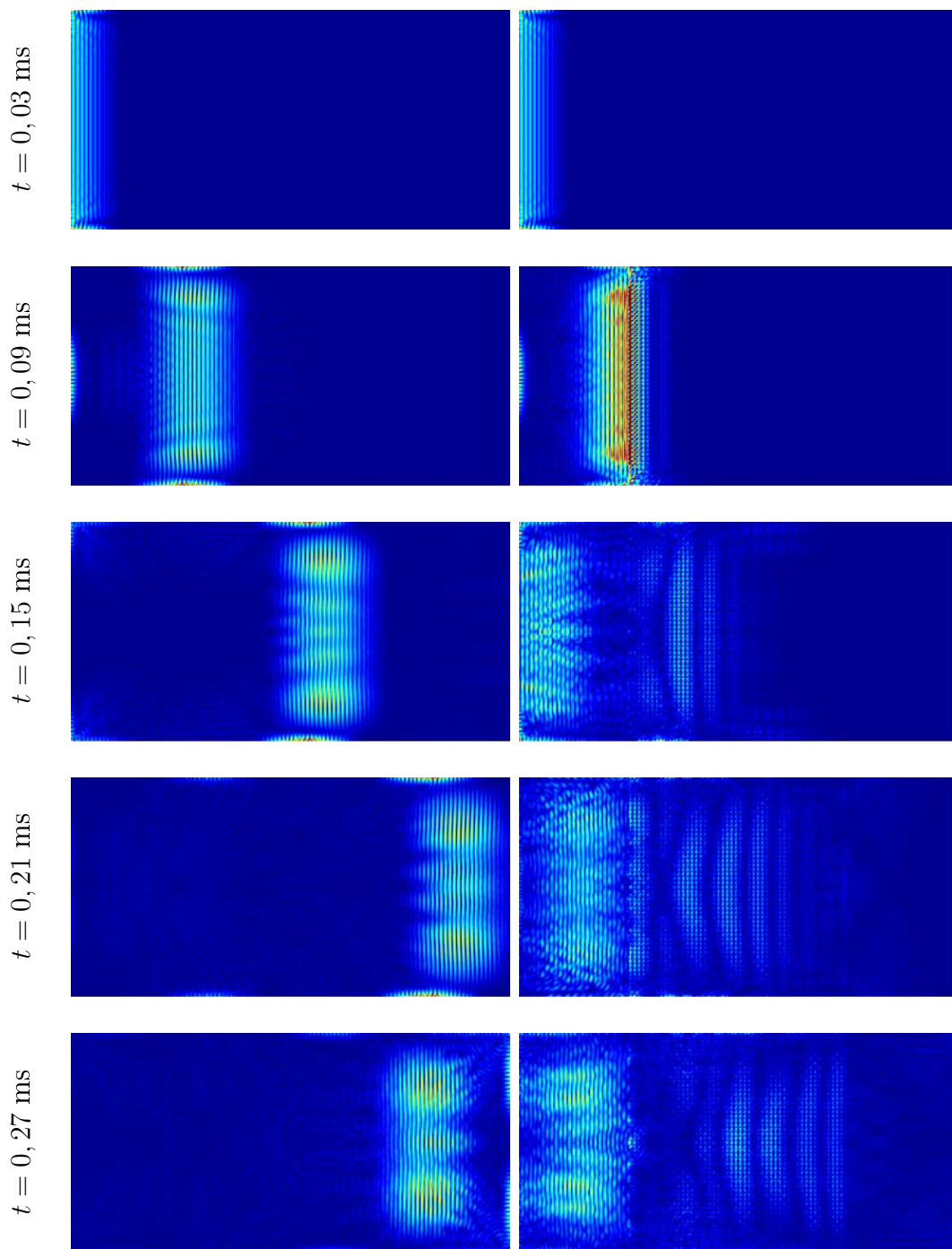
Gdy bierzemy pod uwagę tarczę fala może propagować swobodnie wzdłuż kierunku y , a amplituda drgań zmienia się tylko ze względu na tłumienie materiału. Struktura periodyczna w środku tarczy sprawia, że fala nie może propagować z kierunku y , a jedynie w kierunku skośnym do sieci. Powoduje to uwięzienie paczki falowej na obszarze wejściowym (A). Jedynie niewielkie przenikanie fali przez strukturę periodyczną (B) związane jest ze możliwym skośnym kierunkiem propagacji. Widmo fali przed i po przejściu przez strukturę periodyczną przedstawia wykres 3.45. Amplituda fali o częstotliwości wymuszającej po przejściu przez strukturę periodyczną zmniejszyła się o trzy rzędy wielkości.



Rysunek 3.45: Widma mocy drgań podłużnych membrany pobudzonej na brzegu paczką falową o częstotliwości 154kHz, zmierzone w punktach P_1 - przed przejściem przez strukturę periodyczną (zielone) i P_2 - po przejściu przez strukturę periodyczną (niebieskie), tarczy nieperiodycznej (górze) i tarczy z obszarem periodycznym (dół)

Tarcza nieperiodyczna

Tarcza periodyczna

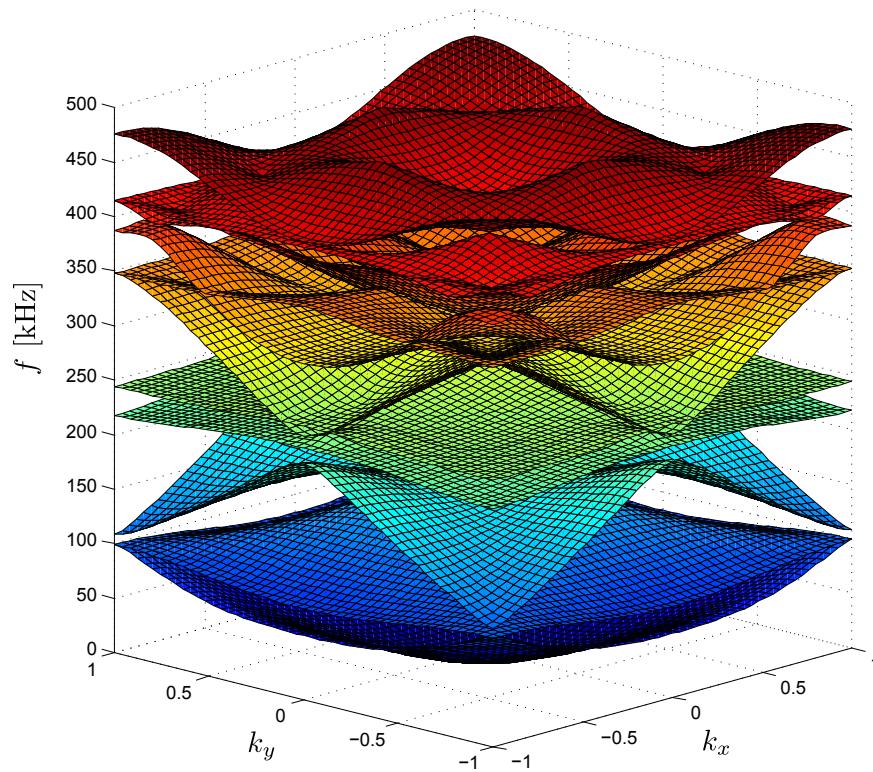


Rysunek 3.46: Propagacja fali wzdłużnej o częstotliwości 154 kHz w tarczy nieperiodycznej (lewa strona) i tarczy ze strukturą periodyczną (prawa strona)

3.2.3 Drgania poprzeczne

Drgania własne

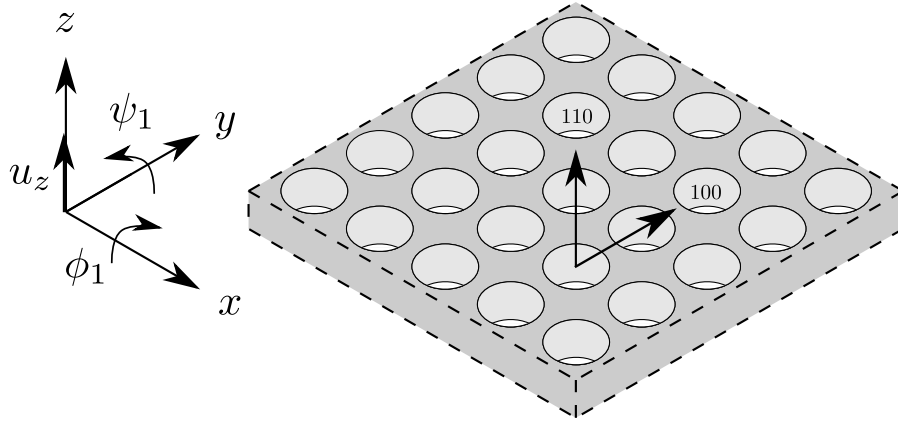
Zgodnie z teorią opisaną w rozdziale 2.3 wszystkie możliwe zależności częstotliwości drgań od wektorów falowych występujące w strukturze periodycznej znajdują się w pierwszej strefie Brillouina. Jeśli rozpatrujemy strukturę dwuwymiarową pierwsza strefa Brillouina jest również dwuwymiarowa, a zależności pomiędzy częstotliwościami a wektorami falowymi przyjmują postać płaszczyzn. Każdy punkt dowolnej płaszczyzny reprezentuje pojedynczą postać drgań własnych struktury. Zależność częstotliwości od wektorów falowych w strukturze opisanej na początku paragrafu 3.2 przedstawiona jest na wykresie 3.47.



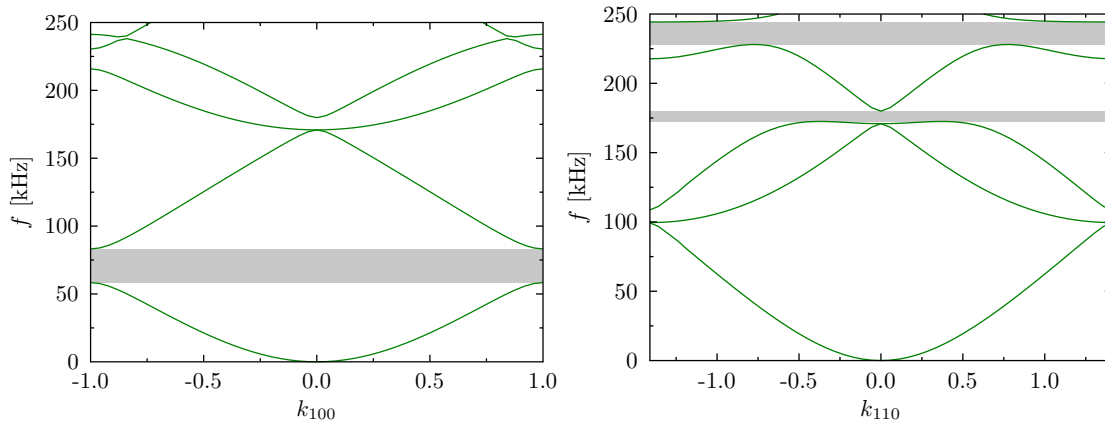
Rysunek 3.47: Zależność częstotliwości drgań własnych od wektorów falowych w pierwszej strefie Brillouina dla płyty periodycznej ($b = 0,5$ m i $l = 0,5$ m) z otworami ułożonymi równomiernie na sieci kwadratowej, liczba otworów wynosi 2500

W celu interpretacji wyników łatwiej się posługiwać przekrojami wykresu 3.47 w charakterystycznych kierunkach, a więc kierunku wzdłuż wektorów sieciowych, w sieci kwadratowej kierunek wzdłuż boku kwadratu opisany jako (100), oraz kie-

runek wzdłuż przekątnej kwadratu opisany jako (110), oznaczonymi na rysunku 3.48. Zależności częstotliwości od wartości wektora falowego w odpowiednim kierunku przedstawiono na rysunku 3.49.



Rysunek 3.48: Schemat fragmentu periodycznej płyty z zaznaczonymi kierunkami przemieszczeń, oraz kierunkami propagacji fal

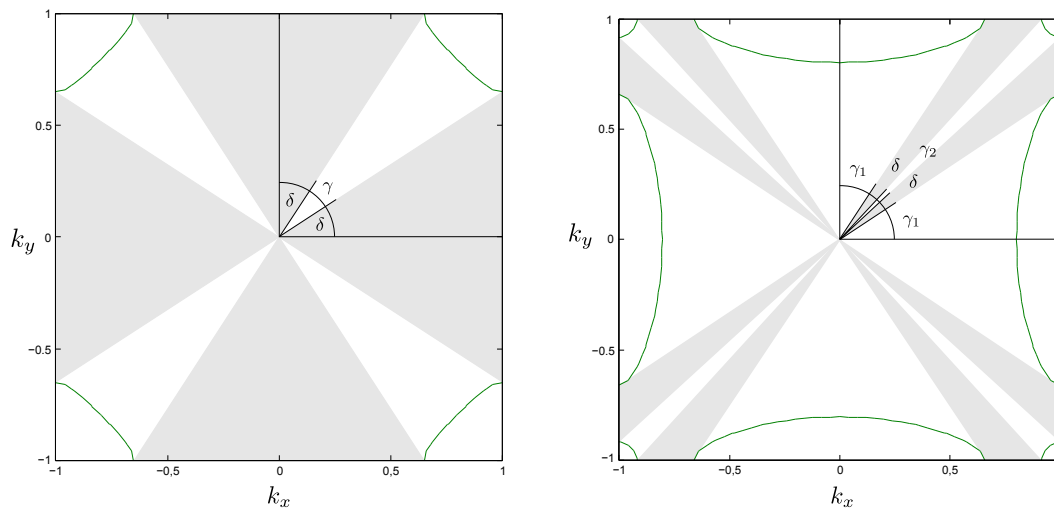


Rysunek 3.49: Pierwsza strefa Brillouina, przekroje w kierunkach 100 i 110 płyty o rozmiarach $b = 0,5$ m i $l = 0,5$ m z 2500 otworów w ułożonych równomiernie na sieci kwadratowej

Na wykresach szarym kolorem zaznaczone są pasma częstotliwości zabronione dla danego kierunku. Niestety w zakresie, w którym wielkości otworów w stosunku do wielkości komórki elementarnej nie prowadziłyby do znacznej zmiany sztywności struktury, nie udało się uzyskać pasma zabronionego niezależnego od kierunku propagacji, jednakże sama kierunkowość tego zjawiska daje możliwości potencjalnego zastosowania jako bariery tłumiącej fale płaskie.

Przyglądając się pierwszej strefie Brillouina mając na uwadze tylko wybrane częstotliwości, można określić możliwe kierunki propagacji fal, oraz możliwe zakresy tłumienia.

Przy ustalonej częstotliwości, można pokazać jakie wektory falowe są dla danej częstotliwości dozwolone, czyli można określić kierunki propagacji fal względem sieci. Na rysunku 3.50 przedstawiono odpowiednio wektory falowe dla częstotliwości 75 kHz, czyli pasmo zabronione kierunku 100 i 95 kHz, czyli pasmo pasmo dozwolone zarówno w kierunku 100 jak i 110.



Rysunek 3.50: Pierwsza strefa Brillouina, linie o stałej częstotliwości 75 kHz i 95 kHz, drgania własne płyty o rozmiarach $b = 0,5$ m i $l = 0,5$ m z 2500 otworów w ułożonych równomiernie na sieci kwadratowej

Przy ustalonych częstotliwościach można określić kierunki, w jakich dozwolona jest propagacja fali. Na wykresie 3.50 zaznaczone zielone linie reprezentują wektory falowe, które przy zadanej częstotliwości są dozwolone. Obszar zaznaczony szarym kolorem oznacza, że w danych kierunkach propagacja nie może zachodzić. Kierunki pod jakimi propagacja nie może zachodzić są opisane jako δ . Sumując wszystkie kąty δ otrzymana wartość określa wycinek kąta, w którym propagacja nie jest możliwa. Dla częstotliwości 75 kHz $\sum_i \delta_i = 66,37^\circ$ co stanowi 73% kąta prostego, a dla częstotliwości 95 kHz $\sum_i \delta_i = 18,25^\circ$ co stanowi 20% kąta prostego.

Pomimo braku pasma zabronionego w każdym kierunku, pasmo w pobliżu częstotliwości 75 kHz jest szerokie zarówno w dziedzinie częstotliwości, jak i w zakresie

kątów które obejmuje. Pasma takie dość dobrze nadaje się do tłumienia fal propagujących w kierunku 100.

Propagacja fal

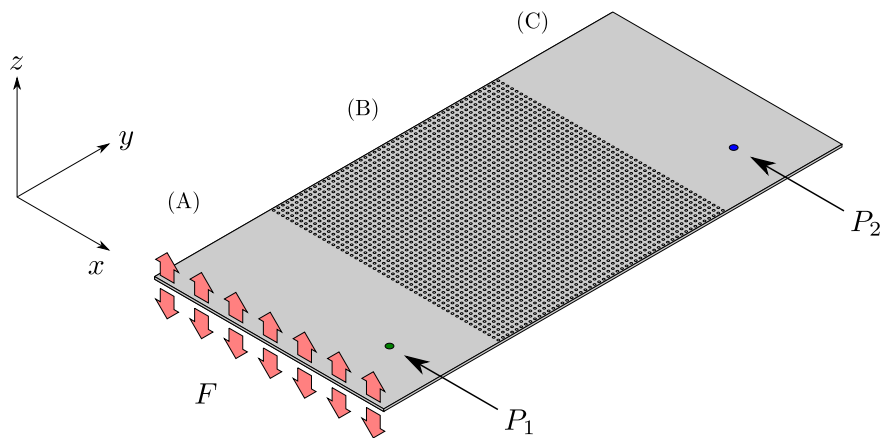
Obliczenia prowadzono przy wykorzystaniu TD-SFEM i opracowanego płyto-
wego elementu skończonego. Do rozwiązania równań ruchu wykorzystano metodę
Newmarka [82], dla wartości parametrów $\alpha = 0,25$ i $\beta = 0,5$. Symulacja przepro-
wadzona dla czasu 0.9 ms, czyli czasu na propagację fali w płycie od jednego brzegu
do drugiego i z powrotem. Przedstawione są wyniki symulacji dotyczące propagacji
fal poprzecznych o częstotliwościach 75 kHz i 95 kHz, które znajdują się odpowiednio
w paśmie zabronionym dla kierunku 100 i w paśmie dozwolonym zarówno dla kierunku
100, jak i 110. Symulacje przeprowadzono zarówno w strukturach periodycznych, jak
i nieperiodycznych.

Płyta została pobudzona do drgań poprzecznych z siłą $F = 1$ N wzdłuż jednego
brzegu zgodnie ze schematem pokazanym na rysunku 3.51. Przyłożone wymuszenie
periodyczne modulowane oknem Hanninga przedstawiają wykresy 3.52 i 3.53.

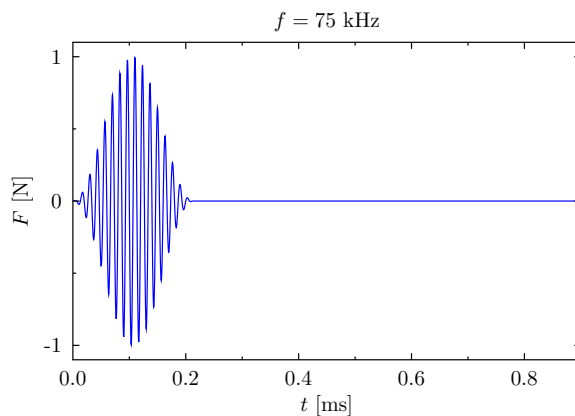
Na rysunkach 3.54 i 3.55 przedstawiony jest rozkład amplitud płyty oraz płyty pe-
riodycznej w każdym punkcie w wybranych chwilach przy częstotliwości odpowiednio
75 kHz i 95 kHz.

Płyta bez periodyczności stanowi odniesienie do analizy. Fala rozchodzi się w niej
bez przeszkód w kierunku y zgodnie założeniami teoretycznymi. Zgodnie z założeniami
teoretycznymi częstotliwość wymuszenia wpływa wyłącznie na prędkość propagacji
fal.

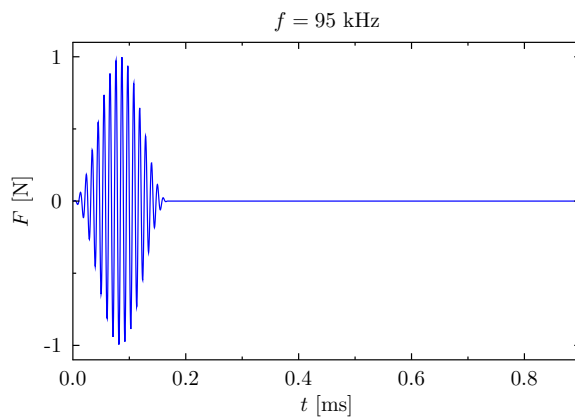
W strukturze periodycznej fala nie może być propagowana swobodnie i zjawisko
to jest zależne od częstotliwości siły wymuszającej. Przy częstotliwości siły wymusza-
jącej $f_w = 75$ kHz, czyli częstotliwości znajdującej się wewnątrz pasma zabronionego,
można zaobserwować, że fala zostaje uwięziona w obszarze nieperiodycznym (A), po-
nieważ w strukturze periodycznej nie może propagować w kierunku y czyli kierunku
100 w sieci otworów. W obszarze periodycznym (B) fala może propagować jedynie
w kierunku, który jest zgodny z kierunkiem wyznaczonym przez przekątną komórki



Rysunek 3.51: Schemat wymuszenia



Rysunek 3.52: Sygnał wymuszający o częstotliwości 75 kHz, składający się z 16 impulsów sinusoidalnych modulowanych oknem Hanninga



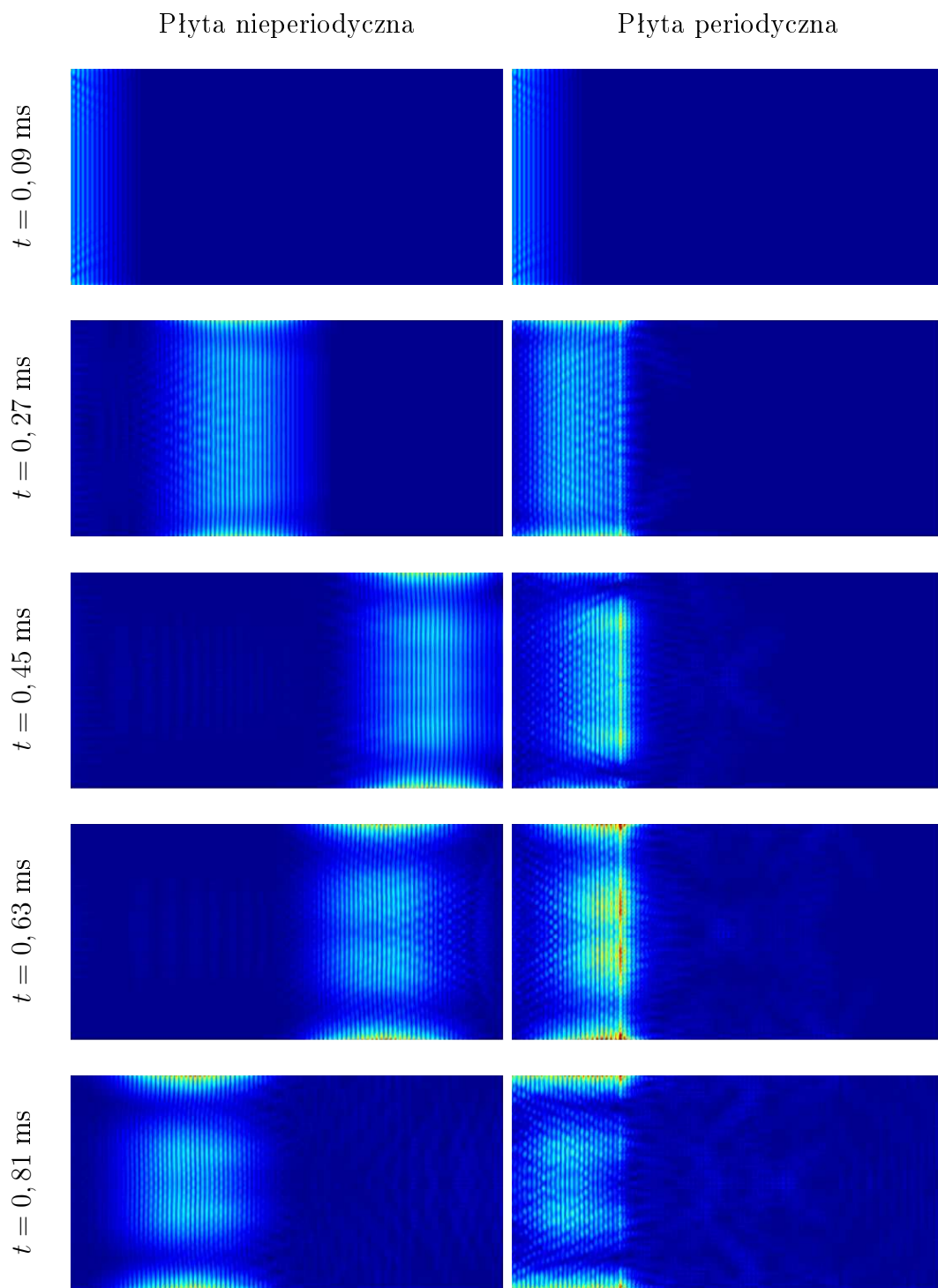
Rysunek 3.53: Sygnał wymuszający o częstotliwości 95 kHz, składający się z 16 impulsów sinusoidalnych modulowanych oknem Hanninga



elementarnej sieci otworów, czyli kierunkiem 110. Można zaobserwować pewne zmiany na brzegach płyty, gdzie występuje zjawisko konwersji modów i odbicia, co powoduje zmianę kierunku propagacji fal i w konsekwencji przedostawanie się części fal przez strukturę periodyczną do obszaru (C).

Amplitudę drgań wyznaczono w punktach oznaczonych na rysunku 3.51 jako P_1 , czyli punkcie, do którego fala dociera przed przejściem przez strukturę periodyczną i P_2 czyli punkcie, do którego fala dochodzi po przejściu przez strukturę periodyczną. Widmo fali przed i po przejściu przez strukturę periodyczną przedstawiają wykresy 3.56 uzyskane dla częstotliwości 75 kHz i 3.57 uzyskane dla częstotliwości 95 kHz.

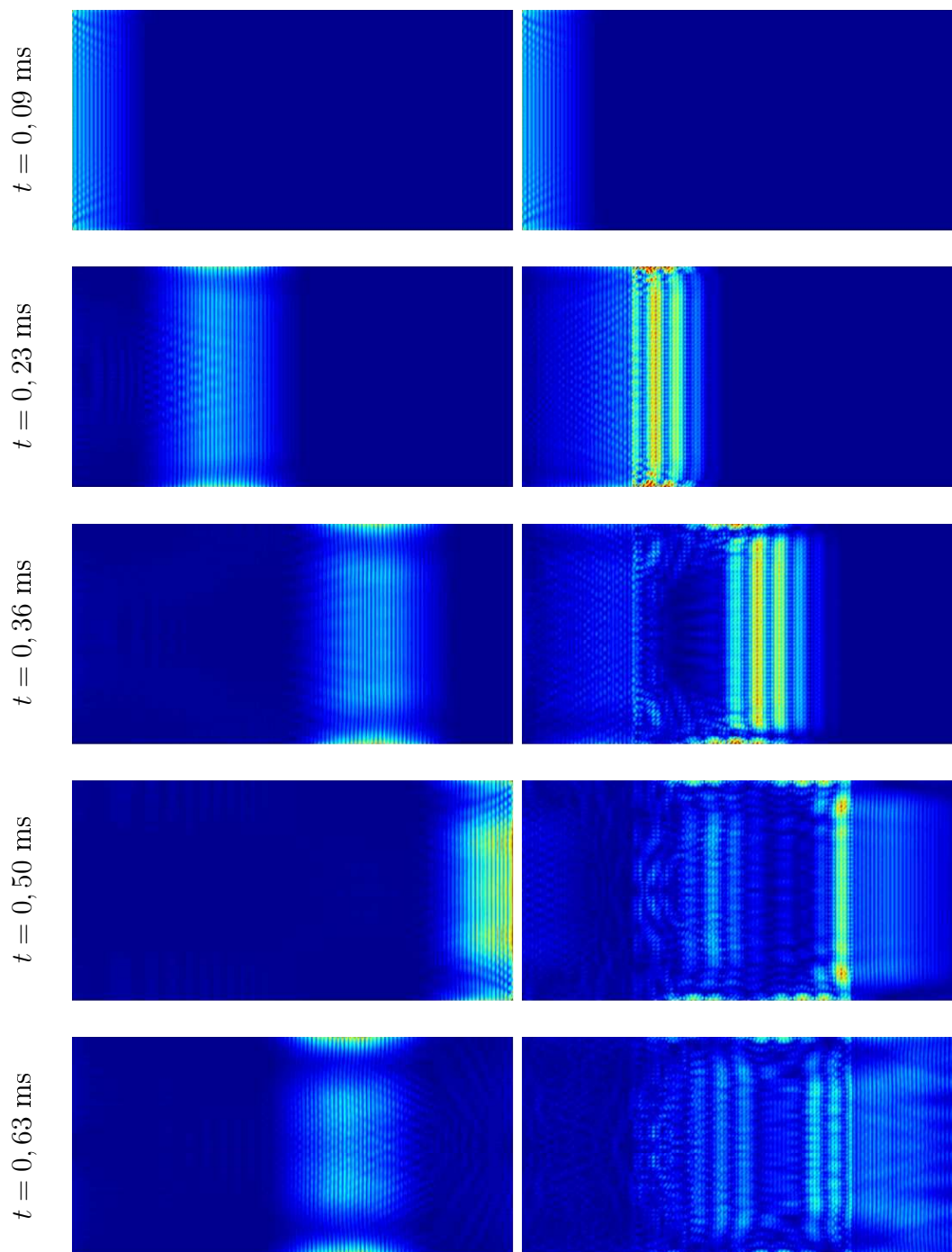
Amplituda fali o częstotliwości z zakresu pasma zabronionego, po przejściu przez strukturę periodyczną, zmniejszyła się o dwa rzędy wielkości w stosunku do amplitudy drgań po stronie wymuszenia. W przypadku, gdy częstotliwość fali wymuszającej nie pokrywała się z pasmem zabronionym struktura periodyczna nie stanowiła dla niej przeszkody. Amplituda fali o częstotliwości spoza pasma zabronionego, po przejściu przez strukturę periodyczną nie ulega istotnym zmianom. Na wykresie 3.57 widoczne jest pokrycie w widmie większego zakresu częstotliwości po przejściu przez strukturę periodyczną, co jest spowodowane pojawieniem się dudnienia wynikającego z wielokrotnych odbić wewnątrz struktury periodycznej.



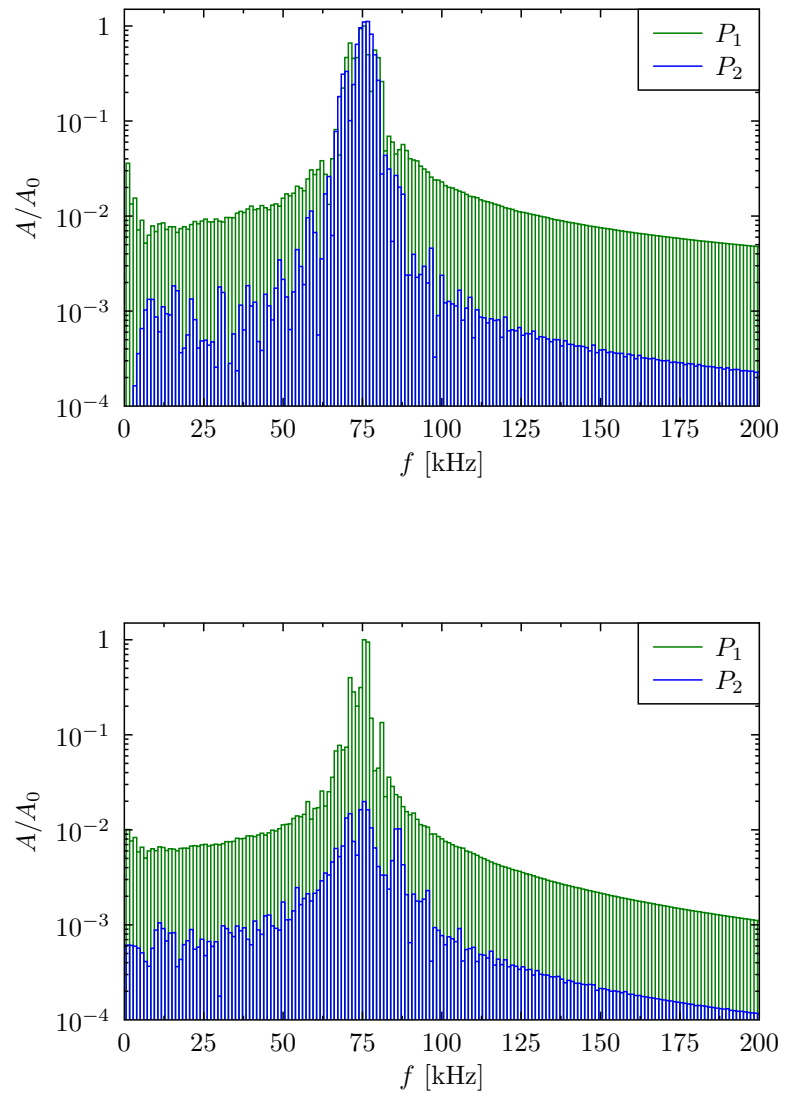
Rysunek 3.54: Propagacja fali poprzecznej o częstotliwości 75 kHz w płycie nieperiodycznej (lewa strona) i płycie ze strukturą periodyczną (prawa strona)

Płyta nieperiodyczna

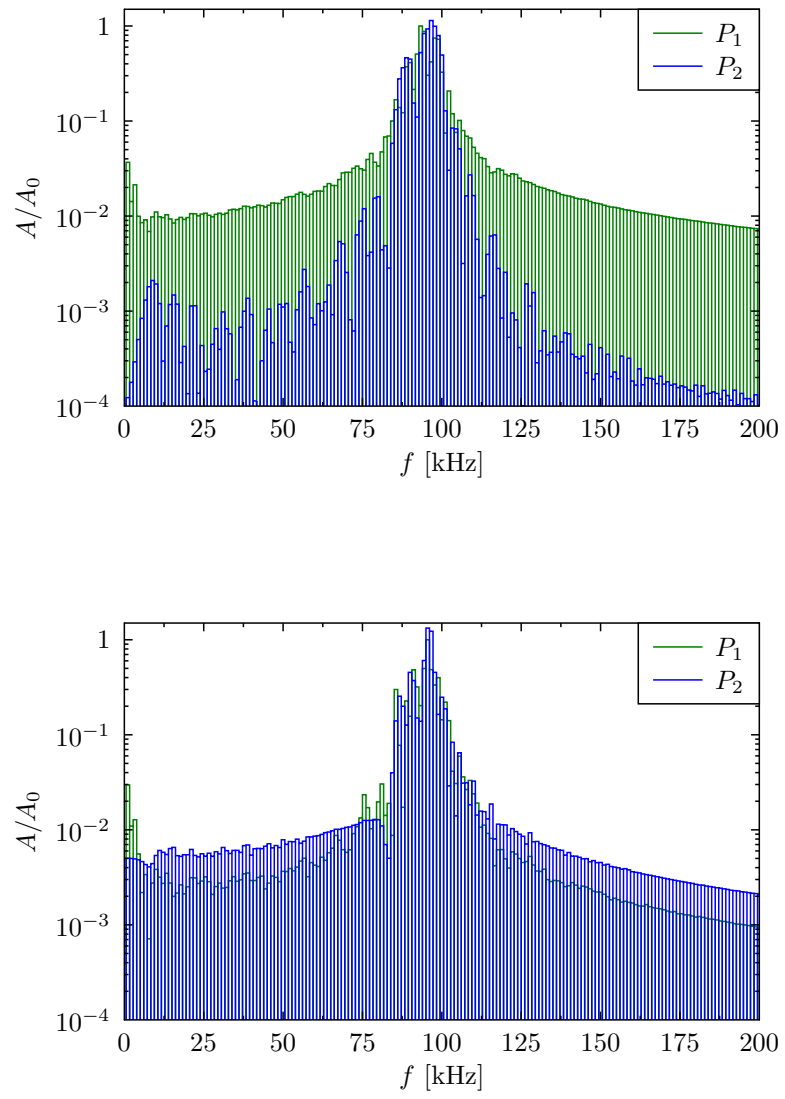
Płyta periodyczna



Rysunek 3.55: Propagacja fali poprzecznej o częstotliwości 95 kHz w płycie nieperiodycznej (lewa strona) i płycie ze strukturą periodyczną (prawa strona)



Rysunek 3.56: Widma mocy drgań poprzecznych płyty pobudzonej paczką falową o częstotliwością $f = 75$ kHz, która znajduje się wewnątrz pasma zabronionego, zmierzone w punktach P_1 - przed przejściem przez strukturę periodyczną (zielone) i P_2 - po przejściu przez strukturę periodyczną (niebieskie). Wykres górny dotyczy płyty, a dolny płyty periodycznej

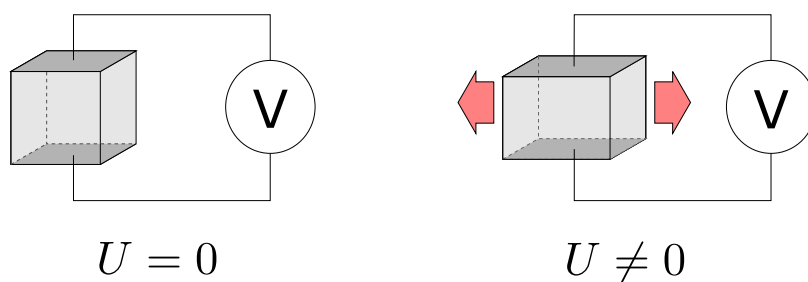


Rysunek 3.57: Widma mocy drgań poprzecznych płyty pobudzonej paczką falową o częstotliwością $f = 95$ kHz która znajduje się opza pasmem zabronionym, zmierzone w punktach P_1 - przed przejściem przez strukturę periodyczną (zielone) i P_2 - po przejściu przez strukturę periodyczną (niebieskie). Wykres górny dotyczy płyty, a dolny płyty periodycznej

Rozdział 4

Elektromechaniczne struktury periodyczne

Zjawisko piezoelektryczne zostało odkryte w 1880 roku przez Pierre'a i Jacques'a Curie. Zaobserwowali oni, że pod wpływem naprężeń mechanicznych pojawiają się ładunki elektryczne na powierzchni niektórych kryształów, których wartość była proporcjonalna do przyłożonego naprężenia. Rok później Gabriel Lippmann zaproponował istnienie odwrotnego zjawiska piezoelektrycznego, polegającego na odkształcaniu się piezoelektryka pod wpływem pola elektrycznego.



Rysunek 4.1: Schemat prostego zjawiska piezoelektrycznego

Materiały piezoelektryczne, ze względu na sprzężenie pola mechanicznego i elektrycznego, znajdują zastosowanie w bardzo wielu dziedzinach techniki. Począwszy od wykorzystania piezoelektryków w przetwornikach elektroakustycznych, aparatów



USG, gdzie wykorzystane jest proste zjawisko piezoelektryczne, po układy precyzyjnie sterujące położeniem sond lub próbek w mikroskopach ze skanującą sondą (SPM).

Zjawisko piezoelektryczne występuje w naturalnych kryształach kwarcu, ale w zastosowaniach przemysłowych używa się materiałów wytworzonych sztucznie. Najczęściej jest to ceramika na bazie soli mieszanej tytanianu ołowiu i cyrkonianu ołowiu, znana jako ceramika PZT. Wytworzenie takiego materiału polega na podgrzaniu go do temperatury większej niż temperatura Curie, przyłożeniu odpowiednio silnego pola elektrycznego i powolnym chłodzeniu. Pole elektryczne wymusza orientację kryształów w materiale, która utrzymuje po schłodzeniu. Kierunek pola elektrycznego wyznacza oś biegunową, która w dalszym opisie matematycznym oznaczana będzie jako oś z . Tak przygotowany materiał jest anizotropowy, czyli wykazuje odmienne właściwości fizyczne w zależności od kierunku obserwacji.

4.1 Opis matematyczny zjawiska piezoelektrycznego

Opis matematyczny zjawiska piezoelektrycznego wymaga zdefiniowania wielkości fizycznych, które je opisują. Zwyczajowe skróty literowe należy w niektórych przypadkach zastąpić innymi ze względu na występowanie ich zarówno w elektromagnetyzmie jak i w mechanice. Nomenklatura została zaczerpnięta z publikacji [83, 84].

Wielkości fizyczne i ich relacje w opisie zjawiska piezoelektrycznego przyjmują następujące postaci:

Indukcja elektryczna jest definiowana jako:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad D_i = \epsilon_{ij} E_j, \quad (4.1)$$

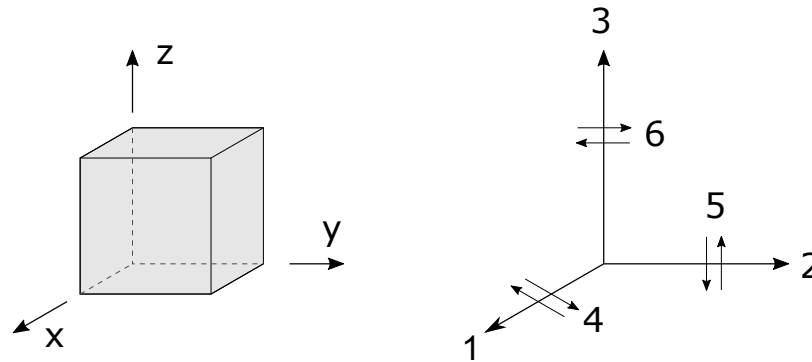
gdzie \mathbf{D} jest wektorem indukcji elektrycznej, \mathbf{E} jest wektorem natężenia pola elektrycznego, a ϵ jest przenikalnością elektryczną materiału.

Prawo Hooke'a ma postać:

$$\mathbf{S} = s \mathbf{T}, \quad S_{ij} = s_{ijkl} T_{kl}, \quad (4.2)$$

gdzie \mathbf{S} jest odkształceniem, \mathbf{T} naprężeniem a s jest macierzą współczynników podatności materiału.

Wielkości \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{S} i \mathbf{T} są wielkościami wektorowymi, a ϵ i s są wielkościami tensorowymi. Standardowy opis kierunków w materiale piezoelektrycznym przedstawia rysunek 4.2



Rysunek 4.2: Schemat opisu kierunków wykorzystywanych do opisu zjawiska piezoelektrycznego

Kierunki x , y i z dotyczą zarówno pola elektrycznego, jak i naprężeń mechanicznych i odpowiadają w nomenklaturze kierunkom 1, 2 i 3, natomiast kierunki 4, 5 i 6 są kierunkami odpowiadającymi naprężeniom ścinającym.

Zjawisko piezoelektryczne opisywane jest 4 współczynnikami d_{ij} , e_{ij} , g_{ij} i h_{ij} zdefiniowanymi jako:

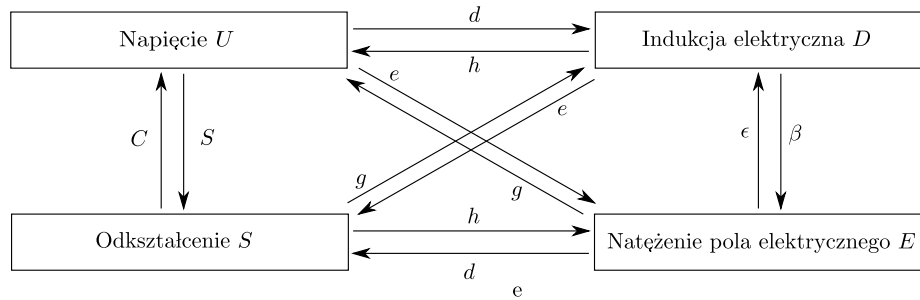
$$\begin{aligned}
 d_{ij} &= \left(\frac{\partial D_i}{\partial T_j} \right)_E = \left(\frac{\partial S_j}{\partial E_i} \right)_T \\
 e_{ij} &= \left(\frac{\partial D_i}{\partial S_j} \right)_E = \left(\frac{\partial T_j}{\partial E_i} \right)_S \\
 d_{ij} &= \left(\frac{\partial E_i}{\partial T_j} \right)_D = \left(\frac{\partial S_j}{\partial D_i} \right)_T \\
 d_{ij} &= \left(\frac{\partial E_i}{\partial S_j} \right)_D = \left(\frac{\partial T_j}{\partial D_i} \right)_S
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

gdzie indeksy po nawiasie odnoszą się do warunków eksperymentu i oznaczają:

- E - brak pola elektrycznego, czyli zamknięty obwód,
- D - brak indukcji elektrycznej, czyli obwód otwarty,

- S - brak naprężeń mechanicznych, czyli próbka swobodna,
- T - brak odkształceń, czyli próbka utwardzona.

Sformułowania po lewej stronie odnoszą się do zjawiska piezoelektrycznego prostego, a po prawej do odwrotnego. Powiązania pomiędzy polami, a stałymi materiałowymi zebrano na grafie 4.3.



Rysunek 4.3: Schemat zależności elektromechanicznych współczynników dla materiałów piezoelektrycznych

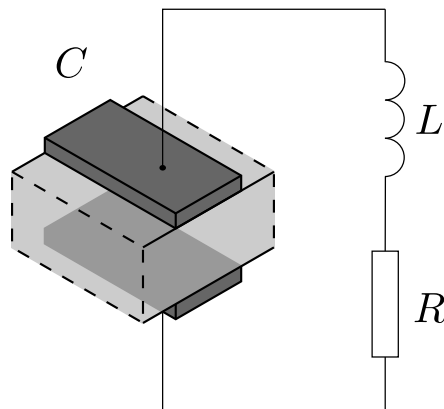
Sprężenie pomiędzy polem elektrycznym a polem naprężeń w materiałach piezoelektrycznych opisywane jest za pomocą równań w postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= s\mathbf{T} - d^t\mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= d\mathbf{T} + \epsilon\mathbf{E} \end{aligned} \tag{4.4}$$

gdzie \mathbf{S} jest wektorem naprężeń, \mathbf{T} jest wektorem odkształceń, zaś \mathbf{E} wektorem pola elektrycznego. \mathbf{D} jest wektorem indukcji elektrycznej, s jest macierzą współczynników podatności materiału piezoelektrycznego, d jest macierzą stałych sprzężenia elektromechanicznego zjawiska piezoelektrycznego prostego, d^t jest macierzą stałych sprzężenia elektromechanicznego zjawiska piezoelektrycznego odwrotnego, a ϵ jest macierzą stałych dielektrycznych materiału piezoelektrycznego [83].

4.2 Modelowanie belki z piezoelektrycznymi elementami aktywnymi

Elementy piezoelektryczne w obwodzie elektrycznym mają charakter pojemnościowy, można zatem je połączyć z oporem R i indukcyjnością L tworząc obwód rezonansowy RLC. Układ RLC przymocowany do wycinka belki przedstawiony jest na rysunku 4.4.



Rysunek 4.4: Obwód rezonansowy z aktywnym elementem piezoelektrycznym przymocowanym do belki

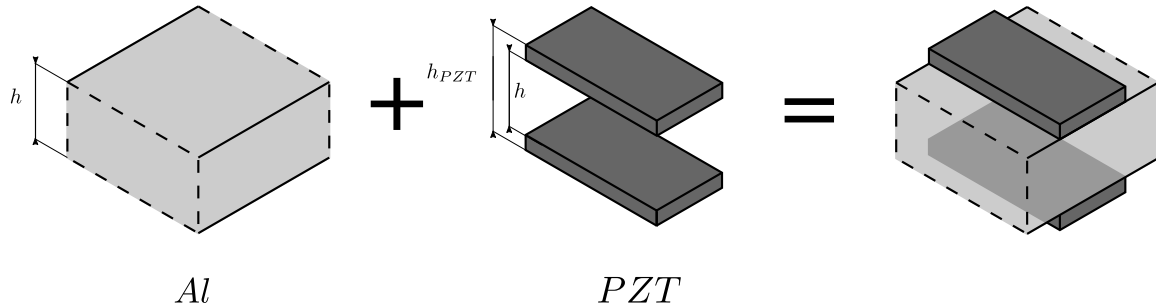
Do symulacji struktur periodycznych z elementami piezoelektrycznymi przyjęto model materiału PZT zaproponowany w pracy [85], użyty również w pracy [86]. Autorzy przedstawili metodę pozwalającą na obliczenie efektywnego modułu Younga materiału piezoelektrycznego włączonego w obwód rezonansowy. Materiał piezoelektryczny wykazuje zależne od częstotliwości sztywność oraz tłumienie, a sama częstotliwość jest zależna od parametrów układu rezonansowego. W związku z tym efektywny moduł Younga materiału piezoelektrycznego w obwodzie rezonansowym można opisać wzorem:

$$E_p^{SU}(\omega) = E_p^D \left(1 - \frac{k_{31}^2}{1 + i\omega C_p^\epsilon Z^{SU}(\omega)} \right) \quad (4.5)$$

gdzie E_p^{SU} jest efektywnym modułem Younga materiału piezoelektrycznego w obwodzie zamkniętym, E_p^D jest efektywnym modułem Younga w obwodzie rozwartym, k_{31} jest współczynnikiem sprzężenia elektro-mechanicznego, C_p^ϵ jest pojemnością elek-

tryczną elementów piezoelektrycznych, a Z^{SU} jest impedancją obwodu rezonansowego.

Pojedynczy prętowy i belkowy element skończony modelowano w oparciu o odpowiednio standardowy model prętowy oraz model belki Timoshenko, tak jak opisany w rozdziale 3.1.1. Element był rozpięty na 6 węzłach będących miejscami zerowymi wielomianów Czebyszewa.



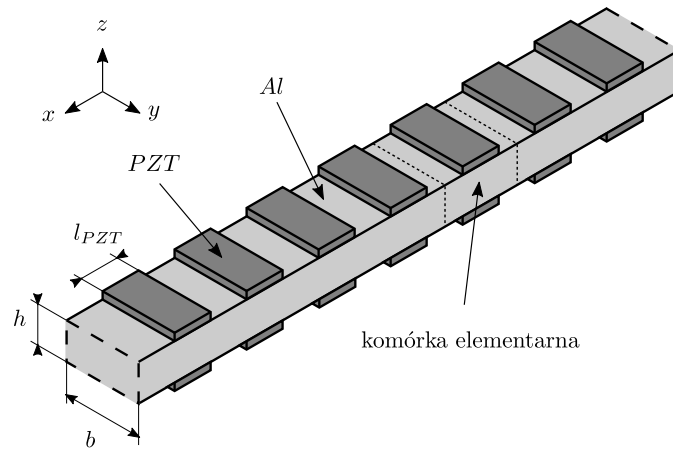
Rysunek 4.5: Modelowanie komórki elementarnej belki z piezoelektrycznymi elementami aktywnymi

Macierz sztywności i macierz masy elementu powstały poprzez dodanie odpowiednich macierzy belki aluminiowej oraz elementów z materiału piezoelektrycznego. Macierz sztywności elementu piezoelektrycznego, zgodnie z opisaną powyżej metodą, jest zależna od częstotliwości, w której zawiera się cały wpływ układu elektrycznego na zjawiska mechaniczne. Ze względu na tę zależność konieczne jest modelowanie całego układu w dziedzinie częstotliwości.

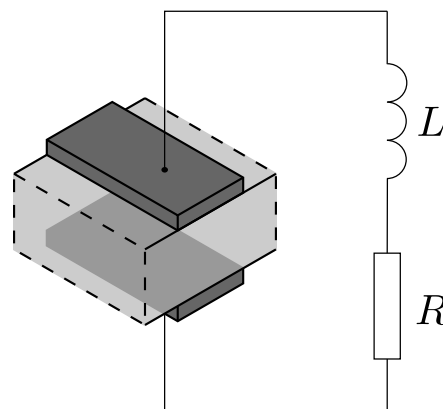
4.3 Elektromechaniczne struktury periodyczne

W symulacjach przyjęto belkę i pręt aluminiowy o długości $l = 1$ m, szerokości $b = 2$ cm i wysokości $h = 1$ cm z 50 elementami piezoelektrycznymi z ceramiki PZT przyklejonymi symetrycznie na jego górnej i dolnej powierzchni. Szerokość piezoelementów wynosiła $b_{PZT} = 2$ cm, długość $l_{PZT} = 1$ cm i wysokość $h_{PZT} = 0,1$ cm, schemat wycinka takiego układu przedstawia rysunek 4.6.

Pojedyncza komórka elementarna struktury przedstawione na rysunku 4.7 składa się z wycinka belki oraz obwodu rezonansowego RLC, złożonego z dwóch elementów



Rysunek 4.6: Schemat wycinka belki z przyklejonymi elementami piezoelektrycznymi piezoelektrycznych o pojemności $C_p^\epsilon = 15 \text{ nF}$, indukcyjności L dobranej do zadanej częstotliwości oraz oporu $R = 1 \Omega$.



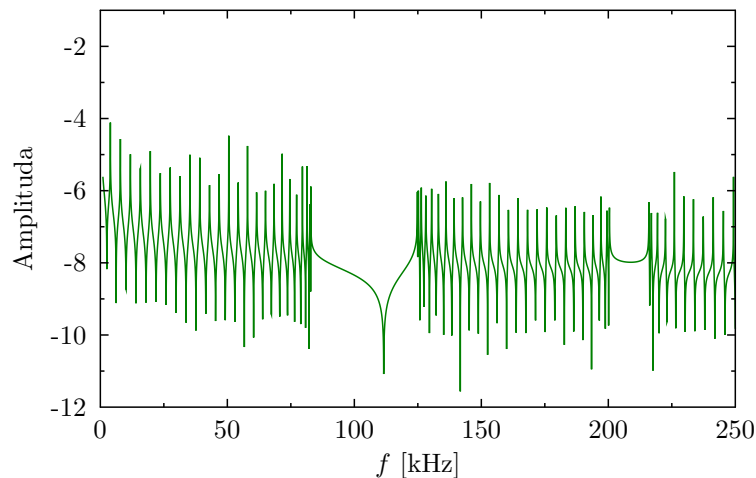
Rysunek 4.7: Schemat komórki elementarnej badanej struktury

Do obliczeń przyjęto właściwości materiałowe aluminium o wartościach: moduł Younga $E = 67,5 \text{ GPa}$, gęstość $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, liczba Poissona $\nu = 0,33$ oraz tłumienie $\eta = 10^{-4}$, a dla PZT $E_{PZT} = 63 \text{ GPa}$, gęstość $\rho_{PZT} = 7800 \text{ kg/m}^3$, liczba Poissona $\nu = 0,33$ i współczynnik sprzężenia elektromechanicznego $k_{31} = 0,35$.

4.4 Analiza drgań wymuszonych

Drgania wzdluzne

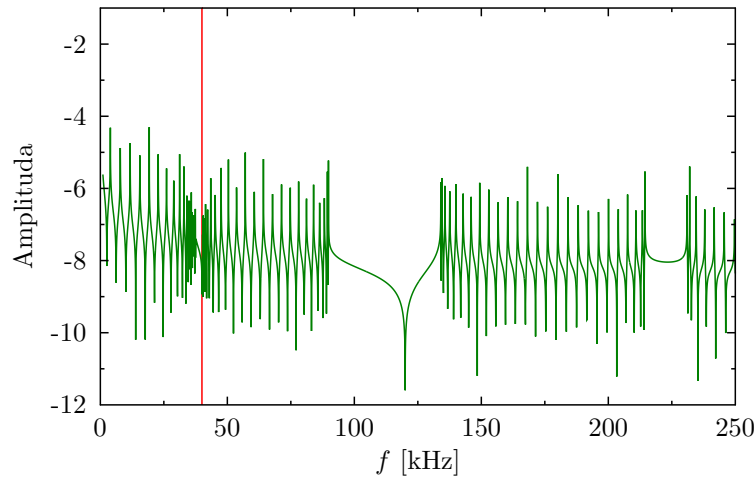
Pierwszym krokiem w badaniu struktur elektromechanicznych było wyznaczenie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych pręta z elementami piezoelektrycznymi nie zwartymi w żaden obwód. Pręty z naklejonymi piezoelektrykami będącymi w rozwartym obwodzie można traktować jak strukturę z periodycznie występującymi zmianami geometrii oraz właściwości materiałowych. Charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową tego układu przedstawiono na wykresie 4.8. Widoczne są wyraźne pasma bez pików rezonansowych w przedziałach od 84 kHz do 124 kHz oraz 200 kHz do 215 kHz. Są to pasma zabronione wynikające wyłącznie z mechanicznych właściwości struktury, podobne do tych opisanych w rozdziale 3.



Rysunek 4.8: Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa pręta z piezoelektrycznymi elementami aktywnymi, brak układu rezonansowego

Dobierając odpowiedni element indukcyjny można dostroić układ rezonansowy do dowolnej częstotliwości, a więc do częstotliwości, która jest propagowana w strukturze periodycznej bez przeszkód lub do częstotliwości, która w układzie pasywnym nie jest propagowana i w ten sposób wpłynąć na charakterystykę danego pasma zabronionego.

Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa pręta z piezoelektrycznymi elementami aktywnymi włączonymi w układy rezonansowe dostrojony do częstotliwości $f_R = 40$ kHz z oporem elektrycznym każdego układu $R = 1 \Omega$, a więc w paśmie częstotliwości dozwolonych, przedstawiono na wykresie 4.9. W takim przypadku pojawia się dodatkowe pasmo zabronione, wymuszone przez układ rezonansowy, o częstotliwościach w okolicy jego drgań własnych czyli $f_R = 50$ kHz. Wynika to z rozpraszania energii na oporze elektrycznym. Niewielkiemu przesunięciu w kierunku wyższych częstotliwości ulegają również pasma zabronione obserwowane w strukturze pasywnej.

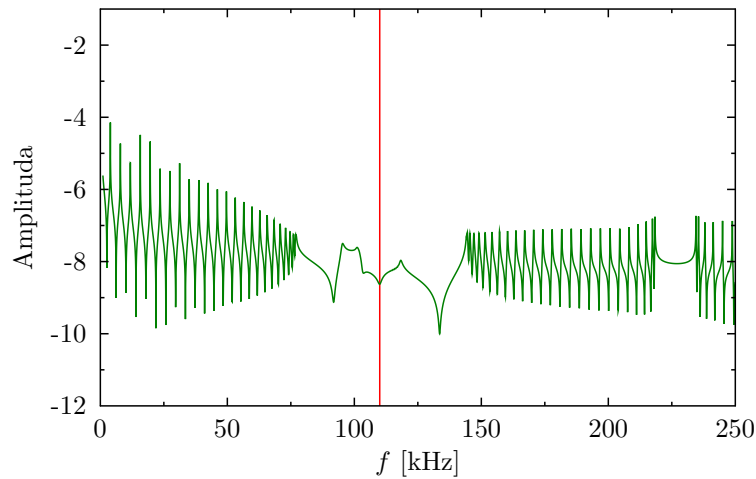


Rysunek 4.9: Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa pręta z piezoelektrycznymi elementami aktywnymi. Układ rezonansowy RLC dostrojony do częstotliwości $f_R = 40$ kHz

Jeśli elektryczny układ rezonansowy będzie dostrojony do częstotliwości, przy której w układzie pasywnym występuje pasmo zabronione, pasmo to wyraźnie ulegnie poszerzeniu. Widoczne jest to na charakterystyce amplitudowo-częstotliwościowa przedstawionej na wykresie 4.10 i jest związane z brakiem możliwości propagacji drgań w strukturze periodycznej oraz rozpraszania energii na oporze elektrycznym.

Parametry pasm zabronionych w zależności od zadanej częstotliwości elektrycznego układu rezonansowego zestawiono w tabeli 4.1.

Ogólny charakter zmian w widmie wywołanych zmianami w obwodzie rezonansowym przedstawia wykres 4.11. Wykres jest mapą przedstawiającą częstotliwość drgań

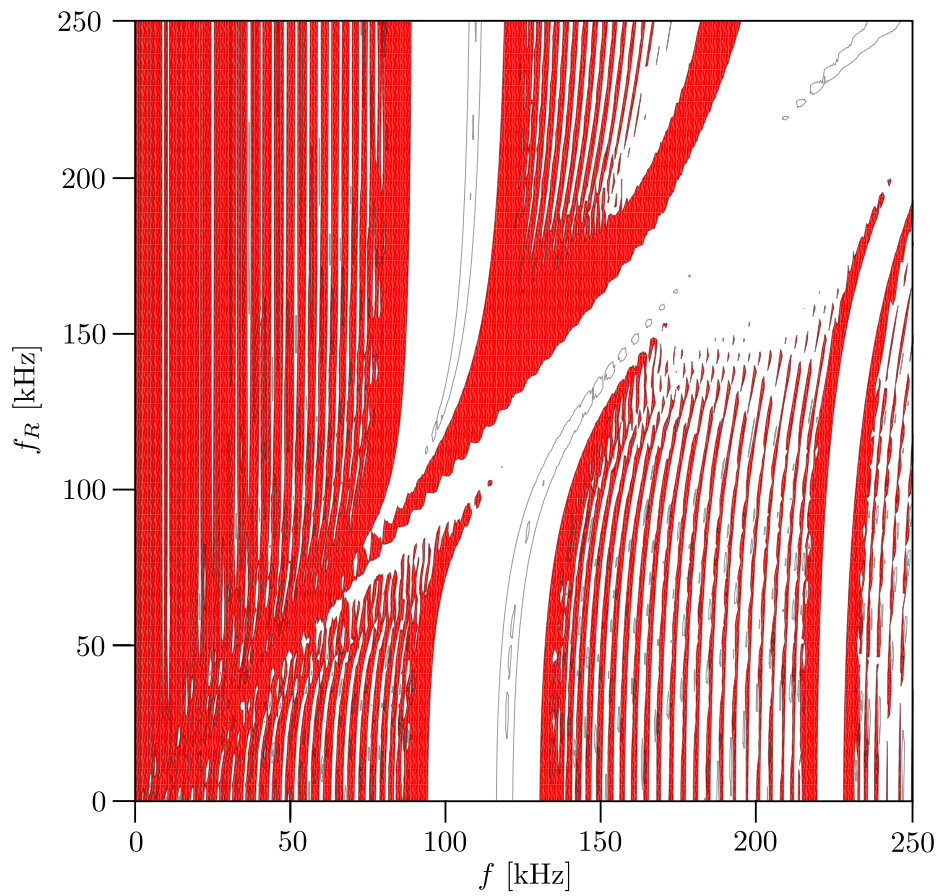


Rysunek 4.10: Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa pręta z piezoelektrycznymi elementami aktywnymi. Układ rezonansowy RLC dostrojony do częstotliwości $f = 110$ kHz

Tabela 4.1: zestawienie parametrów pasm zabronionych drgań podłużnych

Częstotliwość rezonansowa f_R	pasmo wymuszone	pierwsze pasmo zabronione	drugie pasmo zabronione
układ pasywny	brak	84-124 kHz	200-215 kHz
40 kHz	38-41 kHz	90-133 kHz	215-230 kHz
110 kHz	brak	78-143 kHz	219-234 kHz
160 kHz	138-175 kHz	81-114 kHz	227-241 kHz

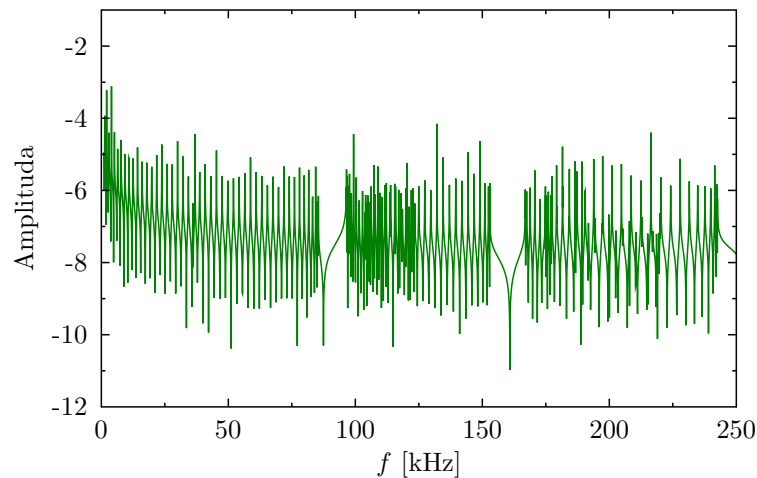
mechanicznych f na osi poziomej, częstotliwość rezonansową układu RLC f_R na osi pionowej, a kolor odpowiada amplitudzie drgań wymuszonych z uwzględnieniem korekcji linii bazowej. Obszary czerwone oznaczają wartości częstotliwości drgań mechanicznych f , które będą propagowane przy zadanej częstotliwości elektrycznego układu rezonansowego f_R . Białe obszary są to częstotliwości drgań mechanicznych przy których propagacja fal nie jest możliwa. Na wykresie widoczne są również miejsca naprzemiennie występujących kolorów białych i czerwonych. Jest to spowodowane ograniczeniami wynikającymi z modelu numerycznego oraz sposobu wykonania wykresu, należy je jednak interpretować jako pasma dozwolone.



Rysunek 4.11: Zależność położenia pasm zabronionych w widmie częstotliwości w zależności od częstotliwości elektrycznego układu rezonansowego f_R

Drgania poprzeczne

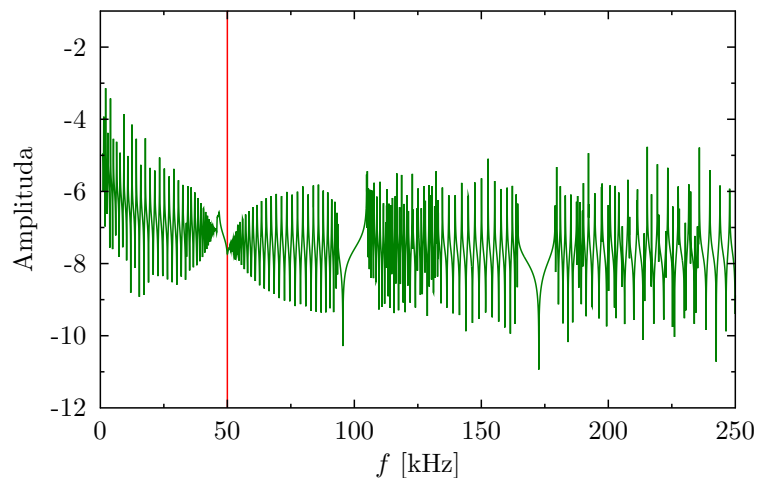
W przypadku drgań poprzecznych również mamy do czynienia z występującymi pasmami zabronionymi w strukturze pasywnej. W badanym zakresie były to dwa pasma o częstotliwościach od 86 kHz do 96 kHz oraz od 154 do 166. Charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową struktury pasywnej przedstawia wykres 4.12.



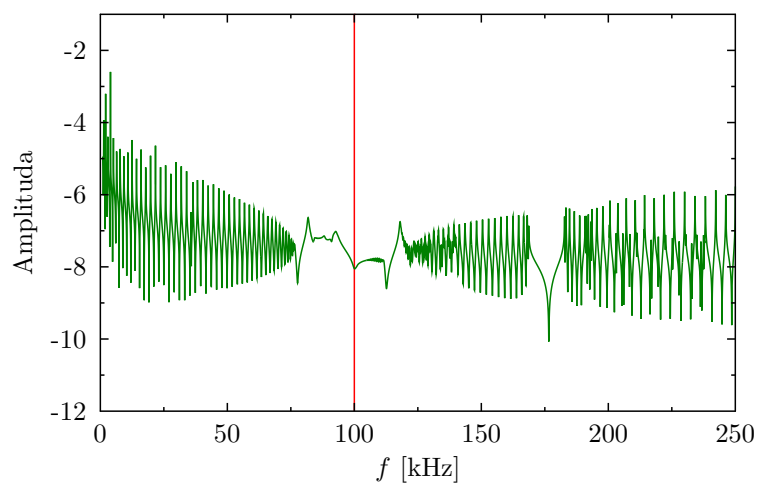
Rysunek 4.12: Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa belki z elementami piezoelektrycznymi, bez układu rezonansowego

Dostrojenie układu rezonansowego do częstotliwości, w której w układzie pasywnym drgania były dozwolone, powoduje powstanie pasma zabronionego w okolicach tej częstotliwości oraz przesunięcie się pasm występujących w układzie pasywnym. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa takiej belki z układem rezonansowym dostrojonym do częstotliwości $f_R = 50$ kHz oraz oporem elektrycznym każdego układu $R = 1 \Omega$ przedstawiono na wykresie 4.13

W przypadku dostrojenia częstotliwości elektrycznego układu rezonansowego do występującego w układach pasywnych pasma zabronionego, pasmo zabronione w istotny sposób się poszerza. Widoczne to jest na wykresie 4.14, który przedstawia charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową belki z elektrycznym układem rezonansowym dostrojonym do częstotliwości $f_R = 100$ kHz.



Rysunek 4.13: Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa belki z piezoelektrycznymi elementami aktywnymi. Układ rezonansowy RLC dostrojony do częstotliwości $f_R = 50$ kHz



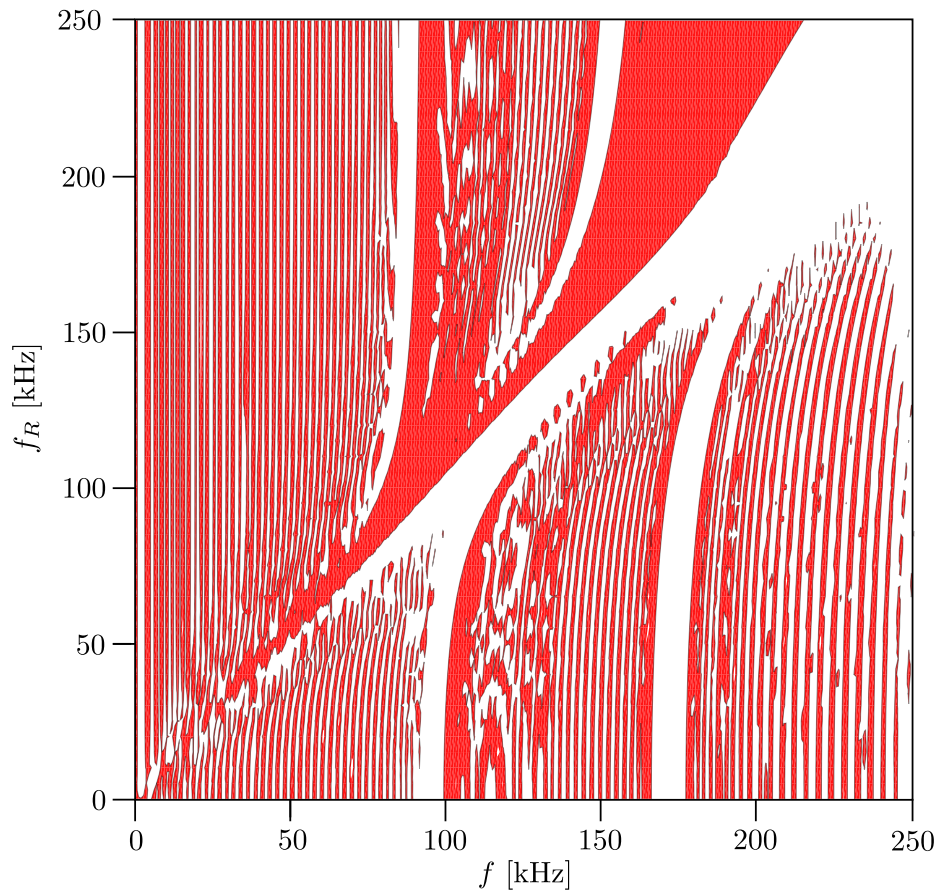
Rysunek 4.14: Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa belki z piezoelektrycznymi elementami aktywnymi. Układ rezonansowy RLC dostrojony do częstotliwości $f_R = 100$ kHz

Zestawienie parametrów pasm zabronionych różnych konfiguracji badanych belek znajduje się w tabeli 4.2. Parametry pasm zabronionych w zależności od zadanej częstotliwości elektrycznego układu rezonansowego zestawiono w tabeli 4.2.

Tabela 4.2: zestawienie parametrów pasm zabronionych drgań poprzecznych

Częstotliwość rezonansowa f_R	pasmo wymuszone	pierwsze pasmo zabronione	drugie pasmo zabronione
układ pasywny	brak	84-96 kHz	154-166 kHz
50 kHz	47-51 kHz	94-103 kHz	165-178 kHz
100 kHz	brak	84-116 kHz	170-181 kHz
150 kHz	125-165 kHz	83-90 kHz	183-193 kHz

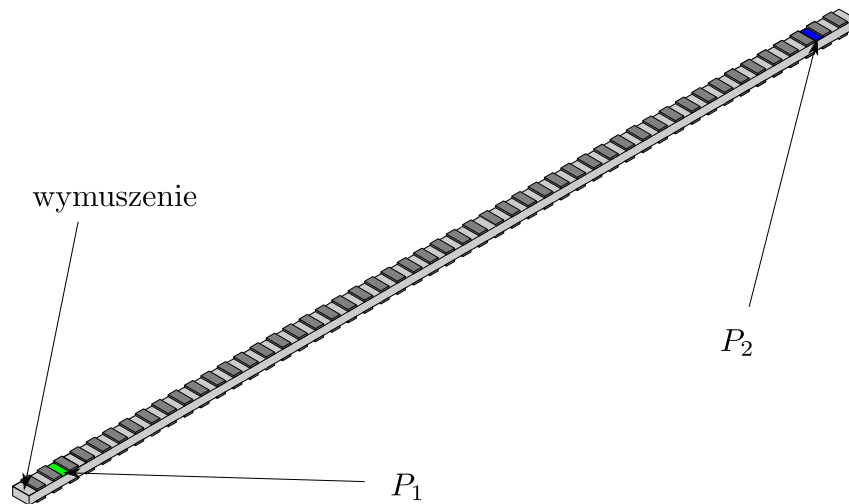
Ogólny obraz zależności parametrów pasm zabronionych od częstotliwości układu rezonansowego przedstawia wykres 4.15



Rysunek 4.15: Zależność położenia pasm zabronionych w widmie częstotliwości w zależności od częstotliwości elektrycznego układu rezonansowego f_R

4.5 Propagacja fal

Symulacje propagacji fal wzdłużnych w pręcie z aktywnymi elementami piezoelektrycznymi prowadzono przy użyciu FD-SFEM. Wybrane sformułowanie jest wymagane w celu modelowania materiałów piezoelektrycznych, których moduł Younga jest funkcją częstotliwości. Niesie to za sobą konieczność dodania na brzegach struktury elementów pozwalających odrzucić odbicia na brzegach struktury (z ang. throw-off element).



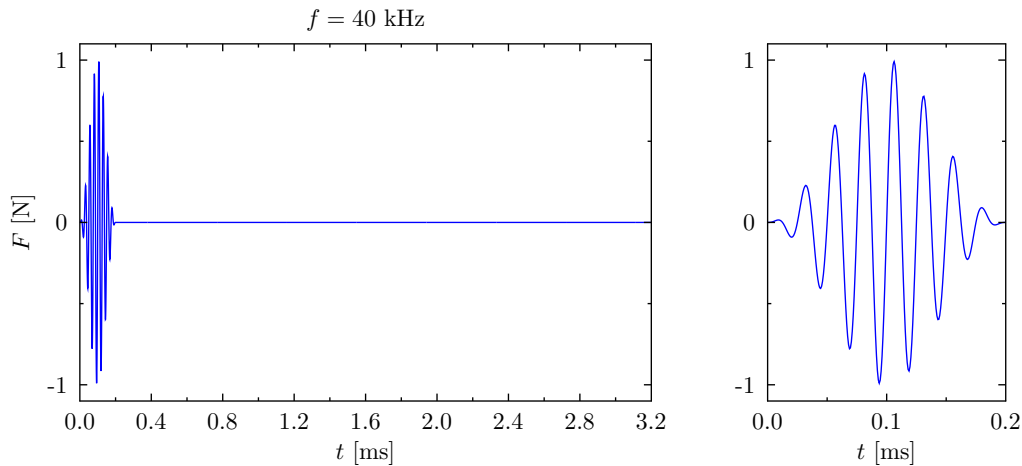
Rysunek 4.16: Schemat belki z aktywnymi elementami piezoelektrycznymi

Wyznaczono amplitudę drgań w punktach P_1 i P_2 pokazanych na rysunku 4.16. Punkt oznaczony kolorem zielonym oznaczony P_1 jest to punkt w pobliżu elementu, do którego przyłożone było wymuszenie, w którym wyznaczona została amplituda przed przejściem przez strukturę periodyczną. Punkt oznaczony kolorem niebieskim P_2 jest to punkt, w którym wyznaczona została amplituda po przejściem przez strukturę periodyczną. Przyjęte punkty nie znajdują się na skraju badanej struktury. Nie wpływa to jednak znacząco na wyniki, a pozwala uniknąć ewentualnych problemów związanych z przyjętą metodą rozwiązania.

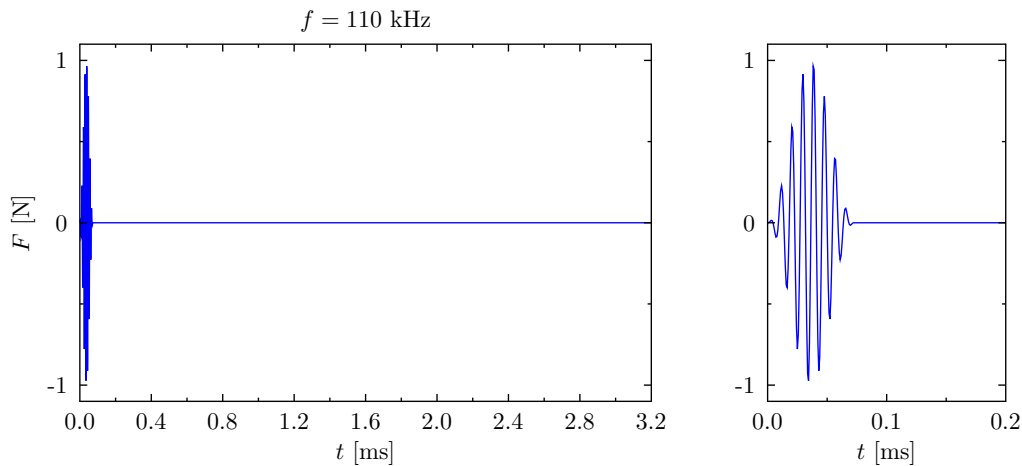
Fale wzdłużne

Pręt opisany na początku rozdziału został pobudzony do drgań wzdłużnych na jednym z końców siłą $F = 1$ N. Przyjęte zostały dwie częstotliwości wymuszenia

$f = 40$ kHz, czyli częstotliwość, przy której w strukturze pasywnej występuje pasmo dozwolone, oraz $f = 110$ kHz, czyli częstotliwość, przy której w strukturze pasywnej występuje pasmo zabronione. Sygnał wymuszający modulowany był oknem Hanninga pokazanym na wykresach 4.17 i 4.18,



Rysunek 4.17: Sygnał wymuszający o częstotliwości 40 kHz, składający się z 8 impulsów sinusoidalnych modulowanych oknem Hanninga



Rysunek 4.18: Sygnał wymuszający o częstotliwości 110 kHz, składający się z 8 impulsów sinusoidalnych modulowanych oknem Hanninga

Na wykresie 4.19 przedstawiona jest propagacja fal w kilku możliwych kombinacjach częstotliwości fali wymuszającej oraz częstotliwości układu rezonansowego.

Przyjęto dwie częstotliwości fali wymuszającej z zakresu pasma dozwolonego $f = 40$ kHz i zabronionego $f = 110$ kHz układu pasywnego. Układ RLC był rozarty i dostrojony do częstotliwości $f_R = 40$ kHz lub $f_R = 110$ kHz. Na osi poziomej każdego wykresu przedstawiona jest odległość od wymuszenia, a na osi pionowej czas.

Na wykresie 4.20 zebrano widma amplitud drgań wyznaczone w punktach P_1 i P_2 . Widmo wyznaczone w pobliżu wymuszenia oznaczone jest kolorem zielonym, natomiast po przejściu przez strukturę periodyczną kolorem niebieskim. Czerwona linia określa częstotliwość rezonansową układu RLC.

Przeprowadzone symulacje, których wyniki przedstawiono na wykresach 4.19 i 4.20, prowadzą do wniosków:

W układzie pasywnym fala o częstotliwości $f = 40$ kHz może propagować bez przeszkód, amplituda po przejściu przez strukturę zmienia się w niewielkim stopniu.

Fala o częstotliwości $f = 110$ kHz nie może swobodnie propagować. Występujące w tej części widma pasmo zabronione stanowi barierę dla drgań. Ze względu na stosunek szerokości spektralnej pasma fali wymuszającej do szerokości pasma zabronionego możliwa jest propagacja fal o częstotliwościach spoza zakresu pasma zabronionego.

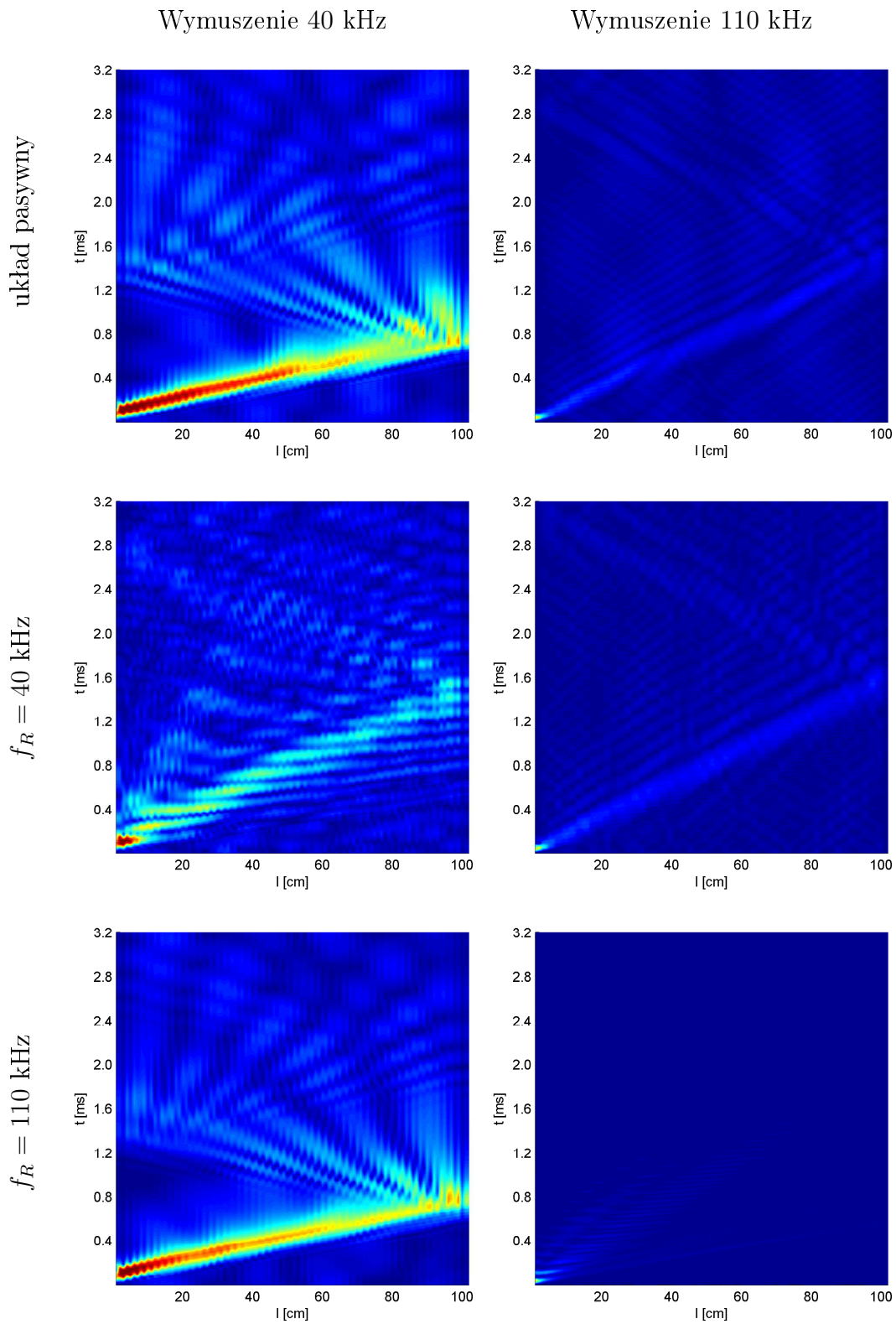
W przypadku dostrojenia układu RLC do częstotliwości $f_R = 40$ kHz, fala o częstotliwości $f = 40$ kHz nie może swobodnie propagować. Pojawia się wymuszone pasmo zabronione spowodowane rozpraszaniem energii na oporze elektrycznym. Pasma zabronione jest wyraźnie widoczne, jednak jest spektralnie bardzo wąskie, przez co nie obserwuje się znaczącej zmiany amplitudy po przejściu przez strukturę.

W strukturze z układem RLC dostrojonym do częstotliwości $f_R = 40$ kHz, nie obserwuje się wyraźnych zmian w propagacji fali o częstotliwości $f = 110$ kHz w stosunku do układu pasywnego. Widoczne wcześniej pasmo zabronione ulega jedynie niewielkiemu przesunięciu w kierunku wyższych częstotliwości.

Dostrojenie układu RLC do częstotliwości $f_R = 110$ kHz, nie powoduje wyraźnych zmian w propagacji fali o częstotliwości $f = 40$ kHz w stosunku do układu pasywnego.

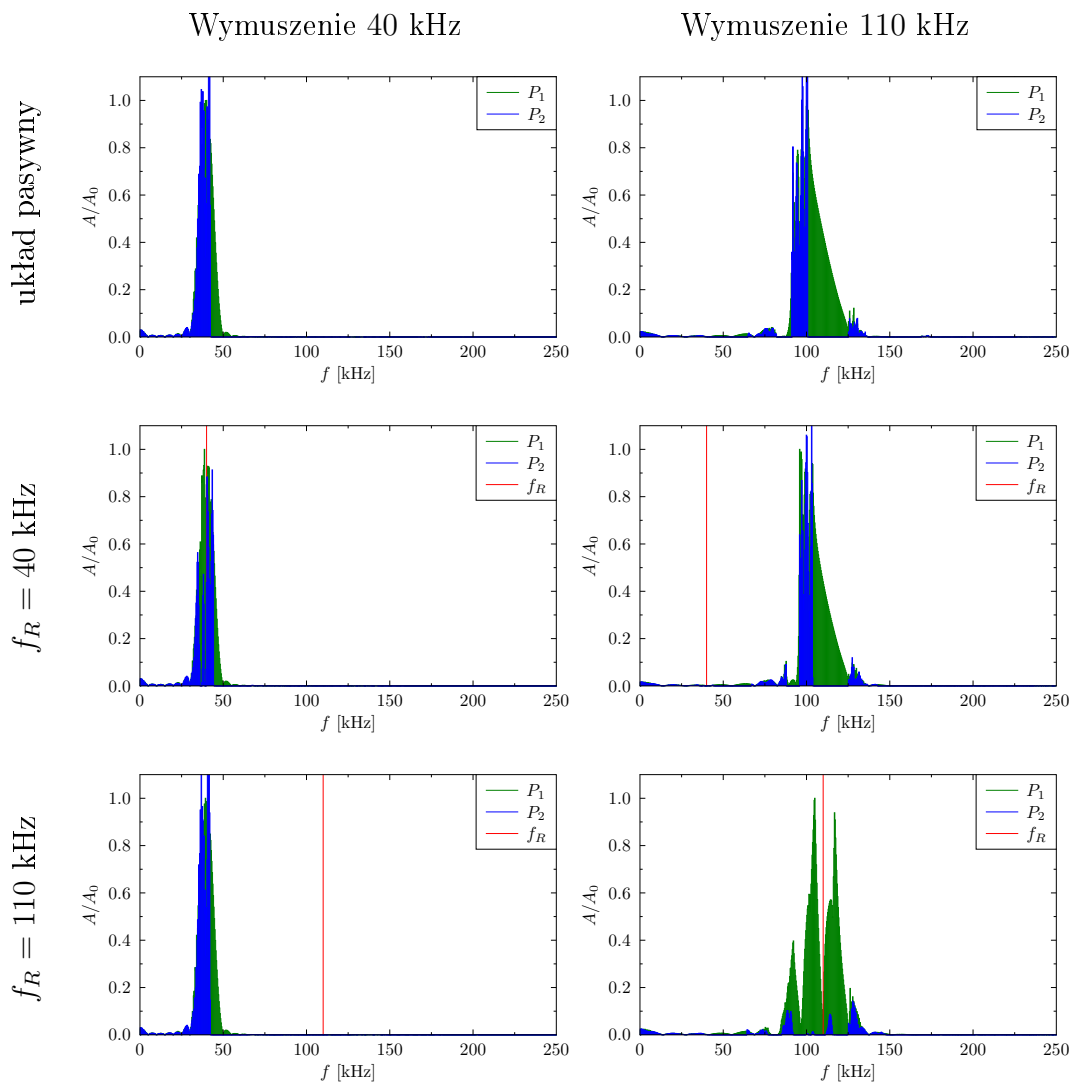
Gdy układ jest dostrojony do częstotliwości $f_R = 110$, czyli zgodnej z częstotliwością wymuszenia oraz znajdującą się wewnątrz pasma zabronionego występującego w strukturze pasywnej, obserwuje się wyraźne poszerzenie pasma zabronionego.

Ogranicza to propagacje fal z zakresu częstotliwości bliskiego pasmu zabronionemu, a występujące w widmie wymuszenia. Amplituda drgań po przejściu przez strukturę periodyczną maleje o rząd wielkości w stosunku do amplitudy po stronie wymuszenia. Jest to związane z uniemożliwieniem propagacji fali w strukturze ze względu na jej periodyczny charakter, oraz rozproszeniu energii na oporze elektrycznym. Widmo wyznaczone po stronie wymuszenia wskazuje na występowanie tłumienia jeszcze przed przejściem przez strukturę periodyczną. Jest to związane z położeniem punktu P_1 do którego dociera fala już po przejściu przez obszar pierwszej komórki elementarnej, czyli fali już częściowo wytłumionej.



Rysunek 4.19: Propagacja fal wzdłużnych o częstotliwościach 40 kHz i 110 kHz w strukturze periodycznej z elementami piezoelektrycznymi

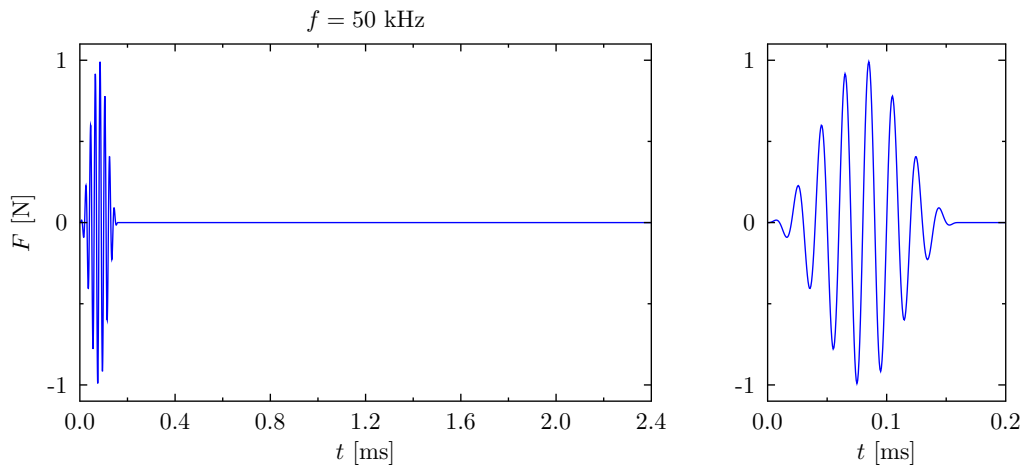




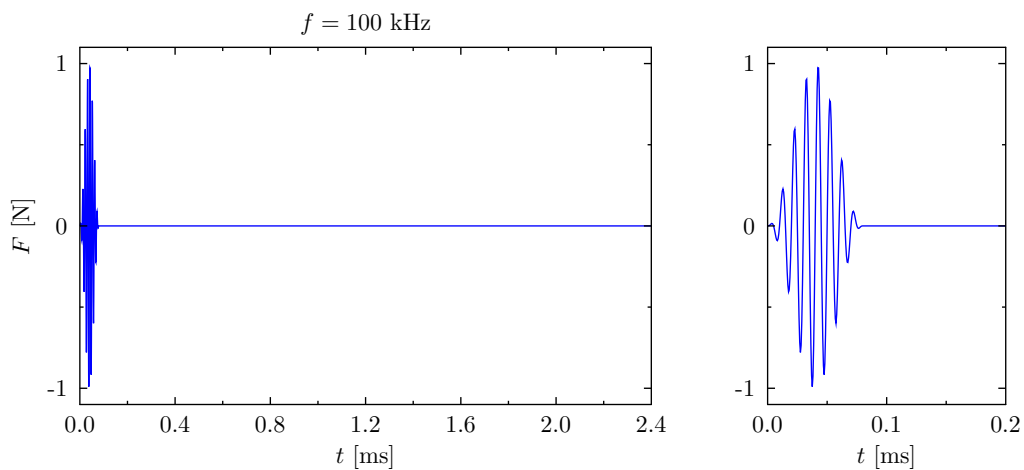
Rysunek 4.20: Widma drgań wzdłużnych po wzbudzeniu o częstotliwościach 40 kHz i 110 kHz wyznaczone w punktach P_1 i P_2

Fale poprzeczne

Belka z aktywnymi elementami piezoelektrycznymi została pobudzona do drgań poprzecznych na jednym z końców siłą $F = 1$ N. Przyjęto dwie częstotliwości wymuszenia $f = 50$ kHz, czyli częstotliwość, przy której w strukturze pasywnej występuje pasmo dozwolone, oraz $f = 100$ kHz, czyli częstotliwość, przy której występuje pasmo zabronione. Wymuszenie pokazane jest na wykresach 4.21 i 4.22,



Rysunek 4.21: Sygnał wymuszający o częstotliwości 50 kHz, składający się z 8 impulsów sinusoidalnych modulowanych oknem Hanninga



Rysunek 4.22: Sygnał wymuszający o częstotliwości 100 kHz, składający się z 8 impulsów sinusoidalnych modulowanych oknem Hanninga

Na wykresie 4.23 przedstawiona jest propagacja fal poprzecznych w strukturach, w których układ RLC był rozwarty, albo dostrojony do częstotliwości $f_R = 50$ kHz lub $f_R = 100$ kHz. Widma drgań przed i po przejściu przez strukturę przedstawione są na wykresie 4.24. Kolor zielony oznacza widmo wyznaczone w punkcie P_1 , a kolor niebieski w punkcie P_2 . Czerwona linia reprezentuje częstotliwość rezonansową układu RLC.

Przeprowadzone symulacje prowadząc do szeregu wniosków:

W układzie pasywnym fala o częstotliwości $f = 50$ kHz może propagować bez przeszkód, amplituda po przejściu przez strukturę zmienia się w niewielkim stopniu.

Fala o częstotliwości $f = 100$ kHz nie może swobodnie propagować. Występujące w tej części widma pasmo zabronione stanowi barierę dla drgań. Pasma zabronione wpływa wyraźnie na amplitudę fali po przejściu. Szerokość pasma zabronionego jest niewielka, dlatego fale o częstotliwościach spoza zakresu pasma zabronionego propagują przez strukturę.

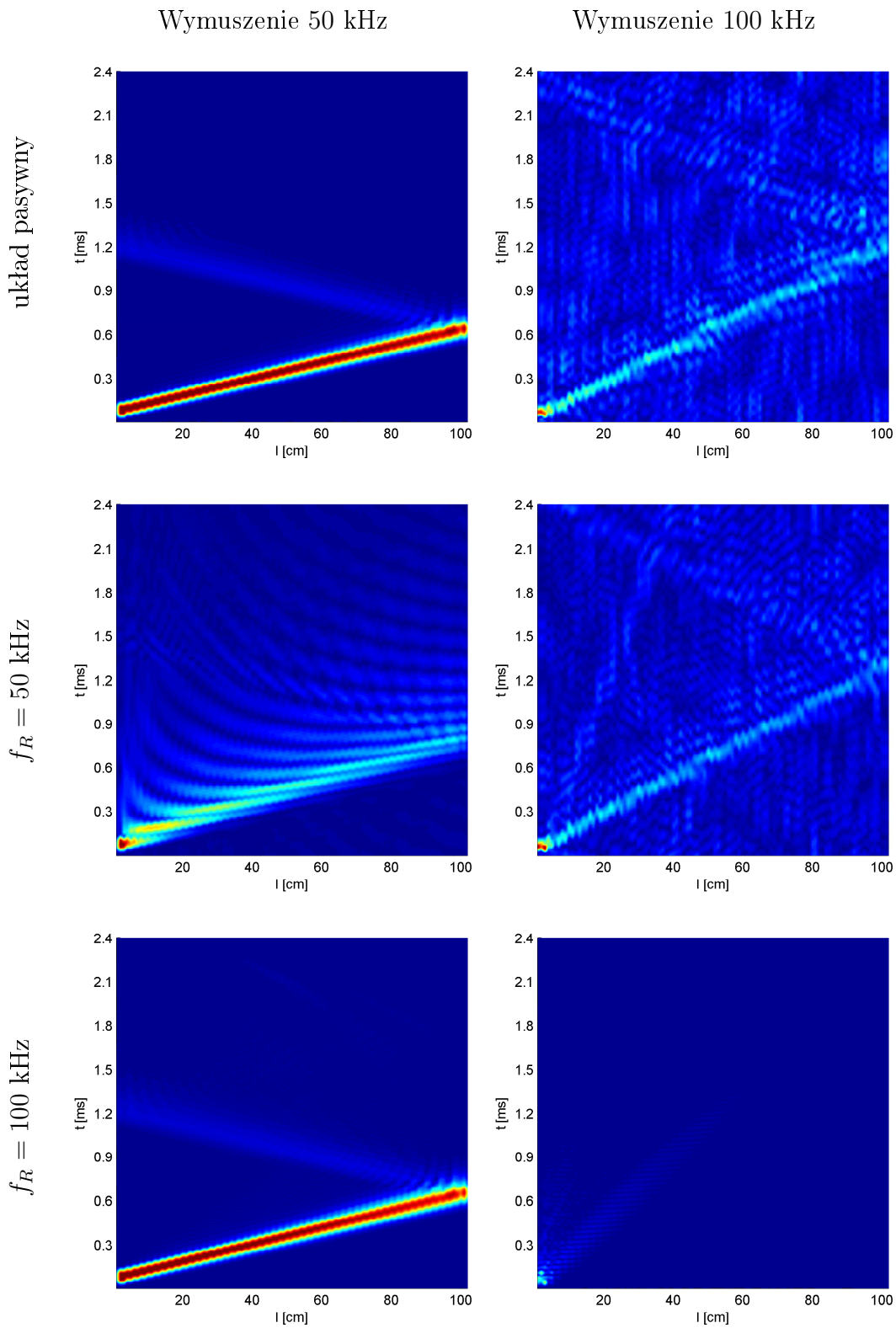
W przypadku dostrojenia układu RLC do częstotliwości $f_R = 50$ kHz, fala o częstotliwości $f_R = 50$ kHz nie może swobodnie propagować. Pojawia się wymuszone pasmo zabronione spowodowane rozpraszaniem energii na oporze elektrycznym. Amplituda fali zmniejsza się w sposób wyraźny, jednak wymuszone pasmo zabronione jest bardzo wąskie.

W strukturze z układem RLC dostrojonym do częstotliwości $f_R = 50$ kHz, nie są widoczne wyraźne zmiany w propagacji fali o częstotliwości $f = 100$ kHz w stosunku do układu pasywnego. Widoczne wcześniej pasmo zabronione ulega jedynie niewielkiemu przesunięciu w kierunku wyższych częstotliwości.

Dostrojenie układu RLC do częstotliwości $f_R = 100$ kHz, nie powoduje wyraźnych zmian w propagacji fali o częstotliwości $f = 50$ kHz w stosunku do układu pasywnego.

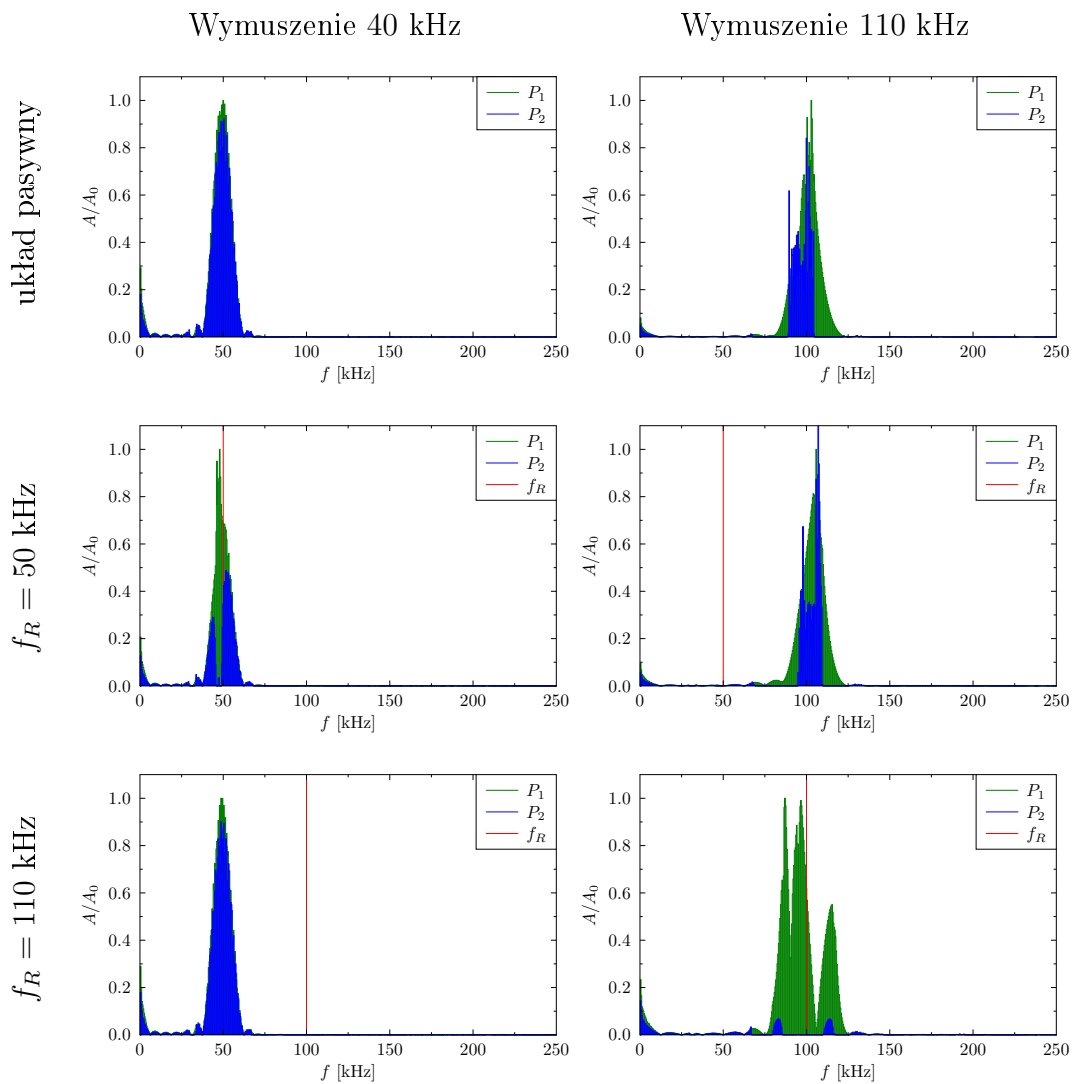
Gdy układ jest dostrojony do częstotliwości $f_R = 100$, czyli zgodnej z częstotliwością wymuszenia oraz znajdującą się wewnątrz pasma zabronionego występującego w strukturze pasywnej, obserwuje się wyraźne poszerzenie pasma zabronionego. Amplituda fali po przejściu przez strukturę ulega ponad dziesięciokrotnemu zmniejszeniu.

Jest to związane z ograniczeniem możliwości propagacji w strukturze periodycznej przy jednoczesnym rozpraszaniu energii na oporze elektrycznym.



Rysunek 4.23: Propagacja fal poprzecznych o częstotliwościach 50 kHz i 110 kHz w strukturze periodycznej z elementami piezoelektrycznymi





Rysunek 4.24: Widma drgań poprzecznych po wzbudzeniu o częstotliwościach 50 kHz i 100 kHz wyznaczone w punktach P_1 i P_2

Rozdział 5

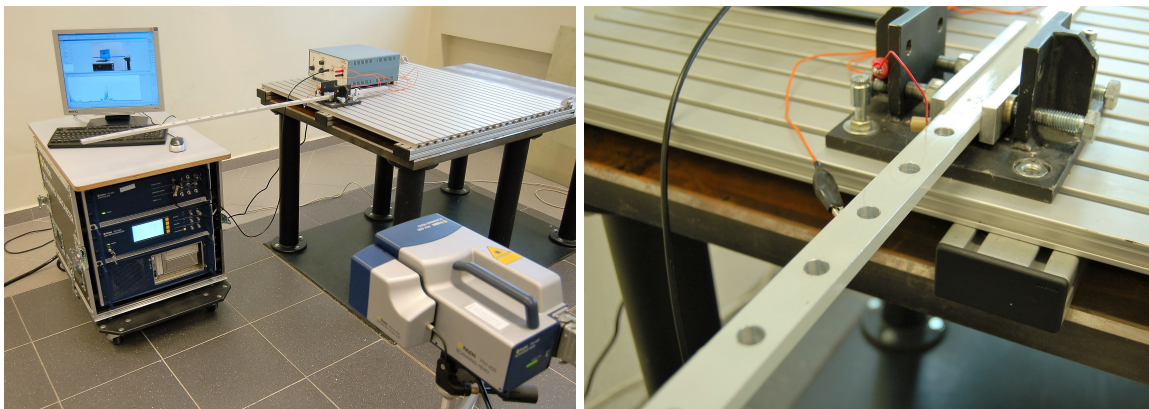
Badania eksperymentalne

W celu potwierdzenia wyników obliczeń numerycznych przeprowadzono również badania eksperymentalne za pomocą skaningowej doplerowskiej wibrometrii laserowej (SLDV – Scanning Laser Doppler Vibrometry), w laboratorium wibrometrii laserowej w Katedrze Mechatroniki i Inżynierii Wysokich Napięć na Wydziale Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej. Badania dotyczyły drgań wzdluznych i poprzecznych w jednowymiarowych strukturach periodycznych.

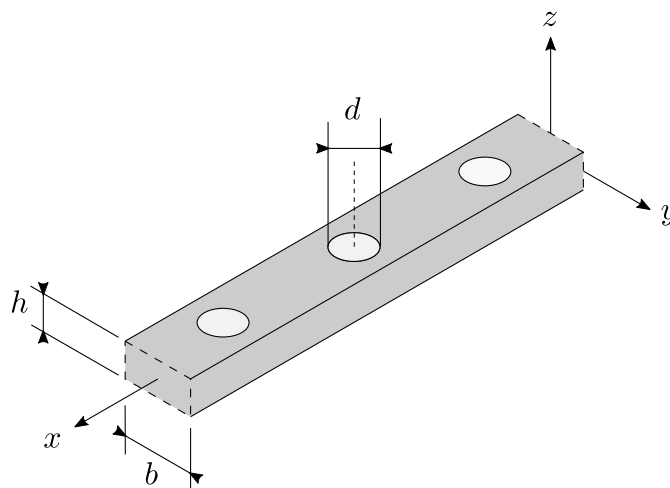
Badania przeprowadzono za pomocą wibrometru laserowego Polytec PSV-400. W skład stanowiska pomiarowego wchodził również stół antywibracyjny, oraz wzmacniacz America Piezo, Inc. model EPA-140 (± 200 Vpp). Do wzbudzenia drgań wykorzystano elementy piezoelektryczne American Piezo inc. model PZT-850 podłączone do wzmacniacza. Stanowisko pomiarowe przedstawione jest na rysunku 5.1

Pomiary eksperymentalne przeprowadzono na strukturach, których ogólny schemat przedstawiony jest na rysunku 5.2. Każda struktura była wykonana z aluminium belką w której było 20 otworów rozmieszczonych równomiernie na długości 1 m. Całkowita długość belki wynosiła 1,2 m, z czego 20 cm stanowiło mocowanie.





Rysunek 5.1: Stanowisko pomiarowe laserowej wibrometrii doplerowskiej, jedną strukturą

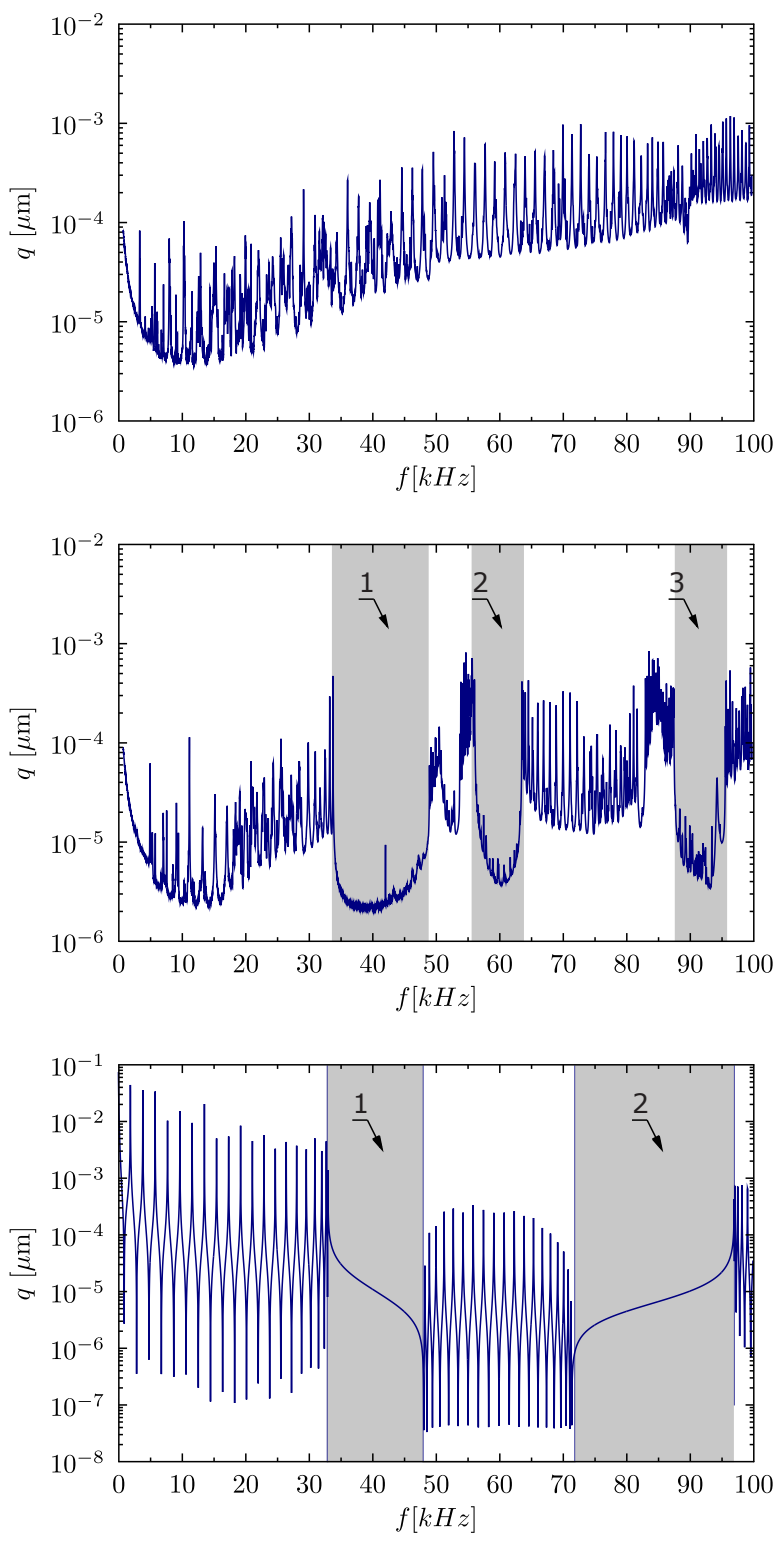


Rysunek 5.2: Schemat wycinka badanej struktury periodycznej

5.1 Drgania wzdłużne

W celu zbadania widma częstotliwości drgań wymuszonych opisana powyżej belka periodyczna o intensywności periodyczności $\alpha_H = d/b = 0,65$ została pobudzona do drgań wzdłużnych sygnałem typu *chirp* o częstotliwości w zakresie od 1 kHz do 200 kHz. Amplitudę mierzono w 2^{11} punktach, równomiernie umiejscowionych wzdłuż długości belki, a następnie wyniki uśredniono dla każdej częstotliwości.

Na wykresie 5.3 przedstawiono widma drgań wzdłużnych w przecię nieperiodycznym oraz periodycznym otrzymane eksperymentalnie i metodami numerycznymi. Wykres przedstawia odkształcenia w funkcji częstotliwości. Odkształcenia zaznaczone na wykresach eksperymentalnych są to odkształcenia w osi prostopadłej do drgań.



Rysunek 5.3: Widma drgań wzdłużnych pręta nieperiodycznego, periodycznego uzyskane za pomocą SDLV oraz charakterystyka amplitudowo częstotliwościowa uzyskana metodą TD-SFEM. Pręt periodyczny o periodyczności $N = 20$ i $\alpha_H = d/b = 0.65$ mm.

Wyniki otrzymane za pomocą wibrometru laserowego potwierdzają, że w izotropowej belce drgania wzdłużne występują w całym zakresie drgań, natomiast w belce periodycznej znajdują się pasma zabronione.

Pierwsze pasmo zabronione wykazuje bardzo dobrą zgodność z wynikami eksperymentalnymi. Na widmie eksperymentalnym widoczne są jeszcze dwa pasma, które nie są zgodne z wynikami symulacji numerycznych. Pasma nr 2 w widmie eksperymentalnym prawdopodobnie ma związek ze sprzężeniami pomiędzy wzdłużnymi i giętnymi postaciami drgań, których model numeryczny nie uwzględnia z uwagi na przyjęte w pracy rozprężenie. Pasma nr 3 pokrywa się w części z danymi symulacyjnymi. Istnienie drgań wewnątrz pasma zabronionego spowodowane jest prawdopodobnie nakładaniem się na pasmo zabronione dla drgań wzdłużnych pasma dozwolonego dla drgań giętnych lub skrętnych, jak pokazano na wykresie 3.28.

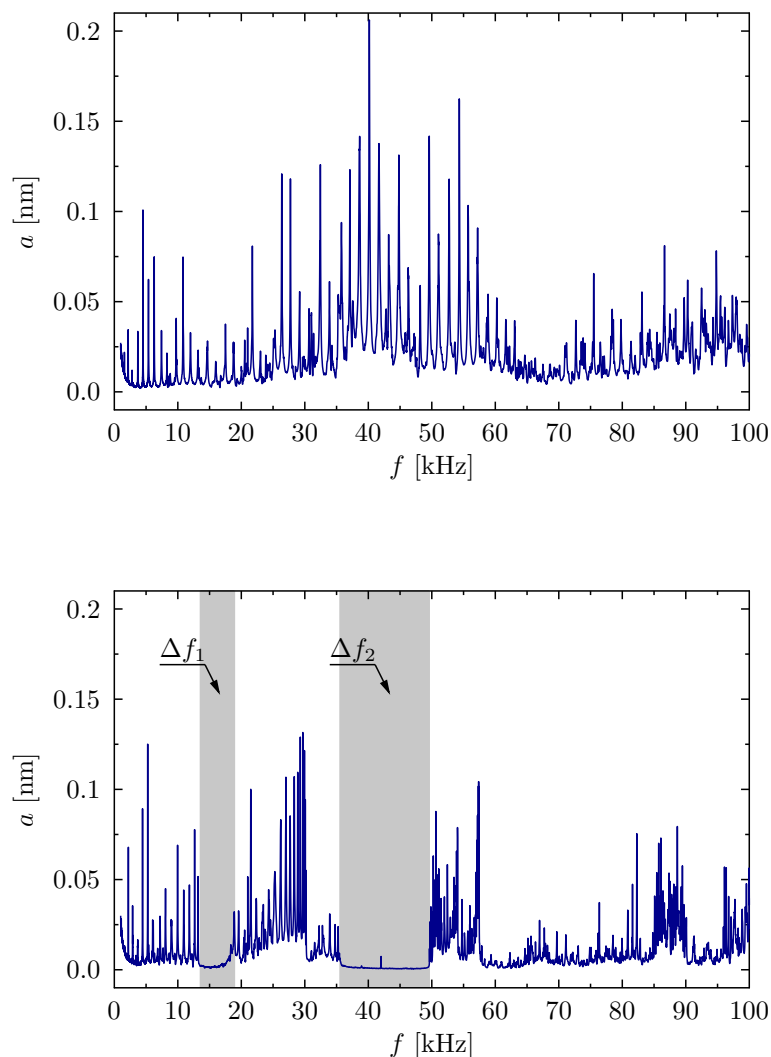
5.2 Drgania giętne

W celu potwierdzenia wyników numerycznych przeprowadzono badania eksperymentalne na belkach. Badane struktury periodyczne były belkami o wymiarach: długość $l = 1, 2$ m, szerokość $b = 25$ mm i wysokość $h = 10$ mm. W każdym z 9 badanych obiektów nawiercono 20 jednakowych otworów o średnicach od $d = 5$ do $d = 12$ mm, rozmieszczonych równomiernie na długości $l = 1$ m. Całkowita długość belki wynosiła $l = 1, 2$ m, z czego 20 cm służyło do utwierdzenia belki w uchwycie.

5.2.1 Drgania wymuszone

W pierwszym kroku zmierzono amplitudy giętnych drgań wymuszonych. W tym celu pobudzano belkę do drgań sygnałem typu *chirp* o częstotliwościach w zakresie od 1 kHz do 200 kHz. Amplituda była mierzona w 2^{11} punktach, rozmieszczonych równomiernie wzdłuż długości belki, a następnie uśrednione dla każdej częstotliwości.

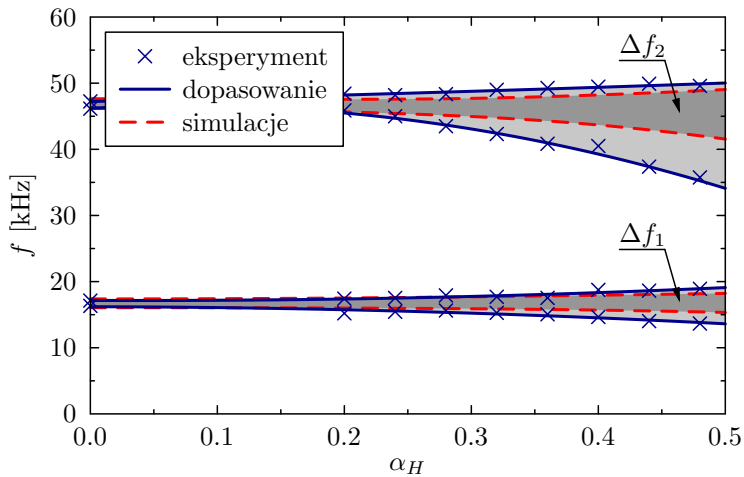
Wykres 5.4 przedstawia widmo częstotliwości drgań poprzecznych belki nieperiodycznej oraz periodycznej. W widmie struktury periodycznej widoczne są wyraźne pasma w których amplituda drgań wyraźnie maleje, czyli pasma zabronione oznaczone



Rysunek 5.4: Widmo drgań własnych belki nieperiodycznej (z lewej strony) oraz periodycznej (z prawej) uzyskane za pomocą SLDV. Otwory w belce periodycznej miały względną średnicę $\alpha_H = d/b = 0.5$

na wykresie kolorem szarym. Położenie pasm zabronionych w każdej ze zmierzonych belek naniesiono na wykres 5.5 wraz z wynikami symulacji komputerowych.

Wyniki otrzymane metodami numerycznymi oraz eksperymentalnymi wykazują dość dużą zbieżność. Położenie pasm zabronionych wyznaczone za pomocą symulacji numerycznych występują w podobnym zakresie częstotliwości w badaniach eksperymentalnych, jednak szerokość pasm zabronionych wyznaczonych za pomocą symulacji



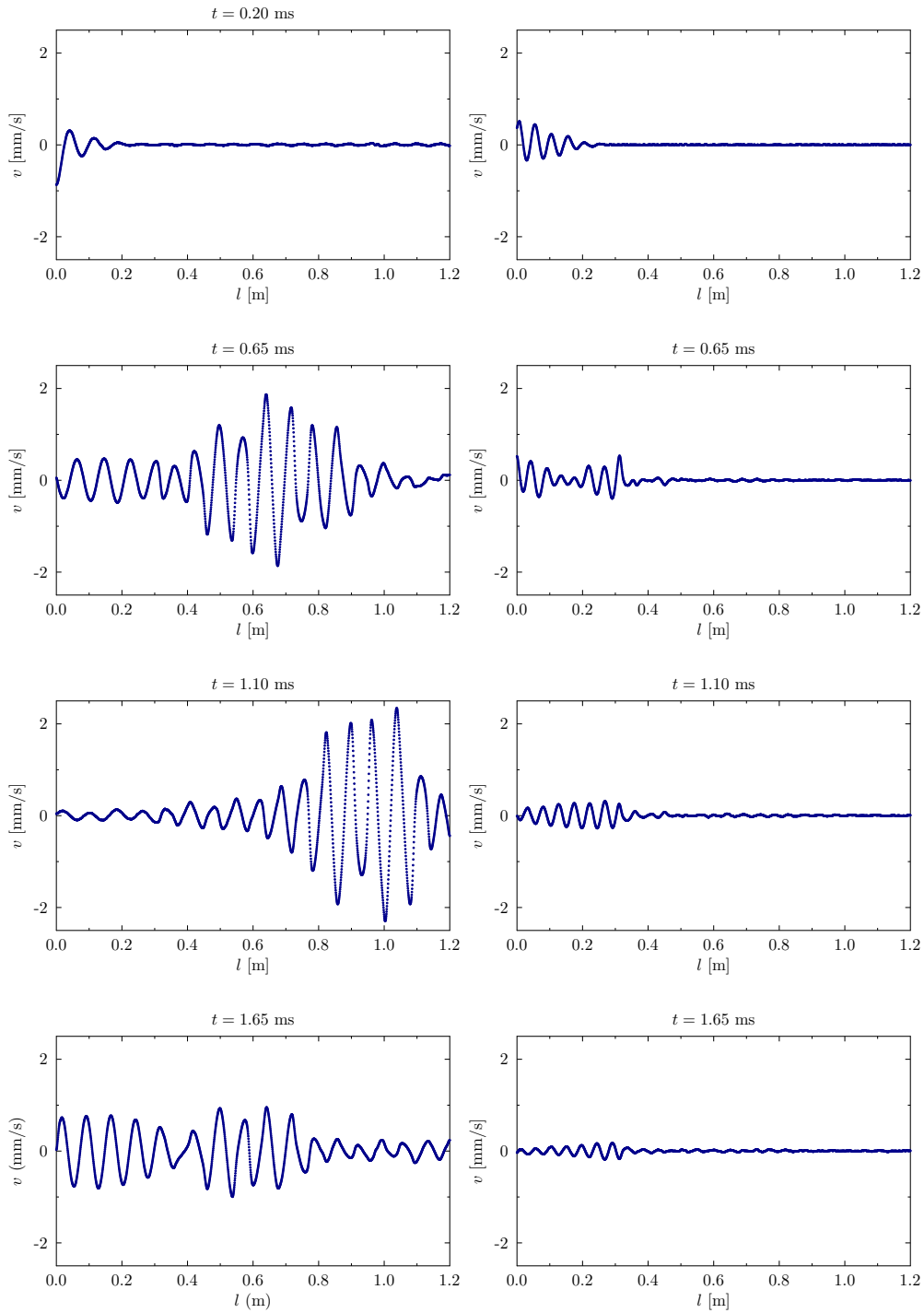
Rysunek 5.5: Porównanie położenia pasm zabronionych uzyskanych w wyniku badań eksperymentalnych z wynikami numerycznymi jako funkcja względnej średnicy otworów $\alpha_H = d/b = 0.5$. Wyniki otrzymane dla belki o periodyczności $N = 20$

jest mniejsza niż zmierzona. Może to wynikać z niedoszacowania funkcji korekcyjnej $f\left(\frac{d}{l_e}\right)$ w równaniu 3.4. Aby to skorygować należałoby oprzeć funkcję $f\left(\frac{d}{l_e}\right)$ całkowicie na wynikach eksperymentalnych.

5.2.2 Propagacja fal

Zbadana została również propagacja fal sprężystych strukturze periodycznej. W celu pokazania wydajności struktury periodycznej jako filtru częstotliwości wybrano dwie częstotliwości fal: $f = 22$ kHz jako falę o częstotliwości z zakresu pasma dozwolonego i $f = 44$ kHz jako falę o częstotliwości z zakresu pasma zabronionego. W obydwu przypadkach sygnałem było 10 impulsów sinusoidalnych modulowanych oknem Hanninga. W przypadku pomiarów propagacji fal belka była swobodna, dlatego efektywna długość belki wynosiła $l = 1, 2$ m, a fragment bez otworów został wykorzystany jako przestrzeń do całkowitego wytworzenia sygnału przed wejściem w strukturę periodyczną.

Wykresy 5.6 przedstawiają amplitudy prędkości w funkcji długości belki w wybranych momentach. Potwierdzają one wcześniejsze obserwacje. Fala o częstotliwości



Rysunek 5.6: Wykresy prędkości punktów pomiarowych na belce w funkcji odległości wyznaczone za pomocą SLDV w różnych chwilach. Belka periodyczna z 20 otworami o średnicy $\alpha_H = d/b = 0,5$. Częstotliwość fali wymuszającej $f = 22$ kHz (lewa strona) i $f = 44$ kHz (prawa)

z zakresu pasma dozwolonego przemieszcza się przez strukturę periodyczną bez zakłóceń, natomiast fala o częstotliwości z zakresu pasma zabronionego $f = 44$ kHz nie może propagować i w efekcie jest silnie tłumiona. Amplituda drgań spada o 91,5 % w czasie 1,55 ms od momentu wymuszenia.

Rozdział 6

Podsumowanie

Wyniki symulacji przeprowadzonych na bazie opracowanych modeli numerycznych umożliwiły przeprowadzenie oceny możliwości wykorzystania właściwości struktur periodycznych w celu tłumienia drgań mechanicznych.

Praca podzielona była na trzy etapy. Pierwszy etap polegał na opracowaniu modeli numerycznych i określeniu ich jakości w odniesieniu do wyników dostępnych w literaturze.

Drugi etap badań polegał na wyznaczeniu charakterystyk dynamicznych pasywnych struktur periodycznych. Ten etap badań pozwolił na określenie ogólnych zależności występowania zjawisk wynikających z periodyczności struktury od parametrów struktury periodycznej i jej komórki elementarnej. W każdym z badanych przypadków w widmie struktury periodycznej pojawiały się pasma zabronione. Intensywność periodyczności wpływa istotnie na szerokość pasm zabronionych nie zmieniając ich liczby, ani położenia w widmie częstości. Z kolei im większa jest periodyczność struktury, tym pasma są szersze i wyżej położone, ale ich liczba jest mniejsza. Wyniki symulacji komputerowych dotyczących struktur pasywnych zostały również pozytywnie zweryfikowane eksperymentalnie.

Z przeanalizowanych jednowymiarowych pasywnych struktur periodycznych najlepsze wyniki uzyskuje się w przypadku, gdy źródłem periodyczności jest obecność otworów. Z drugiej strony najmniejszy wpływ na obserwowane zmiany charaktery-

styk dynamicznych wykazują struktury, w których źródłem periodyczności są zmiany modułu sprężystości.

Trzeci etap pracy obejmował rozwinięcie modeli numerycznych w sposób, który umożliwił symulowanie struktur z elementami piezoelektrycznymi.

Struktury periodyczne, w których periodyczność geometryczna wynika z wykorzystania aktywnych elementów piezoelektrycznych można również wykorzystać jako pasywne układy tłumiące, a wnioski dotyczące takich układów znajdują zastosowanie również w tym przypadku.

Struktury periodyczne z aktywnymi elementami piezoelektrycznymi włączonymi w obwód rezonansowy RLC mogą być z powodzeniem wykorzystywane do tłumienia drgań w sposób kontrolowany. Obwód rezonansowy z elementem piezoelektrycznym powoduje pojawienie się pasma zabronionego w widmie drgań mechanicznych przy częstotliwości drgań własnych układu rezonansowego RLC.

Dostrojenie częstotliwości rezonansowych układów RLC do częstotliwości, która znajduje się w paśmie zabronionym w widmie drgań mechanicznych, powoduje wyraźne poszerzenie się pasma zabronionego, co przekłada się na znaczne zwiększenie wydajności tłumienia drgań w tym zakresie częstotliwości. Za pomocą układów RLC można również w niewielkim stopniu wpływać na położenie pasma zabronionego.

Bibliografia

- [1] Charles Kittel. *Wstęp do fizyki ciała stałego*. Państwowe wydawnictwo naukowe, 1974.
- [2] VN Astratov, VN Bogomolov, AA Kaplyanskii, AV Prokofiev, LA Samoilovich, SM Samoilovich, and Yu A Vlasov. Optical spectroscopy of opal matrices with cds embedded in its pores: Quantum confinement and photonic band gap effects. *Il Nuovo Cimento D*, 17(11-12):1349–1354, 1995.
- [3] Serge Berthier, Eric Charron, and Anabela Da Silva. Determination of the cuticle index of the scales of the iridescent butterfly morpho menelaus. *Optics communications*, 228(4):349–356, 2003.
- [4] CH DARWIN. The origin of species by means of natural selection. london: Murray. reedited by e mayr, 1859.
- [5] Viktor G Veselago. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Soviet physics uspekhi*, 10(4):509, 1968.
- [6] Richard A Shelby, David R Smith, and Seldon Schultz. Experimental verification of a negative index of refraction. *science*, 292(5514):77–79, 2001.
- [7] David R Smith, John B Pendry, and Mike CK Wiltshire. Metamaterials and negative refractive index. *Science*, 305(5685):788–792, 2004.
- [8] Vladimir M Shalaev, Wenshan Cai, Uday K Chettiar, Hsiao-Kuan Yuan, Andrey K Sarychev, Vladimir P Drachev, and Alexander V Kildishev. Negative index of refraction in optical metamaterials. *Optics letters*, 30(24):3356–3358, 2005.
- [9] Costas M Soukoulis, Stefan Linden, and Martin Wegener. Negative refractive index at optical wavelengths. *Science*, 315(5808):47–49, 2007.
- [10] AG Kolpakov. Determination of the average characteristics of elastic frameworks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 49(6):739–745, 1985.
- [11] Igor Shufrin, Elena Pasternak, and Arcady V Dyskin. Planar isotropic structures with negative poisson's ratio. *International Journal of Solids and Structures*, 49(17):2239–2253, 2012.



- [12] Michael S Rill, Christine Plet, Michael Thiel, Isabelle Staude, Georg Von Freymann, Stefan Linden, and Martin Wegener. Photonic metamaterials by direct laser writing and silver chemical vapour deposition. *Nature materials*, 7(7):543–546, 2008.
- [13] Hui Liu, Xiaopeng Zhao, Yang Yang, Qingwu Li, and Jun Lv. Fabrication of infrared left-handed metamaterials via double template-assisted electrochemical deposition. *Advanced Materials*, 20(11):2050–2054, 2008.
- [14] Qingkun Liu, Yanxia Cui, Dennis Gardner, Xin Li, Sailing He, and Ivan I Smalyukh. Self-alignment of plasmonic gold nanorods in reconfigurable anisotropic fluids for tunable bulk metamaterial applications. *Nano letters*, 10(4):1347–1353, 2010.
- [15] Silvia Vignolini, Nataliya A Yufa, Pedro S Cunha, Stefan Guldin, Ilia Rushkin, Morgan Stefik, Kahyun Hur, Ulrich Wiesner, Jeremy J Baumberg, and Ullrich Steiner. A 3d optical metamaterial made by self-assembly. *Advanced Materials*, 24(10), 2012.
- [16] Haydn NG Wadley. Multifunctional periodic cellular metals. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 364(1838):31–68, 2006.
- [17] Isaac Newton, Andrew Motte, and NW Chittenden. *Newton's principia: The mathematical principles of natural philosophy*. Geo. P. Putnam, 1850.
- [18] Felix Bloch. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Zeitschrift für physik*, 52(7-8):555–600, 1929.
- [19] RS Langley. The response of two-dimensional periodic structures to point harmonic forcing. *Journal of sound and vibration*, 197(4):447–469, 1996.
- [20] D. Bigoni, M. Gei, and A. B. Movchan. Dynamics of a prestressed stiff layer on an elastic half space: filtering and band gap characteristics of periodic structural models derived from long-wave asymptotics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:2494–2520, 2008.
- [21] Y. Lu and J. Guo. Band gap of strained graphene nanoribbons. *Nano Research*, 3:189–199, 2010.
- [22] H. J. Xiang, Z. F. Shi, S. J. Wang, and Y. L. Mo. Periodic materials-based vibration attenuation in layered foundations: Experimental validation. *Smart Materials and Structures*, 21:doi:10.1088/0964-1726/21/11/112003, 2012.
- [23] Y. Xiao, J. Wen, D. Yu, and X. Wen. Flexural wave propagation in beams with periodically attached vibration absorbers: Band-gap behavior and band formation mechanisms. *Journal of Sound and Vibration*, 332:867–893, 2013.

- [24] F. Kobayashi, S. Biwa, and N. Ohno. Wave transmission characteristics in periodic media of finite length: Multilayers and fiber arrays. *International Journal of Solids and Structures*, 41:7361–7375, 2004.
- [25] A. L. Chen and Y. S. Wang. Study on band gaps of elastic waves propagating in one-dimensional disordered phononic crystals. *Physica B: Condensed Matter*, 392:369–378, 2007.
- [26] D. Yu, Y. Liu, H. Zhao, G. Wang, and J. Qiu. Flexural vibration band gaps in Euler-Bernoulli beams with locally resonant structures with two degrees of freedom. *Physical Review B – Condensed Matter and Materials Physics*, 73:doi:10.1103/PhysRevB.73.064301, 2006.
- [27] D. Yu, J. Wen, H. Zhao, Y. Liu, and X. Wen. Vibration reduction by using the idea of phononic crystals in a pipe-conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 318:193–205, 2008.
- [28] L. Liu and M. I. Hussein. Wave motion in periodic flexural beams and characterization of the transition between bragg scattering and local resonance. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 79:doi:10.1115/1.4004592, 2012.
- [29] Huijie Shen, Jihong Wen, Dianlong Yu, and Xisen Wen. The vibrational properties of a periodic composite pipe in 3d space. *Journal of Sound and Vibration*, 328(1):57–70, 2009.
- [30] A Baz et al. Attenuation of wave propagation in a novel periodic structure. *Journal of Central South University of Technology*, 18(2):438–443, 2011.
- [31] Woojin Jung, Zheng Gu, and A Baz. Mechanical filtering characteristics of passive periodic engine mount. *Finite Elements in Analysis and Design*, 46(9):685–697, 2010.
- [32] Yu-Kweng Lin and TJ McDaniel. Dynamics of beam-type periodic structures. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 91(4):1133–1141, 1969.
- [33] T. Suzuki and P. K. L. Yu. Complex elastic wave band structures in three-dimensional periodic elastic media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46:115–138, 1998.
- [34] S. V. Sorokin and O. A. Ershova. Plane wave propagation and frequency band gaps in periodic plates and cylindrical shells with and without heavy fluid loading. *Journal of Sound and Vibration*, 278:501–526, 2004.
- [35] C. Charles, B. Bonello, and F. Ganot. Propagation of guided elastic waves in 2D phononic crystals. *Ultrasonics*, 44:doi:10.1016/j.ultras.2006.05.096, 2006.
- [36] Y. Z. Wang, F. M. Li, W. H. Huang, X. Jiang, Y. S. Wang, and K. Kishimoto. Wave band gaps in two-dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystals. *International Journal of Solids and Structures*, 45:4203–4210, 2008.

- [37] M. J. Leamy. Exact wave-based Bloch analysis procedure for investigating wave propagation in two-dimensional periodic lattices. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 331:1580–1596, 2012.
- [38] MM Sigalas. Elastic wave band gaps and defect states in two-dimensional composites. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 101(3):1256–1261, 1997.
- [39] Rongzhou Wang, Xue-Hua Wang, Ben-Yuan Gu, and Guo-Zhen Yang. Effects of shapes and orientations of scatterers and lattice symmetries on the photonic band gap in two-dimensional photonic crystals. *Journal of Applied Physics*, 90(9):4307–4313, 2001.
- [40] M. Rahman and M. A. Stuchly. Circularly polarised patch antenna with periodic structure. *IEE Proceedings: Microwaves, Antennas and Propagation*, 149:141–146, 2002.
- [41] P. F. Hsieh, T. T. Wu, and J. H. Sun. Three-dimensional phononic band gap calculations using the FDTD method and a PC cluster system. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 53:148–158, 2006.
- [42] T. Lu, G. Gao, S. Ma, F. Jin, and T. Kim. Acoustic band gaps in two-dimensional square arrays of semi-hollow circular cylinders. *Science in China, Series E: Technological Sciences*, 52:303–312, 2009.
- [43] J. Shibayama, R. Ando, J. Yamauchi, and H. Nakano. An LOD-FDTD method for the analysis of periodic structures at normal incidence. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 8:890–893, 2009.
- [44] X. Q. Zhou, D. Y. Yu, X. Shao, S. Wang, and Y. H. Tian. Band gap characteristics of periodically stiffened-thin-plate based on center-finite-difference-method. *Thin-Walled Structures*, 82:115–123, 2014.
- [45] Yongjun Cao, Zhilin Hou, and Youyan Liu. Finite difference time domain method for band-structure calculations of two-dimensional phononic crystals. *Solid state communications*, 132(8):539–543, 2004.
- [46] Jia-Hong Sun and Tsung-Tsong Wu. Propagation of acoustic waves in phononic-crystal plates and waveguides using a finite-difference time-domain method. *Physical Review B*, 76(10):104304, 2007.
- [47] D. L. Thomas. Dynamics of rotationally periodic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14:81–102, 1979.
- [48] P. Langlet, A. C. Hladky-Hennion, and J. N. Decarpigny. Analysis of the propagation of plane acoustic waves in passive periodic materials using the finite element method. *Journal of the Acoustical Society of Americas*, 98:2792–2800, 1995.

- [49] M. Ruzzene, F. Scarpa, and F. Soranna. Wave beaming effects in two-dimensional cellular structures. *Smart Materials and Structures*, 12:363–372, 2003.
- [50] D. Duhamel, B. R. Mace, and M. J. Brennan. Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 294:205–220, 2006.
- [51] Y. Cheng, J. Y. Xu, and X. J. Liu. Analysis of the propagation of plane acoustic waves in passive periodic materials using the finite element method. *Physical Review B – Condensed Matter and Materials Physics*, 77:doi:10.1103/PhysRevB.77.045134, 2008.
- [52] AR Diaz, AG Haddow, and L Ma. Design of band-gap grid structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 29(6):418–431, 2005.
- [53] Zhi-Jing Wu, Feng-Ming Li, and Yi-Ze Wang. Study on vibration characteristics in periodic plate structures using the spectral element method. *Acta Mechanica*, 224(5):1089–1101, 2013.
- [54] MM Sigalas and EN Economou. Elastic waves in plates with periodically placed inclusions. *Journal of Applied Physics*, 75(6):2845–2850, 1994.
- [55] Y. Xiao, J. Wen, G. Wang, and X. Wen. Theoretical and experimental study of locally resonant and bragg band gaps in flexural beams carrying periodic arrays of beam-like resonators. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 135:doi:10.1115/1.4024214, 2013.
- [56] Z. J. Wu, Y. Z. Wang, and F. M. Li. Analysis on band gap properties of periodic structures of bar system using the spectral element method. *Waves in Random and Complex Media*, 23:349–372, 2013.
- [57] Z. J. Wu, F. M. Li, and Y. Z. Wang. Vibration band gap properties of periodic Mindlin plate structure using the spectral element method. *Meccanica*, 49:725–737, 2014.
- [58] Z. J. Wu, F. M. Li, and C. Zhang. Vibration band-gap properties of three-dimensional Kagome lattices using the spectral element method. *Journal of Sound and Vibration*, 341:162–173, 2015.
- [59] Zhi-Jing Wu, Yi-Ze Wang, and Feng-Ming Li. Analysis on band gap properties of periodic structures of bar system using the spectral element method. *Waves in Random and Complex Media*, 23(4):349–372, 2013.
- [60] Stefano Gonella and Massimo Ruzzene. Homogenization and equivalent in-plane properties of two-dimensional periodic lattices. *International Journal of Solids and Structures*, 45(10):2897–2915, 2008.

- [61] Mahmoud I Hussein. Reduced bloch mode expansion for periodic media band structure calculations. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 465, pages 2825–2848. The Royal Society, 2009.
- [62] S. Halkjar, O. Sigmund, and J. S. Jensen. Maximizing band gaps in plate structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 32:263–275, 2006.
- [63] W. Xiao, G. W. Zeng, and Y. S. Cheng. Flexural vibration band gaps in a thin plate containing a periodic array of hemmed discs. *Applied Acoustics*, 69:doi:10.1016/j.apacoust.2006.09.003, 2008.
- [64] F. Farzbod and M. J. Leamy. Analysis of Bloch’s method in structures with energy dissipation. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 133:doi:10.1115/1.4003943, 2011.
- [65] L. Liu and M. I. Hussein. Wave motion in periodic flexural beams and characterization of the transition between bragg scattering and local resonance. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 79:doi:10.1115/1.4004592, 2012.
- [66] J Rychlewska, J Szymczyk, and C Woźniak. On the modelling of dynamic behavior of periodic lattice structures. *Acta mechanica*, 170(1-2):57–67, 2004.
- [67] JP Henderson and TJ McDaniel. The analysis of curved multi-span structures. *Journal of Sound and Vibration*, 18(2):203–219, 1971.
- [68] Leon Brillouin. *Wave propagation in periodic structures: electric filters and crystal lattices*. Courier Corporation, 2003.
- [69] Léon Brillouin. Les électrons dans les métaux et le classement des ondes de de broglie correspondantes. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences*, 191:292, 1930.
- [70] Anthony T Patera. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *Journal of computational Physics*, 54(3):468–488, 1984.
- [71] James F Doyle. Spectral analysis of wave motion. *Wave Propagation in Structures*, pages 7–42, 1997.
- [72] A Żak and M Krawczuk. Certain numerical issues of wave propagation modelling in rods by the spectral finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(9):1036–1046, 2011.
- [73] Frank D Hastings, John B Schneider, and Shira L Broschat. Application of the perfectly matched layer (pml) absorbing boundary condition to elastic wave propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 100(5):3061–3069, 1996.

- [74] A Żak, M Krawczuk, and M Palacz. Periodic properties of 1d fe discrete models in high frequency dynamics. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016, 2016.
- [75] YM Xie and Grant P Steven. Explicit formulas for correcting finite-element predictions of natural frequencies. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 9(8):671–680, 1993.
- [76] RA Schapery. A theory of mechanical behavior of elastic media with growing damage and other changes in structure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38(2):215–253, 1990.
- [77] Jean Lemaitre and Jean-Louis Chaboche. *Mechanics of solid materials*. Cambridge university press, 1994.
- [78] Jean Lemaitre. *A course on damage mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [79] Robert D Blevins and R Plunkett. Formulas for natural frequency and mode shape. *Journal of Applied Mechanics*, 47:461, 1980.
- [80] G Bao, S Ho, Zhigang Suo, and B Fan. The role of material orthotropy in fracture specimens for composites. *International Journal of Solids and Structures*, 29(9):1105–1116, 1992.
- [81] Wiesław Ostachowicz and Marek Krawczuk. Modeling for detection of degraded zones in metallic and composite structures. *Encyclopedia of Structural Health Monitoring*, 2009.
- [82] Wieslaw Ostachowicz, Pawel Kudela, Marek Krawczuk, and Arkadiusz Zak. *Guided waves in structures for SHM: the time-domain spectral element method*. John Wiley & Sons, 2011.
- [83] Takeo Furukawa. Piezoelectricity and pyroelectricity in polymers. *IEEE transactions on electrical insulation*, 24(3):375–394, 1989.
- [84] VV Kochervinskii. Piezoelectricity in crystallizing ferroelectric polymers: Poly (vinylidene fluoride) and its copolymers (a review). *Crystallography Reports*, 48(4):649–675, 2003.
- [85] Nesbitt W Hagood and Andreas von Flotow. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration*, 146(2):243–268, 1991.
- [86] Luca Airoldi, Matteo Senesi, and Massimo Ruzzene. Piezoelectric superlattices and shunted periodic arrays as tunable periodic structures and metamaterials. In *Wave Propagation in Linear and Nonlinear Periodic Media*, pages 33–108. Springer, 2012.