



**POLITECHNIKA  
GDAŃSKA**

WYDZIAŁ FIZYKI TECHNICZNEJ  
I MATEMATYKI STOSOWANEJ



Imię i nazwisko autora rozprawy: Karol Wroński  
Dyscyplina naukowa: matematyka

## ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Istnienie i regularność heteroklinicznych rozwiązań równania Allena-Cahna z anizotropowym operatorem eliptycznym.

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Existence and regularity of heteroclinic solutions of the Allen-Cahn type problem with an anisotropic elliptic operator.

Promotor	Drugi promotor
<i>podpis</i>	
prof. dr hab. Marek Izydorek	
Promotor pomocniczy	Kopromotor
<i>podpis</i>	
dr inż. Jakub Maksymiuk	

Gdańsk, 17.09.2019



---

## Spis treści

Wstęp . . . . .	1
Spis oznaczeń . . . . .	5
Rozdział 1. Przydatne definicje i lematy . . . . .	7
Rozdział 2. Twierdzenie o regularności słabych rozwiązań . . . . .	15
Rozdział 3. Rozwiązania heterokliniczne problemu Allena-Cahna . . . . .	29
Uwagi końcowe . . . . .	39
Bibliografia . . . . .	41



---

# Wstęp

Celem niniejszej rozprawy jest udowodnienie dwóch twierdzeń dotyczących równań różniczkowych cząstkowych typu eliptycznego. Pierwsze mówi o regularności słabych rozwiązań pewnej klasy równań eliptycznych z operatorem anizotropowym. Drugie mówi o istnieniu heteroklinicznych rozwiązań problemu typu Allena-Cahna z takim operatorem.

Eliptyczne równanie typu Allena-Cahna najczęściej jest zapisywane w postaci

$$-\Delta u(x) + F_u(x, u(x)) = 0,$$

przy dość różnorodnych dziedzinach i warunkach brzegowych. Charakterystyczną cechą rozróżniającą równanie Allena-Cahna od innych równań eliptycznych jest funkcja  $F(x, \cdot)$ , o której zakłada się, że ma co najmniej dwa miejsca zerowe będące minimami. Typowym przykładem takiej funkcji jest  $F(u) = u^2(u - 1)^2$ . Równanie ma swoje źródło w artykule Allena i Cahna [4], którzy badali własności stopów metali. Równanie tego typu znalazło także swoje zastosowanie do opisu wielu innych procesów fizycznych jak na przykład badanie przejść fazowych [31], przetwarzanie obrazów [7], czy rozwój nowotworów [25]. Równanie Allena-Cahna jest szczególnym przypadkiem modelu reakcji-dyfuzji i odpowiada mu funkcjonał energii

$$\int \frac{1}{2}|u(x)|^2 + F(x, u(x))dx$$

Zagadnienie reakcji-dyfuzji jest szerzej opisane w [9, 12, 17].

Równanie Allena-Cahna opisuje dużo różnorodnych zjawisk więc było wielokrotnie badane przez matematyków i istnieje wiele czysto matematycznych artykułów na ten temat. Rozważanych było wiele różnych typów rozwiązań tego równania (wiele przykładów znajdziemy np. w [24]). W tej rozprawie udowodnimy istnienie rozwiązań spełniających następujące warunki:

$$u(x + ke_i) = u(x) \text{ dla } 1 < i \leq n, \quad \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} u(x) = 0 \quad \text{ i } \quad \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} u(x) = 1,$$

czyli okresowych w  $n - 1$  ostatnich współrzędnych i heteroklinicznych w pierwszej zmiennej  $x_1$ . Opisane powyżej rozwiązania heterokliniczne można interpretować np. jako stan



przejściowy między dwoma stanami fizycznymi odpowiadającymi miejscom zerowym  $F$ , czyli rozwiązaniom stałym. Takie rozwiązania (jak również inne typy rozwiązań) są rozważane w artykule Rabinowitza i Stredulinskiego [24]. Także Alessio, Jeanjean i Montecchiari w [2] i [3] rozważają ten typ rozwiązań, ale przy szczególnej postaci potencjału:  $F(x, u) = f(x)F(u)$ .

Jest widoczna wyraźna potrzeba uwzględniania niestandardowych operatorów eliptycznych, ponieważ równanie Allena-Cahna czy ogólniej, problem reakcji-dyfuzji w wielu zastosowaniach jest opisywany równaniami z niestandardowymi operatorami eliptycznymi. W wielu materiałach (takich jak np. kryształy) dyfuzja zachodzi anizotropowo, czyli w różnym stopniu zależnie od kierunku [9]. Równanie Allena-Cahna może też być stosowane gdy zamiast zjawiska dyfuzji zachodzi zjawisko super-dyfuzji. Wówczas w równaniu zamiast laplasjanu rozważa się ułamkowy  $s$ -laplasjan [14, 30].

W matematycznych artykułach na temat problemu Allena-Cahna jest wielokrotnie cytowany artykuł Mosera [21]. Wyniki z tej pracy zostały później uogólnione przez Bangerta [5], gdzie bada on minima funkcjonału  $\int L(x, u(x), \nabla u(x)) dx$  na  $W_{loc}^{1,2}$ , zaś funkcja  $L$  jest okresowa w zmiennej  $x$  zaś w zmiennej  $\nabla u$  jest wypukła. Funkcjonał ten jest bardzo ogólnej postaci, w szczególności nie musi pochodzić od laplasjanu mimo, że zakładany jest wzrost kwadratowy  $L$  względem  $\nabla u$ . Operator eliptyczny w równie ogólnej postaci rozważany jest także w pracy Llave i Valdinoci [10]. Tam również zakładany jest kwadratowy wzrost operatora.

W literaturze dotyczącej problemu Allena-Cahna istotnie dominują operatory ze wzrostem kwadratowym, zaś stosunkowo mało jest wyników uwzględniających operatory mniej standardowe. W szczególności, nie było znane żadne twierdzenie o istnieniu i pełnej regularności rozwiązań heteroklinicznych dla problemu Allena-Cahna z operatorem o innym wzroście. Takie twierdzenie udowodniłem w artykule [32], gdzie rozważam operator eliptyczny w postaci dywergencyjnej  $\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x)))$ , przy założeniach izotropowego wzrostu  $G$  z  $m$ -tą potęgą. Z uwagi na większy wzrost  $G$  przestrzeń  $W_{loc}^{1,2}$  została tam zastąpiona przez  $W_{loc}^{1,m}$ . Oczywiście, gdy  $G = \frac{1}{2}|\cdot|^2$  to  $\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x))) = \Delta u(x)$ .

W tej rozprawie powyższy wynik zostanie uogólniony. W rozdziale 3 zostanie wykazane, że w problemie typu Allena-Cahna operator eliptyczny  $\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x)))$  może pochodzić od anizotropowej funkcji wypukłej  $G$ . Analogicznie, przestrzenie Sobolewa  $W_{loc}^{1,m}$  zostaną zastąpione anizotropowymi przestrzeniami Orlicza-Sobolewa  $W_{loc}^{1,G}$ .

Rozważany problem typu Allena-Cahna będzie więc miał następującą postać:

$$\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x))) + F_u(x, u(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

gdzie  $F$  ma dwa minima i jest okresowe względem  $x$ . Precyzyjnie sformułowane założenia znajdują się w rozdziale 3.

Rozważane uogólnienie nie jest inspirowane żadnym konkretnym problemem fizycznym, ale niestandardowe operatory eliptyczne związane z problemem reakcji-dyfuzji są często rozpatrywane, więc warto przeanalizować problem również z punktu widzenia potencjalnego użycia przestrzeni Orlicza-Sobolewa.

Zastosowanie operatora pochodzącego od anizotropowej funkcji  $G$  o wzroście wielomianowym oraz przestrzeni Orlicza-Sobolewa  $W^{1,G}$  spowodowało szereg technicznych trudności. Główną był brak twierdzenia o regularności słabych rozwiązań dla anizotropowych operatorów typu  $\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x)))$ . Dotychczas znane twierdzenia (na przykład podane w pracach Marcellini [19] lub [20]) okazały się niemożliwe do zastosowania w rozważanym problemie ze względu na słabe powiązanie przestrzeni funkcyjnej ze wzrostem funkcjonału. Powstała więc potrzeba udowodnienia odpowiedniego twierdzenia o regularności słabych rozwiązań. Jest to twierdzenie 2.1 z rozdziału 2. Dowód bazuje na metodach zbliżonych do dowodu twierdzenia 2.3 z artykułu Marcellini [20] oraz twierdzenia 3.1 z artykułu Siepe [27].

Pierwszy i jednocześnie główny wynik rozprawy jest następujący:

- przy założeniach  $(G_1)$ - $(G_7)$  oraz  $(A_1)$ - $(A_3)$  z rozdziału 2 słabe rozwiązania równania (1) są klasy  $W_{loc}^{1,\infty} \cap W_{loc}^{2,2}$ .

Twierdzenie to jest sformułowane z założeniami słabszymi niż założenia twierdzenia o istnieniu rozwiązań heteroklinicznych dowodzonego w rozdziale 3. W szczególności, założenia na funkcję  $F$  są dużo ogólniejsze niż w równaniu Allena-Cahna. Dzięki temu samo twierdzenie o regularności jest ciekawym rezultatem w teorii równań eliptycznych.

W twierdzeniu 2.1 zostało założone, że funkcja  $G$  spełnia warunki  $\Delta_2$  i  $\nabla_2$ , a więc jest ograniczona przez wielomiany. Niekoniecznie jednak posiada wzrost związany z jedną ustaloną potęgą. Co więcej, dopuszczony jest też wzrost anizotropowy, tzn. funkcja  $G$  może w istotnie różny sposób zależeć od wszystkich pochodnych cząstkowych, a nie tylko od modułu  $|Du|$ .

W pracy [19] podobne twierdzenie o regularności dowodzone jest przy założeniu  $p, q$  - wzrostu. W [20] rozważany jest funkcjonał o wzroście wielomianowym, który może być anizotropowy, ale przestrzeń w której badany jest problem wyznaczona jest przez funkcję izotropową ograniczającą z góry wzrost operatora. W [27] pojawiają się anizotropowe warunki wzrostu, a przestrzeń w której poszukiwane są rozwiązania jest bezpośrednio wyznaczona przez funkcję  $G$ . W [27] jednak badany funkcjonał jest w prostszej postaci  $\int G(Du)dx$  (czyli



bez zależności od  $u$  i  $x$ ). Główną różnicą pomiędzy twierdzeniem 2.1 a wynikami Marcellini jest zakładana wyjściowa klasa całkowalności słabych rozwiązań (czyli przestrzeni w której poszukiwane są minima funkcjonału). W tej rozprawie zakłada się, że są one całkowalne po złożeniu pochodnej z funkcją  $G$  (czyli  $\int G(Dv)dx < \infty$ ). Marcellini zakłada całkowalność pochodnej złożonej z pewną funkcją izotropową, która rośnie szybciej niż wynikałoby to z postaci funkcjonału. Przestrzeń której używa jest podprzestrzenią użytego tu  $W^{1,G}$ . Rozważanie w [20] takiej przestrzeni i izotropowego warunku wzrostu ułatwia dowód, ale może powodować trudności w zastosowaniu metod wariacyjnych, gdyż ciąg minimalizujący może nie posiadać granicy w tej przestrzeni. Celowość stosowania przestrzeni dobrze powiązanej z funkcjonałem widać w szczególności w rozdziale 3.

Anizotropowe funkcje wypukłe mogą nie być monotoniczne ze względu na moduł, tzn. możliwe jest, że  $G(\xi_1) > G(\xi_2)$  gdy  $|\xi_1| < |\xi_2|$ . Między innymi z tego powodu bezpośrednie stosowanie funkcji anizotropowych w dowodzie twierdzenia 2.1 powoduje różnorodne trudności techniczne. To sprawia, że dowód tego twierdzenia (a w szczególności wiele szacowań podanych w rozdziale 2.3) wymaga nieco innych technik, niż dowód wspomnianego wyżej twierdzenia 2.3 z [20].

Drugim głównym wynikiem jest twierdzenie o istnieniu klasycznych rozwiązań heteroklinicznych problemu (1) będące uogólnieniem wcześniejszego wyniku z [32].

- Jeśli  $G$  spełnia warunki  $(G_1)$ - $(G_7)$  podane w rozdziale 2 oraz  $F$  spełnia założenia  $(F_1)$ - $(F_4)$  podane w rozdziale 3, to równanie (1) posiada klasyczne rozwiązania heterokliniczne.

Dowód tego twierdzenia wykorzystuje techniki zbliżone do stosowanych w artykule [24] (twierdzenie 2.1). Jedną z różnic między dowodami jest widoczna na przykład w lemacie 3.8, gdzie niemożliwe okazało się zastosowanie klasycznej zasady maksimum i konieczne było użycie ogólniejszych twierdzeń z [23]. Kolejną istotną różnicą jest zastosowanie twierdzenia o regularności 2.1, zamiast standardowych twierdzeń o regularności odnoszących się do innych operatorów o wzroście potęgowym.

Rozprawa jest podzielona na trzy części. W rozdziale 1 podane zostaną potrzebne definicje i lematy dotyczące ilorazów różnicowych i słabych pochodnych. W kolejnym rozdziale zostanie sformułowane i udowodnione twierdzenie dotyczące regularności słabych rozwiązań. W rozdziale 3 będzie udowodnione twierdzenie o istnieniu rozwiązań heteroklinicznych równania typu Allena-Cahna.



---

## Spis oznaczeń

Poniżej zostały wymienione wybrane symbole, które będą często stosowane w dalszych częściach rozprawy:

- $e_s$  -  $s$ -ty wektor bazy standardowej w  $\mathbb{R}^n$ ;
- $\Omega$  - jeśli nie wskazano inaczej dziedzina w  $\mathbb{R}^n$  (zbiór otwarty i spójny);
- $\Omega + he_s$  - zbiór  $\Omega$  przesunięty o wektor  $he_s$ ;
- $\Omega_{|h|} = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > |h|\}$ ;
- $dist$  - odległość zbiorów lub punktu od zbioru;
- $\chi_A$  - funkcja charakterystyczna zbioru  $A$ ;
- $\mu(A)$  - miara Lebesgue'a zbioru  $A$ ;
- $D$  - pochodna funkcji,  $D_s$  pochodna cząstkowa funkcji po  $s$ -tej zmiennej, czasem też oznaczana jako  $F_{x_s}$  lub  $G_{\xi_s}$ ;
- $\Delta_h$  - iloraz różnicowy o przyroście  $h$  w  $s$ -tej zmiennej, oznaczany też jako  $\Delta_h^s$  przy czym gdy  $s$  pozostaje ustalone to jest w oznaczeniach pomijane;
- $div(\nabla G(\nabla u(x))) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (G_{\xi_i}(\nabla u(x)))$ ;
- $B_r(x)$  - kula o środku  $x$  i promieniu  $r$ , jeśli środek jest raz ustalony i niezmienny w całych rachunkach kule zapisywane są po prostu jako  $B_r$ ;
- $L^G(\Omega) = \left\{ \xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : \xi\text{-mierzalna, } \exists \lambda > 0 \int_{\Omega} G(\lambda \xi) dx < \infty \right\}$  - przestrzeń Orlicza funkcji o wartościach wektorowych określonych na  $\Omega$ ;
- $W^{1,G}(\Omega)$  - przestrzeń Orlicza-Sobolewa funkcji skalarnych określonych na  $\Omega$ , których słabe pochodne należą do  $L^G(\Omega)$ ;
- $2^*$  - krytyczny wykładnik Sobolewa równy  $\frac{2n}{n-2}$ .





# Przydatne definicje i lematy

## 1.1. G-funkcje i przestrzenie Orlicza-Sobolewa

G-funkcje są naturalnym uogólnieniem funkcji Younga na dziedziny wielowymiarowe. G-funkcją (w sensie definicji podanej przez Trudingera w [29]) nazywamy wypukłą, parzystą i półciągłą z dołu funkcję  $G: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  spełniającą warunki  $G(0) = 0$ ,  $G(\infty) = \infty$  oraz taką, że  $G^{-1}(\infty)$  jest oddzielone od 0.

W tym podrozdziale zakładamy, że  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest ograniczoną dziedziną (czyli zbiorem otwartym, spójnym i ograniczonym).

**Definicja 1.1.** *Przestrzeń Orlicza  $L^G(\Omega)$  nazywamy zbiór*

$$L^G = \left\{ \xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n: \xi\text{-mierzalna}, \exists \lambda > 0 \int_{\Omega} G(\lambda \xi) dx < \infty \right\}.$$

Przestrzeń Orlicza  $L^G(\Omega)$  jest przestrzenią Banacha z normą Luxemburga

$$\|\xi\|_{L^G(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} G\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}.$$

Tak zdefiniowane przestrzenie Orlicza są zbyt ogólne dla naszych rozważań. W wielu artykułach (np. [6, 8, 15, 26, 28, 29]) przyjmowane są dodatkowe założenia na  $G$ , w zależności od tego jakie własności przestrzeni Orlicza są wymagane. Również w tej rozprawie klasa dopuszczalnych funkcji zostanie zawężona.

Analogicznie do klasycznych przestrzeni Sobolewa, na bazie przestrzeni Orlicza definiuje się przestrzenie Orlicza-Sobolewa.

**Definicja 1.2.** *Słabo różniczkowalna funkcja  $u \in L^2(\Omega)$  należy do przestrzeni Orlicza-Sobolewa  $W^{1,G}(\Omega)$  gdy  $Du \in L^G(\Omega)$ .*



Przestrzeń  $W^{1,G}(\Omega)$  z normą

$$\|u\|_{W^{1,G}(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|Du\|_{L^G(\Omega)}$$

jest przestrzenią Banacha.

Standardowymi warunkami ograniczającymi wzrost  $G$ -funkcji są warunki  $\Delta_2$  i  $\nabla_2$ . Pierwszy z nich ma postać

$$G(2\xi) \leq cG(\xi), \quad \text{dla } |\xi| \geq M, \quad (\Delta_2)$$

a drugi

$$G(2\xi) \geq cG(\xi), \quad \text{dla } |\xi| \geq M. \quad (\nabla_2)$$

Gdy  $M > 0$  to mówimy, że warunki te są spełnione w nieskończoności, a jeśli  $M = 0$  to mówimy, że są spełnione globalnie.

Wiadomo, że jeżeli  $G$  spełnia warunek  $\Delta_2$ , to jej wzrost jest ograniczony z góry przez funkcję wielomianową. Jeżeli  $G$  spełnia warunek  $\nabla_2$ , wtedy jej wzrost jest ograniczony z dołu przez funkcję  $|x|^\alpha$ , dla pewnego  $\alpha > 1$ . Można to w skrócie podsumować jako  $L^p \subset L^G \subset L^q$  gdy  $|\cdot|^q \prec G \prec |\cdot|^p$ . Precyzyjne sformułowanie i dowód tych faktów znajduje się np. w [11] - lemat 2.4.

Wprost z definicji wynika, że jeśli funkcja wypukła  $G$  spełnia warunek  $\Delta_2$ , to spełnia także nierówność  $G(k\xi) \leq cG(\xi)$  z dowolną stałą  $k$  (przy ewentualnie innym  $c$  i  $M$ ). Wobec tego przy założeniu  $\Delta_2$  warunek definiujący przestrzeń Orlicza, czyli  $\int_{\Omega} G(\lambda\xi) dx < \infty$ , można zastąpić prostszym warunkiem  $\int_{\Omega} G(\xi) dx < \infty$ .

Jeśli założymy, że  $G$  spełnia warunki  $\Delta_2$  i  $\nabla_2$  w nieskończoności oraz  $|\Omega| < \infty$ , to wtedy wyznaczone przez nią przestrzenie Orlicza i Orlicza-Sobolewa są refleksywne ([26] wniosek 7.2). Jeśli  $|\Omega| = \infty$ , to warunki  $\Delta_2$  i  $\nabla_2$  muszą być spełnione globalnie.

Na potrzeby dowodu lematu 1.5 wykażemy następujący fakt:

**Lemat 1.3.** Niech  $G$  będzie  $G$ -funkcją spełniającą warunek  $\Delta_2$  w nieskończoności i spełniającą warunek  $|\cdot|^\alpha \prec G \prec |\cdot|^\beta$ , gdzie  $2 \leq \alpha \leq \beta$ . Załóżmy ponadto, że  $\beta \leq \alpha^*$ . Przyjmujemy  $\alpha^* = \frac{n\alpha}{n-\alpha}$  gdy  $\alpha < n$  oraz  $\alpha^*$  dowolne gdy  $\alpha \geq n$ . Przez  $\xi$  oznaczmy dowolny ustalony niezerowy wektor i zdefiniujmy funkcję  $\tilde{G}(t) = G(t\xi)$ . Wówczas przestrzeń Orlicza-Sobolewa  $W^{1,G}(\Omega)$  zawiera się w przestrzeni Orlicza  $L^{\tilde{G}}(\Omega)$ .

**Dowód:** Prawdziwy jest ciąg zawierania

$$W^{1,G}(\Omega) \subset W^{1,\alpha}(\Omega) \subset L^{\alpha^*}(\Omega) \subset L^\beta(\Omega) \subset L^{\tilde{G}}(\Omega)$$

Pierwsze wynika z  $|\cdot|^\alpha \prec G$  i definicji  $W^{1,G}$ . Kolejne jest konsekwencją standardowych włożeń Sobolewa (zob. twierdzenie 4.12 z [1]). Trzecie zawieranie jest oczywiste, gdyż

$\beta \leq \alpha^*$ . Czwarte włożenie wynika z tego, że  $\tilde{G} \prec |\cdot|^\beta$ , co jest konsekwencją definicji  $\tilde{G}$  i założenia  $G \prec |\cdot|^\beta$ .  $\square$

W dalszych rozważaniach, istotną rolę odgrywać będą także lokalne przestrzenie Orlicza - Sobolewa  $W_{\text{loc}}^{1,G}(\Omega)$ . Przestrzenie te definiujemy standardowo

$$W_{\text{loc}}^{1,G}(\Omega) = \{u \in W^{1,G}(K) : K \subset\subset \Omega\}.$$

Przestrzenie  $W_{\text{loc}}^{1,G}(\Omega)$  są przestrzeniami metrycznymi zupełnymi z metryką daną wzorem

$$d(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u - v\|_{W^{1,G}(K_n)}}{2^k(1 + \|u - v\|_{W^{1,G}(K_n)})},$$

gdzie  $K_n$  są tak wybrane, aby  $K_n \subset\subset K_{n+1}$  oraz  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ .

## 1.2. Ilorazy różnicowe i słabe pochodne

Ilorazy różnicowe pełnią ważną rolę w dowodach twierdzeń o regularności rozwiązań. W szczególności cały dowód pierwszej części twierdzenia 2.1 będzie oparty o ich własności. Poniżej podane zostaną własności ilorazów różnicowych, które będą wykorzystywane w tej pracy. Są one w większości dobrze znane w literaturze (np. [13, 16, 27]). W wybranych lematkach zostaną podane także dowody, gdyż metody tam stosowane są interesujące z punktu widzenia dalszych rozważań. W całym rozdziale przyjmujemy, że  $\Omega$  jest dziedziną. Symbolem  $D$  oznaczamy pochodną a symbolem  $D_s$  pochodną cząstkową po  $s$ -tej zmiennej. W tym rozdziale będziemy zakładać, że funkcja  $G$  spełnia warunek  $\Delta_2$  w nieskończoności.

**Definicja 1.4.** *Ilorazem różnicowym funkcji  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  z przyrostem  $h \in \mathbb{R}$  w kierunku wektora  $e_s$  nazywamy funkcję*

$$\Delta_h^s u(x) = \frac{u(x + he_s) - u(x)}{h}$$

określoną na  $\Omega_{|h|} = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > |h|\}$ .

W dalszych rachunkach, jeśli tylko górny indeks  $s$  będzie pozostawał dowolnie ustalony i niezmienny, to zostanie w zapisach pominięty.

Pierwszy lemat jest inspirowany lematem 3.3 z [20] i podaje elementarne własności ilorazów różnicowych, wynikające wprost z definicji ilorazu różnicowego.

**Lemat 1.5.** *Niech  $u, w \in W^{1,G}(\Omega)$ . Wówczas:*

$$(A) \quad \Delta_h u \in W^{1,G}(\Omega_{|h|}),$$

- (B) jeśli  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia warunek Lipschitza, jest nieparzysta, niemalejąca i wypukła na  $[0, \infty)$ , to  $\psi(\Delta_h u) \in W^{1,G}(\Omega_{|h|})$ ,
- (C) jeśli ponadto  $\eta \in C_0^1(\Omega)$  a  $G$  jest takie jak w lemacie 1.3, to  $\eta\psi(\Delta_h u) \in W^{1,G}(\Omega_{|h|})$ ,
- (D)  $D_i(\Delta_h u) = \Delta_h(D_i u)$ ,
- (E) jeśli  $\text{supp } u \subset \Omega_{|h|}$  lub  $\text{supp } w \subset \Omega_{|h|}$ , to  $\int u \Delta_h w \, dx = - \int w \Delta_{-h} u \, dx$ ,
- (F)  $\Delta_h(uw)(x) = u(x + he_s) \Delta_h w(x) + w(x) \Delta_h u(x)$ .

**Dowód:** Własność (A) wynika wprost z liniowości przestrzeni.

Niech  $L$  będzie stałą Lipschitza dla  $\psi$ . Wówczas

$$G(D(\psi(\Delta_h u))) = G(\psi'(\Delta_h u)D(\Delta_h u)) \leq G(LD(\Delta_h u)).$$

Jako, że  $\Delta_h u \in W^{1,G}(\Omega_{|h|})$  to prawa strona powyższej nierówności jest całkowna a więc również lewa jest całkowna, co dowodzi, że  $\psi(\Delta_h u) \in W^{1,G}(\Omega_{|h|})$ .

Dowód (C) rozpoczniemy od nierówności wynikającej z wypukłości  $G$ :

$$\begin{aligned} G(D(\eta\psi(\Delta_h u))) &= G(D\eta\psi(\Delta_h u) + \eta D(\psi(\Delta_h u))) \leq \\ &\leq \frac{1}{2}G(2D\eta\psi(\Delta_h u)) + \frac{1}{2}G(\eta D(\psi(\Delta_h u))) \end{aligned}$$

Całkowalność drugiego składnika prawej strony wynika z punktu (B) i ograniczoności  $\eta$ .

Z własności  $\psi$  wynika, że  $|\psi(t)| \leq L|t|$ . Ograniczoność  $D\eta$  gwarantuje istnienie takiego wektora  $\xi_0$ , że  $G(D\eta) \leq G(\xi_0)$  na  $\Omega$ . Wówczas  $G(2D\eta\psi(\Delta_h u)) \leq G(2\xi_0 L|\Delta_h u|)$ . Przyjmując w lemacie 1.3  $\xi = 2L\xi_0$  otrzymujemy  $\Delta_h u \in L^{\tilde{G}}(\Omega_{|h|})$ . To gwarantuje całkowalność  $G(2D\eta\psi(\Delta_h u))$  i kończy dowód własności (C).

Kolejny punkt jest bezpośrednią konsekwencją liniowości pochodnej. Własność (E) wynika z definicji ilorazu różnicowego:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \Delta_h w \, dx &= \frac{1}{h} \int_{\Omega} u(x)w(x + he_s) - u(x)w(x) \, dx = \\ &= -\frac{1}{h} \int_{\Omega} u(x)w(x) - u(x - he_s)w(x) \, dx = - \int_{\Omega} w \Delta_{-h} u \, dx \end{aligned}$$

Również z definicji dowodzimy ostatniej równości:

$$\begin{aligned} \Delta_h(uw)(x) &= \\ &= \frac{1}{h} (u(x + he_s)w(x + he_s) - u(x + he_s)w(x) + u(x + he_s)w(x) - u(x)w(x)) = \\ &= u(x + he_s)\Delta_h w(x) + w(x)\Delta_h u(x) \end{aligned}$$

□

Kolejne lematy pochodzą z książki Giusti [13]. Opisują one związki ilorazów różnicowych i słabych pochodnych funkcji należących do przestrzeni Sobolewa.

**Lemat 1.6.** Niech  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ ,  $|h| < d(\Omega_0, \partial\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Dla każdego  $v \in W^{1,p}(\Omega)$  zachodzą nierówności

$$\int_{\Omega_0} |\Delta_h v|^p dx \leq \int_{\Omega} |D_s v|^p dx \leq \int_{\Omega} |Dv|^p dx.$$

**Dowód:** Wprost z definicji ilorazu różnicowego mamy  $\Delta_h v = \int_0^1 D_s v(x + the_s) dt$ . Z nierówności Jensena wynika, że

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} |\Delta_h v|^p dx &= \int_{\Omega_0} \left| \int_0^1 D_s v(x + the_s) dt \right|^p dx \leq \int_0^1 \int_{\Omega_0} |D_s v(x + the_s)|^p dx dt = \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega_0 + the_s} |D_s v|^p dx dt \leq \int_{\Omega} |D_s v|^p dx \leq \int_{\Omega} |Dv|^p dx. \end{aligned}$$

Symbolem  $\Omega_0 + the_s$  oznaczono zbiór  $\{x + the_s : x \in \Omega_0\}$ . □

Jeśli słaba pochodna istnieje w  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ , to ilorazy różnicowe są do niej zbieżne w  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ .

**Lemat 1.7.** Załóżmy, że funkcja  $v \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  posiada słabą pochodną  $D_s v \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ . Wówczas  $\Delta_h v \rightarrow D_s v$  w  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ .

**Dowód:** Weźmy  $\Sigma \subset\subset \Omega$  i dowolne  $w \in C^1(\Sigma) \cap W^{1,p}(\Sigma)$ . Wówczas stosując lemat 1.6, dla każdego  $\Sigma \subset\subset \Omega$  mamy

$$\begin{aligned} \|\Delta_{h_n} v - D_s v\|_{L^p(\Sigma)} &\leq \|\Delta_{h_n} v - \Delta_{h_n} w\|_{L^p(\Sigma)} + \|\Delta_{h_n} w - D_s w\|_{L^p(\Sigma)} + \|D_s w - D_s v\|_{L^p(\Sigma)} \leq \\ &\leq 2\|D_s(w - v)\|_{L^p(\Sigma)} + \|\Delta_{h_n} w - D_s w\|_{L^p(\Sigma)}. \end{aligned}$$

Funkcje klasy  $C^1$  tworzą gęstą podprzestrzeń  $W^{1,p}$  oraz  $\Delta_{h_n} w \rightarrow D_s w$  w  $L^p(\Sigma)$ , więc obydwa składniki mogą być wybrane dowolnie małe, co kończy dowód. □

Następny lemat pokazuje, że z ograniczoności norm ilorazów różnicowych można wywnioskować istnienie słabej pochodnej. Jest to prosta modyfikacja lematu 8.2 z [13] polegająca na zastąpieniu ogólnej zbieżności  $h \rightarrow 0$  ciągiem  $h_n \rightarrow 0$ . Będzie to ważne narzędzie wykorzystywane w dowodzie pierwszej części twierdzenia 2.1.

**Lemat 1.8.** Niech  $v \in L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ . Załóżmy, że istnieją  $M > 0$  i ciąg  $h_n \rightarrow 0$  takie, że  $\int_{\Omega_{|h_n|}} |\Delta_{h_n}^s v|^p dx \leq M$ . Wówczas  $\int_{\Omega} |D_s v|^p dx \leq M$  (więc  $D_s v \in L^p(\Omega)$ ) i  $\Delta_{h_n}^s v \rightarrow D_s v$  w  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ .



**Dowód:** Niech

$$g_n(x) = \begin{cases} \Delta_{h_n} v & \text{dla } x \in \Omega_{|h_n|} \\ 0 & \text{dla } x \in \Omega \setminus \Omega_{|h_n|} \end{cases}$$

Ciąg  $g_n$  jest ograniczony w  $L^p(\Omega)$ , więc można wybrać podciąg (wciąż oznaczany jako  $g_n$ ) słabo zbieżny do pewnego  $g \in L^p(\Omega)$ . Oczywiście  $\|g\|_{L^p(\Omega)} \leq M$ . Dla każdego  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \phi g \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi \Delta_{h_n} v \, dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v \Delta_{h_n} \phi \, dx = - \int_{\Omega} v D_s \phi \, dx,$$

więc  $g = D_s v$ . Pozostała część tezy wynika z Lematu 1.7.  $\square$

Warto zauważyć, że gdy  $\Omega$  jest ograniczona, to w powyższym lemacie zbieżność w  $L_{\text{loc}}^p$  można zastąpić zbieżnością w  $L^p$ . Taka wersja tego lematu będzie wykorzystywana w dowodzie twierdzenia 2.1.

Następny lemat o zbieżności ciągu norm jest dobrze znany, dowód można znaleźć na przykład w [22].

**Lemat 1.9.** *Niech  $\Omega$  będzie zbiorem ograniczonym.*

a) *Jeśli  $v \in L^\infty(\Omega)$ , to wówczas*

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

b) *Jeśli  $v \in L^{p_k}(\Omega)$  dla pewnego ciągu  $p_k \rightarrow \infty$  oraz ciąg  $\|v\|_{L^{p_k}(\Omega)}$  jest ograniczony, to wówczas  $v \in L^\infty(\Omega)$ .*

Wykorzystując powyższe własności, otrzymujemy następujący wniosek z lematu 1.6:

**Lemat 1.10.** *Niech  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ ,  $|h| < d(\Omega_0, \partial\Omega)$  i  $\mu(\Omega) < \infty$ . Dla każdego  $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$  mamy*

$$\|\Delta_h^s v\|_{L^\infty(\Omega_0)} \leq \|D_s v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

**Dowód:** Z lematu 1.6 wynika, że

$$\|\Delta_h v\|_{p,\Omega_0} \leq \|D_s v\|_{p,\Omega} \leq \mu(\Omega)^{1/p} \|D_s v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |D_s v|$$

dla każdego  $1 \leq p < \infty$ , a zatem  $\Delta_h v \in L^\infty(\Omega_0)$ , na mocy lematu 1.9. Teraz wystarczy tylko przyjąć  $p \rightarrow \infty$  w nierówności  $\|\Delta_h v\|_{p,\Omega_0} \leq \|D_s v\|_{p,\Omega}$ .  $\square$

Ostatni z lematów o ilorazach różnicowych pochodzi z [27]. Jest on pewnym uogólnieniem lematu 1.6 polegającym na zamianie funkcji  $|\cdot|^p$  na funkcję wypukłą. Nie będzie on wykorzystywany w tej pracy, jednak warto go podać, gdyż jest mało znany, a może być przydatnym narzędziem w badaniu słabych pochodnych w przestrzeniach Orlicza-Sobolewa.





**Lemat 1.11.** Zdefiniujmy wektor ilorazów różnicowych:  $\Theta_h u = (\Delta_{h_1}^1 u, \dots, \Delta_{h_n}^n u)$ , gdzie  $h = (h_1, \dots, h_n)$ . Niech  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ ,  $|h| < d(\Omega_0, \partial\Omega)$ , funkcja  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  jest wypukła. Dla każdego  $v \in W^{1,1}(\Omega)$  takiego, że  $\int_{\Omega} G(Dv) dx < \infty$  mamy

$$\int_{\Omega_0} G(\Theta_h v) dx \leq \int_{\Omega} G(Dv) dx.$$

**Dowód:** Podobnie jak wcześniej  $\Theta_h v = \int_0^1 Dv(x + th) dt$  i z nierówności Jensena

$$\int_{\Omega_0} G(\Theta_h v) dx \leq \int_0^1 \int_{\Omega_0} G(Dv(x + th)) dx dt = \int_0^1 \int_{\Omega_0 + th} G(Dv) dx dt \leq \int_{\Omega} G(Dv) dx.$$

□



# Twierdzenie o regularności słabych rozwiązań

Założenia na funkcję  $G$  podane w poprzednim rozdziale są zbyt ogólne, aby możliwe było udowodnienie twierdzenia o regularności słabych rozwiązań. W szczególności, dopuszczają one sytuację, gdy funkcja  $G$  rośnie zbyt szybko w nieskończoności (np. jak funkcja wykładnicza) lub maleje zbyt szybko w otoczeniu zera.

Podane niżej założenia, z których wynikają te podane w rozdziale 1, nakładają ograniczenia na wzrost  $G$ . W otoczeniu zera  $G$  musi się znajdować pomiędzy funkcją liniową a kwadratową (warunki  $(G_2)$  i  $(G_3)$ ). W nieskończoności  $G$  musi być ograniczone przez dwa wielomiany stopnia wyższego niż 2 (warunki  $(G_5)$  i  $(G_6)$ ). Należy również założyć, że  $G$  spełnia dość silny warunek eliptyczności  $(G_7)$ .

W tym rozdziale zakładamy, że  $G \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  jest funkcją wypukłą spełniającą następujące warunki:

$$(G_1) \quad G(-\xi) = G(\xi) \text{ dla wszystkich } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$(G_2) \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{G(\xi)}{|\xi|} = 0,$$

$$(G_3) \quad \text{istnieje } c_0 > 0 \text{ takie, że } G(\xi) \geq c_0 |\xi|^2 \text{ dla wszystkich } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$(G_4) \quad \text{istnieje } p \geq 2 \text{ takie, że } \langle DG(\xi), \lambda \rangle \leq p \frac{G(\xi)}{|\xi|} |\lambda| \text{ dla wszystkich } \xi, \lambda \in \mathbb{R}^n \text{ } (\xi \neq 0),$$

$$(G_5) \quad \text{istnieją } \alpha \geq 2 \text{ i } c_\alpha > 0 \text{ takie, że } c_\alpha |\xi|^\alpha \leq G(\xi) \text{ dla wszystkich } |\xi| \geq 1,$$

$$(G_6) \quad G(\xi) \leq \sum_{s=1}^n |\xi_s|^{2^* (\frac{\alpha}{2} - 1) + 2} \text{ dla wszystkich } |\xi| \geq 1, \text{ gdzie } 2^* \text{ oznacza krytyczny wykładnik Sobolewa,}$$

$$(G_7) \quad \text{istnieje } \nu > 0 \text{ takie, że } \langle D^2 G(\xi) \lambda, \lambda \rangle \geq 2\nu \frac{G(\xi)}{|\xi|^2} |\lambda|^2 \text{ dla wszystkich } \xi, \lambda \in \mathbb{R}^n \text{ } (\xi \neq 0),$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja  $G$  spełniająca powyższe założenia jest  $G$ -funkcją w sensie Trudingera. Z założenia  $(G_4)$  wynika warunek  $\Delta_2$  w postaci:  $G(2\xi) \leq 2^p G(\xi)$  (zob. twierdzenie 3.2 w [28]). Stąd zaś wynika, że  $G(\xi) \leq M |\xi|^p$ , dla  $M = \sup_{|\xi|=1} G(\xi)$  oraz  $|\xi| \geq 1$ .



Okazuje się, że do badania regularności słabych rozwiązań będzie wykorzystywana jedynie liniowość przestrzeni  $W^{1,G}$  oraz warunek  $u \in W^{1,G} \iff \int_{\Omega} G(Du) dx < \infty$ , gwarantowany przez  $\Delta_2$ . Inne własności  $W^{1,G}$  (np. refleksywność) nie będą wykorzystywane w tym rozdziale. Warto też zwrócić uwagę, że dzięki warunkowi  $(G_3)$  przestrzeń  $W^{1,G}$  zawiera się w  $W^{1,2}$  na ograniczonych dziedzinach.

Przyjęte założenia umożliwiają rozpatrywanie dość szerokiej klasy G-funkcji o wzroście typu wielomianowego. Taki zestaw warunków jest podobny do założeń wzrostu typu  $p$ - $q$  rozważanych przez Marcellini w artykule [19]. Warunki  $(G_1)$ – $(G_7)$  są inspirowane w dużej mierze przez założenia podane w [20], ale zostały sformułowane w sposób odpowiedni dla anizotropowych funkcji  $G$ . Dopuszczają one sytuację, w której zachowanie  $G$  może być w różny sposób zależne od współrzędnych  $\xi_i$ , a nie tylko od modułu  $|\xi|$ .

Uzyskanie odpowiedniej regularności rozwiązań wymaga między innymi silnego warunku eliptyczności dla operatora  $\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x)))$ , co przekłada się na silną wypukłość  $G$ , czyli założenie  $(G_7)$ . W szczególności, wzrost funkcji  $G$  w otoczeniu zera musi być kwadratowy. Dla dowodu twierdzenia 2.1 potrzebne są także ograniczenia wzrostu funkcji  $G$  w nieskończoności. Mówią o tym założenia  $(G_5)$  i  $(G_6)$ , z których wynika, że funkcja  $G$  jest z dwóch stron ograniczona potęgami o wykładnikach odpowiednio bliskich sobie, przy czym, im większe  $n$  tym są one bliższe. Można zauważyć, że założenia  $(G_1)$ – $(G_7)$  są silniejsze niż podane w [19] czy [20] jednak także uzyskana tu teza jest nieco silniejsza.

Oczywistym przykładem funkcji  $G$  spełniającej założenia  $(G_1)$ – $(G_7)$  jest  $|\cdot|^2$ . Niestety ze względu na  $(G_3)$  nie można za  $G$  wziąć  $|\cdot|^\alpha$  dla  $\alpha > 2$ . Można jednak rozważać funkcje łączące wzrost kwadratowy dla małych argumentów i wyższe potęgi dla dużych argumentów, czyli np.  $G(\xi) = c_0|\xi|^2 + \sum c_i|\xi_i|^{\alpha_i}$ , gdzie wykładniki  $\alpha_i$  należy wybrać uwzględniając przede wszystkim  $(G_5)$  i  $(G_6)$  (a więc ich wzajemne różnice są ograniczone w zależności od wymiaru przestrzeni, tj.  $\max \alpha_1 \leq 2^*(\frac{\min \alpha_i}{2} - 1) + 2$ ).

## 2.1. Sformułowanie twierdzenia

Poniżej sformułujemy twierdzenie o regularności słabych rozwiązań równania (2.1). Zostanie udowodnione przy założeniach ogólniejszych, niż te wymagane do rozważania równania typu Allena-Cahna, przez co możliwe do zastosowania także w innych problemach z ogólnym operatorem eliptycznym.

Przypomnijmy, że rozważane równanie na dziedzinie  $\Omega$  ma postać

$$-\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x))) + F_u(x, u(x)) = 0, \quad \text{gdzie } x \in \Omega. \quad (2.1)$$

Zakładamy, że  $F : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia:

(A<sub>1</sub>)  $F$  jest różniczkowalna w sposób ciągły i jej pochodna cząstkowa  $F_u$  może być zapisana jako suma  $F_u = \bar{F} + \hat{F}$ , gdzie:

(A<sub>2</sub>)  $\bar{F}$  jest ciągła i  $|\bar{F}(x, u)| \leq Q$  dla wszystkich  $x \in \Omega$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,

(A<sub>3</sub>)  $\hat{F}$  ma ciągłe i ograniczone pochodne cząstkowe:  $|\hat{F}_{x_s}(x, u)| \leq Q$ ,  $|\hat{F}_u(x, u)| \leq Q$  dla wszystkich  $x \in \Omega$ ,  $u \in \mathbb{R}$ .

**Twierdzenie 2.1.** Niech funkcja  $G$  spełnia założenia (G<sub>1</sub>)-(G<sub>7</sub>), zaś  $F$  spełnia (A<sub>1</sub>)-(A<sub>3</sub>). Dla każdej kuli  $B_R \subset\subset \Omega$  i dla każdego słabego rozwiązania  $v \in W_{loc}^{1,G}(\Omega)$  problemu (2.1), istnieją stałe dodatnie  $\bar{C}$  i  $\tilde{C}$ , dla których

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}} |D^2 v|^2 dx \leq \bar{C} \int_{B_R} 1 + G(Dv) dx, \quad (2.2)$$

$$\text{ess sup}_{B_{\frac{R}{2}}} |Dv|^2 \leq \tilde{C} \int_{B_R} 1 + G(Dv) dx. \quad (2.3)$$

Powyższe nierówności oznaczają, że słabe rozwiązania są klasy odpowiednio  $W_{loc}^{2,2}(\Omega)$  i  $W_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$ , przy czym jako słabe rozwiązania będziemy rozumieli funkcje  $v \in W_{loc}^{1,G}(\Omega)$  spełniające równanie

$$\int_{B_r} \sum_{i=1}^n (G_{\xi_i}(Dv)) D_i \varphi(x) + F_u(x, v) \varphi(x) dx = 0 \quad (2.4)$$

dla każdej kuli  $B_r \subset\subset \Omega$  i każdego  $\varphi \in W_0^{1,G}(B_r)$ .

Warto zwrócić uwagę na fakt, że cała teza twierdzenia jest sformułowana lokalnie na kulach a więc dziedzina  $\Omega$  nie odgrywa tu większej roli. Dodatkowo rozważamy tylko słabe rozwiązania więc problem (2.1) nie wymaga uzupełnienia o warunki brzegowe.

Dowód powyższego twierdzenia będzie treścią kolejnych podrozdziałów. Jest on podzielony na następujące etapy:

- przekształcenie równania (2.4) przy użyciu specjalnie zdefiniowanej funkcji  $\varphi$  co pozwala na wprowadzenie tam ilorazów różnicowych,
- szacowanie odpowiednich ilorazów różnicowych w celu wykazania istnienia drugiej pochodnej i jednocześnie dowód pierwszej nierówności z tezy twierdzenia,
- skorzystanie z uzyskanej nierówności oraz odpowiednich nierówności Sobolewa w celu stworzenia nierówności łączących różne normy Lebesgue'a  $|Dv|$ ,
- uzyskanie wspólnego szacowania dla całego ciągu norm Lebesgue'a i dzięki temu wykazanie istnienia  $\text{ess sup } |Dv|$  wraz z drugą nierównością z tezy twierdzenia.

W dowodzie obowiązywać będą następujące konwencje i oznaczenia:



- literą  $c$  będzie oznaczana stała dodatnia, dla której dane równanie bądź nierówność jest prawdziwa, zależna od innych wielkości występujących we wcześniejszych rachunkach lub założeniach. W szczególności, wartości  $c$  mogą być różne w różnych miejscach dowodu, a nawet w poszczególnych miejscach ciągów równań lub nierówności. Dla przejrzystości zależność  $c$  od innych wielkości nie będzie każdorazowo wyjaśniana.
- $B_r$  będzie oznaczać kulę otwartą o promieniu  $r$ . Od tego momentu, wszystkie kule będą współśrodkowe, zmieniać się będzie jedynie ich promień.
- $2h_0 \leq \text{dist}(B_R, \partial\Omega)$ ,  $|h| \leq h_0$ ,
- $\lambda_h^t = Dv(x + the_s)$ ,
- $\xi_h^t = tDv(x + he_s) + (1-t)Dv(x)$ ,
- $\eta \in C_0^2(\Omega)$  będzie oznaczać funkcję o wartościach w  $[0, 1]$ , dla której  $\text{supp } \eta \subset B_R$  i  $\eta$  ma stałą wartość 1 na  $B_\rho$  oraz  $|D\eta| \leq \frac{1}{R-\rho}$ ,  $|D^2\eta| \leq \frac{1}{(R-\rho)^2}$ ,  $0 < \rho < R$ ,
- $\psi \in C^1(\mathbb{R})$  będzie oznaczać dowolnie ustaloną funkcję nieparzystą i wypukłą w przedziale  $[0, \infty)$ , dla której  $0 \leq \psi'(t) \leq c_{\psi'}$ . Łatwo zauważyć, że

$$|\psi(t)| \leq \psi'(t)|t|. \quad (2.5)$$

## 2.2. Przekształcenie równania Eulera

W równaniu (2.4) podstawimy  $\varphi = \Delta_{-h}(\eta^2\psi(\Delta_h v))$ . Weźmy  $\beta = 2^*(\frac{\alpha}{2} - 1) + 2$ . Łatwo sprawdzić, że dla  $\alpha < n$  mamy  $\beta \leq \alpha^*$ . Można więc skorzystać z lematów 1.3 i 1.5. Na mocy własności (A), (B), (C) z lematu 1.5 tak wybrane  $\varphi$  należy do  $W_0^{1,G}(B_R)$ .

Używając własności (D), (E), (F) z lematu 1.5 i uwzględniając, że  $\text{supp } \eta \subset B_R$  można przepisać pierwszy składnik równania (2.4) jako

$$\begin{aligned} & \int_{\dot{B}_R} \sum_{i=1}^n (G_{\xi_i}(Dv)) D_i \varphi(x) dx = \int_{\dot{B}_R} \sum_{i=1}^n G_{\xi_i}(Dv) \Delta_{-h}(D_i(\eta^2\psi(\Delta_h v))) dx = \\ & = - \int_{\dot{B}_R} \sum_{i=1}^n \Delta_h(G_{\xi_i}(Dv)) \left( D_i(\eta^2)\psi(\Delta_h v) + \eta^2\psi'(\Delta_h v) D_i(\Delta_h v) \right) dx = \\ & = - \int_{\dot{B}_R} \sum_{i=1}^n \Delta_h G_{\xi_i}(Dv) D_i(\eta^2)\psi(\Delta_h v) dx - \int_{\dot{B}_R} \sum_{i=1}^n \Delta_h(G_{\xi_i}(Dv)) \Delta_h(D_i v) \eta^2\psi'(\Delta_h v) dx. \end{aligned}$$

Równanie (2.4) można więc przepisać w postaci

$$\begin{aligned} & \int_{\dot{B}_R} \sum_{i=1}^n \Delta_h(G_{\xi_i}(Dv)) \Delta_h(D_i v) \eta^2\psi'(\Delta_h v) dx = \\ & = - \int_{\dot{B}_R} \sum_{i=1}^n \Delta_h G_{\xi_i}(Dv) D_i(\eta^2)\psi(\Delta_h v) dx + \int_{B_R} F_u(x, v) \Delta_{-h}(\eta^2\psi(\Delta_h v)) dx. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Trzy całki występujące w równaniu (2.6) oznaczmy kolejno przez  $J_1$ ,  $J_2$  i  $J_3$ . Podamy teraz oszacowania na każdą z tych całek. Iloraz różnicowy wewnątrz  $J_1$  może być zapisany za pomocą całki

$$\begin{aligned}\Delta_h(G_{\xi_i}(Dv)) &= \frac{1}{h}(G_{\xi_i}(Dv(x + he_s)) - G_{\xi_i}(Dv(x))) = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{dt} G_{\xi_i}(tDv(x + he_s) + (1-t)Dv(x)) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n G_{\xi_i \xi_j}(\xi_h^t) \Delta_h(D_j v) dt.\end{aligned}$$

To równanie pozwala przekształcić  $J_1$  do postaci

$$J_1 = \int_{B_R} \int_0^1 \left( \sum_{i,j=1}^n G_{\xi_i \xi_j}(\xi_h^t) \Delta_h(D_i v) \Delta_h(D_j v) \right) \eta^2 \psi'(\Delta_h v) dt dx.$$

Na mocy założenia ( $G_7$ )

$$|J_1| \geq 2\nu \int_{B_R} \int_0^1 \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} |\Delta_h(Dv)|^2 \eta^2 \psi'(\Delta_h v) dt dx.$$

W całce  $J_2$  wyrażenie  $\Delta_h(G_{\xi_i}(Dv))$  także zostanie przekształcone, ale tym razem przy użyciu  $\lambda_h^t$  zamiast  $\xi_h^t$

$$\Delta_h(G_{\xi_i}(Dv)) = \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{dt} G_{\xi_i}(\lambda_h^t) dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_s} G_{\xi_i}(\lambda_h^t) dt,$$

gdzie  $\frac{\partial}{\partial x_s}$  oznacza różniczkowanie po  $s$ -tej zmiennej argumentu  $\lambda_h^t$ . Podstawiając do  $J_2$  i całkując przez części

$$\begin{aligned}J_2 &= - \int_{B_R} \int_0^1 \sum_{i=1}^n G_{\xi_i}(\lambda_h^t) D_s \left( D_i(\eta^2) \psi(\Delta_h v) \right) dt dx = \\ &= - 2 \int_{B_R} \int_0^1 \langle DG(\lambda_h^t), D_s D_i(\eta^2) \rangle \psi(\Delta_h v) dt dx - \\ &\quad - \int_{B_R} \int_0^1 \langle DG(\lambda_h^t), D_i(\eta^2) \rangle \psi'(\Delta_h v) \Delta_h(D_s v) dt dx.\end{aligned}$$

Te dwie całki będą dalej oznaczone jako  $J_{2,1}$  i  $J_{2,2}$ . Z definicji  $\eta$  wynika, że  $|D_i(\eta^2)| \leq \frac{2}{R-\rho}$  oraz  $|D_i D_j(\eta^2)| \leq \frac{4}{(R-\rho)^2}$ . Z założenia ( $G_4$ ) i nierówności (2.5) wynika, że

$$|J_{2,1}| \leq \int_{B_R} \int_0^1 p \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} \frac{4}{(R-\rho)^2} \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h v| dt dx.$$

Ponownie korzystając z założenia  $(G_4)$ , własności  $\eta$  i nierówności  $|2ab| \leq \nu a^2 + \frac{b^2}{\nu}$

$$\begin{aligned} |J_{2,2}| &\leq \int_{\bar{B}_R} \int_0^1 p \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} 2\eta |D_i \eta| \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(D_s v)| dt dx \leq \\ &\leq \int_{\bar{B}_R} \int_0^1 2 \left( \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(D_s v)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{p^2}{(R-\rho)^2} G(\lambda_h^t) \psi'(\Delta_h v) \right)^{\frac{1}{2}} dt dx \leq \\ &\leq \nu \int_{\bar{B}_R} \int_0^1 \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(D_s v)|^2 dt dx + \frac{p^2}{\nu(R-\rho)^2} \int_{\bar{B}_R} \int_0^1 G(\lambda_h^t) \psi'(\Delta_h v) dt dx. \end{aligned}$$

Teraz oszacujemy  $J_3$ . Stosując  $(A_1)$  i lemat 1.5 (E) otrzymujemy

$$\begin{aligned} |J_3| &= \left| \int_{\bar{B}_R} \bar{F}(x, v) \Delta_{-h}(\eta^2 \psi(\Delta_h v)) dx - \int_{\bar{B}_R} \Delta_h \hat{F}(x, v) \eta^2 \psi(\Delta_h v) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\bar{B}_R} |\bar{F}(x, v)| |\Delta_{-h}(\eta^2 \psi(\Delta_h v))| dx + \int_{\bar{B}_R} |\Delta_h \hat{F}(x, v)| \eta^2 |\psi(\Delta_h v)| dx = J_{3,1} + J_{3,2}. \end{aligned}$$

Z  $(A_2)$  i lematu 1.6

$$J_{3,1} \leq Q \int_{\bar{B}_R} |\Delta_{-h}(\eta^2 \psi(\Delta_h v))| dx \leq Q \int_{B_{R+|h|}} \left| \frac{d}{dx_s} (\eta^2 \psi(\Delta_h v)) \right| dx.$$

Jako że  $\text{supp } \eta \subset B_R$ , więc kulę  $B_{R+|h|}$  można zastąpić kulą  $B_R$ . Po zastosowaniu lematu 1.5 (D) mamy

$$J_{3,1} \leq Q \int_{\bar{B}_R} 2\eta |D_s \eta| |\psi(\Delta_h v)| + \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(D_s v)| dx.$$

Do oszacowania drugiego składnika zastosowana będzie nierówność  $ab \leq \tau a^2 + \frac{1}{\tau} b^2$

$$J_{3,1} \leq Q \int_{\bar{B}_R} 2\eta |D_s \eta| |\psi(\Delta_h v)| dx + \tau \int_{\bar{B}_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(D_s v)|^2 dx + \frac{1}{4\tau} \int_{\bar{B}_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) dx.$$

Szacując  $J_{3,2}$  skorzystamy z  $(A_3)$

$$\begin{aligned} J_{3,2} &= \int_{\bar{B}_R} \left| \eta^2 \psi(\Delta_h v) \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{dt} \hat{F}(x + t h e_s, v + t h \Delta_h v) dt \right| dx \leq \\ &\leq \int_{\bar{B}_R} \int_0^1 |\eta^2 \psi(\Delta_h v)| (|\hat{F}_{x_s}| + |\hat{F}_u| |\Delta_h v|) dt dx \leq \\ &\leq Q \int_{\bar{B}_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h v| (1 + |\Delta_h v|) dx. \end{aligned}$$

Podsumowując:

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq Q \int_{\bar{B}_R} 2\eta |D_s \eta| |\psi(\Delta_h v)| dx + \tau \int_{\bar{B}_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(D_s v)|^2 dx + \\ &\quad + \frac{1}{4\tau} \int_{\bar{B}_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) dx + Q \int_{\bar{B}_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h v| (1 + |\Delta_h v|) dx. \end{aligned}$$



Z równania (2.6) wynika, że  $J_1 = J_2 + J_3$ . Porządkując odpowiednio powyższe szacowania otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & 2\nu \int_{B_R} \int_0^1 \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(Dv)|^2 dt dx - \nu \int_{B_R} \int_0^1 \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(D_s v)|^2 dt dx - \\
 & - \tau \int_{B_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(Dv)|^2 dx \leq \\
 & \leq Q \int_{B_R} 2\eta |D_s \eta| |\psi(\Delta_h v)| dx + Q \int_{B_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h v| (1 + |\Delta_h v|) dx + \\
 & + \frac{1}{4\tau} \int_{B_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) dx + \frac{p^2}{\nu(R-\rho)^2} \int_{B_R} \int_0^1 G(\lambda_h^t) \psi'(\Delta_h v) dt dx + \\
 & + \frac{4p}{(R-\rho)^2} \int_{B_R} \int_0^1 \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| \psi'(\Delta_h v) dt dx. \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Oczywiście  $|\Delta_h(D_s v)|^2 \leq |\Delta_h(Dv)|^2$ , więc lewa strona nierówności (2.7) jest ograniczona z dołu przez

$$\int_{B_R} \int_0^1 \left( 2\nu \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau \right) \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(Dv)|^2 dt dx.$$

### 2.3. Wspólne ograniczenie ilorazów różnicowych

Kolejnym krokiem dowodu będzie wykazanie, że prawa strona (2.7) jest ograniczona przez wielkości niezależne od  $h$ . Łatwo uzyskać takie szacowania dla pierwszych czterech składników. Istotnie, stosując lemat 1.6 oraz własności  $\psi$  i  $\eta$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 Q \int_{B_R} 2\eta |D_s \eta| |\psi(\Delta_h v)| dx & \leq \frac{2c_{\psi'} Q}{R-\rho} \int_{B_{R+h_0}} |D_s v| dx, \\
 Q \int_{B_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h v| (1 + |\Delta_h v|) dx & \leq c_{\psi'} Q \int_{B_{R+h_0}} |D_s v| + |D_s v|^2 dx, \\
 \frac{1}{4\tau} \int_{B_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) dx & \leq \frac{c_{\psi'}}{4\tau} |B_R|, \\
 \frac{p^2}{\nu(R-\rho)^2} \int_{B_R} \int_0^1 G(\lambda_h^t) \psi'(\Delta_h v) dt dx & \leq \frac{p^2 c_{\psi'}}{\nu(R-\rho)^2} \int_{B_{R+h_0}} G(Dv) dx,
 \end{aligned}$$

gdyż jak łatwo widać z definicji  $\lambda_h^t$  wynika, że  $\int_{B_R} \int_0^1 G(\lambda_h^t) dt dx \leq \int_{B_{R+h_0}} G(Dv) dx$ .



Uzyskanie ograniczenia górnego ostatniego składnika prawej strony (2.7) wymaga więcej pracy. Niech  $G_k$  oznacza ciąg funkcji takich, że  $G_k(x) = G(x)$  dla  $|x| \leq k$  i  $G_k(x) = c_0|x|^2$  dla  $|x| > k$ . Ciąg ten jest niemalejący i punktowo ograniczony z góry przez  $G$ . Dodatkowo niech  $\chi_A$  oznacza funkcję charakterystyczną zbioru  $A$ . Wówczas

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \int_0^1 \frac{G_k(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx &= \int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \leq 1\}} \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \in [i, i+1]\}} \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx + \int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \geq k\}} \frac{c_0 |\lambda_h^t|^2}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx. \end{aligned}$$

Dla  $|\lambda_h^t| \leq 1$  zachodzi nierówność  $\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} \leq M$  (dla  $M = \sup_{|\xi|=1} G(\xi)$ ) i z lematu 1.10  $|\Delta_h v| \leq 1$ . Wobec tego

$$\int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \leq 1\}} \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx \leq M |B_{R+h_0}|.$$

Analogicznie dla  $|\lambda_h^t| \in [i, i+1]$  korzystając z Lematu 1.10

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \in [i, i+1]\}} \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx &\leq \int_{B_{R+i|h|}} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \in [i, i+1]\}} \frac{G(\lambda_h^t)}{i} (i+1) dt dx \leq \\ &\leq 2 \int_{B_{R+h_0}} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \in [i, i+1]\}} G(\lambda_h^t) dt dx. \end{aligned}$$

Sumując powyższe nierówności po  $i$  mamy

$$\sum_{i=1}^{k-1} \int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \in [i, i+1]\}} \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx \leq 2 \int_{B_{R+2h_0}} G(Dv) dx.$$

Korzystając z lematu 1.6 oraz nierówności  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \geq k\}} |\lambda_h^t| |\Delta_h v| dt dx &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \geq k\}} |\lambda_h^t|^2 dt dx + \frac{1}{2} \int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \geq k\}} |\Delta_h v|^2 dt dx \leq \int_{B_{R+h_0}} |Dv|^2 dx. \end{aligned}$$

Rezultatem powyższych przekształceń jest

$$\int_{B_R} \int_0^1 \frac{G_k(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx \leq M |B_{R+h_0}| + 2 \int_{B_{R+2h_0}} G(Dv) dx + \int_{B_{R+h_0}} |Dv|^2 dx.$$

Z twierdzenia o zbieżności monotonicznej, powyższej nierówności i definicji  $G_k$  mamy

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \int_0^1 \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| \psi'(\Delta_h v) dt dx &\leq c_{\psi'} \int_{B_R} \int_0^1 \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx = \\ &= c_{\psi'} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_R} \int_0^1 \frac{G_k(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx \leq \\ &\leq c_{\psi'} \left( M |B_{R+h_0}| + 2 \int_{B_{R+2h_0}} G(Dv) dx + \int_{B_{R+h_0}} |Dv|^2 dx \right). \end{aligned}$$

Ostatecznie mamy szacowanie prawej strony (2.7) przez wielkości niezależne od  $h$ :

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \int_0^1 \eta^2 \psi'(\Delta_h v) \left( 2\nu \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau \right) |\Delta_h(Dv)|^2 dt dx &\leq \\ &\leq \frac{c_{\psi'} Q}{R - \rho} \int_{B_{R+h_0}} |D_s v| dx + c_{\psi'} Q \int_{B_{R+h_0}} |D_s v| + |D_s v|^2 dx + \\ &+ \frac{c_{\psi'}}{4\tau} |B_R| + \frac{p^2 c_{\psi'}}{\nu(R - \rho)^2} \int_{B_{R+h_0}} G(Dv) dx + \\ &+ c_{\psi'} \left( M |B_{R+h_0}| + 2 \int_{B_{R+2h_0}} G(Dv) dx + \int_{B_{R+h_0}} |Dv|^2 dx \right). \quad (2.8) \end{aligned}$$

#### 2.4. Dowód nierówności (2.2)

Teraz należy wykazać, że jeśli  $\tau$  jest dostatecznie małe, to z dowolnego ciągu  $h \rightarrow 0$  można wybrać podciąg taki, że

$$2\nu \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau > \nu c_0 - \tau > 0 \quad \text{p.w.}$$

Ponieważ  $\xi_h^t \rightarrow Dv$  i  $\lambda_h^t \rightarrow Dv$  w  $L^2$  przy  $h \rightarrow 0$ , więc (po przejściu do podciągu)  $\xi_h^t$  i  $\lambda_h^t$  są również zbieżne punktowo p.w. Wobec tego

$$2\nu \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau \rightarrow \nu \frac{G(Dv)}{|Dv|^2} - \tau \geq \nu c_0 - \tau > 0.$$

W tym kroku dowolne  $\psi$  będzie wybrane konkretnie jako  $\psi(t) = t$ . Dodatkowo lewą stronę nierówności (2.8) oszacujemy zstępując kulę  $B_R$  mniejszą kulą  $B_\rho$ . W tej mniejszej kuli  $\eta$  jest stałe równa 1. Uwzględniając powyższe:

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \int_0^1 \eta^2 \psi'(\Delta_h v) \left( 2\nu \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau \right) |\Delta_h(Dv)|^2 dt dx &\geq \\ &\geq \int_{B_\rho} \int_0^1 \left( 2\nu \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau \right) |\Delta_h(Dv)|^2 dt dx \geq (\nu c_0 - \tau) \int_{B_\rho} |\Delta_h(Dv)|^2 dx. \end{aligned}$$

Mamy zatem  $\int_{B_\rho} |\Delta_h(Dv)|^2 dx \leq c$ , gdzie stała ta pochodzi z nierówności (2.8), więc nie zależy od  $h$ . Na mocy lematu 1.8 dla  $p = 2$  istnieje słaba pochodna cząstkowa drugiego rzędu i  $\int_{B_\rho} |D_s(Dv)|^2 dx \leq c$  dla tej samej wartości  $c$ .

Ponieważ  $h_0$  było wybrane dowolnie małe, więc kule  $B_{R+h_0}$  i  $B_{R+2h_0}$  można zastąpić w górnych ograniczeniach z prawej strony nierówności (2.8) kulą  $B_R$ . Dodatkowo z założenia  $(G_3)$ , mamy  $|D_s v| \leq 1 + G(Dv)/c_0$  i  $|D_s v|^2 \leq G(Dv)/c_0$ , więc można całą prawą stronę (2.8) oszacować z góry przez

$$\begin{aligned} & \frac{c_{\psi'} Q}{R - \rho} \int_{B_{R+h_0}} |D_s v| dx + c_{\psi'} Q \int_{B_{R+h_0}} |D_s v| + |D_s v|^2 dx + \frac{c_{\psi'}}{4\tau} |B_R| + \\ & \quad + \frac{p^2 c_{\psi'}}{\nu(R - \rho)^2} \int_{B_{R+h_0}} G(Dv) dx + \\ & \quad + c_{\psi'} \left( M |B_{R+h_0}| + 2 \int_{B_{R+2h_0}} G(Dv) dx + \int_{B_{R+h_0}} |Dv|^2 dx \right) \leq c \int_{B_R} 1 + G(Dv) dx. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int_{B_\rho} |D_s(Dv)|^2 dx \leq c \int_{B_R} 1 + G(Dv) dx,$$

co kończy dowód nierówności (2.2).

## 2.5. Dowód nierówności (2.3)

Jako punkt wyjścia do dowodu nierówności (2.3) posłuży dolne oszacowanie nierówności (2.7). Stosując do niej ograniczenia na  $\eta$ ,  $D\eta$  i  $\psi'$  oraz nierówność (2.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \int_{B_R} \int_0^1 \left( 2\nu \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau \right) \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(Dv)|^2 dt dx \leq \\ & \leq c \int_{B_R} \int_0^1 \left( 1 + 2|\Delta_h v| + |\Delta_h v|^2 + G(\lambda_h^t) + \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| \right) \psi'(\Delta_h v) dt dx \leq \\ & \leq c \int_{B_R} \int_0^1 1 + \left( |\Delta_h v| + |\Delta_h v|^2 + G(\lambda_h^t) + \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| \right) \psi'(\Delta_h v) dt dx. \end{aligned}$$

Z lematu 1.7 wiadomo, że  $\Delta_h v$  zbiega do  $D_s v$  oraz  $\Delta_h(Dv)$  do  $D_s(Dv)$  w  $L^2$ . Dodatkowo zauważmy, że na mocy definicji  $\lambda_h^t$  i  $\xi_h^t$  są równe  $Dv$  z przesuniętym argumentem. Wobec tego wszelkie funkcje zależne od  $\lambda_h^t$  i  $\xi_h^t$  (jako translacje w argumentach  $x$ ) zbiegają w  $L^1$  do odpowiednich funkcji zależnych od  $Dv$  (np.  $\frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} \rightarrow \frac{G(Dv)}{|Dv|^2}$  w  $L^1$ ). Stąd wynika, że w powyższej nierówności można przejść do granicy z  $h \rightarrow 0$ .

Dodatkowo korzystając z założenia  $(G_3)$ , podobnie jak w dowodzie nierówności (2.2), otrzymujemy

$$\int_{B_R} \eta^2 \psi'(D_s v) \left( \nu \frac{G(|Dv|)}{|Dv|^2} - \tau \right) |D_s(Dv)|^2 dx \leq c \int_{B_R} 1 + G(Dv) \psi'(D_s v) dx. \quad (2.9)$$

Również z  $(G_3)$  otrzymujemy natychmiast

$$\nu \frac{G(Dv)}{|Dv|^2} - \tau \geq \frac{G(Dv)}{|Dv|^2} \left( \nu - \frac{\tau}{c_0} \right).$$

Wobec tego, jeśli  $\tau$  jest dostatecznie małe, to po zmianie stałej  $c$ , nierówność (2.9) można przepisać jako

$$\int_{B_R} \eta^2 \psi'(D_s v) \frac{G(|Dv|)}{|Dv|^2} |D_s(Dv)|^2 dx \leq c \int_{B_R} 1 + G(Dv) \psi'(D_s v) dx. \quad (2.10)$$

Następnym krokiem będzie udowodnienie, że powyższa nierówność pozostaje prawdziwa po opuszczeniu założenia o ograniczoności  $\psi'$ . Niech  $\tilde{\psi}$  spełnia wszystkie założenia wcześniej ustalone dla  $\psi$ , ale niech jego pochodna  $\tilde{\psi}'$  jest nieograniczona. Dla takiego  $\tilde{\psi}$  definiujemy ciąg  $\tilde{\psi}_k$  następująco:  $\tilde{\psi}_k(t) = \tilde{\psi}(t)$  dla  $|t| < k$  i  $\tilde{\psi}_k(t) = \tilde{\psi}'(k)$  dla  $|t| \geq k$ . Każde  $\tilde{\psi}_k$  ma ograniczoną pochodną, więc nierówność (2.10) zachodzi dla  $\tilde{\psi}_k$ . Z twierdzenia o zbieżności monotonicznej, nierówność (2.10) jest prawdziwa także dla  $\tilde{\psi}$ .

Wobec powyższego w dalszych rozważaniach  $\psi'$  może być nieograniczone. Korzystając z faktu, że  $\psi'$  jest parzysta nierówność (2.10) można przepisać jako

$$\int_{\tilde{B}_R} \eta^2 \psi'(|D_s v|) \frac{G(Dv)}{|Dv|^2} |D_s(Dv)|^2 dx \leq c \int_{\tilde{B}_R} 1 + G(Dv) \psi'(|D_s v|) dx. \quad (2.11)$$

Zdefiniujmy funkcję  $\Phi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  wzorem

$$\Phi(t) = 1 + c_\Phi \int_0^t \sqrt{\psi'(\tau)} \cdot \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} d\tau, \quad (2.12)$$

gdzie  $c_\Phi > 0$ . Wprost z definicji i nierówności  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$  wynika, że

$$|D(\eta \Phi(|D_s v|))|^2 \leq 2|D\eta|^2 (\Phi(|D_s v|))^2 + 2\eta^2 c_\Phi^2 \psi'(|D_s v|) |D_s v|^{\alpha-2} |D(D_s v)|^2. \quad (2.13)$$

Łatwo zauważyć, że z  $(G_5)$  mamy  $|D_s v|^{\alpha-2} \leq c \frac{G(Dv)}{|Dv|^2}$ . Znow wychodząc od nierówności  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$  dostajemy także

$$\begin{aligned} (\Phi(|D_s v|))^2 &\leq \left( 1 + c_\Phi \sqrt{\psi'(|D_s v|)} \cdot |D_s v|^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot |D_s v| \right)^2 \leq \\ &\leq 2 + 2c_\Phi^2 \psi'(|D_s v|) |D_s v|^\alpha \leq 2 + 2c \psi'(|D_s v|) G(Dv). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Stosując łącznie nierówności (2.11), (2.13) i (2.14) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \int_{B_R} |D(\eta\Phi(|D_s v|))|^2 dx \leq \\
& \leq 2 \int_{B_R} |D\eta|^2 (\Phi(|D_s v|))^2 dx + 2 \int_{B_R} \eta^2 c_\Phi^2 \psi'(|D_s v|) \frac{G(Dv)}{|Dv|^2} |D(D_s v)|^2 dx \leq \\
& \leq 2 \int_{B_R} 2 + 2c \psi'(|D_s v|) G(Dv) dx + c \int_{B_R} 1 + G(Dv) \psi'(|D_s v|) dx = \\
& = c \int_{B_R} 1 + G(Dv) \psi'(|D_s v|) dx.
\end{aligned}$$

Z nierówności Sobolewa i definicji  $\eta$  wynika, że:

$$\left( \int_{B_\rho} (\Phi(|D_s v|))^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C \int_{B_R} |D(\eta\Phi(|D_s v|))|^2 dx,$$

co razem z wcześniejszą nierównością daje

$$\begin{aligned}
\left( \int_{B_\rho} (\Phi(|D_s v|))^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} & \leq C \int_{B_R} |D(\eta\Phi(|D_s v|))|^2 dx \leq \\
& \leq c \int_{B_R} (1 + G(Dv) \psi'(|D_s v|)) dx. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Niech  $\gamma \geq 0$ ,  $c_\Phi = \gamma + \frac{\alpha}{2}$  i niech  $\psi(t) = \frac{1}{2\gamma+1} t^{2\gamma+1}$  dla  $t \geq 0$ . Stąd  $\psi'(t) = t^{2\gamma}$ . Wówczas

$$\Phi(t) = 1 + \left( \gamma + \frac{\alpha}{2} \right) \int_0^t \tau^{\gamma + \frac{\alpha}{2} - 1} d\tau = 1 + t^{\gamma + \frac{\alpha}{2}}.$$

Stąd wynika, że

$$(\Phi(|D_s v|))^{2^*} \geq 1 + \left( \gamma + \frac{\alpha}{2} \right) \int_0^{|D_s v|} \tau^{\gamma + \frac{\alpha}{2} - 1} d\tau = 1 + |D_s v|^{2^* (\gamma + \frac{\alpha}{2})}.$$

Stosując definicję  $\psi$  oraz powyższą nierówność do (2.15) otrzymujemy

$$\left( \int_{B_\rho} 1 + |D_s v|^{2^* (\gamma + \frac{\alpha}{2})} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c \int_{B_R} 1 + G(Dv) |D_s v|^{2\gamma} dx.$$

Wobec tego

$$\int_{B_\rho} 1 + |D_s v|^{2^* (\gamma + \frac{\alpha}{2})} dx \leq c \left( \int_{B_R} 1 + G(Dv) |D_s v|^{2\gamma} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Biorąc powyższą nierówność dla wszystkich  $s = 1, 2, \dots, n$ , sumując stronami a następnie korzystając z nierówności  $\sum_{i=1}^n a_i^\beta \leq (\sum_{i=1}^n a_i)^\beta$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho} n + \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2^*(\gamma + \frac{\alpha}{2})} dx &\leq c \sum_{s=1}^n \left( \int_{B_R} 1 + G(Dv) |D_s v|^{2\gamma} dx \right)^{\frac{2^*}{2}} \leq \\ &\leq c \left( \int_{B_R} n + G(Dv) \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2\gamma} dx \right)^{\frac{2^*}{2}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Zauważmy, że dla wszystkich nieujemnych i niemalejących funkcji  $h_1$  i  $h_2$  zachodzi nierówność

$$n \sum_{i=1}^n h_1(a_i) \cdot h_2(a_i) \geq \sum_{i=1}^n h_1(a_i) \cdot \sum_{i=1}^n h_2(a_i).$$

Będzie ona zastosowana do lewej strony (2.16) razem z założeniem  $(G_6)$ . Niech  $A_1$  oznacza zbiór  $\{x : |Dv(x)| \geq 1\}$ . Szacowanie lewej strony (2.16) wykonamy osobno dla całki po  $B_\rho \cap A_1$  oraz  $B_\rho \setminus A_1$ . Dla pierwszego z tych zbiorów mamy

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho \cap A_1} n + \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2^*(\gamma + \frac{\alpha}{2})} dx &= \int_{B_\rho \cap A_1} n + \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2^*(\frac{\alpha}{2}-1)+2} \cdot |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} dx \geq \\ &\geq \int_{B_\rho \cap A_1} n + \frac{1}{n} \left( \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2^*(\frac{\alpha}{2}-1)+2} \right) \left( \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} \right) dx \geq \\ &\geq c \int_{B_\rho \cap A_1} 1 + G(Dv) \left( \sum_{s=0}^n |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} \right) dx. \end{aligned}$$

Pamiętając, że  $M = \sup_{|\xi|=1} G(\xi)$ ,  $\gamma \geq 0$  i  $2^* \geq 2$  łatwo widać, że dla  $|\xi| \leq 1$  zachodzą nierówności

$$\sum_{s=1}^n |\xi_s|^{2^*(\gamma+1)-2} \leq |\xi|^2 \quad \text{i} \quad G(\xi) \sum_{s=1}^n |\xi_s|^{2^*(\gamma+1)-2} \leq M.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho \setminus A_1} n + \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2^*(\gamma + \frac{\alpha}{2})} dx &\geq \int_{B_\rho \setminus A_1} n dx \geq \frac{1}{2} \int_{B_\rho \setminus A_1} n + \frac{n}{M} M dx \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{B_\rho \setminus A_1} n + \frac{n}{M} G(Dv) \left( \sum_{s=0}^n |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} \right) dx. \end{aligned}$$

W rezultacie prawdziwa jest także nierówność

$$\int_{B_\rho} n + \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2^*(\gamma + \frac{\alpha}{2})} dx \geq c \int_{B_\rho} 1 + G(Dv) \left( \sum_{s=0}^n |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} \right) dx.$$

Nierówność (2.16) przyjmuje teraz postać

$$\left( \int_{B_\rho} 1 + G(Dv) \left( \sum_{s=0}^n |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} \right) dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c \int_{B_R} 1 + G(Dv) \left( \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2\gamma} \right) dx. \quad (2.17)$$

Aby wykazać, że  $|Dv| \in L^\infty$  stworzymy ciąg całek z rosnących potęg  $|D_s v|$ . Ciąg ten powstanie w oparciu o nierówność (2.17). Wprowadźmy oznaczenia:  $\gamma_0 = 0$ ,  $\gamma_{i+1} = \frac{2^*}{2}(\gamma_i + 1) - 1$  oraz  $R_i = \frac{R}{2} + \frac{R}{2^{i+1}}$ . Wprost z tej definicji wynika, że  $\gamma_i = \left(\frac{2^*}{2}\right)^i - 1$ ,  $\gamma_i \rightarrow \infty$  oraz  $R_i \rightarrow \frac{R}{2}$ . Podstawiając w (2.17)  $\gamma_i$  zamiast  $\gamma$ ,  $R_i$  zamiast  $R$  oraz  $R_{i+1}$  zamiast  $\rho$  mamy

$$\left( \int_{B_{R_{i+1}}} 1 + G(Dv) \left( \sum_{s=0}^n |D_s v|^{2\gamma_{i+1}} \right) dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c \int_{B_{R_i}} 1 + G(Dv) \left( \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2\gamma_i} \right) dx. \quad (2.18)$$

Zauważmy, że w (2.18) całki wyższych potęg  $|D_s v|$  są szacowane z góry przez całki mniejszych potęg. Niech teraz

$$E_i = \left( \int_{B_{R_i}} 1 + G(Dv) \left( \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2\gamma_i} \right) dx \right)^{\frac{1}{\gamma_{i+1}}}.$$

Zauważmy w szczególności, że  $E_0 = \int_{B_R} 1 + G(Dv) dx$ . Wprost z definicji  $\gamma_i$  wynika, że  $\frac{\gamma_{i+1}+1}{\gamma_{i+1}} = \frac{2^*}{2}$ . Na mocy (2.18) prawdziwe jest szacowanie

$$E_{i+1} \leq c^{\frac{1}{\gamma_{i+1}}} E_i \leq \left( \prod_{j=0}^i c^{\frac{1}{\gamma_{j+1}}} \right) E_0.$$

Bezpośredni rachunek pokazuje, że

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^i c^{\frac{1}{\gamma_{j+1}}} = \exp \left( \ln c \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{2}{2^*} \right)^j \right) = c^{\frac{1}{1-\frac{2}{2^*}}}.$$

Wobec tego

$$\infty > c^{\frac{1}{1-\frac{2}{2^*}}} E_0 = c^{\frac{1}{1-\frac{2}{2^*}}} \int_{B_R} 1 + G(Dv) dx \geq \lim_{i \rightarrow \infty} E_{i+1}.$$

Pamiętając, że  $B_{\frac{R}{2}} \subset B_{R_{i+1}}$  oraz korzystając z  $(G_3)$  i lematu 1.9

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} E_{i+1} &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \int_{B_{R_{i+1}}} 1 + G(Dv) \left( \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2\gamma_{i+1}} \right) dx \right)^{\frac{1}{\gamma_{i+1}+1}} \geq \\ &\geq \lim_{i \rightarrow \infty} \left( c_0 \int_{B_{\frac{R}{2}}} \left( |Dv|^2 \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2\gamma_{i+1}} \right) dx \right)^{\frac{1}{\gamma_{i+1}+1}} \geq \\ &\geq \lim_{i \rightarrow \infty} \left( c_0 \int_{B_{\frac{R}{2}}} \left( \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2\gamma_{i+1}+2} \right) dx \right)^{\frac{1}{\gamma_{i+1}+1}} = \operatorname{ess\,sup}_{B_{\frac{R}{2}}} |Dv|^2. \end{aligned}$$

Podsumowując te szacowania mamy

$$\infty > c \int_{B_R} 1 + G(Dv) dx = cE_0 \geq \lim_{i \rightarrow \infty} E_{i+1} = \operatorname{ess\,sup}_{B_{\frac{R}{2}}} |Dv|^2,$$

co dowodzi, że  $|Dv| \in L^\infty$  i jednocześnie kończy dowód nierówności (2.3).



# Rozwiązania heterokliniczne problemu Allena-Cahna

W tym rozdziale sformułowane i udowodnione zostanie twierdzenie o istnieniu rozwiązań heteroklinicznych problemu typu Allena-Cahna. Ze względu na charakter tych rozwiązań warto wyszczególnić jedną ze zmiennych, względem której te rozwiązania będą heterokliniczne. Będziemy więc używali zapisu  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ , zamiast  $x \in \mathbb{R}^n$ , przy czym oczywiście nie jest konieczne, aby  $x$  był pierwszą ze zmiennych. W pozostałych współrzędnych  $y$  poszukiwane rozwiązania mają być 1-okresowe. Po takim podstawieniu równanie będzie postaci

$$-\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x, y))) + F_u(x, y, u(x, y)) = 0, \quad (\text{AC})$$

gdzie  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Niech  $F \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$  spełnia założenia standardowe dla problemów typu Allena Cahna:

(F<sub>1</sub>)  $F$  jest 1-okresowa w  $x$  i wszystkich współrzędnych  $y$ ,

(F<sub>2</sub>)  $F(x, y, 0) = F(x, y, 1) = 0$  dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ ,

(F<sub>3</sub>)  $F(x, y, s) > 0$  dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^n$  i  $s \in (0, 1)$ ,

(F<sub>4</sub>)  $F(x, y, s) \geq 0$  dla  $(x, y, s) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Najprostszym przykładem jest funkcja  $F$  niezależna od  $x$  i  $y$  jak na przykład  $F(x, y, s) = s^2(1-s)^2$  lub  $\sin^2(\pi s)$ . Oczywiście  $F$  może też zależeć od  $x$  i  $y$ , np.  $F(x, y, s) = u^2(u-1)^2(u^2 + \sin 2\pi x + \sin 2\pi y + 3)$ .

W tym rozdziale pozostaną w mocy wszystkie wcześniejsze założenia na funkcję  $G$ , czyli (G<sub>1</sub>)-(G<sub>7</sub>). Dodatkowo będziemy zakładać warunek  $\nabla_2$ . Dzięki temu przestrzeń  $W^{1,G}$  będzie refleksywna.

Z założeń (F<sub>1</sub>) - (F<sub>4</sub>) bezpośrednio wynika, że równanie (AC) posiada dwa trywialne rozwiązania stałe równe 0 lub 1. Celem będzie wykazanie istnienia rozwiązań heteroklinicz-



nych w zmiennej  $x$  (tzn. zbieżnych do 0 przy  $x \rightarrow -\infty$  i do 1 przy  $x \rightarrow \infty$ ) i okresowych w zmiennych  $y$ . Istotnym utrudnieniem w rozwiązywaniu tego problemu metodami wariacyjnymi jest fakt, że naturalną dziedziną takich rozwiązań jest  $\mathbb{R}^n$ . Wobec czego nie są to funkcje całkowalne na swojej dziedzinie. Aby użyć metod wariacyjnych będziemy korzystać z odpowiednio skonstruowanej przestrzeni. Nie będzie to opisana wcześniej przestrzeń Orlicza-Sobolewa, ale jej podprzestrzeń.

Niech  $E_1$  oznacza podprzestrzeń  $W_{loc}^{1,G}(\mathbb{R}^n)$  zawierającą funkcje  $u$ , które są 1-okresowe we wszystkich współrzędnych  $y$  i spełniające warunek  $\|\nabla u\|_{L^G(\mathbb{R} \times [0,1]^{n-1})} < \infty$ . W przestrzeni  $E_1$  można wprowadzić normę daną wzorem

$$\|u\|_{E_1} = \|u\|_{L^2([0,1]^n)} + \|\nabla u\|_{L^G(\mathbb{R} \times [0,1]^{n-1})}. \quad (3.1)$$

Metryka indukowana przez normę  $\|\cdot\|_{E_1}$  jest równoważna w  $E_1$  metryce przestrzeni  $W_{loc}^{1,G}(\mathbb{R}^n)$ , ponadto  $E_1$  jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni  $W_{loc}^{1,G}(\mathbb{R}^n)$ . Z tego powodu  $E_1$  jest refleksywną przestrzenią Banacha. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

- dla każdego całkowitego  $k$  i dla każdej funkcji  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  definiujemy

$$\tau_k u(x, y) = u(x - k, y), \quad (3.2)$$

- rozwiązań heteroklinicznych będziemy szukać w zbiorze

$$\Gamma = \{u \in E_1 : \tau_{-1}u \geq u \text{ p.w.} \wedge \lim_{k \rightarrow -\infty} \tau_{-k}u = 0 \wedge \lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_{-k}u = 1 \text{ w } L_{loc}^2\}. \quad (3.3)$$

Zauważmy, że jeśli  $u \in \Gamma$ , to  $0 \leq u \leq 1$  p.w. Warunki definiujące zbiór  $\Gamma$  zawierają granice w  $L_{loc}^2$  zamiast klasycznych granic definiujących heterokliniczność, gdyż w tym momencie nie możemy jeszcze stwierdzić, że elementy  $\Gamma$  w ogóle posiadają granice w klasycznym sensie.

- Operator  $L$  jest dany wzorem  $L(u) = G(\nabla u) + F(x, y, u)$  zaś funkcjonał  $I : E_1 \rightarrow [0, \infty]$  jest zdefiniowany wzorem:

$$I(u) = \int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{\mathbb{R}} L(u) dx. \quad (3.4)$$

- Infimum funkcjonału  $I$  na zbiorze  $\Gamma$  będzie oznaczone jako

$$c_\Gamma = \inf_{u \in \Gamma} I(u).$$

Wykażemy, że funkcjonał  $I$  osiąga na zbiorze  $\Gamma$  minimum, które jest klasycznym rozwiązaniem problemu (AC).

**Twierdzenie 3.1.** *Istnieje funkcja  $v \in \Gamma$  będąca klasycznym heteroklinicznym rozwiązaniem (AC), dla której  $I(v) = c_\Gamma$ ,  $\tau_{-1}u < u$  oraz  $0 < v < 1$ .*

Należy zwrócić uwagę, że z założeń  $(F_1)$ - $(F_4)$  bezpośrednio nie wynikają założenia  $(A_1)$ - $(A_3)$ . Jednak poszukując rozwiązań heteroklinicznych, czyli zawartych w  $\Gamma$  ograniczamy ich zbiór wartości do przedziału  $[0, 1]$ . Założenia  $(F_1)$ - $(F_4)$  sprawiają, że funkcja  $F$  obciążona do zbioru  $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$  jest ograniczona i ma ograniczone pochodne. Wobec tego spełnione są także  $(A_1)$ - $(A_3)$  i twierdzenie 2.1 będzie mogło być zastosowane.

### 3.1. Rozwiązanie problemu wariacyjnego

Zauważmy, że zarówno zbiór  $\Gamma$  jak i funkcjonal  $I$  są niezmiennicze ze względu na  $\tau_k$  w następującym sensie:  $u \in \Gamma \Leftrightarrow \tau_k u \in \Gamma$  oraz  $I(u) = I(\tau_k u)$ . Oznacza to więc, że jeśli  $u$  jest nietrywialnym minimum  $I$ , to nie jest ono jedyne, gdyż każde  $\tau_k u$  także minimalizuje  $I$ .

Oczywiście  $I(v) \geq 0$  dla wszystkich  $v \in \Gamma$  więc  $c_\Gamma \geq 0$ . Niech  $\{u_j\} \subset \Gamma$  oznacza ciąg minimalizujący  $I$ . Ciąg wartości  $I(u_j)$  jest zbieżny do  $c_\Gamma$ , a więc jest ograniczony, tzn.  $I(u_j) < M$  dla wszystkich  $j$ . Stąd wynika, że ciąg  $\{u_j\}$  jest ograniczony w normie  $\|\cdot\|_{E_1}$ , gdyż

$$\int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{\mathbb{R}} G(\nabla u_j) dx \leq \int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{\mathbb{R}} G(\nabla u_j) + F(x, y, u_j) dx = I(u_j) < M$$

oraz  $\int_{[0,1]^n} |u_j| dx dy$  jest ograniczony przez 1, jako że  $u_j \in \Gamma$ .

Powyżej widać dlaczego ważne jest powiązanie przestrzeni  $W^{1,G}$  z postacią funkcjonału. W tym szacowaniu nie byłoby możliwe zastosowanie wspomnianych we wstępie wyników z artykułu [20].

Ponieważ  $I$  jest niezmiennicze ze względu na  $\tau_k$ , więc bez straty ogólności można założyć, że ciąg  $u_j$  został tak wybrany, aby

$$\int_{[0,1]^{n-1}} \int_{[0,1]} u_j dx dy > \frac{1}{2}, \quad \text{oraz} \quad \int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{[k-1,k]} u_j dx \leq \frac{1}{2} \quad \text{dla } k \leq 0. \quad (3.5)$$

Rzeczywiście,  $u_j$  można zastąpić przez  $\tau_{-k_j} u_j$  gdzie  $k_j$  jest najmniejszym takim  $k$ , że

$$\int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{[k-1,k]} u_j dx > \frac{1}{2}.$$

Takie  $k_j$  istnieje gdyż wprost z definicji  $\Gamma$  wynika, że

$$\int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{[k-1,k]} u_j dx \rightarrow 0 \quad \text{dla } k_j \rightarrow -\infty \quad \text{oraz} \quad \int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{[k-1,k]} u_j dx \rightarrow 1 \quad \text{dla } k_j \rightarrow +\infty.$$



Taka modyfikacja ciągu minimalizującego będzie potrzebna w Lemacie 3.2.

Przestrzeń  $E_1$  jest refleksywna, więc istnieje  $v \in E_1$  oraz podciąg  $\{u_j\}$  (oznaczany wciąż jako  $\{u_j\}$ ) słabo zbieżny do  $v$  w  $E_1$ . Z tego podciągu można również wybrać podciąg silnie zbieżny  $L_{loc}^2$  i punktowo prawie wszędzie.

Wykażemy teraz, że  $I(v) \leq M$ . Istotnie, dla każdego  $j, n$ :  $\int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{-n}^n L(u_j) dx \leq M$ . Zbiór po którym całkujemy jest teraz ograniczony, więc ze słabej półciągłości z dołu tego funkcjonału mamy  $\int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{-n}^n L(v) dx \leq M$  dla wszystkich  $n$ . Biorąc  $n \rightarrow \infty$  można stwierdzić, że  $\int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{\mathbb{R}} L(v) dx \leq M$ .

W poniższym lemacie będzie potrzebna równoważna postać funkcjonału  $I$ . Niech:

$$a_k(u) = \int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{[k,k+1]} L(u) dx \quad \text{i} \quad I(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(u).$$

**Lemat 3.2.** *Powyżej zdefiniowana funkcja  $v$  należy do  $\Gamma$ .*

**Dowód:** Dla wszystkich  $j$ ,  $\tau_{-1}u_j \geq u_j$  p.w. oraz  $u_j \rightarrow v$  p.w. więc  $\tau_{-1}v \geq v$  p.w. Należy wykazać, że  $\tau_{-k}v \rightarrow 1$  w  $L^2$  przy  $k \rightarrow +\infty$ . Ciąg  $\tau_{-k}v$  jest ograniczony w  $W_{loc}^{1,G}(\mathbb{R} \times [0,1]^{n-1})$ , ponieważ  $I(\tau_{-k}v) = I(v) \leq M$ . Istnieje  $v^*$  takie, że  $\tau_{-k}v \rightarrow v^*$  słabo w  $W_{loc}^{1,G}(\mathbb{R} \times [0,1]^{n-1})$ , silnie w  $L_{loc}^2$  oraz  $v^* \in W^{1,G}([0,1]^n)$ . Mamy również  $a_k(v) = a_0(\tau_{-k}v) \rightarrow a_0(v^*)$ , gdyż  $I(v)$  jest skończone. Wobec tego  $a_k(v) \rightarrow 0$ . Z definicji  $a_0$  otrzymujemy  $v^* = const$  oraz  $\int_{[0,1]^n} F(x, y, v^*) dx dy = 0$ . To oznacza, że  $v^* \equiv 0$  lub  $v^* \equiv 1$ . Z równania (3.5) wynika, że  $v^* \equiv 1$ .

Analogicznie dowodzi się, że  $\tau_{-k}v \rightarrow 0$  w  $L^2$  przy  $k \rightarrow -\infty$ . □

Teraz można pokazać, że  $I(v) = c_\Gamma$ . Oczywiście  $I(v) \geq c_\Gamma$ . Dla ustalonego  $\epsilon > 0$  oraz dostatecznie dużych  $j$

$$\sum_{-n}^n a_k(u_j) \leq I(u_j) \leq c_\Gamma + \epsilon \quad \text{dla wszystkich } n.$$

Jeśli  $j \rightarrow \infty$ , to

$$\sum_{-n}^n a_k(v) \leq c_\Gamma + \epsilon \quad \text{dla wszystkich } n.$$

Jeśli  $n \rightarrow \infty$ , to  $I(v) \leq c_\Gamma + \epsilon$  dla wszystkich  $\epsilon > 0$  więc  $I(v) = c_\Gamma$ .

Pozostaje wykazać, że  $v$  jest słabym rozwiązaniem równania (AC), a w konsekwencji na mocy odpowiednich twierdzeń o regularności, będzie wykazane, że  $v$  jest również klasycznym rozwiązaniem. Dodatkowo wykażemy, że  $0 < v < 1$ .

Aby to osiągnąć, problem będzie analizowany lokalnie. Poniżej oraz w całym kolejnym podrozdziale 3.2 rozróżnienie  $x$  i  $y$  nie będzie konieczne, więc dla skrócenia zapisu będzie

stosowane skrócone oznaczenie  $z = (x, y)$ . Kulę o środku  $z \in \mathbb{R}^n$  i promieniu  $r$  oznaczmy jako  $B_r(z)$ .

**Definicja 3.3.** Dla każdego  $r \leq \frac{1}{2}$  i  $z \in [0, 1] \times \mathbb{R}^{n-1}$  zdefiniujemy

$$Z(B_r(z), v) = \left\{ u \in E_1 : u = v \text{ na } B_{\frac{1}{2}}(z) - B_r(z) \right\}$$

oraz funkcjonal  $\Phi_{B_r(z), v} : Z(B_r(z), v) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Phi_{B_r(z), v}(u) = \int_{B_r(z)} L(u) dx dy.$$

Łatwo sprawdzić, że  $Z(B_r(z), v)$  jest domkniętym i wypukłym podzbiorem  $E_1$ . Infimum  $\Phi_{B_r(z), v}$  na  $Z(B_r(z), v)$  będzie oznaczane symbolem  $c(B_r(z), v)$ . Zbiór minimów funkcjonalu  $\Phi$  będzie oznaczony jako

$$M(B_r(z), v) = \{ w \in Z(B_r(z), v) : \Phi_{B_r(z), v}(w) = c(B_r(z), v) \}.$$

Poniżej zostanie wykazane, że  $v$  nie tylko minimalizuje globalny funkcjonal  $I$ , ale także lokalne funkcjonały  $\Phi$  czyli, że  $v \in M(B_r(z), v)$ .

**Twierdzenie 3.4.** Dla każdego  $z \in \mathbb{R} \times [0, 1]^{n-1}$  i  $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$  funkcja  $v$  jest jednoznacznie wyznaczonym minimum  $\Phi_{B_\epsilon(z), v}$  na  $Z(B_\epsilon(z), v)$ .

Z twierdzenia 3.4 wynika, że  $v$  jest słabym rozwiązaniem (AC) na każdej kuli o odpowiednio małym promieniu. Stąd,  $v$  jest słabym rozwiązaniem globalnie.

Zakładając prawdziwość twierdzenia 3.4 można zastosować twierdzenie 2.1, aby wykazać, że słabe rozwiązanie  $v$  spełnia lokalnie warunek Lipschitza. W celu uzyskania wyższej regularności poniżej zostaną zacytowane (w uproszczonej formie) twierdzenia 6.2 i 6.3 z rozdziału 4 z klasycznej monografii [16]. Są to odpowiednio:

**Twierdzenie 3.5.** Niech  $u \in W^{1, \infty}(\Omega)$  jest słabym rozwiązaniem równania

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, u, u_x) + a(x, u, u_x) = 0$$

gdzie  $a$  oraz  $a_i$  są różniczkowalne oraz ograniczone (wraz z pochodnymi) na zbiorze wartości  $u$  i  $u_x$ . Niech także  $a_i$  spełniają warunek eliptyczności. Wówczas  $u$  jest klasy  $C^{1, \alpha}(\Omega') \cap W^{2, 2}(\Omega')$  przy dowolnie ustalonym  $\Omega' \subset \Omega$ .

**Twierdzenie 3.6.** Niech  $u \in W^{2, 2}(\Omega) \cap C^{0, 1}(\bar{\Omega})$  jest słabym rozwiązaniem problemu z poprzedniego twierdzenia. Niech również funkcje  $a_i$  spełniają warunek eliptyczności oraz  $a_i \in C^{l-1, \beta}$ ,  $a \in C^{l-2, \beta}$  ( $l \geq 2$ ). Wówczas  $u \in C^{l, \beta}$ .

Twierdzenia te gwarantują więc, że elementy  $M(B_r(z), v)$  będące dzięki twierdzeniu 2.1 klasy  $W^{1,\infty}$ , są tak naprawdę rozwiązaniami klasy  $C^2$ . Twierdzenia mogą być tu stosowane przy  $a_i = G_{\xi_i}$  oraz  $a = F_u$  ponieważ warunek eliptyczności wynika z  $(G_7)$ .

Dowód twierdzenia 3.4 będzie podzielony na szereg lematów i zostanie przeprowadzony w następnym podrozdziale.

### 3.2. Własności funkcjonału $\Phi$ - dowód Twierdzenia 3.4

W tym podrozdziale szukane będą minima  $\Phi_{B_r(z)}$  na zbiorze  $Z(B_r(z), v)$ , oznacza to w konsekwencji rozwiązywanie równania (AC) jako problemu brzegowego na kuli  $B_r(z)$ . Badane będą także własności tych minimów. Sformułowania i dowody lematów 3.7, 3.10, 3.11 są zbliżone do zaprezentowanych w [24]. Ze względu na bardziej ogólną postać równania (w szczególności użycie funkcji  $G$  i postawienie problemu w przestrzeni Orlicza-Sobolewa) dowody nie mogą być jednak powtórzone dosłownie. Lemat 3.8 także jest inspirowany [24], ale w tym przypadku dowód jest istotnie inny.

**Lemat 3.7.** *Dla każdego  $r < \frac{1}{2}$  istnieje  $w \in Z(B_r(z), v)$  takie, że  $\Phi_{B_r(z)}(w) = c(B_r(z), v)$ .*

**Dowód:** Postępowanie będzie podobne do znajdowania minimum funkcjonału  $I$ . Niech  $\{u_j\} \subset Z(B_r(z), v)$  jest ciągiem minimalizującym dla funkcjonału  $\Phi_{B_r(z)}$ . Jest to ciąg ograniczony w przestrzeni refleksywnej  $W^{1,G}(B_{\frac{1}{2}}(z))$ , więc posiada podciąg słabo zbieżny do pewnego  $w \in W^{1,G}(B_{\frac{1}{2}}(z))$ . Zbiór  $Z(B_r(z), v)$  jest domknięty i wypukły w  $W^{1,G}(B_{\frac{1}{2}}(z))$ , więc  $w \in Z(B_r(z), v)$ .  $\Phi_{B_r(z)}$  jest już całką po zbiorze ograniczonym, więc  $\Phi_{B_r(z)}$  jest słabo półciągły z dołu i  $\Phi_{B_r(z)}(w) = c(B_r(z), v)$ .  $\square$

Dzięki twierdzeniu 2.1 funkcja  $w$  oraz każde inne minimum  $\Phi_{B_r(z)}$  w zbiorze  $M(B_r(z), v)$  należy do  $W_{loc}^{1,\infty}$  tzn. spełnia lokalnie warunek Lipschitza.

**Lemat 3.8.** *Zbiór  $M(B_r(z), v)$  jest uporządkowany w następującym sensie: jeśli  $\varphi, \psi \in M(B_r(z), v)$  oraz  $\varphi \not\equiv \psi$ , to  $\varphi < \psi$  albo  $\varphi > \psi$  w  $B_r(z)$ .*

Powyższy lemat jest zbliżony w treści do Lematu 4.2 z [21], którym inspirowali się również autorzy [24]. Dowód lematu będzie istotnie inny niż podobnych lematów z [21] czy [24], gdyż zamiast tradycyjnej zasady maksimum wykorzystane będzie ogólniejsze twierdzenie będące konsekwencją twierdzenia 2.5.3 z [23]:

**Twierdzenie 3.9.** *Rozważmy równanie  $\operatorname{div} A(x, u, Du) + B(x, u, Du) = 0$  na zbiorze otwartym, spójnym i ograniczonym. Niech  $A(x, z, \xi)$  jest klasy  $C^1$ , zaś  $B$  jest ciągła i spełnia*



lokalnie warunek Lipschitza. Niech macierz  $D_\xi A$  jest dodatnio określona zaś  $u$  i  $v$  oznaczają dwa rozwiązania tego równania klasy  $C^0 \cap W_{loc}^{1,2}$ , dla których  $u \leq v$ . Wówczas albo  $u \equiv v$  albo  $u < v$  w całej dziedzinie.

Teraz przejdziemy do dowodu lematu 3.8.

**Dowód:** Niech  $\chi = \max\{\varphi, \psi\}$  i  $\xi = \min\{\varphi, \psi\}$ . Łatwo widać, że

$$\Phi_{B_r(z)}(\chi) + \Phi_{B_r(z)}(\xi) = \Phi_{B_r(z)}(\varphi) + \Phi_{B_r(z)}(\psi) = 2c(B_r(z), v),$$

więc  $\chi$  i  $\xi$  należą do  $M(B_r(z), v)$ . Oczywiście jest również, że  $\chi \geq \xi$ . Jeśli więc  $\varphi \neq \psi$ , to  $\chi \neq \xi$ . Oczywiście  $\chi$  i  $\xi$ , jako słabe rozwiązania, na mocy twierdzenia 2.1 spełniają warunek Lipschitza. Z twierdzenia 3.9 wynika, że albo  $\chi > \xi$  albo  $\chi \equiv \xi$  w  $B_r(z)$ . Jeśli  $\chi > \xi$ , to nie istnieje takie  $z_0 \in B_r(z)$ , żeby  $\varphi(z_0) = \psi(z_0)$ . Zatem z ciągłości  $\varphi < \psi$  lub  $\varphi > \psi$  w  $B_r(z)$ . Jeśli zaś  $\chi \equiv \xi$ , to łatwo zauważyć, że  $\varphi \equiv \psi$ .  $\square$

Konsekwencją powyższego lematu jest fakt, że  $M(B_r(z), v)$  zawiera element najmniejszy w sensie porządku zdefiniowanego w lemacie. Istotnie, gdyby taki element nie istniał, to można by wybrać malejący ciąg  $w_n \in M(B_r(z), v)$ . Ciąg taki jest ograniczony więc można w nim wybrać podciąg słabo zbieżny do pewnego  $w^* \in Z(B_r(z), v)$ . Z własności ciągu  $w_n$  i funkcjonału  $\Phi$  wynika, że  $\Phi(w^*) = c(B_r(z), v)$ , a więc  $w^* \in M(B_r(z), v)$  oraz  $w^* < w_n$ , czyli  $w^*$  jednak jest elementem najmniejszym w  $M(B_r(z), v)$ . Najmniejszy element zbioru  $M(B_r(z), v)$  oznaczmy dalej jako  $w_z$ .

Będziemy chcieli pokazać, że  $w_z$  jest w istocie równe  $v$  w kuli  $B_r(z)$ , a nie tylko na pierścieniu  $B_{\frac{1}{2}}(z) - B_r(z)$ . Zdefiniujemy ciąg punktów  $z_j = z + (j, 0)$  dla  $j \in \mathbb{Z}$  oraz nową funkcję  $\tilde{v}$  taką, że dla wszystkich  $j \in \mathbb{Z}$  zachodzą równości

$$\tilde{v} = w_{z_j} \quad \text{w} \quad B_{\frac{1}{2}}(z_j) \quad \text{oraz} \quad \tilde{v} = v \quad \text{w} \quad \mathbb{R} \times [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_r(z_n).$$

Istotnym problemem dla dalszego dowodu jest fakt, że taka lokalna zamiana funkcji  $v$  na  $w_z$  może spowodować, że otrzymana funkcja nie jest już elementem  $\Gamma$ .

**Lemat 3.10.** *Powyżej zdefiniowana funkcja  $\tilde{v}$  należy do  $\Gamma$ .*

**Dowód:** Należy wykazać nierówność  $\tilde{v} \leq \tau_{-1}\tilde{v}$ . Jeśli nie byłaby ona prawdziwa, to dla pewnego  $j$  istniałby punkt  $(x_0, y_0) \in B_r(z_j)$  taki, że  $w_{z_j}(x_0, y_0) > \tau_{-1}w_{z_j}(x_0, y_0) = w_{z_{j+1}}(x_0 + 1, y_0)$ . Wówczas niech  $\psi(x, y) = w_{z_{j+1}}(x + 1, y)$ ,  $\phi(x, y) = w_{z_j}(x, y)$  dla każdego  $(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}(z_j)$  oraz niech  $\chi = \max\{\psi, \phi\}$ ,  $\xi = \min\{\psi, \phi\}$ . Nierówności  $\xi = \phi = v \leq \tau_{-1}v = \psi = \chi$  zachodzą w  $B_{\frac{1}{2}}(z_j) - B_r(z_j)$ . Ponadto  $\xi \in Z(B_r(z_j), v)$  i  $\xi \in Z(B_r(z_{j+1}), v)$ , więc  $\Phi_{B_r(z_j)}(\xi) + \Phi_{B_r(z_j)}(\chi) = \Phi_{B_r(z_j)}(\phi) + \Phi_{B_r(z_j)}(\psi) = 2c(B_r(z_j), v)$  oraz  $\Phi_{B_r(z_j)}(\chi) =$

$\Phi_{B_r(z_{j+1})}(\tau_1\chi)$ . Wobec tego  $\chi \in M(B_r(z_j), v)$  i  $\tau_1\chi \in M(B_r(z_{j+1}), v)$ . Zastosowanie definicji  $\tilde{v}$  i lematu 3.8 daje  $\chi \geq w_{z_j} = \phi$ , a więc  $w_{z_j}(x_0, y_0) \leq \chi(x_0, y_0) \leq \psi(x_0, y_0) = w_{z_{j+1}}(x_0 + 1, y_0)$  co jest sprzeczne z definicją punktu  $(x_0, y_0)$ .  $\square$

Jako wniosek z powyższego lematu mamy  $I(v) \leq I(\tilde{v})$ . W szczególności dla wszystkich  $j \in \mathbb{Z}$  zachodzi

$$\iint_{B_r(z_j)} L(v) dx dy \leq \iint_{B_r(z_j)} L(\tilde{v}) dx dy = \iint_{B_r(z_j)} L(w_{z_j}) dx dy = c(B_r(z_j)).$$

Jeśli  $j = 0$ , to  $\iint_{B_r(z)} L(v) dx dy = c(B_r(z))$ , czyli  $\Phi_{B_r(z)}(v) = c(B_r(z))$ .

Ostatni lemat w tym podrozdziale kończy dowód Twierdzenia 3.4.

**Lemat 3.11.** *Funkcja  $v$  jest jedynym elementem w zbiorze  $Z(B_r(z), v)$  minimalizującym  $\Phi_{B_r(z)}$ .*

**Dowód:** Dla każdej dziedziny  $D \subset B_r(z)$  można wybrać minimum  $\psi$  funkcjonału  $\Phi_D = \Phi_{B_r(z)}|_D$  takie, że  $\psi = v$  w  $B_r(z) \setminus D$ . Należy pokazać, że  $\psi$  jest wyznaczone jednoznacznie i że  $\psi = v$ . Z oczywistej nierówności  $\Phi_D(\psi) \leq \Phi_D(v)$  wynika także  $\Phi_{B_r(z)}(\psi) \leq \Phi_{B_r(z)}(v)$ . Ponieważ  $\psi \in Z(B_r(z), v)$ , więc  $\Phi_{B_r(z)}(\psi) \geq \Phi_{B_r(z)}(v)$ , a stąd  $\psi \in M(B_r(z), v)$ . Jako, że  $\psi = v$  w  $B_r(z) \setminus D$  to z Lematu 3.8 wynika, że  $\psi = v$  w  $B_r(z)$ .  $\square$

### 3.3. Zakończenie dowodu Twierdzenia 3.1

Ponieważ  $v \in \Gamma$ , więc  $\tau_{-k}v \rightarrow 0$  (lub 1) w  $L^2$  przy  $k \rightarrow -\infty$  (lub  $+\infty$ ). Funkcja  $v$  jest klasy  $C^2$ , zatem ta zbieżność zachodzi również punktowo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x, y) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x, y) = 1.$$

Zakończenie dowodu Twierdzenia 3.1 wymaga jedynie wykazania nierówności ostrych

$$0 < v < 1 \quad \text{oraz} \quad v < \tau_{-1}v.$$

Odpowiednie nierówności nieostre wynikają wprost z definicji  $\Gamma$ .

Rozpocznijmy od dowodu nierówności  $v < \tau_{-1}v$ . Przypomnijmy, że funkcje  $v$  oraz  $\tau_{-1}v$  są rozwiązaniami (AC). Wobec tego, gdyby w jakimś punkcie  $z \in \mathbb{R} \times [0, 1]^{n-1}$  zachodziła równość  $v(z) = \tau_{-1}v(z)$ , to na mocy twierdzenia 3.9 taka równość zachodziła by również w  $B_{\frac{1}{2}}(z)$ . Biorąc odpowiedni ciąg punktów, można kulami o promieniu  $\frac{1}{2}$  pokryć całe  $\mathbb{R} \times$



$[0, 1]^{n-1}$ , a przez to wykazać, że równość  $v(z) = \tau_{-1}v(z)$  zachodziłaby wszędzie. Powyższe znaczyłoby, że  $v$  jest funkcją 1-okresową w zmiennej  $x$ , co jest oczywiście niemożliwe ze względu na heterokliniczność.

Gdy w powyższym dowodzie zastąpimy  $\tau$  i  $\tau_{-1}v$  odpowiednio przez funkcję stałą 0 i funkcję  $v$  to, prowadząc analogiczne rozumowanie, tym razem doprowadzimy do równości  $0 = v$  wszędzie, co również prowadzi do sprzeczności z faktem, że  $v \in \Gamma$  i dowodzi, że  $0 < v$ . Analogicznie dostajemy  $v < 1$ .



---

# Uwagi końcowe

## Problem regularności

Założenia twierdzenia 2.1, a w szczególności  $(G_6)$  oraz  $(G_7)$  są dość skomplikowane. Naturalne jest więc pytanie o możliwość ich uproszczenia. Oczywiście nie można oczekiwać otrzymania twierdzenia o regularności bez odpowiednio silnych założeń. Wśród nich powinny się znaleźć nie tylko  $\Delta_2$  oraz  $\nabla_2$ , ale także silna eliptyczność. Brak silnej eliptyczności w problemie anizotropowym może skutkować istnieniem nieograniczonych słabych rozwiązań. Przykład takiego równania i rozwiązania zaprezentował Marcellini w [18].

Założenia eliptyczności  $(G_7)$  oraz powiązanie ze sobą górnych i dolnych oszacowań wzrostu –  $(G_5)$  wraz z  $(G_6)$  – wydają się więc konieczne do uzyskania odpowiedniej klasy regularności słabych rozwiązań. Można jednak próbować je nieco uprościć. Rozważam hipotezę, że  $(G_7)$  można zastąpić następującym warunkiem:

- Istnieje niemalejąca funkcja  $g_1 : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$  taka, że

$$\langle D^2 G(\xi)\lambda, \lambda \rangle \geq 2\nu g_1(|\xi|)|\lambda|^2$$

Taka zmiana musiałaby być połączona ze zmianą założeń  $(G_5)$  i  $(G_6)$ , które zastąpione byłyby przez:

- $c_0 g_1(|\xi|)|\xi|^2 \leq G(\xi) \leq \bar{c} \sum_{i=1}^n g_1(|\xi_i|)^{\frac{2^*}{2}} |\xi_i|^2$  dla  $|\xi| \geq 1$

Takie założenia są ogólniejsze i co jest równie ważne, mogą być łatwiejsze do sprawdzenia.

## Problem typu Allena-Cahna

Kolejnym ciekawym problemem jest pytanie o istnienie innych niż heterokliniczne rodzaje rozwiązań problemu (AC) z uogólnionym operatorem. Rozwiązania heterokliniczne należą do najczęściej rozważanych rodzajów rozwiązań problemu typu Allena-Cahna (zaraz po trywialnych stałych rozwiązaniach), ale w literaturze wielu autorów dowodzi istnienia

także innych rodzajów rozwiązań. Na przykład w [24] autorzy dowodzą szereg twierdzeń o istnieniu nie tylko rozwiązań heteroklinicznych, ale także na przykład rozwiązań typu "multibump". Dowód twierdzenia 3.1 pokazuje jakie założenia i metody stosować można, gdy problem z laplasjanem zostanie zamieniony na problem z operatorem o szybszym wzroście. Naturalne jest więc oczekiwanie, że można udowodnić więcej twierdzeń o istnieniu pewnych rozwiązań analogicznych do tych z [24] stosując podobne metody do przedstawionych w tej rozprawie.

---

## Bibliografia

- [1] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Elsevier Science, 2003.
- [2] F. Alessio, L. Jeanjean, and P. Montecchiari. Stationary layered solutions in  $\mathbb{R}^2$  for a class of non autonomous Allen-Cahn equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 11(2):177–202, 2000.
- [3] F. Alessio, L. Jeanjean, and P. Montecchiari. Existence of infinitely many stationary layered solutions in  $\mathbb{R}^2$  for a class of periodic Allen-Cahn equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 27(7-8):1537–1574, 2002.
- [4] S. M. Allen and J. W. Cahn. Coherent and incoherent equilibria in iron-rich iron-aluminum alloys. *Acta Metallurgica*, 23(9):1017 – 1026, 1975.
- [5] V. Bangert. On minimal laminations of the torus. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 6(2):95–138, 1989.
- [6] G. Barletta and A. Cianchi. Dirichlet problems for fully anisotropic elliptic equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 147(1):25–60, 2017.
- [7] M. Beneš, V. Chalupecký, and K. Mikula. Geometrical image segmentation by the Allen–Cahn equation. *Applied Numerical Mathematics*, 51(2):187 – 205, 2004.
- [8] I. Chlebicka. A pocket guide to nonlinear differential equations in Musielak–Orlicz spaces. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 175:1–27, 2018.
- [9] J. Crank and E.P.J. Crank. *The Mathematics of Diffusion*. Clarendon Press, 1979.
- [10] R. de la Llave and E. Valdinoci. Multiplicity results for interfaces of Ginzburg - Landau - Allen - Cahn equations in periodic media. *Advances in Mathematics*, 215(1):379–426, 2007.
- [11] W. Desch and R. Grimmer. On the wellposedness of constitutive laws involving dissipation potentials. *Transactions of the American Mathematical Society*, 353, 01 2001.
- [12] P. C. Fife. *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems*. Springer-Verlag, 1979.
- [13] E. Giusti. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. World Scientific, 2003.
- [14] C. Gui and M. Zhao. Traveling wave solutions of Allen–Cahn equation with a fractional laplacian. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 32(4):785 – 812, 2015.
- [15] G Hardy and H. B. Thompson. An imbedding theorem for anisotropic Orlicz-Sobolev spaces. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 51:463–467, 1995.
- [16] O. Ladyzhenskaya and N. Ural'tseva. *Linear and quasilinear elliptic equations*, 1968.



- [17] T. Ma and S. Wang. *Phase transition dynamics*. Springer, New York, 2013.
- [18] P. Marcellini. Un exemple de solution discontinue d'un probleme variationnel dans le cas scalaire. *preprint Istituto Matematico "U. Dini"*, 11:1–6, 1987.
- [19] P. Marcellini. Regularity and existence of solutions of elliptic equations with p,q-growth conditions. *Journal of Differential Equations*, 90(1):1 – 30, 1991.
- [20] P. Marcellini. Regularity for elliptic equations with general growth conditions. *Journal of differential equations*, 105(2):296–333, 1993.
- [21] J. Moser. Minimal solutions of variational problems on a torus. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 3(3):229–272, 1986.
- [22] L. Pick, A. Kufner, O. John, and S. Fucík. *Function Spaces, 1*. De Gruyter, 2013.
- [23] P. Pucci and J.B. Serrin. *The Maximum Principle*. Birkhäuser Basel, 2007.
- [24] P. H. Rabinowitz and E. Stredulinsky. Mixed states for an Allen-Cahn type equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 56(8):1078–1134, 2003.
- [25] M. Sabir, A. Shah, W. Muhammad, I. Ali, and P. Bastian. A mathematical model of tumor hypoxia targeting in cancer treatment and its numerical simulation. *Computers and Mathematics with Applications*, 74(12):3250 – 3259, 2017.
- [26] G. Schappacher. A notion of Orlicz spaces for vector valued functions. *Applications of Mathematics*, 50(4):355–386, 2005.
- [27] F. Siepe. On the Lipschitz regularity of minimizers of anisotropic functionals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 263:69–94, 2001.
- [28] M. S. Skaff. Vector valued Orlicz spaces generalized  $N$ -functions, I. *Pacific J. Math.*, 28(1):193–206, 1969.
- [29] N. S. Trudinger. An imbedding theorem for  $H^0(G, \Omega)$  spaces. *Studia Math.*, 50:17–30, 1974.
- [30] V.A. Volpert, Y. Nec, and A.A. Nepomnyashchy. Exact solutions in front propagation problems with superdiffusion. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 239(3):134 – 144, 2010.
- [31] A. A. Wheeler, W. J. Boettinger, and G. B. McFadden. Phase-field model for isothermal phase transitions in binary alloys. *Phys. Rev. A*, 45:7424–7439, 1992.
- [32] K. Wroński. Heteroclinic solutions of Allen-Cahn type equations with a general elliptic operator. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 51(2):1–10, 06 2018.

