



Imię i nazwisko autora rozprawy: Sławomir Michalski

Dyscyplina naukowa: Budownictwo

## **ROZPRAWA DOKTORSKA**

Tytuł rozprawy w języku polskim: Matematyczne modelowanie wpływu drzew na uwilgotnienie i odkształcenia gruntów ekspansywnych

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Mathematical modeling of moisture and deformation changes in expansive soils due to influence of trees

Promotor  <i>podpis</i>	Drugi promotor  <i>podpis</i>
Promotor pomocniczy  <i>podpis</i>	Kopromotor  <i>podpis</i>

Gdańsk, rok 2016



## OŚWIADCZENIE

Autor rozprawy doktorskiej: Sławomir Michalski

Ja, niżej podpisany(a), wyrażam zgodę/~~nie wyrażam zgody\*~~ na bezpłatne korzystanie z mojej rozprawy doktorskiej zatytułowanej:

„Matematyczne modelowanie wpływu drzew na uwilgotnienie i odkształcenia gruntów ekspansywnych”

do celów naukowych lub dydaktycznych.<sup>1</sup>

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

Świadomy(a) odpowiedzialności karnej z tytułu naruszenia przepisów ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. z 2006 r., nr 90, poz. 631) i konsekwencjach dyscyplinarnych określonych w ustawie Prawo o szkolnictwie wyższym (Dz. U. z 2012 r., poz. 572 z późn. zm.),<sup>2</sup> a także odpowiedzialności cywilno-prawnej oświadczam, że przedkładana rozprawa doktorska została napisana przeze mnie samodzielnie.

Oświadczam, że treść rozprawy opracowana została na podstawie wyników badań prowadzonych pod kierunkiem i w ścisłej współpracy z promotorem dr. hab. inż. Adamem Szymkiewiczem – prof. PG ~~drugim promotorem, promotorem pomocniczym, kopromotorem\*~~.

Niniejsza rozprawa doktorska nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadaniem stopnia doktora.

Wszystkie informacje umieszczone w ww. rozprawie uzyskane ze źródeł pisanych i elektronicznych, zostały udokumentowane w wykazie literatury odpowiednimi odnośnikami zgodnie z art. 34 ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych. Potwierdzam zgodność niniejszej wersji pracy doktorskiej z załączoną wersją elektroniczną.

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

Ja, niżej podpisany(a), wyrażam zgodę/~~nie wyrażam zgody\*~~ na umieszczenie ww. rozprawy doktorskiej w wersji elektronicznej w otwartym, cyfrowym repozytorium instytucjonalnym Politechniki Gdańskiej, Pomorskiej Bibliotece Cyfrowej oraz poddawania jej procesom weryfikacji i ochrony przed przywłaszczeniem jej autorstwa.

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

\*) niepotrzebne skreślić

<sup>1</sup> Zarządzenie Rektora Politechniki Gdańskiej nr 34/2009 z 9 listopada 2009 r., załącznik nr 8 do instrukcji archiwalnej PG.

<sup>2</sup> Ustawa z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym: Rozdział 7 Odpowiedzialność dyscyplinarna doktorantów, Art. 226.



## **OPIS ROZPRAWY DOKTORSKIEJ**

**Autor rozprawy doktorskiej:** Sławomir Michalski

**Tytuł rozprawy doktorskiej w języku polskim:** Matematyczne modelowanie wpływu drzew na uwilgotnienie i odkształcenia gruntów ekspansywnych

**Tytuł rozprawy w języku angielskim:** Mathematical modeling of moisture and deformation changes in expansive soils due to influence of trees

**Język rozprawy doktorskiej:** polski.

**Promotor rozprawy doktorskiej:** dr hab. inż. Adam Szymkiewicz – prof. PG

**Drugi promotor rozprawy doktorskiej\*:**

**Promotor pomocniczy rozprawy doktorskiej\*:**

**Kopromotor rozprawy doktorskiej\*:**

**Data obrony:**

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku polski:** grunty ekspansywne, modelowanie matematyczne, metoda objętości skończonych, schemat jawny

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku angielskim:** expansive soil, mathematical modelling, finite volume method, explicit scheme

**Streszczenie rozprawy w języku polskim:** Grunty ekspansywne występują na znacznych obszarach Polski. Zmianom wilgotności gruntów ekspansywnych towarzyszą zmiany objętościowe, które mogą być przyczyną awarii płytko posadowionych obiektów budowlanych. Istotnym czynnikiem wpływającym na uwilgotnienie gruntów ekspansywnych jest pobór wody przez drzewa. Rozprawa zawiera opis autorskiej metody numerycznej, mogącej służyć do modelowania zmian wilgotności gruntów oraz wywołanych tymi zmianami odkształceń gruntów ekspansywnych. Model oparty jest o metodę objętości skończonych i jawny schemat całkowania w czasie. W celu zapewnienia stabilności obliczeń schematem jawnym zaproponowano kryterium doboru kroku czasowego oparte o zmiany wilgotności. Za pomocą opracowanego modelu przeprowadzono obliczenia wpływu zasięgu i rozkładu gęstości strefy korzeniowej oraz dobowej transpiracji na wielkość spodziewanych deformacji gruntu. Wyniki wskazują, że największy wpływ na odkształcenia ma wielkość transpiracji.

**Streszczenie rozprawy w języku angielskim:** Expansive soils occur in large areas of Poland. Moisture changes in expansive soils are linked with volume deformations which can cause damages of shallow settled buildings. Water intake due to trees is an essential factor influencing the moisture of expansive soils. This dissertation contains description of numeric solution scheme, which can be used for modeling moisture changes of soils and caused by them volume changes of expansive soils. The model is based on finite volume method and an explicit scheme of integration in time. In order to ensure stability of the explicit scheme a criterion for time step size has been proposed, based on allowed moisture increment. Using developed model calculations have been carried out to investigate the influence of range and root density distribution, as well as daily tree water intake for expected soil deformations. Results indicate that the amount of daily water intake has the largest influence on soil deformation.

**Streszczenie rozprawy w języku, w którym została napisana\*\*:**

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku, w którym została napisana\*\*:**





**POLITECHNIKA  
GDAŃSKA**

Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska



\*) niepotrzebne skreślić.

\*\*\*) dotyczy rozpraw doktorskich napisanych w innych językach, niż polski lub angielski.

Wyrażam szczerze i głębokie podziękowania promotorowi,  
dr. hab. inż. Adamowi Szymkiewiczowi, za merytoryczną pomoc, opiekę naukową i wsparcie  
udzielone w trakcie pisania niniejszej rozprawy.

Pracę dedykuję moim rodzicom.

*Sławomir Michalski*  
*Bydgoszcz, 06.11.2016*



## Spis treści:

Spis rysunków .....	9
Spis tabel .....	13
Wykaz ważniejszych oznaczeń .....	15
1. Wstęp .....	17
1.1. Zarys problemu .....	17
1.2. Cel, teza i zakres pracy .....	18
2. Wpływ drzew na budowle posadowione w gruntach ekspansywnych w świetle literatury .....	23
2.1. Ogólna charakterystyka gruntów ekspansywnych .....	23
2.2. Oddziaływanie drzew na grunty ekspansywne .....	25
2.3. Rodzaje awarii budowlanych wywołanych wpływem drzew .....	27
2.4. Zastosowania modelowania matematycznego .....	28
3. Matematyczny opis dynamiki zmian wilgotności w strefie korzeniowej .....	31
3.1. Podstawowe parametry opisujące wilgotność gruntu .....	31
3.2. Potencjał wody gruntowej i ssanie gruntu .....	32
3.3. Krzywa retencji wodnej .....	35
3.4. Przewodność hydrauliczna gruntów nienasyconych .....	42
3.5. Pobór wody przez korzenie drzew – opis procesu .....	44
3.6. Pobór wody w warunkach ograniczonego nasycenia .....	46
3.7. Mikro i makroskopowe modelowanie poboru wody .....	48
3.8. Kształt strefy korzeniowej i funkcja gęstości poboru wody .....	50
3.9. Zasięg strefy korzeniowej oraz dobowy pobór wody przez drzewa .....	52
4. Matematyczny opis deformacji w gruncie ekspansywnym .....	55
4.1. Parametry opisujące pęcznienie i skurcz gruntów ekspansywnych .....	56
4.2. Związki naprężenie-odkształcenie .....	58
4.3. Wyznaczanie odkształceń w oparciu o rozwiązanie równania równowagi .....	64
4.4. Uprozczone metody obliczeniowe dla odkształceń jednowymiarowych .....	65
4.4.1. Metody wykorzystujące badania edometryczne .....	66
4.4.2. Metody oparte o zmiany wartości ssania .....	67
4.4.3. Metody oparte o zmiany wartości wilgotności .....	71

4.4.4. Metody empiryczne .....	72
4.5. Podsumowanie .....	74
5. Równania przepływu .....	75
5.1. Przepływ przez ośrodek nieodkształcalny .....	75
5.2. Przepływ przez ośrodek odkształcalny .....	77
6. Rozwiązanie numeryczne równania przepływu metodą objętości skończonych schematem jawnym .....	83
6.1. Ogólny opis metody .....	84
6.2. Wyznaczanie prędkości wody w ośrodku gruntowym .....	90
6.3. Symulacja przepływu z uwzględnieniem wpływu odkształcenia na zmiany wilgotności w kolejnych krokach czasowych .....	92
6.4. Warunki początkowe i brzegowe .....	94
6.5. Metodyka obliczeń przepływu dwuwymiarowego płaskiego .....	96
6.6. Metodyka obliczeń przepływu dwuwymiarowego osiowo-symetrycznego .....	99
6.7. Kryteria ograniczania długości kroku czasowego .....	102
6.8. Wyznaczanie odkształceń i przemieszczeń gruntu .....	103
7. Weryfikacja modelu .....	105
7.1. Porównanie z rozwiązaniem analitycznym ( <i>Tracy 2006</i> ) dla przepływu w gruncie nieodkształcalnym .....	105
7.2. Weryfikacja metody Anagnostopoulos i Burlando ( <i>2012</i> ) z rozwiązaniem analitycznym .....	112
7.3. Porównanie z literaturowymi wynikami analiz i obserwacji .....	115
7.3.1. Nawadnianie gruntu pod elastyczną płytą ( <i>Hung i Fredlund 2002</i> ) .....	115
7.3.2. Pobór wody przez szpaler drzew wg Fredlund i Hung ( <i>2001</i> ) .....	124
8. Wpływ zasięgu i rozkładu gęstości strefy korzeniowej oraz dobowej transpiracji na wielkość spodziewanych deformacji gruntu .....	133
9. Przykład oszacowania spodziewanego zasięgu strefy korzeniowej drzew .....	153
10. Przykładowe obliczenia deformacji związanych z poborem wody przez drzewo dla gruntu z terenu Bydgoszczy .....	159
11. Przykład wyznaczenia rozkładu ssania dla gruntu torfowo-murszowego .....	169
12. Wnioski i kierunki dalszych badań .....	175
13. Literatura .....	177



## Spis rysunków:

Rys. 2.1. Występowanie gruntów ekspansywnych w Polsce (Przystański 1991) .....	25
Rys. 3.1. Charakterystyki gruntów ekspansywnych: a) zależność wskaźnika porowatości od ssania; b) krzywe retencji; c) krzywa skurczalności (wg Mbonimpa i in. 2006 oraz Michalski i Szymkiewicz 2016) .....	36
Rys. 3.2. Przykładowy przebieg i histereza krzywej retencji .....	38
Rys. 3.3. Przykładowe powierzchnie konstytutywne dla gruntu ekspansywnego (wg Zhang 2004) .....	40
Rys. 3.4. Mikrostruktura gruntu ekspansywnego .....	42
Rys. 3.5. Schemat przepływu wody w układzie SPAC pod wpływem różnicy potencjałów ..	46
Rys. 3.6. Funkcja $\alpha(h_s)$ : A. wg Kowalik (1973b) (za Kowalik 2010), B. wg Feddes, Kowalik i Zaradny (1978) (za artykułem Feddes i inni 2001) .....	47
Rys. 3.7. Różne kształty strefy korzeniowej wg modelu Gatmiri i Najari (2010) (a) $\xi=0,6$ ; (b) $\xi=1$ ; (c) $\xi=2$ ; (d) $\xi=5$ (za artykułem Gatmiri i Najari 2010) .....	51
Rys. 4.1. Powierzchnia konstytutywna $e = f(\sigma, \psi)$ wg Fredlund i Rahardjo (1993) w skali liniowej (a) i półlogarytmicznej (b). .....	62
Rys. 4.2. Powierzchnia konstytutywna dla gruntu ekspansywnego „Regina Clay” (wg Vu 2002) .....	63
Rys. 4.3. Wyznaczanie wskaźnika ściśliwości wg McKeena podczas osuszania gruntu .....	69
Rys. 5.1. Schemat przepływu przez wydzieloną z przestrzeni objętość V .....	75
Rys. 6.1. Przykładowy schemat przepływu przez sześcienną objętość skończoną .....	87
Rys. 6.2. Ogólny schemat blokowy obliczeń dla przyjętej metody objętości skończonych .....	89
Rys. 6.3. Schemat blokowy wyliczeń wilgotności obj. dla kolejnego kroku czasowego .....	91
Rys. 6.4. Schemat blokowy wyliczeń wilgotności objętościowej z uwzględnieniem wpływu odkształcenia ośrodka .....	94
Rys. 6.5. Przykładowy schemat „zerowania” strumieni dla węzła leżącego na brzegu nieprzepuszczalnym (warunek Neumanna) .....	95
Rys. 6.6. Schemat obszaru rozwiązania dla przepływu dwuwymiarowego – prostokątna siatka punktów węzłowych .....	96
Rys. 6.7. Schemat obszaru rozwiązania dla przepływu dwuwymiarowego osiowosymetrycznego .....	100
Rys. 6.8. Schemat wyznaczania odkształceń liniowych dla płaskiego (2D) stanu odkształcenia .....	104

Rys. 6.9. Schemat wyznaczania odkształceń liniowych dla jednowymiarowego stanu odkształcenia .....	104
Rys. 7.1. Ilustracja obszaru rozwiązania analitycznego wg Tracy (2006) .....	105
Rys. 7.2. Porównanie wyników symulacji $-h_s$ [cm]- rozwiązanie analityczne (linia czerwona) i numeryczne (linia niebieska) wg wariantu „A” metody (zgodnie z tab. 7.3) .....	109
Rys. 7.3. Ilustracja obszaru rozwiązania oraz warunków początkowych i brzegowych (za artykułem Hung i Fredlund 2002) .....	115
Rys. 7.4. Warunki brzegowe dla wyznaczenia odkształceń (za artykułem Hung i Fredlund 2002) .....	116
Rys. 7.5. Rozkład ssania matrycowego po 25-dniowym nawadnianiu [kPa] .....	120
Rys. 7.6. Rozkład ssania matrycowego po 100-dniowym nawadnianiu [kPa] .....	121
Rys. 7.7. Rozkład ssania matrycowego po 100-dniowym nawadnianiu [kPa] – wyniki wg Anagnostopoulos i Burlando (2012) bez uwzględniania wpływu odkształcenia na wilgotność .....	121
Rys. 7.8. Porównanie wyników wyliczeń przemieszczenia powierzchni w kierunku pionowym .....	123
Rys. 7.9. Ilustracja obszaru rozwiązania i warunków początkowych (wg artykułu Fredlund i Hung 2001) .....	125
Rys. 7.10. Warunki brzegowe dla wyznaczenia odkształceń (wg Vu 2002) .....	126
Rys. 7.11. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla stanu ustalonego .....	129
Rys. 7.12. Osiadanie gruntu w pobliżu linii drzew .....	130
Rys. 8.1. Schemat przyjętego obszaru rozwiązania .....	134
Rys. 8.2. Początkowy (hydrostatyczny) rozkład ssania matrycowego [kPa] oraz warunki brzegowe dla wyznaczenia odkształceń .....	135
Rys. 8.3. Graficzna ilustracja rozkładu gęstości poboru wody w strefie korzeniowej dla różnych parametrów z tabeli 8.2 – miejsca o największej gęstości zaznaczone kolorem czarnym .....	138
Rys. 8.4. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla gruntu Silty Clay Loam po 180 dniach poboru, $T_p^* = 0.02 \frac{m^3}{ab}$ , model funkcji źródłowej „A”- wyniki dla poj. drzewa .....	139
Rys. 8.5. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla gruntu Silty Clay Loam po 180 dniach poboru, $T_p^* = 0.04 \frac{m^3}{ab}$ , model funkcji źródłowej „A”- wyniki dla poj. drzewa .....	139
Rys. 8.6. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla gruntu Silty Clay po 180 dniach poboru, $T_p^* = 0.04 \frac{m^3}{ab}$ , model funkcji źródłowej „E”- wyniki dla poj. drzewa .....	139
Rys. 8.7. Porównanie deformacji powierzchni gruntu Silty Clay Loam po 180 dniach symulacji poboru przez pojedyncze drzewo .....	140



Rys. 8.8. Porównanie deformacji powierzchni gruntu Clay Loam po 180 dniach symulacji poboru przez pojedyncze drzewo .....	141
Rys. 8.9. Porównanie deformacji powierzchni gruntu Silty Loam po 180 dniach symulacji poboru przez pojedyncze drzewo .....	142
Rys. 8.10. Porównanie deformacji powierzchni gruntu Silty Clay po 180 dniach symulacji poboru przez pojedyncze drzewo .....	143
Rys. 8.11. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla gruntu Silty Clay Loam po 180 dniach poboru, $T_p^* = 0.02 \frac{m^3}{ab}$ model funkcji źródłowej „A” - wyniki dla szpaleru drzew ..	144
Rys. 8.12. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla gruntu Silty Clay Loam po 180 dniach poboru, $T_p^* = 0.04 \frac{m^3}{ab}$ , model funkcji źródłowej „A”- wyniki dla szpaleru drzew ..	144
Rys. 8.13. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla gruntu Silty Clay po 180 dniach poboru, $T_p^* = 0.04 \frac{m^3}{ab}$ , model funkcji źródłowej „E” - wyniki dla szpaleru drzew ..	144
Rys. 8.14. Porównanie deformacji powierzchni gruntu Silty Clay Loam po 180 dniach symulacji poboru przez szpaler drzew .....	145
Rys. 8.15. Porównanie deformacji powierzchni gruntu Clay Loam po 180 dniach symulacji poboru przez szpaler drzew .....	146
Rys. 8.16. Porównanie deformacji powierzchni gruntu Silty Loam po 180 dniach symulacji poboru przez szpaler drzew .....	147
Rys. 8.17. Porównanie deformacji powierzchni gruntu Silty Clay po 180 dniach symulacji poboru przez szpaler drzew .....	148
Rys. 9.1. Schemat przyjętego obszaru rozwiązania – warunki początkowe i brzegowe dla wyznaczenia odkształceń .....	153
Rys. 9.2. Osiadanie powierzchni gruntu wywołane wpływem pojedynczego drzewa. $T_p^* = 0,5 \frac{m^3}{ab}$ /1 drzewo, różne rodzaje gruntu wg tab.8.1 .....	157
Rys. 9.3. Osiadanie powierzchni gruntu wywołane wpływem szpaleru drzew. $T_p^* = 0,25 \frac{m^3}{ab}$ /1 metr szpaleru, różne rodzaje gruntu wg tab. 8.1 .....	157
Rys. 10.1. Schemat przyjętego obszaru rozwiązania – warunki brzegowe dla wyznaczenia odkształceń .....	160
Rys. 10.2. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla poboru przez pojedynczego drzewo .....	165
Rys. 10.3. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla poboru przez szpaler drzew .....	165
Rys. 10.4. Osiadanie powierzchni gruntu wywołane wpływem pojedynczego drzewa oraz szpaleru drzew .....	166
Rys. 10.5. Przykłady szczelnych nawierzchni wokół rosnących drzew na terenie Bydgoszczy .....	167
Rys. 11.1. Schemat przyjętego obszaru rozwiązania .....	170

Rys. 11.2. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla gruntu Krowie Bagno 7 Mt I ab dla symulacji 10,5 rocznej .....	172
Rys. 11.3. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla gruntu Krowie Bagno Mt I ab dla symulacji 10,5 rocznej .....	172

## Spis tabel:

Tab. 2.1. Czynniki wywołujące zmiany objętościowe w gruntach ekspansywnych (wg Kumor 2008) .....	26
Tab. 7.1. Przyjęte parametry dla rozwiązania analitycznego wg Tracy (2006) oraz ilustracja warunku brzegowego dla $z = L$ i $y = y_s$ .....	107
Tab. 7.2. Przyjęte parametry dyskretyzacji obszaru rozwiązania numerycznego .....	107
Tab. 7.3. Różne warianty proponowanej metody użyte do porównania z rozwiązaniem analitycznym .....	108
Tab. 7.4. Wartości ssania ( $h_s$ ) w poszczególnych punktach węzłowych [cm] – rozwiązanie analityczne .....	108
Tab. 7.5. Różnica $h_s$ [cm] między rozwiązaniem analitycznym, a numerycznym wg wariantu „A” metody (zgodnie z tab. 7.3) .....	109
Tab. 7.6. Różnica $h_s$ [cm] między rozwiązaniem analitycznym, a numerycznym wg wariantu „B” metody (zgodnie z tab. 7.3) .....	110
Tab. 7.7. Różnica $h_s$ [cm] między rozwiązaniem analitycznym, a numerycznym wg wariantu „C” metody (zgodnie z tab. 7.3) .....	110
Tab. 7.8. Różnica $h_s$ [cm] między rozwiązaniem analitycznym, a numerycznym wg wariantu „D” metody (zgodnie z tab. 7.3) .....	110
Tab. 7.9. Różnica $h_s$ [cm] między rozwiązaniem analitycznym, a numerycznym wg wariantu „E” metody (zgodnie z tab. 7.3) .....	111
Tab. 7.10. Różnica $h_s$ [cm] między rozwiązaniem analitycznym, a numerycznym wg wariantu „F” metody (zgodnie z tab. 7.3) .....	111
Tab. 7.11. Różnica $h_s$ [cm] między rozwiązaniem analitycznym, a numerycznym wg wariantu „G” metody (zgodnie z tab. 7.3) .....	111
Tab. 7.12. Maksymalne i średnie wartości bezwzględne błędów dla różnych wariantów metody numerycznej (w stosunku do rozwiązania analitycznego) .....	112
Tab. 7.13. Przyjęte parametry dyskretyzacji obszaru rozwiązania numerycznego Anagnostopoulos i Burlando (2012) .....	114
Tab. 7.14. Różnica $h_s$ [cm] między rozwiązaniem analitycznym, a numerycznym wg schematu Anagnostopoulos i Burlando (2012) .....	114
Tab. 7.15. Różnica $h_s$ [cm] między rozwiązaniami numerycznymi wg metody Anagnostopoulos i Burlando (2012) i wg metody przedstawionej w pkt. 6 (dla wariantu „A” zgodnie z tab. 7.3) .....	115
Tab. 7.16. Charakterystyka gruntu dla rozwiązania zagadnienia dwuwymiarowego nawadniania bryły gruntu (za artykułem Hung i Fredlund 2002) .....	117
Tab. 7.17. Przyjęta dyskretyzacja obszaru rozwiązania oraz wariant metody .....	119

Tab. 7.18. Przyjęte parametry dla rozwiązania numerycznego wg Anagnostopoulos i Burlando (2012) .....	120
Tab. 7.19. Charakterystyka gruntu dla rozwiązania zagadnienia poboru wody przez szpaler drzew (za Fredlund i Hung 2002 oraz Vu 2002) .....	126
Tab. 7.20. Przyjęta dyskretyzacja obszaru rozwiązania oraz wariant metody .....	128
Tab. 7.21. Osiadania gruntu w odległości 4m od linii drzew .....	131
Tab. 8.1. Przyjęte charakterystyki gruntu .....	135
Tab. 8.2. Przyjęte parametry makroskopowej funkcji źródłowej wg Vrugt i inni (2001b) ...	136
Tab. 8.3. Przyjęta dyskretyzacja obszaru rozwiązania oraz zastosowany wariant metody .....	137
Tab. 8.4. Zestawienie uzyskanych poborów wody w trakcie symulacji dla pojedynczego drzewa .....	149
Tab. 8.5. Zestawienie uzyskanych poborów wody w trakcie symulacji dla szpaleru drzew .....	150
Tab. 9.1. Przyjęte parametry makroskopowej funkcji źródłowej wg Vrugt i inni (2001b) ...	155
Tab. 9.2. Przyjęta dyskretyzacja obszaru rozwiązania oraz zastosowany wariant metody .....	155
Tab. 9.3. Średnie pobory wody przez pojedyncze drzewo i przez szpaler drzew dla 180 dniowej symulacji .....	156
Tab. 10.1. Przyjęte parametry makroskopowej funkcji źródłowej wg Vrugt i inni (2001b) dla symulacji poboru wody przez drzewo w gruncie ekspansywnym z terenu Bydgoszczy .....	160
Tab. 10.2. Przyjęta dyskretyzacja obszaru rozwiązania oraz zastosowany wariant metody .....	161
Tab. 10.3. Przyjęta charakterystyka gruntu .....	164
Tab. 10.4. Średnie pobory wody przez pojedyncze drzewo i przez szpaler drzew dla 4500 dniowej symulacji .....	165
Tab. 11.1. Przyjęte charakterystyki gruntu (Iwanek i inni 2004) .....	169
Tab. 11.2. Przyjęta dyskretyzacja obszaru rozwiązania oraz zastosowany wariant metody .....	171



## Wykaz ważniejszych oznaczeń:

$V$	całkowita objętość wydzielonej z przestrzeni próbki gruntu
$V_w, V_s, V_p$	objętości (odp.) wody, szkieletu gruntowego i przestrzeni porowej w objętości $V$
$\theta$	objętościowa wilgotność gruntu
$\Theta$	znormalizowana wilgotność objętościowa
$\theta_e$	efektywna wilgotność objętościowa
$\theta_s$	wilgotność objętościowa dla stanu saturacji
$\theta_r$	minimalna (residualna) wartość wilgotności objętościowej
$\theta^a$	objętościowa zawartość powietrza
$\theta^s$	objętościowa zawartość szkieletu gruntowego
$S_r$	stopień wilgotności (saturacji)
$S_{re}$	residualny stopień saturacji
$S_e$	efektywny stopień saturacji
$\psi_C$	całkowity potencjał wody gruntowej
$\psi$	ssanie gruntu (całkowite)
$\psi_m$	ssanie (potencjał) matrycowe gruntu
$\psi_p$	potencjał wywołany nadciśnieniem wody gruntowej
$\psi_s$	potencjał tzw. osmotyczny
$\psi_z$	składowa wysokościowa potencjału
$\psi_a$	ciśnienie wejścia powietrza
$u_a$	ciśnienie powietrza w porach gruntu
$u_w$	ciśnienie wody w porach gruntu
$pF$	indeks ssania gruntu ( $= \log_{10} h_s$ )
$h_s$	wysokość całkowitego ssania gruntu wyrażona w cm słupa wody
$h$	całkowity potencjał wody gruntowej wyrażony w formie wysokościowej
$w$	wilgotność grawimetryczna (masowa) gruntu
$g$	przyspieszenie grawitacyjne
$R$	uniwersalna stała gazowa
$\rho$	gęstość objętościowa gruntu
$\rho_w$	gęstość objętościowa wody



$\rho_a, \rho_s$	gęstości właściwe faz, odpowiednio: powietrza i szkieletu gruntowego.
$K$	tensorowy współczynnik przewodności hydraulicznej (filtracji)
$k$	współczynnik filtracji
$k_s$	współczynnik filtracji dla stanu pełnej saturacji
$k^r$	względny współczynnik filtracji
$e$	wskaźnik porowatości gruntu
$n$	porowatość gruntu
$\vec{v}$	wektor prędkości Darcy
$v_D$	skalar prędkości Darcy
$\sigma_{ij}$	składowe tensora naprężeń całkowitych
$\sigma_{ij}^{net}$	składowe tensora naprężeń netto
$\sigma'_{ij}$	składowe tensora naprężeń efektywnych
$\varepsilon_{ij}$	składowe tensora odkształcenia szkieletu gruntowego
$\chi$	parametr Bishopa
$S$	funkcja poboru wody w strefie korzeniowej
$\beta$	funkcja gęstości poboru w obrębie strefy korzeniowej
$\alpha(h_s)$	parametr opisujący zdolność korzeni do poboru wody (w funkcji ssania gruntu)
$\varepsilon_p^V$	wskaźnik objętościowego pęcznienia gruntu
$\varepsilon_s^V$	wskaźnik objętościowego skurczu gruntu
$\mu$	współczynnik Poissona
$\delta_{ij}$	delta Kroneckera
$t$	czas
$\Delta t$	krok czasowy
$dx$	rozmiar kwadratowej siatki przepływu (odległość między węzłami)
$T_p^*$	całkowity pobór wody w obrębie strefy korzeniowej rośliny, w warunkach nieograniczonej dostępności wody
$C_r$	liczba Couranta





# 1. Wstęp

## 1.1. Zarys problemu

Na znacznych obszarach Polski zalegają płytko grunty ekspansywne (wrażliwe objętościowo). Ulegają one pęcznieniu na skutek wzrostu wilgotności i kurczeniu się na skutek przesychania. Właściwości te wiążą się z obecnością w gruncie minerałów ilastych, szczególnie z grupy smektytu. Cechy ekspansywne wykazuje (w różnym stopniu) większość iltów występujących w Polsce, z których szczególnie silną ekspansywnością charakteryzują się ilty plioceńskie, zwane również poznańskimi (*np. Przysański 1991, Jeż 1995*). Badania nad gruntami ekspansywnymi prowadzone są w naszym kraju od wielu lat w różnych ośrodkach naukowych (*m.in. Choma-Moryl 1988, Przysański 1991, Garbulewski i Żakowicz 1993, Jeż 1995, Grabowska-Olszewska i in. 1998, Garbulewski 2000, Pająk-Komorowska 2003, Barański i Wójcik 2007 i 2008, Garbulewski i Żakowicz 2007, Kumor 2008 i 2016, Niedzielski i Kumor 2009, Lendo-Siwicka 2009, Gorączko i Kumor 2006 i 2011, Gawriuczenkow 2001 i 2011, Lendo-Siwicka i Garbulewski 2013, Izdebska-Mucha i Wójcik 2013a,b*). Również w literaturze zagranicznej można znaleźć wiele publikacji poświęconych temu zagadnieniu, co wiąże się z występowaniem gruntów ekspansywnych na dużych obszarach m.in. w Stanach Zjednoczonych, Chinach, Australii, Wielkiej Brytanii, Afryce Południowej, Indonezji, Kanadzie czy Arabii Saudyjskiej (*np. Dhowian 1990, Alonso i in. 1999, Sudjianto i inni 2011, Chen 2012, Vanapalli i Lu 2012, Adem i Vanapalli 2013, Nelson i in. 2015*).

Obserwacje wskazują, że pobór wody przez korzenie drzew ma istotny wpływ na zmiany wilgotności występujące w przypowierzchniowej warstwie gruntu. Intensywny wzrost drzew prowadzi do przesuszenia, a w konsekwencji do skurczu, który powoduje postkonsolidacyjne osiadanie podłoża ekspansywnego (*Kumor 2008*). Obumarcie lub wycięcie drzewa może się wiązać z procesem odwrotnym – zwiększeniem wilgotności i powodowanym nim pęcznieniem (*np. Jeż 1995, Zawalski i Woziwodzki 2009, Jeż 2010, Cameron i Beal 2011, Tarnawski 2013*). Zmiany wilgotności gruntów ekspansywnych prowadzić mogą zatem do awarii budowlanych – np. odkształceń nawierzchni dróg, pęknięcia lub unoszenia się posadzek piwnicznych, nierównomiernego osiadania budynków etc. (*np. Jeż 1995, Cameron 2001, Jaksza i inni 2002, Cameron i Beal 2011, Mokhtari i Dehghani 2012, Pritchard i inni 2013*).

Z uwagi na wrażliwość objętościową gruntów ekspansywnych podejmuje się próby przewidywania zjawisk związanych z obecnością drzew. Bada się między innymi wpływ

całkowitego poboru wody przez drzewa na zmiany wilgotności gruntu i wielkość odkształceń (np. Lawson i O'Callaghan 1995, Morsi 2010, Fredlund i Hung 2001, Vu 2002) jak i zasięg tego wpływu (np. Jeż 1995, Vu 2002, Jaksza i inni 2002).

W coraz większym stopniu wykorzystuje się do tego celu modelowanie numeryczne polegające na rozwiązaniu równań opisujących przepływ wody w warunkach niepełnej saturacji. Analiza literatury wskazuje, że modele opisu odkształceń objętościowych w gruntach ekspansywnych mogą być przydatne – m. in dla określenia wytycznych projektowych posadawiania obiektów budowlanych na tego rodzaju podłożach. Z drugiej strony, rozwiązanie zagadnień przepływu w strefie nienasyconej gruntu jest wysoce skomplikowane ze względu na stopień nieliniowości równań opisujących to zjawisko. Dotychczas opracowane modele w większości opierają się o rozwiązania niejawnych schematów numerycznych metodą elementów lub różnic skończonych (np. Fredlund i Hung 2001, Vu 2002, Morsi 2010), choć w ostatnim czasie podejmuje się również próby rozwiązania prostszymi schematami jawnymi (np. Navarro i inni 2007, Navarro i inni 2009a,b oraz Anagnostopoulos i Burlando 2012)

## 1.2. Cel, teza i zakres pracy

Celem pracy jest opracowanie modelu numerycznego opisującego zjawisko poboru wody przez korzenie drzew, charakteryzującego się możliwie małym stopniem skomplikowania algorytmu obliczeniowego, a następnie przeprowadzenie analizy wpływu zasięgu i rozkładu gęstości strefy korzeniowej oraz dobowej transpiracji na wielkość i zasięg odkształceń w gruncie ekspansywnym. Praca wpisuje się w aktualny nurt badań – podobne analizy wpływu drzew na stan uwilgotnienia i odkształcenia gruntów ekspansywnych przeprowadzane są przez innych badaczy choć na ogół realizowane jest to przy pomocy bardziej złożonych, niejawnych schematów obliczeniowych i z użyciem gotowych programów do rozwiązywania równań różniczkowych (np. FlexPDE, PDEase2D, ABAQUS, HYDRUS).

Zaproponowany w pracy sposób modelowania opiera się na rozwiązaniu równania Richardsa (opisującego przepływ wody w gruntach o zmiennym nasyceniu), z zastosowaniem metody objętości skończonych i jawnego schematu całkowania w czasie. Zmiany objętości gruntu obliczane są na podstawie wyznaczonych wcześniej zmian uwilgotnienia i z wykorzystaniem

dostępnych w literaturze opisów relacji między naprężeniem a odkształceniem w gruntach ekspansywnych - tzw. modeli konstytutywnych.

Tezą pracy jest stwierdzenie, iż *„możliwe jest symulowanie zmian uwilgotnienia gruntów oraz wywołanych tymi zmianami odkształceń gruntów ekspansywnych za pomocą modelu numerycznego, opartego o jawny schemat całkowania w czasie”*.

Poniżej przedstawiono skrótowo zawartość kolejnych rozdziałów pracy.

W rozdziale drugim przedstawiono ogólną charakterystykę gruntów ekspansywnych oraz przykłady awarii budowlanych. W rozdziale tym przytoczono również opisane w literaturze przykłady zastosowania modelowania matematycznego zjawisk związanych z odkształceniami gruntów ekspansywnych.

Rozdział trzeci zawiera opis dynamiki zmian wilgotności w obrębie strefy korzeniowej. W rozdziale tym przedstawiono podstawowe informacje na temat zależności między wilgotnością, ssaniem i przewodnością hydrauliczną gruntów nienasyconych. Opisano również proces poboru wody przez korzenie drzew oraz aktualnie stosowane metody jego matematycznego modelowania dla celów rozwiązania zagadnień związanych z przepływem wody gruntowej.

W rozdziale czwartym przedstawiono metodykę opisu deformacji w gruncie ekspansywnym. W rozdziale tym podano najczęściej wykorzystywane parametry stosowane do opisu zjawisk pęcznienia i skurczu oraz przedstawiono aktualny stan wiedzy na temat charakteru zależności między naprężeniem, a odkształceniem w gruntach nienasyconych. Rozdział czwarty zawiera również zestawienie metod wyznaczania odkształceń gruntów, podzielonych na kategorie wg malejącego stopnia złożoności.

Cześć pracy zawarta w rozdziałach od drugiego do czwartego stanowi przegląd obecnego stanu wiedzy oraz literatury związanej z tematem.

Rozdział piąty zawiera wyprowadzenie równań służących do opisu przepływu wody w gruncie nienasyconym, wykorzystywanych w zaproponowanym modelu numerycznym. Przedstawiono równanie Richardsa opisujące przepływ wody w gruncie nienasyconym, w wersji uwzględniającej wpływ odkształceń ośrodka gruntowego na jego uwilgotnienie oraz z pominięciem tego wpływu.

Rozdział szósty zawiera opis autorskiej metody modelowania numerycznego, zaproponowanej w ramach niniejszej pracy. Polega ona na rozwiązaniu równania przepływu wody w gruncie nienasyconym z wykorzystaniem metody objętości skończonych do dyskretyzacji przestrzennej i jawnego schematu dyskretyzacji czasowej. Model przedstawiony został w wariacie z uwzględnieniem oraz z pominięciem wpływu odkształcenia ośrodka na wartości wilgotności w trakcie trwania symulacji. Zaprezentowano sposób prowadzenia obliczeń schematem w pełni jawnym (to jest na podstawie znanych, wyliczonych w poprzedzającym kroku obliczeniowym parametrów potrzebnych do wyznaczenia prędkości wody gruntowej) jak i alternatywną metodą, polegającą na iteracyjnym wyznaczeniu prędkości wody gruntowej w oparciu o szukane w danym kroku czasowym wartości potencjału wody (zależnego od wilgotności objętościowej). W opisie modelu zawarto również prezentację wykorzystywanych kryteriów ograniczania długości kroku czasowego. Na końcu rozdziału zaproponowano sposób wyznaczania odkształceń i przemieszczeń gruntu na podstawie uzyskanego w trakcie symulacji rozkładu uwilgotnienia w obszarze rozwiązania.

W rozdziale siódmym przeprowadzono weryfikację opracowanego modelu numerycznego poprzez porównanie z rozwiązaniem analitycznym dla szczególnego przypadku przepływu w gruncie nienasyconym (*Tracy 2006*). Porównania przeprowadzono dla kilku wariantów metody, zróżnicowanych pod kątem zastosowanego kryterium ograniczania długości kroku czasowego (Couranta i zaproponowanego w niniejszej kryterium opartego na przyrostach wartości wilgotności) oraz sposobu prowadzenia wyliczeń prędkości wody gruntowej (schemat w pełni jawny oraz metodą iteracyjną). Przeprowadzono również porównania z innymi, znanymi z literatury przykładami numerycznych rozwiązań zagadnień przepływu i deformacji gruntu. Weryfikacja z rozwiązaniem analitycznym przeprowadzona została także dla innego modelu opartego o metodę objętości skończonych (*Anagnostopoulos i Burlando 2012*) w celu późniejszego porównania wyników symulacji numerycznych z tym modelem.

W rozdziale ósmym przeprowadzona została analiza wpływu zasięgu i rozkładu gęstości poboru w strefie korzeniowej oraz dobowej transpiracji na wielkość spodziewanych deformacji gruntu. Analiza przeprowadzona została dla przypadku poboru wody przez pojedyncze drzewo oraz przez szpaler drzew, w oparciu o makroskopowy model funkcji poboru wody przez korzenie drzew wg *Vrugt i in. (2001b)*.

W rozdziale dziewiątym przeprowadzony został przykład szacowania spodziewanego zasięgu strefy korzeniowej drzew z uwagi na zaspokojenie potrzeb wodnych rośliny.

W rozdziale dziesiątym przeprowadzono przykładowe obliczenia deformacji powierzchni gruntu powodowanych wpływem pojedynczego drzewa oraz szpaleru drzew, dla gruntu ekspansywnego z terenu Bydgoszczy. Obliczenia przeprowadzono na podstawie badań nad skurczalnością występujących w Bydgoszczy itów serii Poznańskiej (*Kumor 2008*).

W rozdziale jedenastym przedstawiono przykład wyznaczenia rozkładu wilgotności dla gruntu torfowo-murszowego z terenu Polski - dla przypadku wieloletniej symulacji poboru wody przez pojedyncze drzewo oraz przez szpaler drzew. Rozdział ten ukazuje możliwość zastosowania przyjętego schematu w zagadnieniach związanych z rolnictwem.

Rozdział dwunasty zawiera wnioski i proponowane kierunki dalszych badań.

W niniejszej pracy starano się zachować jednolitą konwencję oznaczeń we wszystkich wzorach, stąd też używane w poszczególnych formułach symbole mogą odbiegać od oznaczeń z oryginalnych artykułów przytaczanych w przeglądzie literatury. W przypadku braku możliwości dotarcia do oryginalnych opracowań, odwołania do nich podane zostały łącznie z informacją o pozycji literaturowej, z której zostały zaczerpnięte.



## 2. Wpływ drzew na budowle posadowione w gruntach ekspansywnych w świetle literatury

### 2.1. Ogólna charakterystyka gruntów ekspansywnych

Grunty ekspansywne, podobnie jak grunty zapadowe, są gruntami wykazującymi zmiany objętości właściwej w powiązaniu ze zmianą wilgotności. W odróżnieniu jednak od gruntów zapadowych (lessy, osady lesso-podobne), które posiadają strukturę nietrwałą, ulegającą destrukcji po doprowadzeniu wody (przez co zmniejszają swoją objętość), grunty ekspansywne pęcznią wraz ze wzrostem wilgotności i odwrotnie, ulegają skurczowi w przypadku, gdy wilgotność gruntu maleje. Zmiany objętości właściwej gruntów ekspansywnych, zachodzą najczęściej, gdy znajdują się one w stanie nienasyconym – tj. w strefie tzw. aeracji.

Zjawisko zmian objętościowych w gruntach ekspansywnych powiązane jest z występowaniem sił adsorpcyjnych względem wody na powierzchni cząstek szkieletu gruntowego. W efekcie ich działania cząstki gruntu otoczone są wodą. Wzrost wilgotności gruntu powoduje zwiększenie ilości wody otaczającej cząstkę gruntu, co przekłada się na zwiększenie odległości między tymi cząstkami i wywołuje pęcznienie gruntu. W sytuacji w której pęcznienie gruntu odbywa się w warunkach ograniczonej możliwości zwiększenia objętości grunt wywiera nacisk (ciśnienie pęcznienia) na ograniczającą jego objętość barierę. Gdy wilgotność gruntu maleje zachodzi zjawisko odwrotne, tj. wraz ze zmniejszającą się ilością wody przyległej do cząstek szkieletu gruntowego zmniejsza się odległość między cząstkami i dochodzi do skurczu. Na wielkość sił adsorpcyjnych wobec wody wpływ mają zarówno rozmiar cząstek jak i ich skład mineralny. Im mniejsze cząstki tworzące szkielet gruntowy tym większa powierzchnia właściwa szkieletu (przypadająca na jednostkę objętości) i większa zdolność do adsorpcji oraz siła ssąca wobec wody. Stąd na towarzyszące zmianom wilgotności gruntu ekspansywnego zmiany objętości, powszechnie określane mianem zjawisk ekspansywnych, wpływ mają przede wszystkim :

- skład granulometryczny gruntu
- procentowa zawartość frakcji ilowej

- skład mineralny frakcji iłowej - intensywność zmian ekspansywnych zgodna jest z szeregiem: smektyt [montmorillonit, beidelit]>illit>kaolinit>haloizyt (np. Jeż 1995, Grabowska–Olszewska i inni 1998)
- skład chemiczny wód gruntowych
- rodzaj kationów wymiennych, determinujących hydrofilność gruntu, malejącą zgodnie z szeregiem (Grabowska-Olszewska i inni 1998):  $\text{Na}^{3+}>\text{Ca}^{2+}>\text{Mg}^{2+}>\text{Al}^{3+}>\text{Fe}^{3+}$

W literaturze naukowej związanej z tematem podjęto wiele prób sklasyfikowania gruntów pod względem ich potencjalnej ekspansywności. Klasyfikacje te najczęściej opierają się na określeniu:

- pęcznienia swobodnego gruntu (tj. pęcznienia bez wywierania ciśnienia - np. wg Holtza-Gibbsa) lub pęcznienia przy ciśnieniu 7 kPa (1 psi).
- ciśnienia pęcznienia gruntu (tj. ciśnienia, jakie należy wywrzeć na próbkę gruntu, aby po zalaniu jej wodą uniemożliwić jej odkształcenie)
- określeniu granic Atterberga, tj. wilgotności wagowych gruntu dla granic płynności ( $w_l$ ), plastyczności ( $w_p$ ), skurczalności ( $w_s$ )
- określeniu wskaźnika plastyczności gruntu
- określeniu procentowej zawartości frakcji iłowej ( $f_i \leq 2\mu\text{m}$ )
- innych wskaźników określających potencjalną ekspansywność gruntu (np. wskaźnik ekspansji wg ASTM D 4829-88, wskaźnik aktywności koloidalnej, powierzchni właściwej)

Poniżej przytoczono kilka klasyfikacji gruntów pod kątem ich potencjalnej ekspansywności – za pracami Grabowska-Olszewska i inni (1998) oraz Jeż (1995):

1. Nomogram do oceny potencjalnej ekspansywności (PE) (Van der Merwe 1964)
2. Nomogram do oceny potencjału pęcznienia i stopni ekspansji wg Seeda (Seed i in. 1962)
3. Ocena potencjalnej ekspansywności na podstawie ciśnienia ssania gruntu (McKeen 1992)
4. Ocena potencjalnej ekspansywności na podstawie normy ASTM D 4829-88
5. Uprozczone kryterium Daniłowa



## Występowanie gruntów ekspansywnych w Polsce

Jak wskazano wcześniej, zjawisko ekspansywności gruntu związane jest z obecnością i składem mineralnym frakcji iłowej. Szczególnie silne własności ekspansywne wykazują grunty zawierające minerały z grupy smektytu. W Polsce gruntami wykazującymi cechy ekspansywne są głównie neogeńskie (wcześniej nazywane trzeciorzędowymi) mio-plioceńskie iły serii poznańskiej oraz iły miocenu morskiego (Grabowska-Olszewska i in. 1998, Przysański 1991, Jeż 1995, Kumor 2008 i 2016), które zalegają na znacznym obszarze kraju (rys.2.1).



1. zasięg iłów serii poznańskiej 2. zasięg iłów miocenu morskiego 3. strefy płytkiego zalegania stropu iłów (0-25m) 4. strefy intensywnych zaburzeń glacytektonicznych

Rys. 2.1. Występowanie gruntów ekspansywnych w Polsce (Przysański 1991)

## 2.2. Oddziaływanie drzew na grunty ekspansywne

Ze względu na właściwości gruntów ekspansywnych, prognozowanie zmian ich wilgotności jest istotnym problemem inżynierskim. Jest to jednak zadanie skomplikowane z uwagi na wielość czynników wpływających na stan uwilgotnienia gruntu, które wg Kumora (2008)

można podzielić na dwie główne grupy, obejmujące czynniki geologiczne (związane z materiałowymi właściwościami gruntu) oraz czynniki środowiskowe (patrz tabela 2.1).

Tab. 2.1. Czynniki wywołujące zmiany objętościowe w gruntach ekspansywnych (wg Kumor 2008)

Czynniki geologiczne	Czynniki środowiskowe	Inne czynniki
<ul style="list-style-type: none"> <li>• powierzchnia właściwa szkieletu gruntowego</li> <li>• skład granulometryczny gruntu</li> <li>• skład mineralny</li> <li>• rodzaj kationu wymiennego</li> <li>• struktura gruntu</li> <li>• wskaźnik plastyczności</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• czynniki klimatyczne</li> <li>• wpływ roślinności</li> <li>• obciążenie zewnętrzne gruntu</li> <li>• położenie zwierciadła wody gruntowej</li> <li>• czynniki antropogeniczne</li> <li>• objętościowy rozkład wilgotności</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• głębokość</li> <li>• czas</li> </ul>

Ważną grupą czynników są te, które związane są z działalnością człowieka (antropogeniczne) – wiążą się one np. z uszkodzeniami infrastruktury wodociągowej i kanalizacyjnej prowadzących do nawodnienia i pęcznienia gruntu, wykonywaniem zbyt głębokich wykopów kanalizacyjnych w pobliżu istniejących budynków z zastosowaniem zasyпки z materiałów niespoistych, wykonywaniem zbyt głębokich wykopów kanalizacyjnych w pobliżu istniejących budynków etc. (np. Przysański 1991, Niedzielski i Kumor 2009).

Na szczególną uwagę zasługują czynniki antropogeniczne w powiązaniu z wpływem roślinności. Można wśród nich wymienić m.in.: sadzenie drzew i krzewów zbyt blisko obiektów budowlanych. Zaobserwowano, że wzrost drzew w gruntach ekspansywnych powoduje nierównomierne osiadania budynków, pękanie posadzek piwnicznych, odkształcenia nawierzchni dróg etc. Zjawiska te związane są poborem wody przez korzenie, który prowadzi do przesuszenia gruntu, a w konsekwencji wywołuje jego skurcz (np. Kumor 2008, Jeż 2010, Pritchard i in. 2013). W przypadku wycinki drzew zachodzi natomiast zjawisko odwrotne - zwiększenie wilgotności mogące prowadzić do pęcznienia gruntu (np. Jeż 1995, Zawalski i Woziwodzki 2009, Jeż 2010, Tarnawski 2013).

Wielu badaczy podejmuje się oszacowania możliwego zasięgu wpływu drzew na stan uwilgotnienia gruntów ekspansywnych. Najczęściej określa się zasięg tego wpływu na podstawie badań terenowych w odniesieniu do wysokości drzewa (H). Na przykład Jaks i inni (2002) na podstawie psychrometrycznych badań ssania próbek gruntu pobranych w pobliżu drzewa gumowego (*Corymbia maculata*) określili poziomy zasięg wpływu dla

pojedynczego drzewa oraz szpaleru drzew tego gatunku na odpowiednio 0,5H i 0,8H. W Nowej Zelandii natomiast wykazano (Wesseldine 1982 – cytowanie za Cameron 2001), że zasięg wpływu pojedynczego drzewa gumowego (*e. Cinarea*) na budynki wynosi 0,75H, natomiast dla grupy drzew tego gatunku - zawiera się w zakresie od 1 do 1,5H.

Na podstawie obserwacji i badań opracowuje się również wytyczne projektowe dla zachowania bezpiecznych odległości nasadzeń od budowli. Np. wg zaleceń projektowych dla terenów Australii (*standard AS2870 – 1988 do 1996 – cytowanie za Cameron i Beal 2011*), w zależności od stopnia reaktywności gruntu, należy przyjmować bezpieczną odległość od pojedynczego drzewa w zakresie od 0,75H do 1,5H oraz od 1,12H do 2,5H w przypadku grupy drzew. Wg Jeża (1995) poziomy zasięg wpływu dla pojedynczego drzewa wynosi ok. 1,5H oraz 2H dla grupy drzew, natomiast Mokhtari i Dehghani (2012) zalecają sadzenie drzew w odległości od fundamentów większej niż wysokość dorosłego drzewa.

### 2.3. Rodzaje awarii budowlanych wywołanych wpływem drzew

Ze względu na wywierany wpływ na wilgotność gruntów, obecność drzew otoczeniu obiektów budowlanych posadowionych w gruntach ekspansywnych może prowadzić do ich awarii. Awarie te dotyczą najczęściej konstrukcji płytko-posadowionych. W przypadku budynków dochodzi do uszkodzeń konstrukcji (zarysowania i pęknięcia), nierównomiernego osiadania, pęknięcia i odkształcenia fundamentów, posadzek piwnic etc. (Lawson i O'Callaghan 1995, Jeż 1995, Jaksa i inni 2002, Pritchard i inni 2013). Drzewa są często również sprawcami odkształceń i pęknięcia utwardzonych nawierzchni oraz dróg (np. Jaksa i inni 2002). Warty podkreślenia jest, że awarie dotyczą zarówno obiektów współczesnych, jak i tych, które bezproblemowo eksploatowane są od wieków. Przykładem jest opisana przez Jeża (1995) awaria XV wiecznego kościoła, którego konstrukcja uległa spękanom na skutek wycięcia rosnących w jego otoczeniu około 100 letnich lip. Wywołane wpływem drzew awarie wiążą się z dużymi stratami finansowymi. Jak podają Lawson i O'Callaghan (1995), w Wielkiej Brytanii, w latach 1988-1992, niekorzystnemu wpływowi drzew przypisuje się osiadania budynków mieszkalnych i wywołane nimi straty finansowe wyrażone roszczeniami wobec firm ubezpieczeniowych w łącznej wysokości przekraczającej 1,6 miliarda funtów. Jones i Holtz (1973-cytowanie za Vu 2002) podają, że straty związane z awariami z powodu gruntów ekspansywnych w Stanach Zjednoczonych



wynoszą rocznie ok. 6 miliardów dolarów, z czego ok. 20% można przypisać przesuszaniu powodowanemu przez roślinną (Holtz 1983 – cytowanie za Vu 2002). Z uwagi na powyższe, tematyka związana z oddziaływaniem drzew na obiekty budowlane coraz mocniej przenika do świadomości badaczy na całym świecie. Również w Polsce przyczyn awarii budowli upatruje się coraz częściej we wpływie drzew na stan gruntów ekspansywnych (np. Jeż 1995, Michalski i Zygmuntowicz 2001, Kumor 2008, Niedzielski i Kumor 2009, Zawalski i Woziwodzki 2009, Jeż 2010).

## 2.4. Zastosowania modelowania matematycznego

Wraz z rozwojem nowoczesnych metod obliczeniowych oraz możliwości komputerów, w ostatnich latach, w celu badania zjawisk związanych z odkształceniami gruntów ekspansywnych, coraz częściej wykorzystuje się modelowanie matematyczne. W kontekście badania wpływu drzew na stan uwilgotnienia i odkształcenia gruntów, prowadzone modelowanie ma na ogół na celu określenie wielkości i zasięgu spodziewanych deformacji (np. Vu 2000, Fredlund i Hung 2001, Navarro 2007 i 2009a,b, Indraratna i inni 2006, Morsi 2010). Opracowywane modele matematyczne wykorzystują równania opisujące przepływ wody w warunkach niepełnej saturacji, które pozwalają wyznaczyć rozkład uwilgotnienia gruntu w obszarze rozwiązania – najczęściej do tego celu wykorzystuje się równanie Richardsa. Istotną kwestią w rozwiązaniu równań opisujących przepływ w strefie nienasyconej jest matematyczny opis poboru wody przez korzenie drzew (tj. zdefiniowanie funkcji źródłowej). W tym celu stosuje się na ogół tzw. makroskopową definicję strefy korzeniowej (patrz punkt 3.7), przyjmując, że jest ona w zajmowanej przez siebie objętości ośrodkiem ciągłym (np. Indraratna i in. 2006, Gatmiri i Najari 2010), choć równolegle stosuje się uproszczone opisy funkcji źródłowej, zakładając punktowy pobór wody przez korzenie drzew (np. Navarro 2009a,b) lub uwzględniając pobór wody przez drzewo jako odpływ z brzegu obszaru rozwiązania (np. Vu 2002, Fredlund i Hung 2001).

Osobnym zagadnieniem jest wyznaczenie spodziewanych odkształceń na podstawie określonych zmian uwilgotnienia. Na przestrzeni czasu opracowywane są modele (tzw. relacje konstytutywne) służące do opisu mechanicznych właściwości gruntów nienasyconych (o różnym stopniu złożoności - przegląd w punkcie 4.), w oparciu o które wyznacza się spodziewane odkształcenia gruntu. Na podstawie opracowanych modeli makroskopowego

poboru wody przez drzewa oraz modeli konstytutywnych relacji naprężenie-odkształcenie prowadzone są symulacje spodziewanych odkształceń powodowanych przez zadrzewienie.

W zakresie sposobu prowadzenia symulacji wyróżnić można dwie metody – tzw. sprzężoną i niesprzężoną. W metodzie sprzężonej rozwiązanie zagadnienia polega na rozwiązaniu układu równań równowagi naprężeń (patrz pkt. 4.3) i równania opisującego przepływ wody, co wiąże się z jednoczesnym prowadzeniem wyliczeń zarówno zmian wilgotności jak i odkształceń w kolejnych krokach czasowych (*np. Vu 2002 z użyciem programu COUPSO*). Uproszczeniem w stosunku do metody sprzężonej jest podejście niesprzężone, w którym rozwiązanie zagadnienia realizowane jest w dwóch osobnych etapach – w pierwszej fazie symulacji wyznacza się rozkład uwilgotnienia gruntu, a w kolejnym, drugim etapie oblicza się spowodowane zmianami wilgotności odkształcenia (*np. Navarro 2009a,b , Indraratna i in. 2006, Fredlund i Hung 2001, Hung i Fredlund 2002*). Przyjmuje się, że dla większości symulacji związanych ze zmianami objętości gruntów ekspansywnych wystarczające jest stosowanie metod niesprzężonych (*Vu 2002*).

Symulacje na ogół prowadzi się za pomocą gotowych programów do rozwiązywania równań różniczkowych opartych o niejawne schematy obliczeniowe (najczęściej metody różnic lub elementów skończonych), takich jak: ABAQUS (*np. Indraratna i inni 2006, Zhou 2011*), Hydrus (*np. Vrugt i inni 2001a,b*), PDEase2D (*np. Fredlund i Hung 2001*), FlexPDE (*np. Vu 2002*), CRISP i SEEP/W (*np. Morsi 2010*), COUPSO (*np. Vu 2002*), choć w ostatnich latach obserwuje się zainteresowanie prostszymi, niesprzężonymi schematami jawnymi, opartymi o metody objętości skończonych (*np. Navarro i inni 2009a,b; Anagnostopoulos i Burlando 2012*). Zaletę metod niesprzężonych upatruje się w potencjalnej możliwości tzw. „parallelizacji” obliczeń, tj. podziału obszaru rozwiązania na mniejsze części i prowadzeniu obliczeń z użyciem wielu komputerów. Interesującym kierunkiem rozwoju wydaje się być połączenie numerycznego rozwiązania równania przepływu wody w gruncie, pozwalającego uwzględnić zmiennie w czasie warunki brzegowe, z uproszczonymi metodami wyznaczania odkształceń. Podejście takie zaproponowano m in. w pracach (*Wray i inni 2005, Navarro i in. 2007,2009a,b, Adem i Vanapalli 2013*).

Niniejsza praca wpisuje się w nurt tworzenia prostych, niesprzężonych schematów obliczeniowych. Jej celem jest opracowanie modelu za pomocą którego możliwe byłoby wyznaczenie rozkładu uwilgotnienia gruntu w strefie nienasyconej oraz prognozowanie spodziewanych deformacji.

W innym prostym schemacie jawnym (*Anagnostopoulos i Burlando 2012*) obliczenia prowadzi się wyznaczając dla kolejnych kroków czasowych wartości ciśnienia wody w punktach węzłowych. Proponowany schemat zakłada odmienne podejście, oparte o wyliczenia zmian wilgotności objętościowej  $\theta$ . W dalszej części pracy zostanie wykazane, że mimo dużej nieliniowości równań opisujących przepływ w strefie nienasyconej, zaproponowany sposób prowadzenia symulacji ze względu na  $\theta$  zapewnia stabilność obliczeń i zadowalającą zbieżność z rozwiązaniem dokładnym, pod warunkiem stosowania odpowiednich kryteriów ograniczających długość kroku czasowego i metodyki wyliczania prędkości wody.

### 3. Matematyczny opis dynamiki zmian wilgotności w strefie korzeniowej

Zachowanie się płytko położonych gruntów ekspansywnych opisywane jest w ramach mechaniki gruntów nienasyconych (np. Fredlund i Rahardjo 1993, Lu i Likos 2004, Fredlund i in. 2012). Grunty te charakteryzują się zmienną wilgotnością, wywołującą m in. zmiany objętościowe oraz przewodności hydraulicznej, a dodatkowo w stanach niepełnej saturacji, również występowaniem tzw. ssania (wobec wody). Przedstawiony poniżej przegląd stanu wiedzy opiera się w znacznym stopniu (podrozdziały 3.1 do 3.3) na artykule Michalskiego i Szymkiewicza (2016).

#### 3.1. Podstawowe parametry opisujące wilgotność gruntu

Zmiany wilgotności gruntu w strefie aeracji zachodzą od zawartości wody bliskiej zeru, do stanu pełnego nasycenia porów wodą gruntową (stan pełnej saturacji). Dla opisu stanu wilgotności gruntu ekspansywnego wygodnie jest posługiwać się parametrami masowej  $w$  oraz objętościowej  $\theta$  wilgotności gruntu:

$$w = \frac{m_w}{m_s} \quad (3.1)$$

$$\theta = \frac{V_w}{V} = \frac{V_w}{V_s + V_p} \quad [-] \quad (3.2)$$

gdzie:  $m_w$  - masa wody gruntowej w próbce gruntu

$m_s$  - masa szkieletu gruntowego zawartego w próbce

$V_w$  - objętość wody gruntowej w próbce gruntu

$V_s$  - objętość szkieletu gruntowego zawartego w próbce

$V_p$  - objętość porów w próbce gruntu

$V$  - całkowita objętość próbki gruntu

Innym parametrem opisującym stan uwilgotnienia gruntu w strefie aeracji jest stopień wilgotności (saturacji)  $S_r$ . Stopień saturacji określony jest ilorazem objętości wody gruntowej wypełniającej pory próbki gruntu  $V_w$  i całkowitej objętości porów w próbce  $V_p$ .

$$S_r = \frac{\theta}{n} = \frac{V_w}{V_p} \quad [-] \quad (3.3)$$

gdzie:  $n$  - porowatość

Ważnymi wskaźnikami w opisie zmian wilgotnościowych gruntów ekspansywnych są:

- wilgotność objętościowa dla stanu pełnej saturacji  $\theta_s$  oraz
- tzw. residualna (resztowa) objętość wilgotnościowa  $\theta_r$ , wyrażająca pozostającą w gruncie objętość wody (tzn. taką, której nie można usunąć bez dostarczenia energii z zewnątrz).

Oba parametry  $\theta_s$  i  $\theta_r$  nie są dla danego gruntu wielkościami stałymi i zależą od rodzaju oraz warunków przebiegu procesu (nawadniania lub osuszania).

W przypadku całkowitego wypełnienia porów gruntu wodą  $V_w = V_p$  i wówczas  $\theta_s$  jest równe porowatości:

$$\theta_s = \frac{V_w=V_p}{V} = n \quad [-] \quad (3.4)$$

Spełnienie równania (3.4) możliwe jest praktycznie tylko w warunkach laboratoryjnych. W warunkach rzeczywistych zazwyczaj część powietrza zalega w obrębie szkieletu gruntowego w postaci odizolowanych od siebie pęcherzyków. Przyjmuje się, że w warunkach terenowych stosunek  $\theta_s$  do  $n$  zawiera się w przedziale od 0,85 do 0,9 (Szymkiewicz i inni 2014).

Ponieważ zmiany wilgotności gruntu przebiegają różnie w zależności od rodzaju procesu, definiuje się również tzw. znormalizowaną wilgotność objętościową  $\Theta$  oraz efektywny stopień saturacji  $S_e$  (np. Helmig 1997, Leong i Rahardjo 1997b, Ossowski i Sikora 2004):

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad [-] \quad (3.5)$$

$$S_e = \frac{S_r - S_{re}}{1 - S_{re}} \quad [-] \quad (3.6)$$

gdzie:  $S_{re}$  – oznacza minimalną (residualną) dla danego procesu wartość stopnia saturacji

### 3.2. Potencjał wody gruntowej i ssanie gruntu

Dla opisu stanu energetycznego wody gruntowej określa się jej potencjał, będący miarą sił na nią działających (np. Szymkiewicz i inni 2014). Potencjał wody gruntowej wyraża się w różnych formach jako energię przypadającą na jednostkową:

- masę (tzw. forma masowa) [J/kg],
- objętość (tzw. forma ciśnieniowa) [ $J/m^3 = Pa$ ], lub
- ciężar gruntu (tzw. forma wysokościowa) [ $J/N = m$ ]



Dla wody gruntowej znajdującej się w ośrodku trójfazowym całkowity potencjał rozpatruje się jako sumę potencjałów składowych (np. Warrick 2002):

$$\psi_c = \psi_m + \psi_s + \psi_p + \psi_z \quad (3.7)$$

przy czym:

$$\psi_m + \psi_s = \psi \quad (3.8)$$

gdzie:

$\psi_c$  – całkowity potencjał wody gruntowej

$\psi$  – potencjał ssania (ssanie gruntu)

$\psi_m$  - potencjał macierzowy (zwany również ssaniem macierzowym lub matrycowym), spowodowany podciśnieniem wody gruntowej ( $u_w$ ) względem ciśnienia atmosferycznego ( $u_a$ )

$\psi_s$  - potencjał tzw. osmotyczny, związany z różnicą stężeń substancji rozpuszczonych w wodzie gruntowej

$\psi_p$  - potencjał wywołany nadciśnieniem wody gruntowej ( $u_w$ ) w stosunku do ciśnienia atmosferycznego ( $u_a$ )

$\psi_z$  –składowa wysokościowa potencjału, związana z położeniem ponad przyjęty poziom odniesienia

W powyższym wzorze (3.7)  $\psi_m$  oraz  $\psi_p$  są składowymi potencjału wyrażającymi ciśnienie wody porowej w stosunku do ciśnienia atmosferycznego. Obie składowe występują naprzemiennie i nawzajem się wykluczają (np. Warrick 2002). Potencjał związany z nadciśnieniem  $\psi_p$  występuje jedynie w stanach pełnej saturacji (nie występuje wówczas składowa  $\psi_m$ ) i związany jest z położeniem względem zwierciadła wody gruntowej, tzn.  $\psi_p > 0$  dla wody znajdującej się w porach położonych poniżej zwierciadła. Z kolei powyżej zwierciadła wody gruntowej nie występuje składowa  $\psi_p$ , a w jej miejsce pojawia się potencjał matrycowy  $\psi_m$ , który związany jest z podciśnieniem wody względem ciśnienia atmosferycznego w strefie nienasyconej gruntu.

### Potencjał ssania (ssanie gruntu) $\psi$

Woda w gruntach nienasyconych związana jest ze szkieletem gruntowym poprzez siły kapilarne, adsorpcyjne i osmotyczne. Miarą wielkości tych sił jest tzw. potencjał ssania lub ssanie gruntu  $\psi$ , wyrażone jako różnica między potencjałem wody wolnej i wody znajdującej się w gruncie na tej samej wysokości z powyżej przyjętego poziomu odniesienia (np. Kowalik 2007). Przyjmuje się, że na ssanie gruntu składają się głównie (zgodnie z 3.8) ssanie macierzowe  $\psi_m$  i ssanie osmotyczne  $\psi_s$ .

Ssanie macierzowe  $\psi_m$  (zwane również matrycowym) jest wynikiem działania sił kapilarnych oraz adsorpcyjnych i zwyczajowo jest utożsamiane z ujemnym (niższym od atmosferycznego) ciśnieniem wody w porach:

$$\psi_m = (u_a - u_w) [Pa] \quad (3.9)$$

W zależności od przyjętej konwencji wartości  $\psi_m$  podawane są ze znakiem dodatnim lub ujemnym.

Wskazuje się jednak, że interpretacja jw. jest poprawna jedynie w odniesieniu do składowej kapilarnej ssania, która jest związana z różnicą ciśnień na zakrzywionej powierzchni granicznej między wodą i powietrzem (Yong 1999, Baker i Frydman 2009). W gruntach ekspansywnych dominują składowe ssania związane z siłami adsorpcyjnymi i osmotycznymi (Agus i in. 2010, 2013), przy czym rozróżnienie między nimi może być problematyczne, szczególnie tam, gdzie dużą rolę odgrywa hydratacja kationów pomiędzy pakietami minerałów ilastych (Yong 1999).

Ssanie osmotyczne  $\psi_s$  związane jest z różnicą stężeń substancji rozpuszczonych w wodzie gruntowej. Przyjmuje się, że przy stałym składzie chemicznym wody w porach ssanie osmotyczne zmienia się w niewielkim zakresie (ok. 300-400 kPa), a zmiany ssania całkowitego  $\psi$  odpowiadają zmianom ssania macierzowego  $\psi_m$  (Chao 2007, Mašin i Khalili 2015, Nelson i in. 2015). Uznaje się również, że dla ssania o wartościach powyżej 1500 kPa, całkowite ssanie gruntu i ssanie macierzowe mogą być traktowane jako równoważne (np. Fredlund i Xing 1994).

Wzór (3.9) określa ssanie macierzowe w formie ciśnieniowej. Podobnie jak w przypadku pozostałych składowych potencjału wody, ssanie macierzowe wyznaczyć można również w formie:

- masowej:

$$\psi_m = (u_a - u_w) * \frac{1}{\rho_w} \text{ [J/kg]}, \text{ oraz} \quad (3.10)$$

- wysokościowej:

$$\psi_m = h_s = \frac{(u_a - u_w)}{\rho_w \cdot g} = \frac{(u_a - u_w)}{\gamma_w} \text{ [m]}. \quad (3.11)$$

gdzie:  $h_s$  - wysokość słupa wody konieczna dla zrównoważenia podciśnienia porowego ( $u_a - u_w$ )

Ponieważ podciśnienie porowe może przyjmować bardzo duże wartości (znacznie większe od podciśnienia dla próżni), przyjęto posługiwać się tzw. indeksem  $pF$  równym:

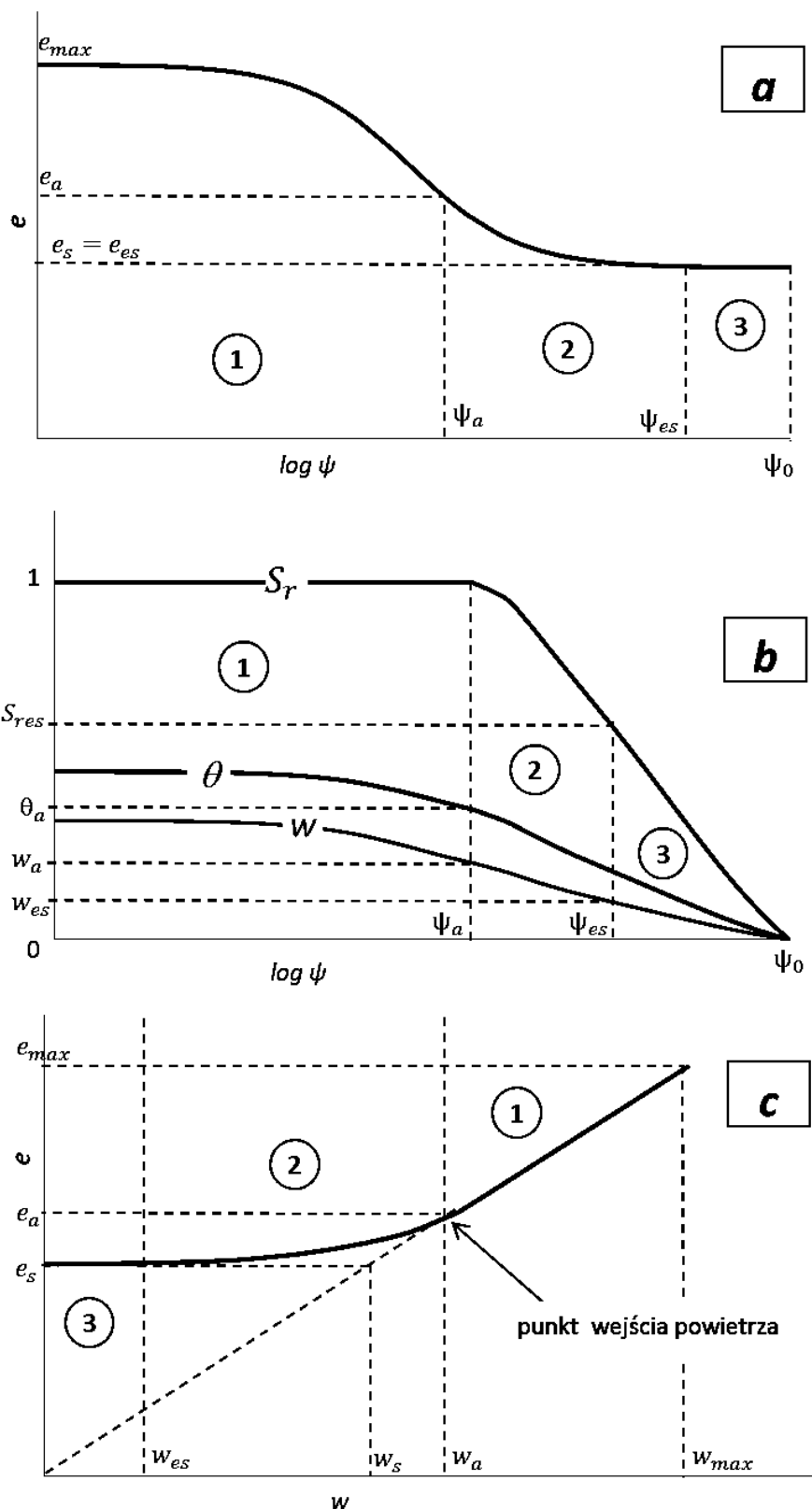
$$pF = \log_{10} h_s \quad (3.12)$$

w którym  $h_s$  wyrażane jest w centymetrach.

Wartości całkowitego ssania gruntu mogą zmieniać się od 0 dla gruntu w pełni nasyconego wodą do wartości  $\psi_0 = 1.000.000 \text{ kPa}$  ( $\sim 10^5 \text{ m}$  słupa wody,  $pF \approx 7$ ) dla gruntu wysuszonego w suszarce (np. Fredlund i in. 2012, Zaradny 1990). Według innych autorów maksymalna wartość ssania w takich warunkach wynosi od 6,25 do 6,4  $pF$  (np. Nelson i in. 2015).

### 3.3. Krzywa retencji wodnej

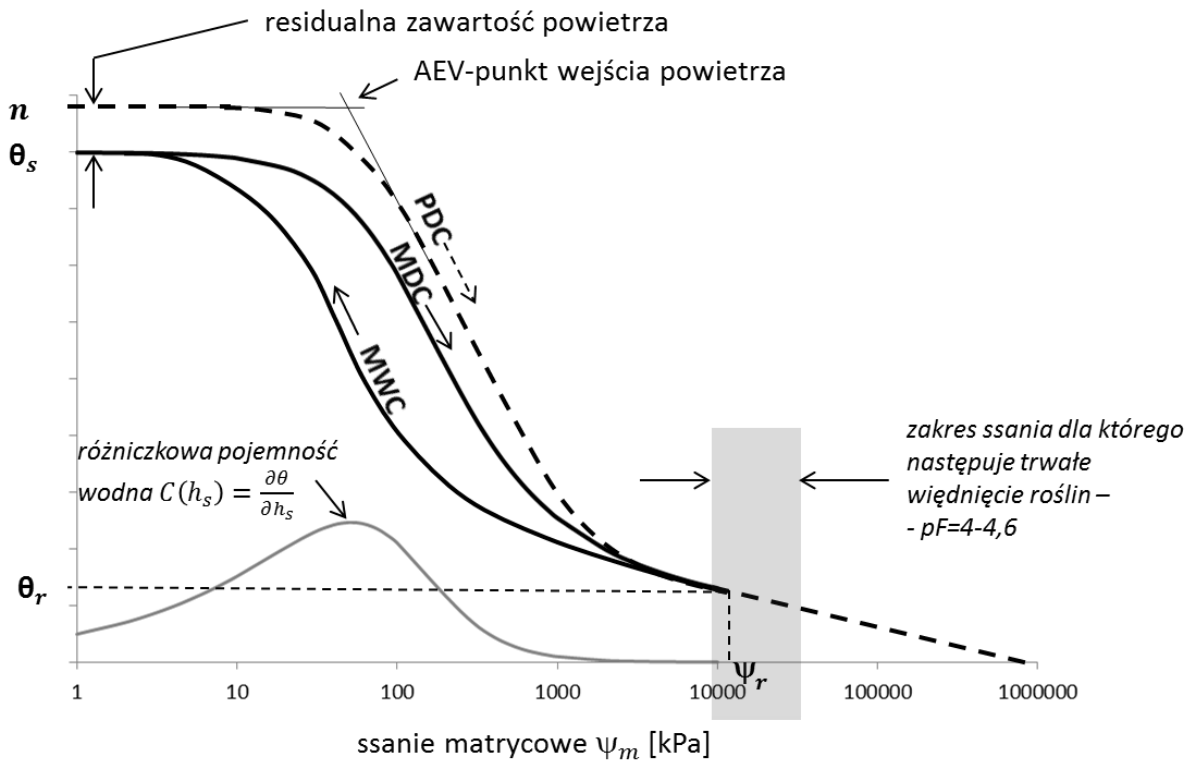
Zmiany wilgotności gruntu związane są ze zmianami ssania. Zależność tą określa się mianem krzywej retencji lub krzywej charakterystycznej wilgotności. Może być ona przedstawiona w postaci zależności funkcyjnych  $w=f(\psi)$ ,  $\theta=f(\psi)$  lub  $S_r=f(\psi)$  (rys. 3.1b), które mogą odnosić się do ssania macierzowego lub całkowitego (np. Fredlund i Xing 1994, Wójcik 2005). W gruntach nie wykazujących cech ekspansywnych zmiany wartości ssania w niewielkim stopniu wpływają na zmiany porowatości i wszystkie trzy funkcje mają podobny kształt. Natomiast w gruntach ekspansywnych zmiany wartości ssania mogą powodować duże odkształcenia objętościowe w warunkach pełnego nasycenia (rys 3.1a). Krzywe retencji gruntu muszą zatem być rozpatrywane w połączeniu z krzywymi skurczalności, opisującymi zależność między wilgotnością wagową i wskaźnikiem porowatości danego gruntu (rys. 3.1c).



Rys. 3.1. Charakterystyki gruntów ekspansywnych: a) zależność wskaźnika porowatości od ssania; b) krzywe retencji; c) krzywa skurczalności (wg Mbonimpa i in. 2006 oraz Michalski i Szymkiewicz 2016)

Na rys. 3.1 przedstawiono w formie graficznej zależność między ssaniem, wilgotnością i wskaźnikiem porowatości w gruncie ekspansywnym (za artykułem *Mbonimpa i in. 2006*). Jest to schemat uproszczony, odnoszący się do swobodnego skurczu próbki gruntu nie poddanej obciążeniu zewnętrznemu. Na każdym wykresie można wyróżnić 3 charakterystyczne strefy. W strefie 1 grunt pozostaje w pełni nasycony. Zmiany wilgotności wynikają jedynie ze zmian porowatości gruntu. Strefa ta obejmuje wartości ssania mniejsze od tak zwanego ciśnienia wejścia powietrza (ang. air entry pressure)  $\psi_a$ , które jest tym większe, im mniejszy jest rozmiar porów w próbce. Krzywa skurczalności (rys. 3.1c) ma w tej strefie przebieg prostoliniowy, nachylony do osi poziomej - jest to faza skurczu normalnego. Wilgotność zmniejsza się od wartości  $w_{max}$  do wartości  $w_a$ , przy której w porach pojawia się powietrze. W strefie 2 wilgotność gruntu zmniejsza się zarówno na skutek skurczu (zmniejszenia porowatości), jak i zmniejszania stopnia nasycenia, aż do osiągnięcia wilgotności równej rzeczywistej granicy skurczalności  $w_{es}$  i odpowiadającej jej wartości ssania  $\psi_{es}$ . Jest to strefa skurczu rezydualnego. W strefie 3, odpowiadającej największym wartościom ssania, proces osuszania gruntu odbywa się już bez zmian objętościowych. Należy zauważyć, że często definiuje się umowną granicę skurczalności gruntu jako wartość wilgotności odpowiadającą przecięciu się stycznych do prostoliniowych odcinków krzywej skurczalności (punkt odpowiadający wilgotności  $w_s$  na rys. 3.1c).

Cechą relacji między wilgotnością a ssaniem gruntu jest histereza, która skutkuje zmiennością kształtu krzywej retencji kolejno podczas nawadniania i przesuszania gruntu w zależności od warunków i kierunku zmiany wilgotności. Zjawisko to ukazuje rys. 3.2 na którym krzywa MDC (ang. *Main Drainage Curve*) przedstawia główną krzywą drenażu, natomiast MWC (ang. *Main Wetting Curve*) główną krzywą nawadniania. Krzywa oznaczona PDC (ang. *Primary Drainage Curve*) jest krzywą drenażu tzw. pierwotnego, który przebiega od stanu pełnej saturacji ( $\theta_s = n$ ), poprzez punkt o residualnej zawartości wody  $\theta_r$ , aż do przecięcia z osią odciętych przy zerowej wilgotności objętościowej. Wykres PDC jest wyznaczany laboratoryjnie i obrazuje niespotykany w warunkach polowych przebieg drenażu. W warunkach terenowych, osuszanie i nawadnianie gruntu (krzywe MDC i MWC) przebiegają w przedziale wartości nasycenia od  $\theta_s$  (mniejszej od porowatości) do nasycenia residualnego  $\theta_r$ . Związane jest to z faktem, że w warunkach rzeczywistych, w porach gruntu zawsze zalegają resztkowe objętości wody oraz uwięzione w trakcie poprzedniego cyklu nawadniania pęcherzyki powietrza.



Rys. 3.2. Przykładowy przebieg i histereza krzywej retencji

Powszechnie, w celu uproszczenia matematycznego modelowania zjawisk związanych z przepływem wody w gruntach nienasyconych, przyjmuje się jednoznaczłą relację między wilgotnością (względnie  $\theta$ ,  $S_r$ ,  $S_e$  lub  $\Theta$ ) a ssaniem gruntu, podejście takie zostało również przyjęte w niniejszej pracy. Opisanych literaturowo zostało wiele empirycznych wzorów do wyznaczenia krzywej retencji (np. Leong i Rahardjo 1997a, Ossowski i Sikora 2004), z których najczęściej stosowanymi wzorami są (wartości  $\psi$  określone są dodatkowo):

- Gardner 1958 (przycycony za Ossowski i Sikora 2004):

$$\Theta = \frac{1}{[1+a \cdot \psi^b]} \quad (3.13)$$

gdzie:  $a, b$  – parametry

- Brooks-Corey 1964 (Brooks i Corey 1964):

$$\Theta = \left( \frac{\psi_a}{\psi} \right)^\lambda \quad (3.14)$$

przy czym  $\Theta = 1$  dla  $\psi > \psi_a$

gdzie:  $\psi_a$  – ciśnienie wejścia powietrza

$\lambda$  – indeks związany z rozkładem i wielkością porów,

- Van Genuchten 1980 (*Van Genuchten 1980*):

$$\Theta = [1 + (\alpha \cdot h_s)^n]^{-m} \quad (3.15)$$

gdzie:  $\alpha, n, m$  – współczynniki, określane dla badanego gruntu empirycznie

- Mc Kee-Bumb 1984 (*cytowanie za Fredlund i Xing 1994 oraz Vu 2000*):

$$\Theta = \exp\left[-\frac{(\psi - a_2)}{b_2}\right], \quad (3.16)$$

gdzie:  $a_2, b_2$  – parametry

- Fredlund-Xing 1994 (*Fredlund i Xing 1994*):

$$\theta = C(\psi) \cdot \theta_s \cdot \left[ \frac{1}{\ln\left[e + \left(\frac{\psi}{a}\right)^n\right]}\right]^m \quad (3.17)$$

gdzie:  $a, n, m$  – parametry

$$C(\psi) = \frac{-\ln(1 + \psi/\psi_r)}{\ln(1 + 1.000.000/\psi_r)} + 1 \quad \text{– parametr korekcyjny dla dużych wartości}$$

ssania

$\psi_r$  – ssanie matrycowe odpowiadające  $\theta_r$  (patrz. rys. 3.2)

Na przestrzeni czasu toczą się badania nad zakresem stosowalności i dokładności różnych modeli opisu retencji wodnej – wykazano na przykład (*Van Genuchten i Nielsen 1985*), że jeden z wcześniejszych opisów krzywej retencji wg Brooks-Corey'a (*1964*) (3.14) daje dobre przybliżenia wilgotności gruntu dla ssania większego od ciśnienia wejścia powietrza ( $\psi > \psi_a$ ), jednak nie nadaje się do wyznaczania wilgotności dla stanów bliskich pełnej saturacji jak i maksymalnego przesuszenia (*Fredlund i Xing 1994*). Wg Fredlund i Xing (*1994*) podobne właściwości posiada formuła McKee-Bumb (*1984*) (3.16). Przyjmuje się, że bardziej uniwersalne w szerokim zakresie ssania są wzory dające łagodniejszy, S-kształtny przebieg (np. *Van Genuchten 1980*). Warto odnotować, że dla wyżej przytoczonych wzorów (3.13, 3.14, 3.15 i 3.16) wartości zerowego nasycenia osiąmane są dla wartości ssania dążących do nieskończoności. W warunkach rzeczywistych okazuje się natomiast, że wartości zerowego nasycenia osiąmane są dla wartości ssania ok.  $10^6$  kPa (*Fredlund i Xing 1994*). Z tego względu do równań opisujących krzywe retencji wprowadza nieraz się współczynniki korekcyjne, pozwalające na osiągnięcie zerowej saturacji przy granicznych wartościach ssania ok.  $10^6$  kPa.



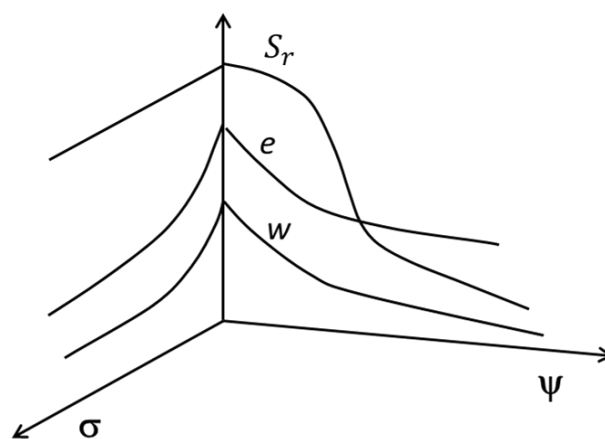
Przykładem może być współczynnik korekcyjny  $C(\psi)$  we wzorze (3.17) (choć wzór ten stosowany jest również w wersji bez współczynnika  $C(\psi)$  – np. *Hung i Fredlund 2002*).

Ponieważ relacja między wilgotnością objętościową gruntu a stopniem saturacji nie jest jednoznaczna i zależy od rodzaju procesu, zależności  $S_r = f(\psi)$  i  $\theta = f(\psi)$  będą miały inny przebieg. Powyżej przytoczone wzory mogą być użyte do opisu obu zależności, choć będą miały inne parametry.

Przebieg krzywych przedstawionych na rys. 3.1 jest zależny od stanu naprężenia w gruncie.

Graficznie można tę zależność przedstawić w postaci tzw. powierzchni konstytutywnych

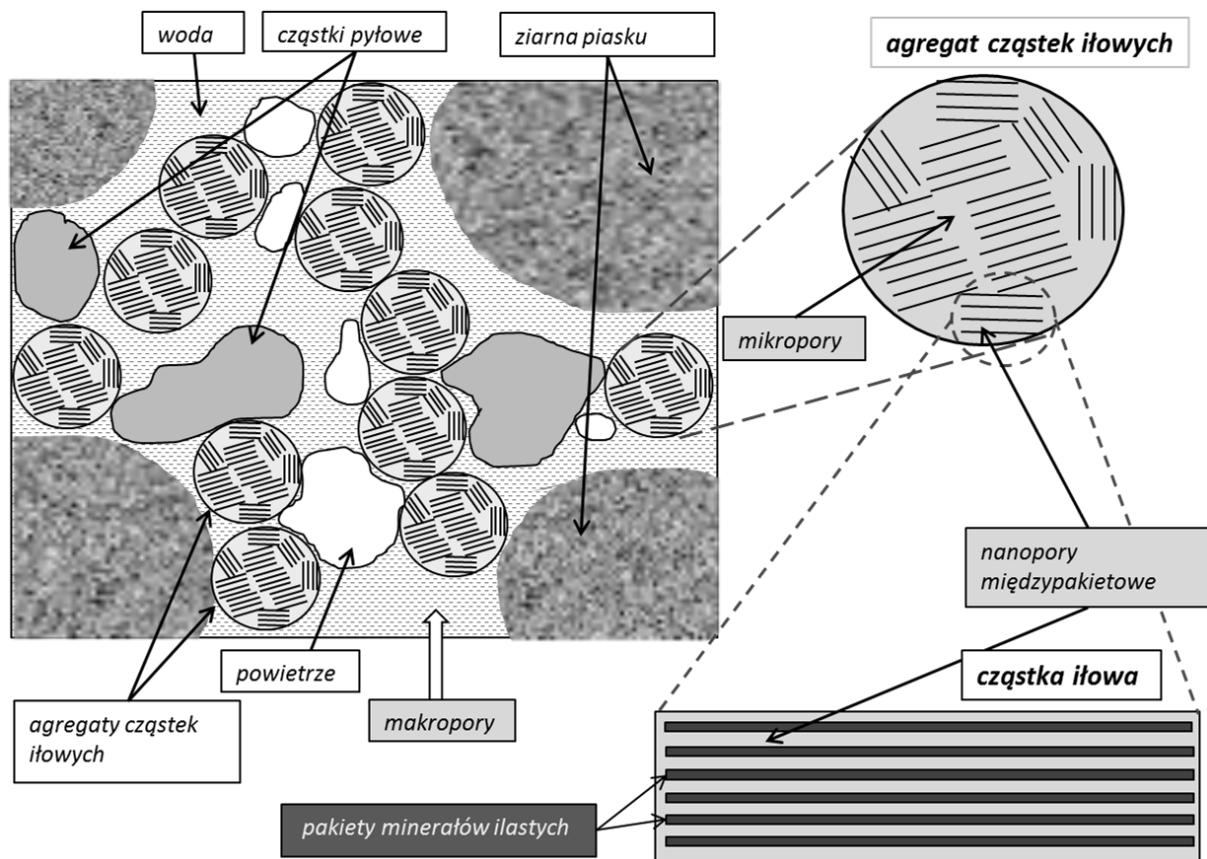
(rys. 3.3 i 4.1). Te trójwymiarowe powierzchnie ilustrują zależność  $e$ ,  $w$ ,  $\theta$  lub  $S_r$  od ssania i naprężenia całkowitego (średniego lub pionowego). Powierzchnie konstytutywne w tej postaci są często używane do opisu zmian objętościowych w gruntach ekspansywnych (*Fredlund i Rahardjo 1993, Vu 2002, Bolzon i Schrefler 1995, Zhang 2004*). Należy jednak zauważyć, że nie mają one jednoznacznego charakteru, a ich kształt może być różny dla różnych ścieżek obciążenia. Przykładowo, krzywe retencji gruntu powszechnie wykazują zjawisko histerezy (rys.3.2), polegające na tym, że w procesie nawadniania tej samej wartości wilgotności odpowiada mniejsza wartość ssania niż w procesie drenażu (osuszania). Z kolei grunty zapadowe charakteryzują się znacznym zmniejszeniem objętości podczas nawadniania przy dużych wartościach naprężenia całkowitego. Zmiany te nie mają charakteru odwracalnego, tzn. osuszanie gruntu nawodnionego pod obciążeniem nie powoduje zwiększenia objętości, lecz jej zmniejszenie (*Sheng i in. 2008*).



Rys. 3.3. Przykładowe powierzchnie konstytutywne dla gruntu ekspansywnego (wg *Zhang 2004*)



Dodatkowym czynnikiem utrudniającym opis deformacji gruntów ekspansywnych jest ich na ogół niejednorodna mikrostruktura, w której można wyróżnić dwie lub trzy grupy porów o różnych rozmiarach, co przedstawiono schematycznie na rys. 3.4. Częstki minerałów ilastych zbudowane są pakietów (lamelli), między którymi może znajdować się woda. W zależności od ilości zaadsorbowanej wody przestrzeń między lamellami zwiększa się lub zmniejsza. Częstki występują w skupiskach, zwanych agregatami, które tworzą podstawowe elementy struktury gruntu, obok ziaren frakcji pyłowej i piaskowej. Małe pory występujące w obrębie agregatów nazywane są mikroporami, zaś większe pory pomiędzy agregatami i ziarnami frakcji grubszych określane są jako makropory. Z uwagi na duże zdolności adsorpcyjne cząstek minerałów ilastych i małe rozmiary mikroporów przyjmuje się, że agregaty pozostają w stanie pełnego nasycenia w dużym zakresie wartości ssania - praktycznie zawsze w warunkach naturalnych (*Fityus i Buzzi 2008, Mašin i Khalili 2015*), natomiast większe makropory podlegają osuszeniu przy stosunkowo małych wartościach ssania. Stąd też krzywa retencji dla takich gruntów ma charakter bimodalny, tzn. wykazuje dwie wyraźnie różne wartości ciśnienia wejścia powietrza, odpowiadające makroporom i mikroporom (np. *Bagherieh i in. 2009, Nowamooz 2014*). Z obecnością makroporów związana jest również faza tzw. skurczu strukturalnego w gruncie ekspansywnym, występująca w początkowym okresie suszenia. W tej fazie skurcz odbywa się równoległe z desaturacją makroporów i zależność wskaźnika porowatości od wilgotności ma charakter nieliniowy (np. *Garbulewski i Żakowicz 2007, Izdebska-Mucha i Wójcik 2013a*). W opisie zjawisk przepływu wody i deformacji zachodzących w gruntach charakteryzujących się hierarchiczną strukturą porów często stosuje się zaawansowane modele matematyczne, tzw. modele podwójnej lub potrójnej porowatości (np. *Szymkiewicz 2004, Alonso i inni 1999,2010*). Modele tego typu nie są przedmiotem niniejszej pracy.



Rys. 3.4. Mikrostruktura gruntu ekspansywnego

### 3.4. Przewodność hydrauliczna gruntów nienasyconych

Kluczowym z punktu widzenia wyznaczenia rozkładu wilgotności oraz ssania w gruntach ekspansywnych jest opis przepływu wody. Podstawową regułą opisującą transport wody w ośrodku gruntowym pozostaje wciąż prawo Darcy (1856), które zastosowanie pierwotnie do opisu przepływu w stanach pełnej saturacji, używane jest również do opisu przepływu w strefie nienasyconej (np. Warrick 2002, Szymkiewicz 2013).

Prawo Darcy wiąże prędkość przepływu wody ze zmianą jej całkowitego potencjału ( $\psi_C$ ) w kierunku przepływu, co w ogólnym przypadku można wyrazić następująco:

$$\vec{v} = -K \cdot \text{grad} \psi_C \quad (3.18)$$

gdzie:  $\vec{v}$  – wektor prędkości Darcy

$K$  – tensorowy współczynnik filtracji (przewodności hydraulicznej).

$\psi_C$  – całkowity potencjał wody gruntowej

W niniejszej pracy przyjęto że grunt jest izotropowy, wówczas składowe prędkości Darcy określa równanie:

$$v_{Di} = -k \frac{\partial(\psi_C)}{\partial i} \quad (3.19)$$

gdzie:  $v_{Di}$  – składowa prędkości Darcy w kierunku  $i$   
 $k$  – skalarny współczynnik filtracji gruntu

Współczynnik filtracji  $k$  dla przepływu w strefie nienasyconej definiuje się jako iloczyn współczynnika filtracji dla stanu pełnej saturacji  $k_s$  i względnego współczynnika filtracji  $k^r$  (np. Zaradny 1990, Szymkiewicz 2013):

$$k = k^r \cdot k_s \quad (3.20)$$

W literaturze opisanych i skatalogowanych zostało wiele propozycji wyznaczenia współczynnika względnej filtracji, które najczęściej wyrażane są w postaci zależności funkcyjnych  $k^r = f(\psi)$ ,  $k^r = f(\theta)$  lub  $k^r = f(S_e)$ . Wśród funkcji tych wyróżnić można (Leong i Rahardjo 1997b, Ossowski i Sikora 2004):

1. równania empiryczne, które często przyjmują formę  $k^r = \Theta^p$ , ( $p$ -stała), np. równania (3.21) i (3.22)
2. modele makroskopowe (tworzone przy założeniu podobieństwa między przepływem laminarnym na poziomie mikroskopowym do przepływu w ośrodku porowatym na poziomie makroskopowym), które w uogólnionej formie przyjmują postać  $k^r = S_e^\delta$ , ( $\delta$  – stała)
3. tworzone w oparciu o modele statystyczne, np. równania 3.23 i 3.24

Poniżej przytoczono kilka przykładów powszechnie stosowanych oraz użytych w niniejszej pracy wzorów:

- Gardner 1958 (przytoczone za Vu 2002 oraz Fredlund i Hung 2001):

$$k^r = \frac{1}{1+a(\psi_m)^n} \quad (3.21)$$

gdzie:  $a, n$  – parametry,  $\psi_m$  wyrażone w jednostkach wysokości (jak w 3.11)

- Fredlund-Xing (1994):

$$k^r = \left[ \frac{1}{\ln[e + (\frac{\psi}{a})^n]} \right]^{m \cdot p} \quad (3.22)$$

gdzie:  $a, n, m, p$  – parametry

- Burdine (1953) i Mualem (1976) (w uogólnionej postaci wg Szymkiewicz 2013):

$$k^r = \Theta^\lambda \left( \frac{\int_0^\Theta h_s^{-\eta} ds}{\int_0^1 h_s^{-\eta} ds} \right)^p \quad (3.23)$$

gdzie:  $\lambda, \eta, p$  – parametry

- Stworzony w oparciu o model Mualema (1976) model Van Genuchten (1980):

$$k^r = \left[ \frac{1}{1+(\alpha \cdot h_s)^n} \right]^{m \cdot 0,5} \left\{ 1 - \left[ \frac{(\alpha \cdot h_s)^n}{1+(\alpha \cdot h_s)^n} \right]^m \right\}^2 \quad (3.24)$$

gdzie:  $\alpha, n, m$  – współczynniki określone dla badanego gruntu empirycznie, przy czym  $m = 1 - \frac{1}{n}$  (również we wzorze 3.15).

Wzory (3.21), (3.22), (3.23), (3.24) opisują zmiany współczynnika filtracji w funkcji nasycenia. Należy jednak zauważyć, że w gruntach nienasyconych podlegających zmianom objętościowym przewodności hydrauliczna zmienia się nie tylko na skutek zmiany nasycenia lecz również na skutek zmian porowatości. W niniejszej pracy wpływ zmian porowatości na wartości przewodności hydraulicznej został pominięty.

### 3.5. Pobór wody przez korzenie drzew – opis procesu

Woda pobierana przez rośliny, jest elementem absolutnie niezbędnym do ich życia i pełni rozmaite funkcje, m. in. (na podstawie Kopcewicz i inni 2005):

- jest rozpuszczalnikiem substancji biologicznie czynnych i stanowi środowisko wielu reakcji chemicznych
- bierze bezpośredni udział w reakcjach chemicznych jako substrat
- jest czynnikiem umożliwiającym szybki wzrost komórek i tkanek
- bierze udział w przemieszczaniu się substancji w organizmie roślinnym

Każdy organizm roślinny, w tym drzewa, pobiera wodę niezbędną do życia z otoczenia w jakim się znajduje. Można wyróżnić dwa sposoby pobierania wody ze środowiska (Kopcewicz i inni 2005):

- a. pobiera ją cały organizm (np. plechowce)
- b. pobierają ją wyspecjalizowane organy (np. korzenie roślin wyższych)

Drzewa, będące wyższymi organizmami roślinnymi pobierają niezbędną im wodę za pomocą rozbudowanych systemów korzeniowych.

Dzięki obecności najdrobniejszych wypustek korzeniowych (tzw. korzeni włosnikowych lub żywicielskich - np. *Suchocka 2011, Nosalewicz 2013*), biorących największy udział w procesie pobierania wody, powierzchnia systemu korzeniowego jest wielokrotnie większa od powierzchni części nadziemnej. Włosniki, wnikając między cząstki gleby, zapewniają bezpośredni kontakt korzenia z wodą absorbowaną z powierzchni tych cząstek lub z roztworem wody w kapilarach gleby (*Kopcewicz i inni 2005*).

Pobór wody przez rośliny związany jest ze zjawiskiem przepływu wody z gruntu do atmosfery. Przepływ ten może odbywać się bezpośrednio z powierzchni gruntu poprzez parowanie – tzw. ewaporację, lub za pośrednictwem roślin (patrz rys. 3.5) poprzez transpirację w układzie grunt – roślina – atmosfera (tzw. układ SPAC: soil – plant – atmosphere continuum) (*Philip 1966 – cytowanie za Dunin i Passioura 2006, Ranatunga 2012 oraz Nosalewicz 2013*). Zarówno zjawiska ewaporacji jak i transpiracji odbywają się pod wpływem zmian potencjału wody i zachodzić mogą tylko wtedy, gdy potencjał wody na powierzchni gruntu (w przypadku ewaporacji) lub na powierzchni części zielonych roślin (w przypadku transpiracji) jest większy od potencjału wody zawartej w powietrzu atmosferycznym ( $\psi_{atm}$ ), określonym równaniem Kelvina (np. *Szymkiewicz i inni 2014, Nelson i inni 2015*):

$$\psi_{atm} = \frac{RT}{V} \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) \quad (3.25)$$

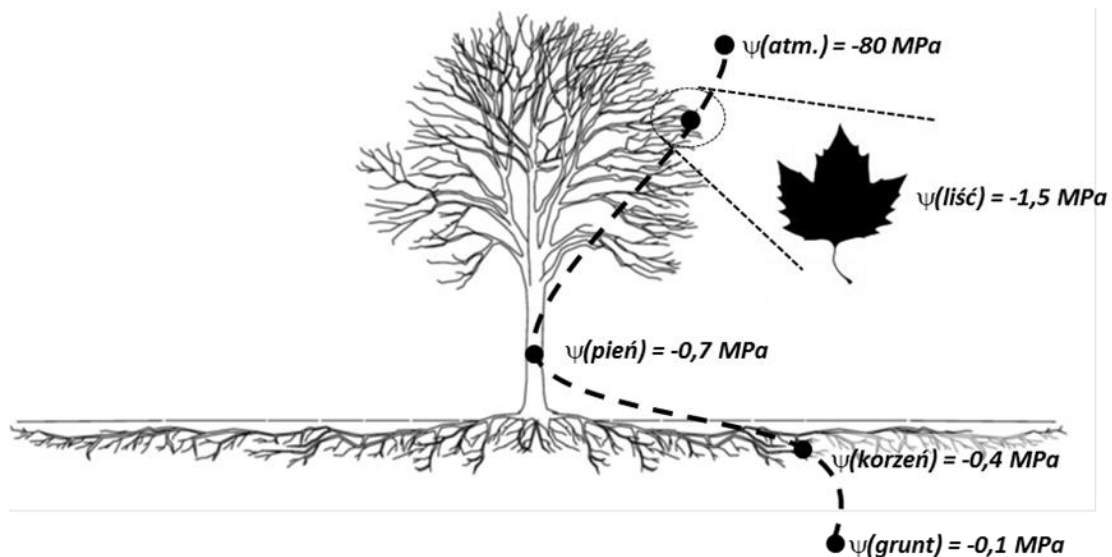
gdzie:  $R$ - uniwersalna stała gazowa -  $8,314 \frac{J}{mol \cdot K}$

$T$  – temperatura [K]

$V$  – molowa objętość wody -  $0,018 \frac{dm^3}{mol}$

$\frac{P}{P_0}$  - wilgotność względna powietrza

Oceny zdolności poboru wody z ośrodka gruntowego przez korzenie dokonać można poprzez porównanie potencjału wody w komórkach korzeniowych ( $\psi_{korzenia}$ ) z potencjałem ssania gruntu  $\psi$  (patrz rys.3.5). Pobieranie wody zachodzi tylko wtedy, gdy potencjał wody w komórkach korzeni jest niższy od potencjału ssania gruntu.



Rys. 3.5. Schemat przepływu wody w układzie SPAC pod wpływem różnicy potencjałów (rysunek drzewa zapożyczono z artykułu Suchocka 2011, przykładowe wartości potencjału wody za Solomon i inni 1996)

### 3.6. Pobór wody w warunkach ograniczonego nasycenia

Jak wskazano wcześniej, ważnym czynnikiem decydującym o zdolności do absorpcji wody przez korzeń rośliny jest potencjał ssania gruntu  $\psi$ .

Przy relatywnie dużych wartościach nasycenia ośrodka gruntowego ( $pF$  w zakresie ok. 1,7..3) pobieranie wody przez korzenie zachodzi łatwo - zmiany ssania gruntu wywołane różnicami nasycenia są kompensowane poprzez zmiany potencjału wody w komórkach korzeniowych ( $\psi_{korzenia}$ ), dzięki czemu roślina zachowuje pełną zdolność ssącą wobec wody (stan taki określa się mianem tzw. nieograniczonej dostępności wody gruntowej).

Przy przekroczeniu wartości granicznej, nazywanej tzw. punktem chwilowego wędnięcia, następuje stopniowy spadek zdolności poboru wody z ośrodka gruntowego. Zawartość wody w gruncie, przy którym następuje trwałe wędnięcie, określa się mianem tzw. punktu trwałego wędnięcia (PWP - ang. *permanent wilting point*). Punkt trwałego wędnięcia dla różnych typów roślin zawiera się w przedziale od -1MPa do -4MPa ( $pF$  od 4 do 4,6), jednak na ogół przyjmuje się ok. -1,5 MPa ( $pF = 4,2$ ) (Kowalik 2010).

Jeżeli określimy pobór wody przez korzenie jako objętościowy pobór wody  $S$  przypadający na jednostkową objętość gruntu zajmowanego przez strefę korzeniową, to zjawisko zmienności poboru wody przez korzenie w zależności od wartości ssania matrycowego gruntu opisać można matematycznie wprowadzając wskaźnik  $\alpha(\theta)$  lub  $\alpha(h_s)$ , jako

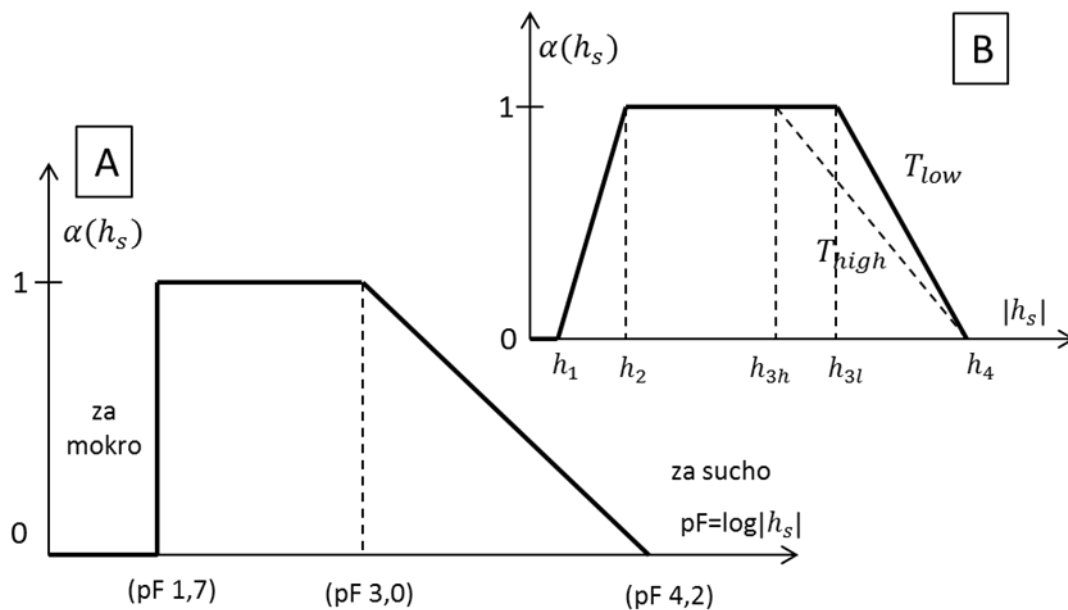
$$\alpha(h_s) = \frac{S_{aktualne}}{S_{maksymalne}} \quad (3.26)$$

Wartości parametru  $\alpha$  opisuje np. model Van Genuchten'a 1987 (cytownie i opis za Vrugt 2001b oraz Dohnal i inni 2006 i Skaggs i inni 2006):

$$\alpha(h_s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{h_s}{h_{50}}\right)^p} \quad (3.27)$$

gdzie:  $h_{50}$  – wartość ssania dla której pobór wody jest zredukowany do 50%,  $p$ -parametr

Innymi powszechnie stosowanymi modelami określającym zjawisko zmienności poboru wody przez drzewa w funkcji ssania gruntu są również propozycje wg Kowalika (Kowalik 1973b - cytowanie za Kowalik 2010) oraz Feddes'a (Feddes i inni 1978 – cytowanie za Feddes i inni 2001 i Kowalik 2010), wg których zmiany wartości parametru  $\alpha(h_s)$  przedstawiają rys. 3.6 a,b oraz opis poniżej:



Rys. 3.6. Funkcja  $\alpha(h_s)$ : A. wg Kowalik (1973b) (za Kowalik 2010),  
B. wg Feddes, Kowalik i Zaradny (1978) (za artykułem Feddes i inni 2001)

Jak wynika z wykresu 3.6a, maksymalne wartości poboru wody osiągnane są dla zakresu ssania między  $pF=1,7$  ( $h_s = -50$  cm) a  $pF=3$  ( $h_s = -1000$  cm). W zakresie od  $pF=0$  do  $pF=1,7$  zdolność poboru wody narasta skokowo co można wytłumaczyć faktem, iż dla prawidłowego funkcjonowania korzenie roślin potrzebują tlenu, którego ilość może być niewystarczająca w

sytuacji zbyt dużego nawodnienia. Grunt zbyt nawodniony (w którym panuje deficyt koniecznego dla prawidłowej wegetacji roślinnej tlenu) nosi miano anaerobowego (Kowalik 2010). Dla zakresu pF od 3 do ok.4,2 zachodzi liniowy spadek poboru wody.

Wg propozycji Feddes'a (rys. 3.6b) między punktem anaerobicznym ( $h_1$ ) a punktem maksymalnej dostępności wody ( $h_2$ ) zdolność poboru wody narasta liniowo, natomiast punkt chwilowego wędnięcia ( $h_{3h}, h_{3l}$ ) uzależniony jest od potencjalnej transpiracji.

### 3.7. Mikro i makroskopowe modelowanie poboru wody

Jedną z pierwszych prób matematycznego opisu poboru wody przed korzeń podjął Gardner (Gardner 1960 - cytowanie za Vrugt i inni 2001a), który rozpatrywał pojedynczy korzeń jako nieskończenie długi walec o niezmiennym przekroju i własnościach absorpcyjnych wobec wody, wokół którego wyznaczany był rozkład wartości ssania matrycowego dla ustalonych warunków dopływu radialnego i przy zadanych wartościach poboru wody (Vrugt i inni 2001a). Podejście to, ze względu na skalę przeprowadzanej analizy, nazywane jest mikroskopowym (m.in. Vrugt i inni 2001a, Levin i inni 2007, Gatmiri i Najari 2010). Koncepcja mikroskopowej analizy poboru wody przez korzeń rozwijana była również w innych opracowaniach (np. Gardner i Ehlig 1962 Molz i Remson 1970; Hillel 1975 – cytowania za Vrugt i inni 2001a oraz Levin i inni 2007)

Ponieważ wyznaczanie wielkości poboru wody z użyciem skali mikroskopowej jest zadaniem niezwykle trudnym i czasochłonnym ze względu na skomplikowanie występujących w przyrodzie systemów korzeniowych (np. Volpe i in. 2013), do zastosowań praktycznych opracowanych zostało później wiele model w skali tzw. makroskopowej.

Podejście makroskopowe polega na wyznaczeniu chwilowych wartości poboru wody przez roślinę w danym punkcie przestrzeni gruntu zajmowanej przez jej system korzeniowy, przy założeniu, że w obrębie zajmowanej objętości system korzeniowy jest ośrodkiem ciągłym (np. Feddes i inni 2001, Gatmiri i Najari 2010). Prowadzi to do określenia funkcji  $S(x, y, z, t)$ , która wyraża objętościowy pobór wody przez korzeń przypadający na jednostkową objętość gruntu i w jednostkowym czasie:

$$S(x, y, z, t) \left[ \frac{L^3}{L^3 \cdot T} \right] \quad (3.28)$$

gdzie:  $L$  – jednostka wymiaru długości

$T$  – jednostka wymiaru czasu



Wyznaczenia funkcji poboru  $S(x, y, z, t)$  dokonuje się najczęściej poprzez określenie kształtu i rozmiarów strefy korzeniowej oraz wyznaczenie w obrębie tej strefy bezwymiarowej funkcji  $\beta$  określającej przestrzenny rozkład gęstości poboru wody. Niektórzy badacze przyjmują, że funkcję  $\beta$  definiuje gęstość strefy korzeniowej w danym punkcie przestrzeni gruntu (np. Indraratna i inni 2006, Gatmiri i Najari 2010). Następnie określa się funkcję poboru w warunkach nieograniczonej dostępności wody  $S_m(x, y, z, t)$  z uwzględnieniem przestrzennego rozkładu wartości funkcji  $\beta$ :

$$S_m(x, y, z, t) = \frac{\beta(x,y,z)}{\iiint_V \beta(x,y,z)} \cdot T_p^* \quad (3.29)$$

gdzie:  $S_m(x, y, z, t)$  – maksymalny pobór wody przypadający na jednostkową objętość strefy korzeniowej w warunkach nieograniczonej dostępności wody  
 $\beta(x, y, z)$  – bezwymiarowa funkcja określająca przestrzenny rozkład poboru wody w strefie korzeniowej  
 $V [L^3]$  – objętość strefy korzeniowej  
 $T_p^* [\frac{L^3}{T}]$  – transpiracja potencjalna – całkowity pobór wody przez roślinę w warunkach nieograniczonej dostępności wody gruntowej  
 $L, T$  – jednostki wymiaru (odp.) długości i czasu

Funkcję  $S(x, y, z, t)$  wyznacza się wprowadzając współczynnik uwzględniający zdolność do poboru w warunkach ograniczonej dostępności (3.26), wówczas:

$$S(x, y, z, t) = \alpha(h_s) \cdot S_m(x, y, z, t) = \alpha(h_s) \cdot \frac{\beta(x,y,z)}{\iiint_V \beta(x,y,z)dv} \cdot T_p^* \quad (3.30)$$

Równanie (3.30) odnosi się do funkcji poboru określonej w postaci ogólnej, tj. dla modelu trójwymiarowego opisanego w kartezjańskim układzie odniesienia, lecz w analogiczny sposób określić można funkcję  $S$  dla przypadku jedno lub dwuwymiarowego przepływu, bądź w odniesieniu do współrzędnych biegunowych.

Makroskopowe określenie funkcji poboru wody przez system korzeniowy rośliny ( $S$ ) pozwala na wykorzystanie jej dla rozwiązania równania przepływu wody w strefie aeracji gruntu (np. równania Richardsa), w którym pełni ona rolę tzw. funkcji źródłowej (np. Li i inni 1999, Feddes i inni 2001, Green i inni 2003, Skaggs i inni 2006, Ali i Rees 2009, Kowalik 2010, Volpe i inni 2013).



### 3.8. Kształt strefy korzeniowej i funkcja gęstości poboru wody

Dla wyznaczenia objętościowego poboru wody przez system korzeniowy ( $S$ ) w ujęciu makroskopowym w formie przedstawionej równaniem (3.30), niezbędne jest określenie kształtu i objętości strefy korzeniowej oraz zdefiniowanie w jej wnętrzu funkcji przestrzennego rozkład gęstości poboru wody  $\beta$ .

Dotychczas opisanych zostało wiele propozycji określających kształt oraz przestrzenny rozkład gęstości poboru w obrębie strefy korzeniowej - obejmują one modele o różnym stopniu złożoności, które ze względu na rodzaj analizowanego przepływu podzielić można na:

- jednowymiarowe
- dwuwymiarowe
- trójwymiarowe

Poniżej przytoczono przykłady modeli powszechnie wykorzystywanych w matematycznym modelowaniu poboru wody:

#### A. Modele jednowymiarowe:

- Feddes , Kowalik i Zaradny 1978 (*model przytoczony za Gatmiri i Najari 2010*):  
Jednowymiarowy model zakładający stałą gęstość korzeni dla całego zakresu głębokości ich występowania, tj.:

$$\beta(z) = const. \quad (3.31)$$

gdzie:  $z$ -głębokość poniżej poziomu terenu

- Raats 1974 (*model przytoczony za Vrugt 2001b*):

$$\beta(z) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{z}{\lambda}} \quad (3.32)$$

gdzie:  $z$ -głębokość poniżej poziomu terenu,  $\lambda$  - parametr określający głębokość na której sumaryczny pobór w strefie korzeniowej wynosi 63%

#### B. Modele dwuwymiarowe:

- Vrugt 2001 (*Vrugt i inni 2001b*):

Model o współrzędnych biegunowych:

$$\beta(r, z) = \left[1 - \frac{z}{z_m}\right] \cdot \left[1 - \frac{r}{R_m}\right] e^{-\left\{\left(\frac{p_z}{z_m}\right) \cdot |z^* - z| + \left(\frac{p_r}{R_m}\right) \cdot |r^* - r|\right\}} \quad (3.33)$$

gdzie:  $(r, z)$  – współrzędne punktu w obrębie strefy korzeniowej na głębokości  $z$  i w odległości  $r$  od pnia drzewa.

$z_m$  – maksymalna głębokość strefy korzeniowej

$R_m$  - maksymalny poziomy zasięg występowania strefy korzeniowej

$z^*, r^*, p_z, p_r$  – parametry

- Gatmiri i Najari 2010 (*Gatmiri i Najari 2010*):

Model o współrzędnych biegunowych:

$$\beta(r, z) = \left[1 - \left(\frac{z}{z_m}\right)^\xi - \left(\frac{r}{r_m}\right)^\xi\right] e^{-k_z|z-z_0| - k_r|r-r_0|} \quad (3.34)$$

gdzie:  $(r, z)$  – współrzędne punktu w obrębie strefy korzeniowej na głębokości  $z$  i w odległości  $r$  od pnia drzewa.

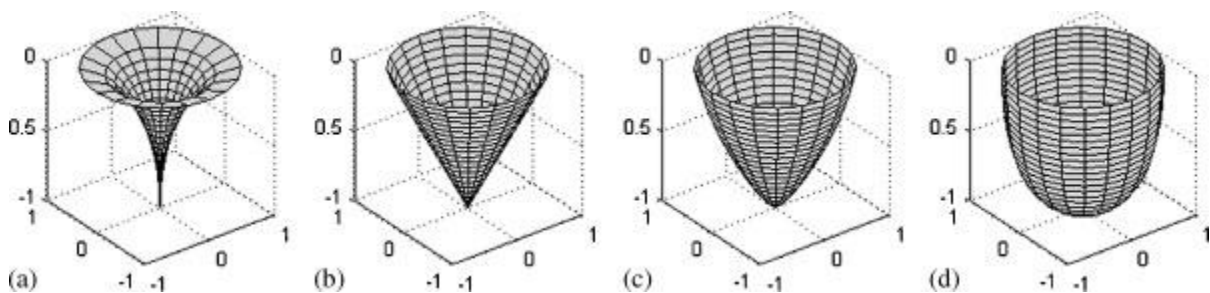
$z_m$  – maksymalna głębokość strefy korzeniowej

$R_m(z)$  - maksymalny poziomy zasięg występowania strefy korzeniowej

$z, z_0, r, r_0$  – parametry

Model zakłada stożkowy kształt strefy korzeniowej określony relacją:

$$\left(\frac{z}{z_{max}}\right)^\xi + \left(\frac{r}{R_{max}}\right)^\xi = 1 \quad (3.35)$$



Rys. 3.7. Różne kształty strefy korzeniowej wg modelu Gatmiri i Najari (2010) (a)  $\xi=0,6$ ; (b)  $\xi=1$ ; (c)  $\xi=2$ ; (d)  $\xi=5$  (za artykułem Gatmiri i Najari 2010)

Wzory analogiczne do powyższych można również zastosować dla opisu poboru wody przez szpaler drzew w dwuwymiarowym układzie kartezjańskim X-Z.

### C. Modele trójwymiarowe:

- Vrugt 2001 (*Vrugt i inni 2001b*):

$$\beta(x, y, z) = \left[1 - \frac{x}{x_m}\right] \cdot \left[1 - \frac{y}{y_m}\right] \cdot \left[1 - \frac{z}{z_m}\right] \cdot e^{-\left\{\left(\frac{p_x}{x_m}\right) \cdot |x^* - x| + \left(\frac{p_y}{y_m}\right) \cdot |y^* - y| + \left(\frac{p_z}{z_m}\right) \cdot |z^* - z|\right\}} \quad (3.36)$$

gdzie:  $(x, y, z)$  – współrzędne punktu w obrębie strefy korzeniowej – oś głębokości  $z$  wzdłuż pionowej osi symetrii korzenia

$Z_m$  – maksymalna głębokość strefy korzeniowej

$X_m Y_m$  – maksymalny poziomy zasięg występowania strefy korzeniowej

$x^*, y^*, z^*, p_x, p_y, p_z$  – parametry

Model zakłada cylindryczny kształt strefy korzeniowej

### 3.9. Zasięg strefy korzeniowej oraz dobowy pobór wody przez drzewa

Pionowy zasięg występowania korzeni drzew ogranicza się na ogół do ok 1-2m.

Wg Suchockiej (2011) z reguły jest to przypowierzchniowa warstwa gruntu do ok. 70-90 cm głębokości, choć zależy to od rodzaju gruntu, poziomu zwierciadła wody gruntowej oraz od gatunku drzewa i w niektórych przypadkach korzenie drzew wytwarzające system palowy mogą sięgać głębokości poniżej 1,5m. Wg Crow (2005) korzenie drzew rzadko kiedy osiągają głębokość większą niż 2m, przy czym 80–90 % korzeni drzew zalega na głębokości do 60 cm. Choć z reguły głębokości zalegania korzeni drzew nie przekraczają 2m, to zdarzają się przypadki dużo głębszego ich występowania – nawet do 6 m i więcej (*np. Biddle 1983 – cytowanie za Morsi 2010, Stone i Kalisz 1991, Jeż 1995*). Należy również brać pod uwagę dużą zdolność do adaptacji w zależności od położenia zwierciadła wody gruntowej, obecności substancji odżywczych oraz zasolenia (*np. Feddes i inni 2001*).

Zasięg poziomy strefy korzeniowej, w przypadku braku ograniczeń, może znacznie wykraczać poza obrys korony drzewa. Stone i Kalisz (1991), którzy opracowali zestawienie wyników badań maksymalnych zasięgów pionowych i poziomych strefy korzeniowej dla 211 gatunków drzew, przywołują pracę Büsgen i Münch (1929), wg której, w przypadku europejskich gatunków drzew, nierzadko natrafiano na korzenie w odległości nawet 20 metrów od krawędzi lasu. Z reguły przyjmuje się, że poziomy zasięg korzeni wynosi ok. 1-1.5 wysokości drzewa (*Day i inni 2010*) lub 2-3 krotną wielkość obrysu korony (*Day i inni 2010, Suchocka 2011*).

Dobowy pobór wody przez drzewa zależy od wielu czynników (gatunek, rodzaj gruntu, położenie zwierciadła wody gruntowej, warunki klimatyczne, pora roku etc.) i jest trudny do oszacowania (np. Lawson i O'Callaghan 1995, Morsi 2010). Opisane literaturowo metody wyznaczenia dobowego poboru przez pojedyncze drzewo oparte na bilansie ewaporacji i ewapotranspiracji (np. Gatmiri i Najari 2010, Vrugt i inni 2001a,b, Indraratna i inni 2006) choć dają pewne przybliżenie, to nie zawsze są dostatecznie dokładne (np. Morsi 2010) – związane może to być ze zdolnością pobierania wody z obszarów znaczenie przekraczających obrys korony drzewa. Zaobserwowano również zjawisko tzw. „podnoszenia hydraulicznego” (np. Feddes i inni 2001, Prieto i inni 2012) polegającego na zdolności korzeni drzew do poboru wody z głębszych, bardziej wilgotnych warstw gruntu (np. bliskich zwierciadła wody gruntowej) i transportowania jej do warstw płytszych w okresie nocnym dla późniejszego wykorzystania w trakcie dziennej transpiracji. Z uwagi na powyższe, na przestrzeni lat prowadzi się pomiary empiryczne poboru wody przez drzewa. Wullschlegler i inni (1998) podają zestawienie wyników badań empirycznych dla 67 różnych gatunków drzew, prowadzonych w różnych częściach świata od lat 70-tych, z których wynika, że w 90 % przypadków dobowy pobór wody przez pojedyncze drzewo o wysokości ok. 21 metrów zawiera się w przedziale od 0,01 do 0,2 m<sup>3</sup>/db – choć w tym samym artykule przytacza przykład drzewa (*Euperua purpurea*) z lasów deszczowych Amazonii, dla którego pobór wynosił 1,18 m<sup>3</sup>/db.

W matematycznym modelowaniu wpływu drzew na nasycenie gruntu często przyjmuje się uśrednione wartości dobowego poboru. Perpich (Perpich 1965 - cytowanie za Fredlund i Hung 2001, Vu 2002, Morsi 2010) sugeruje, aby przyjmować dobowe zapotrzebowanie pojedynczego drzewa w zakresie 0,25-0,5 m<sup>3</sup>/db.



## 4. Matematyczny opis deformacji w gruncie ekspansywnym

Przedstawiony poniżej opis został zaczerpnięty z artykułu Michalski i Szymkiewicz (2016).

W literaturze zaproponowano wiele metod obliczeniowych umożliwiających oszacowanie zmian objętościowych gruntów ekspansywnych w powiązaniu ze zmianami ich wilgotności (zestawienia można znaleźć m.in. w pracach Grabowska-Olszewska i in 1998, Morsi 2010, Vanapalli i Lu 2012, Fredlund i in. 2012, Adem 2015, Adem i Vanapalli 2015). Metody te można ogólnie podzielić na następujące trzy grupy, według malejącego stopnia złożoności:

1. Pierwsza grupa metod opiera się na wykorzystaniu modeli konstytutywnych, określających związki między naprężeniami i odkształceniami w gruntach ekspansywnych, w połączeniu z równaniami opisującymi równowagę naprężeń i przepływ wody w ośrodku gruntowym. W najbardziej ogólnym przypadku metody te umożliwiają wyznaczenie trójwymiarowego pola naprężeń i odkształceń w gruncie, zmieniającego się w czasie na skutek czynników takich jak infiltracja opadów, parowanie, pobór wody przez korzenie drzew, obciążenie fundamentem itd. Modele z tej grupy można dalej podzielić według następujących kryteriów:

- z uwagi na zakładane mechaniczne właściwości gruntu - na modele sprężyste lub sprężysto-plastyczne;
- z uwagi na liczbę i charakter zmiennych opisujących stan naprężenia - na modele wykorzystujące pojedynczą zmienną stanu naprężenia (naprężenie efektywne) oraz modele oparte o dwie (lub więcej) zmienne stanu naprężenia (np. naprężenie całkowite netto i ssanie matrycowe);
- z uwagi na stopień uwzględnienia mikrostruktury gruntu - na modele nie uwzględniające mikrostruktury oraz modele uwzględniające mikrostrukturę (występowanie agregatów cząstek ilastych i związany z tym podział porów na mikro- i makropory).

2. Drugą grupę tworzą metody analityczne, w których przyjmuje się szereg założeń upraszczających, tak że możliwe jest obliczenie odkształceń gruntu bez konieczności rozwiązywania numerycznego równań równowagi. Często przyjmuje się założenia jednoosiowych odkształceń (tylko w kierunku pionowym), niezmienności naprężeń

całkowitych w gruncie lub zerowej wartości ciśnienia ssania na końcu procesu pęcznienia.

Metody w tej grupie można dalej podzielić na trzy kategorie:

- metody oparte o wyniki edometrycznych badań ciśnienia pęcznienia i wskaźnika pęcznienia,
- metody wykorzystujące wartości ciśnienia ssania,
- metody wykorzystujące wartości wilgotności.

3. Do grupy trzeciej można zaliczyć metody empiryczne, które mają postać zależności funkcyjnych między wskaźnikiem pęcznienia a podstawowymi parametrami geotechnicznymi, takimi jak np. granica płynności, zawartość frakcji iltowej, wskaźnik plastyczności, wilgotność naturalna. Zostały one opracowane przede wszystkim w celu oszacowania przemieszczeń pionowych wywołanych pęcznieniem gruntu. Występujące w nich współczynniki nie mają na ogół sensu fizycznego, a wynikają z korelacji statystycznych. Metody te zwykle dają miarodajne wyniki tylko dla zakresu gruntów dla których zostały opracowane, nie pozwalają również na uwzględnienie różnorodności czynników wywołujących pęcznienie i skurcz gruntu.

#### 4.1. Parametry opisujące pęcznienie i skurcz gruntów ekspansywnych

Podstawowymi parametrami używanymi do opisu zmian objętościowych gruntów ekspansywnych w praktyce inżynierskiej są ciśnienie pęcznienia, wskaźnik pęcznienia i wskaźnik skurczalności (np. *Przystański 1991, Grabowska-Olszewska i Kaczyński 1994*). Ciśnienie pęcznienia jest to ciśnienie jakie wywiera próbka gruntu na otoczenie, na skutek jej nawadniania w warunkach ograniczonej możliwości pęcznienia. W zależności od początkowej wilgotności próbki i warunków badania wyróżnia się m.in. (np. *Przystański 1991, Nelson i in. 2015*):

- ciśnienie pęcznienia gruntu o naturalnej wilgotności, wyznaczone w warunkach zachowania stałej objętości próbki,  $\sigma_{CV}$  (ang. *constant volume test*);
- ekwiwalentne ciśnienie pęcznienia, odpowiadające naprężeniu, które musi być przyłożone do próbki po jej spęcznieniu, aby uzyskać początkową objętość,  $\sigma_{CS}$  (ang. *consolidation-swell test*);
- maksymalne ciśnienie pęcznienia, mierzone dla próbki przesuszonej do stanu zwartego;



- względne ciśnienie pęcznienia, odpowiadające ciśnieniu potrzebnemu do zachowania określonej wartości wskaźnika względnego pęcznienia lub gęstości objętościowej szkieletu;

Ciśnienie pęcznienia można powiązać z naprężeniem efektywnym występującym w gruncie, co zostanie szerzej omówione w dalszej części pracy.

Wskaźnik pęcznienia  $\varepsilon_p^V$  definiowany jest jako względny przyrost objętości (lub wysokości w badaniach edometrycznych) próbki poddanej nawilgotnieniu (Przystański 1991, Al-Shamrani i Dhowian 2003):

$$\varepsilon_p^V = \frac{V-V_0}{V_0} \quad \varepsilon_p^H = \frac{h-h_0}{h} \quad (4.1 \text{ a,b})$$

gdzie:  $V$ ,  $h$  - objętość lub wysokość próbki po spęcznieniu,  $V_0$ ,  $h_0$  - początkowa objętość lub wysokość próbki. W zależności od początkowej wilgotności próbki i obciążenia wyróżnia się m. in. (Przystański 1991):

- wskaźnik swobodnego pęcznienia, mierzony dla próbki o naturalnej wilgotności w warunkach braku obciążenia (lub z niewielkim, nominalnym obciążeniem)
- wskaźnik maksymalnego pęcznienia, mierzony dla próbki przesuszonej do stanu zwartego
- względny wskaźnik pęcznienia, mierzony dla próbki o naturalnej wilgotności pod określonym obciążeniem, odpowiadającym prognozowanym warunkom *in situ*

Wskaźnik skurczalności określa względne zmniejszenie objętości próbki spowodowanej skurczem na skutek przesychania. Może być on odniesiony do początkowej ( $V_0$ ) lub końcowej ( $V_s$ ) objętości próbki (Przystański 1991, McKean 1985):

$$\varepsilon_s^V = \frac{V_0-V_s}{V_0} \quad \text{lub} \quad \varepsilon_s^V = \frac{V_0-V_s}{V_s} \quad (4.2 \text{ a,b})$$

Wskaźnik skurczalności można określić metodą bryłową (test CLOD), opisaną m.in. w pracy Garbulewski (2000). Należy zauważyć, że w literaturze określenie wskaźnik skurczalności odnosi się również do innej wielkości, którą jest różnica między wilgotnościami odpowiadającymi granicom plastyczności i skurczalności danego gruntu - SI (ang. *shrinkage index*)  $SI = w_p - w_s$  (Garbulewski 2000). Innym parametrem charakteryzującym skurcz gruntu jest wskaźnik COLE (ang. *coefficient of linear extensibility*) określający odkształcenie liniowe zachodzące podczas przesuszania próbki w unormowanym zakresie ssania (od



wartości 33 kPa do wartości końcowej 1000 MPa odpowiadającej gruntowi wysuszonemu w suszarce):

$$COLE = \frac{L_0 - L_s}{L_s} = \left( \frac{\rho_{ds}}{\rho_{d0}} \right)^{0.33} - 1 \quad (4.3)$$

gdzie  $L$  - wymiar liniowy próbki,  $\rho_d$  - gęstość objętościowa szkieletu gruntowego, indeks „0” odnosi się do ssania 33 kPa, a indeks „S” do ssania 1000 MPa. Stosunek wskaźnika  $COLE$  do wskaźnika skurczalności objętościowej wyznaczonego ze wzoru (4.2b) wynosi ok. 0,33 (McKeen 1985) i jest nazywany współczynnikiem ograniczenia bocznego  $f$  (ang. *lateral restraint factor*). Współczynnik ten ma istotne znaczenie przy obliczaniu pionowych odkształceń gruntu ekspansywnego, przy czym w warunkach rzeczywistych może przyjmować wartości z zakresu od 0,33 do 1,0 (McKeen i Nielsen 1978), w zależności od struktury gruntu i rozpatrywanego procesu (skurcz lub pęcznienie, Nelson i in. 2015). W procesie pęcznienia (McKeen i Nielsen 1978)  $f=0.5$  dla łąw spękanymi i 0.8 dla łąw masywnymi, w warunkach pełnego ograniczenia bocznego  $f=1,0$ .

#### 4.2. Związki naprężenie-odkształcenie

Pełny opis odkształceń mechanicznych zachodzących w gruntach nienasyconych (szczególnie tych o charakterze ekspansywnym) wymaga użycia zaawansowanych modeli konstytutywnych, określających związki między tensorami naprężenia i odkształcenia w ramach teorii sprężysto-plastycznej (np. Leong i inni 2003). Sprężysto-plastyczne modele dla gruntów nienasyconych zaproponowano m.in. w pracach Alonso i in. (1990), Kohgo i in. (1993), Sheng i in. (2008). Równolegle jednak stosowane są prostsze modele, zakładające sprężyste zachowanie się ośrodka gruntowego (m.in. Fredlund i Rahardjo 1993, Zhang 2004). Zarówno modele sprężysto-plastyczne, jak i sprężyste można podzielić na dwie grupy, z uwagi na wybór zmiennych charakteryzujących stan naprężenia. Do pierwszej grupy należą modele wykorzystujące jedną zmienną, określaną jako naprężenie efektywne. Jest to rozszerzenie klasycznej koncepcji naprężenia efektywnego wg Terzagiego, powszechnie stosowanej do opisu zachowania gruntów nasyconych. Naprężenie efektywne w gruntach nienasyconych najczęściej definiowane jest według propozycji Bishopa (1959):

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \chi u_w \delta_{ij} - (1 - \chi) u_a \delta_{ij} = \sigma_{ij} - u_a \delta_{ij} + \chi (u_a - u_w) \delta_{ij} \quad (4.4)$$

gdzie:  $\sigma_{ij}, \sigma'_{ij}$  - odpowiednio składowe tensorów naprężeń całkowitych i efektywnych,  $\delta_{ij}$  - delta Kroneckera,  $u_w, u_a$  - odpowiednio ciśnienie wody i powietrza w porach,  $\chi$  - parametr wagowy przyjmujący wartości z przedziału 0..1. Parametr  $\chi$  często wyrażany jest jako funkcja stopnia wilgotności lub ssania macierzowego (np. Nuth i Laloui 2008). Przykładem mogą być wzory (4.5a) i (4.5b) zaczerpnięte odpowiednio z prac (Alonso i in. 2010) oraz (Khalili i Khabbaz 1998 - cyt. za Nuth i Laloui 2008):

$$\chi = (S_r)^\alpha \text{ lub } \chi = \begin{cases} \left(\frac{\psi_a}{\psi_m}\right)^{0,55} & \text{dla } \psi_m > \psi_a \\ 1 & \text{dla } \psi_m \leq \psi_a \end{cases} \quad (4.5 \text{ a,b})$$

gdzie:  $\alpha \geq 1$  - parametr materiałowy,  $\psi_a$  - ciśnienie wejścia powietrza.

W nowszych modelach opartych na koncepcji naprężenia efektywnego bierze się pod uwagę wpływ mikrostruktury ośrodka, uwzględniając osobno wartości ssania i stopnia nasycenia w mikro- i makroporach (np. Bagherieh i inni 2009, Alonso i in. 2010, Nowamooz 2014). W przypadku gruntów ekspansywnych naprężenie efektywne identyfikowane jest z ciśnieniem pęcznienia mierzonym dla próbki gruntu w warunkach stałej objętości (Wesley 2010). Zakłada się, że w czasie tego badania naprężenie efektywne pozostaje stałe, gdyż nie dochodzi do odkształcenia objętościowego. Redukcja wartości ssania do zera na skutek swobodnego dopływu wody jest równoważona przez zwiększenie obciążenia próbki (naprężenia całkowitego). Szereg autorów (np. Agus i in. 2013) wskazuje, że wartości ciśnienia pęcznienia zmierzonego w gruncie ekspansywnym są mniejsze od wartości ssania ( $\chi < 1$ ), aczkolwiek przedstawiono też wyniki badań zaprzeczające tej tezie (Garbulewski i Żakowicz 1993).

Pierwsze modele oparte na koncepcji naprężenia efektywnego nie wyjaśniały wszystkich aspektów zachowania mechanicznego gruntów nienasyconych, w szczególności zjawisk zapadowych (zmniejszanie objętości podczas nawadniania gruntu pod obciążeniem). Stąd też pojawiła się alternatywna koncepcja dwóch zmiennych stanu naprężenia (Fredlund i Morgenstern 1977 – cytowanie za Fredlund i Rahardjo 1993). Spośród różnych kombinacji zmiennych najczęściej wybierana jest para: naprężenie netto  $\sigma^{net}$  i ssanie macierzowe  $\psi_m$ . Naprężenie netto definiowane jest jako:

$$\sigma_{ij}^{net} = \sigma_{ij} - u_a \delta_{ij} \quad (4.6)$$

W większości analiz inżynierskich można założyć, że ciśnienie powietrza w porach gruntu jest stałe i równe ciśnieniu atmosferycznemu, konwencjonalnie przyjmowanemu jako równe zero ( $u_a = 0$ ). Wówczas naprężenia netto odpowiadają naprężeniom całkowitym, zaś ssanie macierzowe jest równe co do wartości ujemnemu ciśnieniu wody w porach,  $\psi_m = -u_w$ . Taką konwencję przyjęto w dalszej części pracy.

Wybór liczby i charakteru zmiennych opisujących stan naprężenia w gruncie nienasyconym pozostaje otwartym problemem naukowym - dyskusję na ten temat można znaleźć np. w pracach (Jommi 2000, Nuth i Laloui 2008, Sheng 2011). Obecnie przyjmuje się, że zarówno modele oparte na jednej, jak i na dwóch zmiennych stanu naprężenia mogą z wystarczającą dokładnością opisywać złożone zjawiska zachodzące w gruntach nienasyconych, pod warunkiem, że mają charakter modeli sprężysto-plastycznych (Jommi 2000, Alonso i in. 2010). Przykładem zaawansowanego modelu sprężysto-plastycznego dla gruntów ekspansywnych jest model BBMX (Barcelona Basic Model - Expansive) (Alonso i in. 1999), będący rozszerzeniem wcześniejszego modelu BBM (Barcelona Basic Model) (Alonso i in. 1990). W modelu BBMX uwzględniono złożoną strukturę gruntu. Stan naprężenia w obrębie makrostruktury opisywany jest przez dwie zmienne: naprężenie netto i ssanie, natomiast dla mikroporowatych agregatów zdefiniowano pojedynczą zmienną - naprężenie efektywne typu Bishopa. Ponadto zakłada się, że odkształcenia agregatów mają charakter sprężysty, zaś odkształcenia plastyczne związane są ze zmianami makrostruktury. Rozbudowane modele sprężysto-plastyczne zawierają dużą liczbę parametrów, które mogą być trudne do wyznaczenia. Dlatego też modele oparte na powierzchniach konstytutywnych przedstawionych poniżej pozostają użytecznym narzędziem w przypadku gdy można założyć, że grunt zachowuje się sprężysto, lub gdy mamy do czynienia z odkształceniem plastycznym wzdłuż określonej, monotonicznej ścieżki obciążenia (Adem 2015, Bolzon i Schrefler 1995). Przyjęcie założenia sprężystego zachowania się gruntu wydaje się mieć uzasadnienie w sytuacjach, gdy zewnętrzne obciążenia gruntu są niewielkie (drogi, lekkie budynki), grunt jest silnie prekonsolidowany, a odkształcenia wywoływane są przede wszystkim zmianami wilgotności i ssania. Wobec cykliczności zmian uwilgotnienia gruntu wywołanych czynnikami pogodowymi, można przyjąć, że związane z nimi odkształcenia mają charakter sprężysty (Adem 2015).



W modelach konstytutywnych opartych na jednej zmiennej stanu naprężenia często zakłada się zależność między przyrostem wskaźnika porowatości i przyrostem naprężenia efektywnego w postaci (*np. Bolzon i Schrefler 1995, Alonso i in. 1999*):

$$de = a d\bar{\sigma}' = \frac{\kappa}{\bar{\sigma}'} d\bar{\sigma}' \quad (4.7)$$

gdzie  $a$  jest współczynnikiem ściśliwości (dla zmian wskaźnika porowatości),  $\kappa$  - stałą materiałową, a  $\bar{\sigma}'$  oznacza średnie naprężenie efektywne,  $\bar{\sigma}' = (\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz})/3$ . Wzór ten jest stosowany zarówno w przypadku odkształceń sprężystych (odpowiadających ściśliwości wtórnej), jak i sprężysto-plastycznych (odpowiadających ściśliwości pierwotnej). Scałkowanie powyższego równania prowadzi do powszechnie znanej zależności opisującej ściśliwość gruntów spoistych (*np. Wesley 2010*):

$$\Delta e = e_0 - e = \kappa \cdot \ln\left(\frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}'_0}\right) = C \cdot \log\left(\frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}'_0}\right) \quad (4.8)$$

gdzie  $C = 2,303\kappa$  jest wskaźnikiem ściśliwości odniesionym do logarytmu dziesiętnego naprężenia, a indeks '0' odnosi się do początkowych wartości wskaźnika porowatości i naprężenia w gruncie. Zakładając, że woda i ziarna gruntu są nieściśliwe, zmianę wskaźnika porowatości można powiązać ze zmianą odkształcenia objętościowego:

$$d\varepsilon_V (\approx d\varepsilon_{xx} + d\varepsilon_{yy} + d\varepsilon_{zz}) = \frac{dV}{V} = \frac{de}{(1+e_0)} = \frac{d\kappa}{(1+e_0)\bar{\sigma}'} d\bar{\sigma}' = m_v d\bar{\sigma}' \quad (4.9)$$

gdzie  $m_v$  jest współczynnikiem ściśliwości objętościowej gruntu. Całkowite odkształcenie objętościowe można wyrazić jako:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\kappa}{(1+e_0)} \ln\left(\frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}'_0}\right) = \frac{C}{(1+e_0)} \log\left(\frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}'_0}\right) \quad (4.10)$$

W przypadku modeli wykorzystujących dwie zmienne stanu naprężenia (naprężenie całkowite netto i ssanie macierzowe) przyrosty wskaźnika porowatości i odkształcenia objętościowego można zapisać następująco:

$$de = a_\sigma d\bar{\sigma} + a_\psi d\psi_m \quad (4.11)$$

gdzie:  $\bar{\sigma}$  jest średnim naprężeniem netto, a współczynniki  $a_\sigma$  i  $a_\psi$  są zależne od  $\bar{\sigma}$  i  $\psi_m$ . Często wykorzystywana jest uproszczona zależność postaci (*Fredlund i Rahardjo 1993*):

$$de = a_\sigma d\bar{\sigma} + a_\psi d\psi_m = \frac{\kappa_\sigma}{\bar{\sigma}} d\bar{\sigma} + \frac{\kappa_\psi}{\psi_m} d\psi_m \quad (4.12)$$

która prowadzi do wzoru:

$$\Delta e = C_\sigma \log\left(\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0}\right) + C_\psi \log\left(\frac{\psi_m}{\psi_{m,0}}\right) \quad (4.13)$$

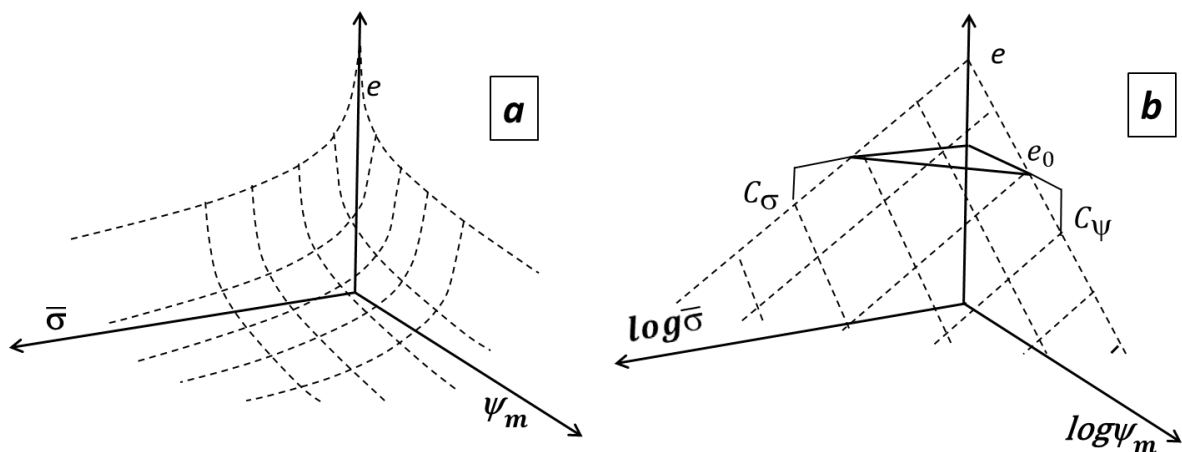
gdzie  $C_\sigma$  i  $C_\psi$  są wskaźnikami ściśliwości odpowiednio przy zmianie naprężenia całkowitego i ssania. Zależność (4.13) odpowiada powierzchni konstytutywnej  $e = f(\bar{\sigma}, \psi_m)$ , która tworzy płaszczyznę jeżeli na osiach  $\bar{\sigma}$  i  $\psi_m$  przyjmiemy skalę logarytmiczną (rys. 4.1b). Jest to pewne uproszczenie, gdyż jak pokazano na rys. 3.1a, zależność  $e$  od  $\log(\psi)$  ma ogólnie charakter krzywoliniowy. Może ona być jednak aproksymowana odcinkami prostymi w określonych przedziałach wartości ssania. We wzorach (4.12 i 4.13) występuje problem nieoznaczoności przy  $\psi_m$  zmierzającym do 0. Jako alternatywę zaproponowano wzór postaci (Alonso i in. 1990,1999):

$$de = \frac{\kappa_\sigma}{\bar{\sigma}} d\bar{\sigma} + \frac{\kappa_\psi}{(\psi_m + u_{atm})} d\psi_m \quad (4.14)$$

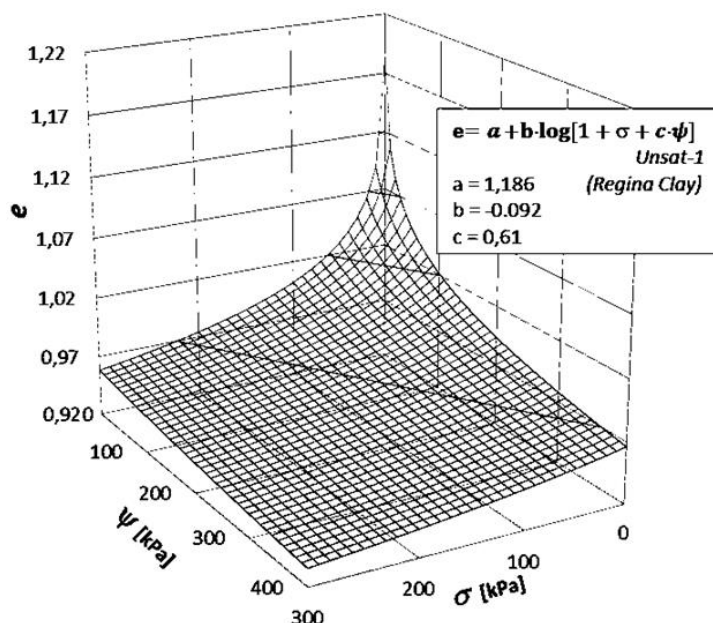
gdzie  $u_{atm}$  jest rzeczywistą wartością ciśnienia atmosferycznego. Inną możliwością jest zdefiniowanie powierzchni konstytutywnej za pomocą odpowiednio dopasowanej funkcji analitycznej  $e = f(\sigma, \psi)$ , na przykład postaci (Vu 2002) (patrz rys. 4.2):

$$e = a + b \cdot \log[1 + \bar{\sigma} + c\psi] \quad (4.15)$$

gdzie  $a$ ,  $b$  i  $c$  są parametrami dopasowanymi empirycznie.



Rys. 4.1. Powierzchnia konstytutywna  $e = f(\sigma, \psi)$  wg Fredlund i Rahardjo (1993) w skali liniowej (a) i półlogarytmicznej (b).



Rys. 4.2. Powierzchnia konstytutywna dla gruntu ekspansywnego „Regina Clay” (wg Vu 2002)

Zgodnie z propozycją Fredlund i Rahardjo (1993), przyrost odkształcenia objętościowego można wyrazić korzystając ze wzoru (4.12) jako:

$$d\varepsilon_V = m_1^S d\bar{\sigma} + m_2^S d\psi_m = \frac{3(1-2\mu)}{E} d\bar{\sigma} + \frac{3}{H} d\psi_m \quad (4.16)$$

gdzie  $E$  i  $H$  są odpowiednio modułami odkształcenia przy zmianach naprężenia netto i ssania, a  $\mu$  jest współczynnikiem Poissona. Współczynniki ścisłości  $m_1^S$  i  $m_2^S$  zdefiniowano następująco:

$$m_1^S = \frac{3(1-2\mu)}{E} = \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial(\bar{\sigma})} = \frac{1}{(1+e_0)} \cdot \frac{\partial e}{\partial(\bar{\sigma})} = \frac{0.434}{(1+e_0)} \cdot \frac{C_\sigma}{\bar{\sigma}} \quad (4.17)$$

$$m_2^S = \frac{3}{H} = \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial(\psi_m)} = \frac{1}{(1+e_0)} \cdot \frac{\partial e}{\partial(\psi_m)} = \frac{0.434}{(1+e_0)} \cdot \frac{C_\psi}{\psi_m} \quad (4.18)$$

Powyższe współczynniki  $m_1^S$  i  $m_2^S$  oraz wzór (4.16) odnoszą się do ogólnego przypadku odkształceń trójwymiarowych. Dla płaskiego stanu odkształcenia ( $\varepsilon_{yy} = 0$ ), zależności konstytutywne wygodnie jest sformułować w odniesieniu do średniego naprężenia  $\bar{\sigma}_{2D} = (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})/2$  (Vu i Fredlund 2004):

$$d\varepsilon_{V-2D} = m_{1-2D}^S d\bar{\sigma}_{2D} + m_{2-2D}^S d\psi_m = \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E} d\bar{\sigma}_{2D} + \frac{2(1+\mu)}{H} d\psi_m \quad (4.19)$$

Natomiast w przypadku jednowymiarowych odkształceń w kierunku pionowym ( $\varepsilon_{v-1D} = \varepsilon_{zz}$ ) w analogicznym wzorze wykorzystuje się naprężenie pionowe (Vu i Fredlund 2004):

$$d\varepsilon_{V-1D} = d\varepsilon_{zz} = m_{1-1D}^S d\sigma_{zz} + m_{2-1D}^S d\psi_m = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} d\sigma_{zz} + \frac{(1+\mu)}{H(1-\mu)} d\psi_m \quad (4.20)$$

#### 4.3. Wyznaczanie odkształceń w oparciu o rozwiązanie równania równowagi

Wartości naprężeń, odkształceń i przemieszczeń w rozpatrywanym obszarze gruntu w warunkach quasi-statycznych można wyznaczyć rozwiązując równania równowagi naprężeń, które mogą być ogólnie zapisane w postaci:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_j = 0 \quad (4.21)$$

gdzie:  $\sigma_{ij}$  - składowe tensora naprężenia całkowitego,  $x_j$  współrzędne przestrzenne ( $x, y, z$ ),  $b_j$  - składowa wypadkowego wektora sił masowych działająca w kierunku  $j$ . Przyjęcie określonego modelu konstytutywnego pozwala na wyrażenie tensora naprężenia jako funkcji tensora odkształcenia, z kolei przyjęcie założenia małych odkształceń pozwala powiązać składowe odkształcenia ze składowymi wektora przemieszczeń:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.22)$$

gdzie:  $\varepsilon_{ij}$  - składowe tensora odkształcenia szkieletu gruntowego,  $U_i, U_j$  - przemieszczenia odpowiednio w kierunkach  $i, j$ . Ostatecznie otrzymujemy układ trzech równań skalarnych, w którym niewiadomymi są przemieszczenia w kierunkach  $x, y, z$ . Konkretna postać równań zależy od przyjętych związków konstytutywnych. Poniżej przedstawione zostaną równania równowagi dla modelu sprężystego, opartego na dwóch zmiennych stanu naprężenia, opisanego w pracach Fredlund i Rahardjo (1993), Hung i Fredlund (2000,2002) oraz Vu i Fredlund (2004). Jest to jeden z najczęściej przytaczanych w literaturze modeli konstytutywnych dla gruntów ekspansywnych.

Zgodnie z Fredlund i Rahardjo (1993) poszczególne składowe tensora odkształcenia można zapisać w formie przyrostowej jako:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E} d(\sigma_{ij} - \delta_{ij}u_a) - \frac{\mu}{E} d(\sigma_{kk} - 3u_a)\delta_{ij} + \frac{d(u_a - u_w)}{H} \delta_{ij} \quad (4.23)$$

gdzie  $E$  i  $H$  są odpowiednio modułami odkształcenia przy zmianach naprężenia netto i ssania, a  $\sigma_{kk} (= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$  jest sumą głównych składowych tensora naprężenia.

Przy założeniu stałego, atmosferycznego ciśnienia powietrza w porach gruntu ( $u_a = 0$ ), powyższe równanie (4.23) przedstawić można formie uproszczonej:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{3\mu}{E} d\bar{\sigma}\delta_{ij} + \frac{d\psi_m}{H} \delta_{ij} \quad (4.24)$$

co prowadzi do następującej postaci równania równowagi dla kierunku  $z$ :



$$\frac{E}{2(1+\mu)} \nabla^2 U_z + \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} - \frac{E}{H(1-2\mu)} \cdot \frac{\partial \psi_m}{\partial z} + b_z = 0 \quad (4.25)$$

i analogicznych równań dla kierunków  $x$  i  $y$ .

Rozwiązanie równań równowagi naprężeń wymaga zadania odpowiednich warunków brzegowych oraz znajomości wartości ssania (ciśnienia wody) w porach gruntu. W ogólnym przypadku wartości ssania zmieniają się w czasie i przestrzenie, a zatem równania równowagi powinny być rozwiązywane łącznie z równaniem opisującym przepływ wody w gruncie – opisanym w rozdziale 5.

Problem można uprościć, zakładając, że zmiany porowatości nie wpływają istotnie na przebieg zmian uwilgotnienia i ssania. Wówczas wystarczające jest rozwiązanie samego równania przepływu w określonym przedziale czasowym, a następnie rozwiązanie równań równowagi dla końcowego rozkładu ciśnienia wody (Vu 2002).

#### 4.4. Uprozczone metody obliczeniowe dla odkształceń jednowymiarowych

W praktyce inżynierskiej często można przyjąć, że w strefach przypowierzchniowych gruntu odkształcenia zachodzą tylko w kierunku pionowym. Umożliwia to analityczne obliczenie całkowitego wzniosu lub skurczu gruntu za pomocą wzorów (4.9) lub (4.16) dla określonych zmian stanu naprężenia w gruncie, w sposób podobny do obliczania osiadania fundamentu. Tok postępowania w przypadku jednowymiarowych metod analitycznych zakłada podział gruntu na warstwy obliczeniowe do głębokości zakładanych zmian stanu naprężenia, obliczenie wzniosu (lub skurczu) każdej warstwy, a następnie zsumowanie wartości w celu wyznaczenia całkowitego przemieszczenia powierzchni gruntu.

$$\Delta H_i = \varepsilon_{zz,i} H_i = \frac{\Delta e_i}{1+e_{o,i}} H_i \quad (4.26)$$

$$\Delta H_c = \sum_i \Delta H_i \quad (4.27)$$

gdzie  $H_i$  i  $\Delta H_i$  oznaczają początkową wysokość i przyrost wysokości warstwy  $i$ , a  $\Delta H_c$  całkowite przemieszczenie pionowe powierzchni gruntu. W przedstawionych poniżej wzorach pominięto indeks "i", wszystkie symbole odnoszą się do pojedynczej warstwy obliczeniowej. Przyjęto również konwencję, że odkształcenia przy skurczu mają znak ujemny, a przy pęcznieniu dodatni.

#### 4.4.1. Metody wykorzystujące badania edometryczne

Metody te wykorzystują wartości ciśnienia pęcznienia i wskaźnika pęcznienia otrzymane w wyniku badań laboratoryjnych do prognozowania maksymalnego pęcznienia gruntu spowodowanego wzrostem wilgotności. Wyniki badań względnego wskaźnika pęcznienia pod określonym obciążeniem, odpowiadającym warunkom rzeczywistym, mogą zostać użyte bezpośrednio do oszacowania wielkości wzniosu w danej warstwie. W innych metodach, opisanych poniżej, wykorzystuje się wyniki badań ciśnienia pęcznienia.

##### **Metoda Fredlunda** (Fredlund 1983, Fredlund i Rahardjo 1993)

Metoda ta została zaproponowana jako uproszczenie ogólnej metody obliczeń opartej o dwie zmienne stanu naprężenia (naprężenie netto i ssanie). Proces pęcznienia rozpatruje się w płaszczyźnie  $e = \log(\sigma)$ , przy czym używa się zmodyfikowanych wartości naprężenia netto, będących de facto naprężeniami efektywnymi. Pęcznienie pojedynczej warstwy gruntu oblicza się wg wzoru:

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{C_s}{1+e_0} \log \left( \frac{\sigma_{cv}}{\sigma_F - u_{w,F}} \right) \quad (4.28)$$

gdzie:  $C_s$  – wskaźnik odprężenia, zmierzony w klasycznym badaniu edometrycznym w warunkach pełnego nasycenia gruntu wodą,  $\sigma_{cv}$  – naprężenie początkowe równe ciśnieniu pęcznienia przy stałej objętości (z uwzględnieniem poprawki związanej z pobieraniem próbek),  $\sigma_F$  – końcowe naprężenie całkowite w środku warstwy (pochodzące od ciężaru własnego gruntu i obciążenia konstrukcją),  $u_{w,F}$  – końcowe ciśnienie wody w porach.

Szczegółową procedurę korekty wartości ciśnienia pęcznienia opisano w pracy (Fredlund 1983). Według innych autorów (Singhal i in. 2014) korekta wartości ciśnienia pęcznienia nie jest wymagana, jeżeli ciśnienie pęcznienia zostało oznaczone w warunkach stałej objętości, ale po wcześniejszym obciążeniu próbki do stanu naprężenia in situ (*overburden constant volume test*). Skorygowane ciśnienie pęcznienia można również wyrazić jako sumę naprężenia od nadkładu  $\sigma_{zz}$  oraz składnika związanego ze ssaniem, tzw. ssania równoważnego:

$$\sigma_{cv} = \sigma_{zz} + \psi_{EQ} \quad (4.29)$$

Z kolei ssanie równoważne  $\psi_{EQ}$  wyznacza się mnożąc rzeczywistą wartość ssania występującego w gruncie in situ przez współczynnik korekcyjny  $\xi$  (mniejszy od jedności):

$$\psi_{EQ} = \xi \psi_m \quad (4.30)$$

W pracy (Vu i Fredlund 2004) przyjęto wartość współczynnika  $\xi$  równą stopniowi wilgotności  $S_r$ . Współczynnik  $\xi$  można zatem uznać za odpowiednik współczynnika  $\chi$  w definicji naprężenia efektywnego wg Bishopa (4.4). Zatem zarówno początkowa, jak i końcowa wartość naprężenia występująca we wzorze (4.28) jest w istocie naprężeniem efektywnym. Wykorzystanie wskaźnika odprężenia  $C_s$  mierzonego w warunkach pełnego nasycenia do prognozowania odkształceń zachodzących przy zmiennym nasyceniu może zmniejszać dokładność wzoru (Nelson i in. 2015).

#### **Metoda Nelsona** (Nelson i inni 2015)

W metodzie tej wykorzystuje się wskaźnik ściśliwości  $C_H$ , wyznaczany w badaniach laboratoryjnych. Wymagane jest badanie ciśnienia pęcznienia przy stałej objętości  $\sigma_{CV}$  oraz względnego wskaźnika pęcznienia  $\varepsilon_p^H$  odpowiadającego obciążeniu  $\sigma_0 < \sigma_{CV}$ . Na tej podstawie można obliczyć  $C_H$ :

$$C_H = \frac{\varepsilon_p^H}{\log\left(\frac{\sigma_{CV}}{\sigma_0}\right)} \quad (4.31)$$

Zmianę wysokości warstwy oblicza się ze wzoru:

$$\frac{\Delta H}{H} = C_H \log\left(\frac{\sigma_{CV}}{\sigma_F}\right) \quad (4.32)$$

W metodzie tej zakłada się, że końcowe ciśnienie wody (ssanie) jest równe zero. Należy zwrócić uwagę, że wskaźnik  $C_H$  odnosi się bezpośrednio do odkształcenia objętościowego, a nie do wskaźnika porowatości.

#### 4.4.2. Metody oparte o zmiany wartości ssania

W wielu przypadkach praktycznych zjawiska pęcznienia lub skurczu gruntu ekspansywnego zachodzą przy stałych lub niemal stałych wartościach naprężeń całkowitych i zależą jedynie od zmian ssania wywołanych przepływem wody w gruncie. W metodach tej grupy na ogół zakłada się liniową zależność między odkształceniem a logarytmem ssania w określonych przedziałach wartości ssania (patrz rys. 3.1a). Problematiczną kwestią jest określenie początkowych i końcowych wartości ssania w gruncie, gdyż pomiary ssania nie są standardowo wykonywane w badaniach geotechnicznych. Można w tym celu wykorzystać

pomiary wilgotności, jeżeli znana jest krzywa retencji gruntu, lub przyjęć pewne upraszczające założenia, np. że przy maksymalnym spęcznieniu gruntu końcowa wartość ssania będzie bliska zeru. Z drugiej strony, modele z tej grupy można łatwo połączyć z numerycznym rozwiązaniem równania przepływu wody w strefie nienasyconej, pozwalającym na określenie czasowej zmienności ssania w profilu gruntowym, co umożliwi bardziej szczegółową prognozę procesów pęcznienia lub skurczu.

### **Metoda Johnsona i Snethena (1978)**

Opis metody podano za pracą Snethen (1979). Metoda ta wymaga znajomości krzywej retencji gruntu oraz krzywej skurczalności. W rozpatrywanym zakresie ssania i wilgotności krzywa retencji aproksymowana jest równaniem:

$$\log \psi_m = A - Bw \quad (4.33)$$

zaś krzywa skurczalności równaniem:

$$\Delta e = \frac{\alpha \rho_s}{100 \rho_w} \Delta w \quad (4.34)$$

gdzie:  $\alpha$  jest współczynnikiem przyjmującym wartości z przedziału 0 do 1 (w warunkach pełnego nasycenia  $\alpha = 1$ ),  $\rho_s$  i  $\rho_w$  oznaczają gęstość właściwą szkieletu i gęstość wody. Na podstawie przyjętych postaci krzywych retencji i skurczalności można określić wielkość wskaźnika ściśliwości przy zmianach ssania  $C_\psi$ . Odształcenie obliczane jest ze wzoru:

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{C_\psi}{1+e_0} \log \left( \frac{\psi_{m,0}}{\psi_{m,F} + \alpha \sigma_F} \right) = \frac{\alpha \rho_s}{100(1+e_0)\rho_w B} \log \left( \frac{A - Bw_0}{\psi_{m,F} + \alpha \sigma_F} \right) \quad (4.35)$$

gdzie  $\psi_{m,0}$  i  $\psi_{m,F}$  początkowe i końcowe ssanie w warstwie gruntu,  $w_0$  - początkowa wilgotność gruntu.

### **Metoda McKeena (1992)**

Opis metody przedstawiono za pracami (Grabowska-Olszewska i in. 1998, Vanapalli i Lu 2012, Nelson i in. 2015). W metodzie tej podstawowym parametrem jest wskaźnik ściśliwości względem ssania matrycowego  $C_h$  wyznaczany na podstawie badań skurczalności - metodą bryłową (CLOD). Wskaźnik ten jest odczytywany z wykresu zależności wskaźnika skurczalności od logarytmu ssania całkowitego, w zakresie wartości ssania  $10^2$  do  $10^{4,5}$  kPa (od  $pF=3$  do  $pF=5,5$  - rys. 4.3)

Wskaźnik ściśliwości  $C_h$  można również oszacować na podstawie uproszczonego (zlinearyzowanego) modelu krzywej retencji gruntu. W tym celu należy wykonać pomiar wartości ssania  $\psi_0$  dla próbki gruntu o określonej wilgotności naturalnej  $w_0$ . Następnie należy obliczyć nachylenie krzywej retencji w skali  $pF$ , zakładając że wartość ssania w gruncie całkowicie suchym wynosi  $pF=6,25$ :

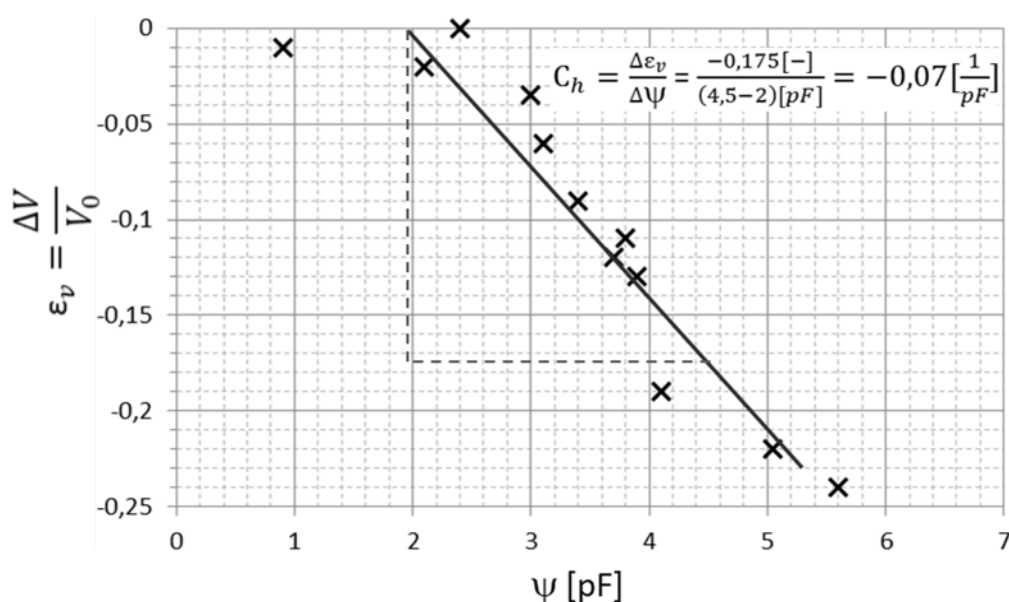
$$\frac{\Delta\psi[pF]}{\Delta w} = \frac{6,25 - \psi_0[pF]}{0 - w_0} \quad (4.36)$$

gdzie wilgotność  $w_0$  wyrażona jest w ułamku, a nie w procentach. Otrzymaną wartość można wstawić do empirycznych wzorów na  $C_h$  - wg (McKeen 1992 - cytowanie za Vu 2002 i Vanapalli i Lu 2012)

$$C_h = -0,02673 \frac{\Delta\psi[pF]}{\Delta w} - 0,388704 \quad (4.37)$$

lub wg (Perko i in. 2000 - cytowanie za Nelson i in. 2015):

$$C_h = (-10) \left( \frac{\Delta\psi[pF]}{\Delta w} \right)^{-2} \quad (4.38)$$



Rys. 4.3. Wyznaczanie wskaźnika ściśliwości wg McKeena podczas osuszania gruntu

Wyznaczony w taki sposób wskaźnik ma wartość ujemną. Odształcenie warstwy obliczane jest na podstawie zmiany wartości ssania wyrażonej w skali  $pF$ :

$$\frac{\Delta H}{H} = C_h (\psi_F[pF] - \psi_0[pF]) f \cdot s \quad (4.39)$$

gdzie:  $f$  - współczynnik ograniczenia bocznego (omówiony w pkt. 4.1), a  $s$  - współczynnik uwzględniający efekt oddziaływania nadkładu, który można wyrazić następująco (Vanapalli i Lu 2012, Nelson i in. 2015):

$$s = 1 - \frac{\sigma_F}{\sigma_{CV}} \quad (4.40)$$

Pęcznienie gruntu będzie zachodziło tylko w przypadku, gdy końcowe naprężenie w warstwie będzie mniejsze od ciśnienia pęcznienia.

### **Metoda Adem i Vanapalli (2013)**

Metoda ta została przedstawiona w artykule Adem i Vanapalli (2013) i bardziej szczegółowo w pracy Adem (2015). Nazwana jest przez autorów MEBM (*modulus of elasticity based method*). Głównym parametrem wykorzystywanym w tej metodzie jest moduł odkształcenia  $E$ , używany w klasycznych modelach konstytutywnych dla gruntów nasyconych oraz w modelu Fredlund i Rahardjo (1993) do opisu odkształceń wywołanych zmianą naprężenia całkowitego. Dla warunków niepełnego nasycenia wartość modułu określana jest ze wzoru:

$$E_{UNSAT} = E_{SAT} \left[ 1 + \alpha \frac{\psi_m}{P_a/101,3} S_r^\beta \right] \quad (4.41)$$

gdzie:  $E_{UNSAT}$ ,  $E_{SAT}$  - moduły odkształcenia gruntu w warunkach odpowiednio niepełnego i pełnego nasycenia,  $P_a$  - ciśnienie atmosferyczne ( $P_a = 101,3$  kPa, wielkość  $P_a / 101,3 = 1$  kPa występuje we wzorze w celu zachowania zgodności wymiarowej),  $S_r$  - stopień wilgotności,  $\alpha, \beta$  - parametry. Wartość modułu  $E_{SAT}$  jest zależna od stanu naprężenia w gruncie.

Pierwotnie wzór (4.41) opracowany został dla gruntów nie wykazujących cech ekspansywnych (Vanapalli i Oh 2010 - cytowanie za Adem 2015). W pracy doktorskiej Adem (2015) wykazano, że można go stosować również dla gruntów ekspansywnych, przy czym określono wartości parametrów  $\beta=2$ ,  $\alpha = 0,05$  do  $0,15$ .

W celu obliczenia zmian wysokości warstwy gruntu przyjęto założenie jednoosiowych odkształceń, wywołanych jedynie zmianami ssania matrycowego. Prowadzi to do następującego wzoru (Adem 2015):

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} (\psi_{m,0} - \psi_{m,F}) \quad (4.42)$$

W powyższym wzorze występują liniowe, a nie logarytmiczne przyrosty wartości ssania.



#### 4.4.3. Metody oparte o zmiany wartości wilgotności

Metody te wykorzystują zależność wskaźnika porowatości od wilgotności (przedstawioną w postaci krzywej skurczalności). Wprawdzie wilgotność nie jest zmienną charakteryzującą stan naprężenia w gruncie, jednak z uwagi na zależność między wilgotnością i ssaniem (krzywa retencji) wzory oparte na zmianach wilgotności można wyprowadzić ze wzorów opartych na zmianach ssania.

Zaletą metody opartej na wartościach wilgotności w stosunku do metody opartej na wartościach ssania jest to, że pomiary wilgotności są znacznie prostsze i częściej wykonywane. Istnieje również rozbudowana baza danych pomiarowych wilgotności w profilach gruntowych w różnych obszarach. Metodę taką można połączyć z prostymi modelami prognozującymi zmienność wilgotności w czasie (Gorączko i Kumor 2006).

##### **Metoda Hamberga i Nelsona (1984)**

Opis metody przedstawionej przez Hamberga i Nelsona (1984) oraz Nelsona i Millera (1992) przytoczono za opracowaniami Garbulewskiego (2000) i Nelsona i in. (2015). Podstawowym parametrem jest wskaźnik ściśliwości  $C_w$ , wyznaczony na podstawie badania skurczalności metodą "bryłową" (CLOD):

$$C_w = \frac{\Delta e}{\Delta w} \quad (4.43)$$

Pozwala to zapisać zmianę wysokości pojedynczej warstwy za pomocą równania:

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta e}{1+e_0} = \frac{C_w(w_F - w_0)}{1+e_0} \quad (4.44)$$

gdzie  $w_0$  i  $w_F$  oznaczają początkową i końcową wilgotność w danej warstwie gruntu. W metodzie tej zakłada się, że odkształcenie pionowe jest równe całkowitemu odkształceniu objętościowemu (nie występuje współczynnik ograniczenia bocznego  $f$ ), co może być potencjalnym źródłem niedokładności. Wzór (4.44) można uznać za równoważny wzorom opartym na zmianach ssania, przy założeniu liniowej zależności między  $\Delta w$  i  $\Delta(\log \psi_m)$  (podobnie jak we wzorze Johnsona i Snethena opisanym wyżej).

### **Metoda Briaud i in. (2003)**

Metoda ta, nazwana przez autorów Shrink Test - Water Content Method (ST-WCM), opiera się na badaniu laboratoryjnym skurczu próbek gruntu, prowadzonym w cylindrze z pomiarem wilgotności, średnicy i wysokości próbki. Na podstawie wyników badań dla każdej warstwy gruntu wyznaczane są dwa parametry - moduł ściśliwości względem zmian wilgotności  $E_w$ :

$$E_w = \frac{\Delta w}{\Delta V/V_0} \quad (4.45)$$

oraz współczynnik ograniczenia bocznego  $f$ :

$$f = \frac{\Delta h/h_0}{\Delta V/V_0} \quad (4.46)$$

gdzie  $V_0$  i  $h_0$  oznaczają początkową objętość i wysokość próbki, a  $\Delta V$  i  $\Delta h$  zmianę tych wielkości na skutek wysychania.

Odształcenie pionowe warstwy gruntu oblicza się ze wzoru:

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{w_F - w_0}{E_w} f \quad (4.47)$$

Autorzy artykułu (*Briaud i in. 2003*) przeprowadzili badania wpływu obciążenia gruntu na wyniki obliczeń przedstawioną metodą. Wykazano, że wpływ ten jest pomijalnie mały w przypadku praktycznie występujących obciążeń. Wiąże się to z faktem, że zmiany objętościowe zachodzą najczęściej przy nasyceniu bliskim lub równym 1. Przy takiej samej zmianie wartości ssania (ciśnienia wody w porach) przyrost wilgotności i odształcenie w gruncie obciążonym będą mniejsze niż w gruncie nieobciążonym, jednak zależność między przyrostem wilgotności i odształceniem będzie zbliżona.

#### **4.4.4. Metody empiryczne**

W literaturze można znaleźć dużą liczbę metod empirycznych, w których wielkość wskaźnika pęcznienia, ciśnienia pęcznienia lub całkowitego wzniosu warstwy gruntu została uzależniona od podstawowych, łatwo mierzalnych parametrów geotechnicznych podłoża. Wzory te mają ograniczone zastosowanie, gdyż z reguły były opracowywane na podstawie badań gruntów na konkretnych, często niewielkich obszarach, a zatem trudno je uogólnić.



Poniżej podano wybrane przykłady wzorów empirycznych, obszerniejsze zestawienia można znaleźć w pracach Vanapalli i Lu (2012) oraz Adem (2015).

#### **Wzór Seeda i in. (1962)**

Według prac Grabowska-Olszewska i in. (1998) oraz Vanapalli i Lu (2012) wzór zaproponowany przez Seeda i in. (1962) dla naturalnych gruntów pęczniejących ma następującą postać:

$$\varepsilon_p^H = 2,16 \cdot 10^{-3} \cdot I_p^{2,44} \quad (4.48)$$

gdzie wskaźnik pęcznienia  $\varepsilon_p^H$  [%] odpowiada nominalnemu obciążeniu 1 psi (ok. 7 kPa), a  $I_p$  - stopień plastyczności

#### **Wzory Vijayvergiyi i Ghazzalego (1973) oraz Vijayvergiyi i Sullivana (1974)**

Wzory przytoczono za artykułem Niedzielskiego i Kumora (2009). Okazały się one przydatne do wstępnego prognozowania wskaźnika pęcznienia iłów poznańskich z regionu Wielkopolski.

- wzór Vijayvergiyi i Ghazzalego:

$$\log \varepsilon_p = 1/12(0,44w_L - w_0 + 5,5) \quad (4.49)$$

gdzie:  $w_L$  - granica płynności [%],  $w_0$  - początkowa wilgotność gruntu [%],  $\varepsilon_p$  - wskaźnik pęcznienia [%]

- wzór Vijayvergiyi i Sullivana (przytoczony w art. Niedzielskiego i Kumora za Chen 1988):

$$\log \varepsilon_p = 3,2837\rho_d + 0,033w_L - 6,8 \quad (4.50)$$

gdzie:  $\rho_d$  - gęstość objętościowa szkieletu gruntowego

#### **Wzory Kumora (2008)**

Metodę opracowano na podstawie badań laboratoryjnych skurczu i pęcznienia iłów serii poznańskiej. W artykule (Kumora 2008) przedstawiono wzory pozwalające obliczyć wskaźnik skurczalności objętościowej  $\varepsilon_s^V$  [%] (określony jak we wzorze 4.2a) i wskaźnik pęcznienia swobodnego  $\varepsilon_p^H$  (zdefiniowany jak we wzorze 4.1b):

$$\varepsilon_s^V = \frac{V_0 - V_s}{V_0} = 0,783w - 3,5731 \quad (4.51)$$

$$\varepsilon_p^H = \frac{h_k - h_0}{h_0} = 3 \cdot 10^{-5}(w)^3 + 0,011(w)^2 + 0,102w - 5,867 \quad (4.52)$$

gdzie:  $w$  – wilgotność (pow. granicy skurczalności  $w_s$ ) [%]

Korzystając z powyższych zależności można oszacować odkształcenie objętościowe gruntu przy zmianie wilgotności od wartości  $w_1$  do  $w_2$ . W tym celu należy wyznaczyć różnicę między wartościami wskaźnika pęcznienia lub skurczu, wyznaczonymi dla  $w_1$  i  $w_2$ . Wzory można też wykorzystać do oszacowania parametru  $E_w$  w metodzie Briaud i in. (2003).

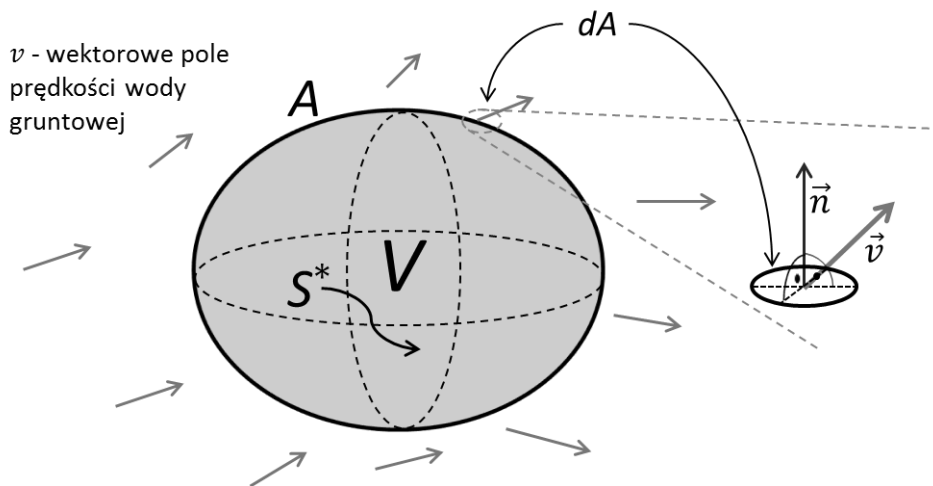
#### 4.5. Podsumowanie

Jak wynika z przedstawionego powyżej przeglądu, procesy deformacji gruntów ekspansywnych mogą być opisywane za pomocą wielu modeli matematycznych, o zróżnicowanym stopniu złożoności. Na potrzeby niniejszej pracy przyjęto, że odkształcenia w sąsiedztwie drzew zachodzą przede wszystkim na skutek zmian ssania i mają charakter jednowymiarowy (tylko w kierunku pionowym) lub dwuwymiarowy, w kierunku pionowym i poziomym. Pozwala to na opracowanie stosunkowo prostych metod obliczania odkształceń i przemieszczeń gruntu na podstawie rozwiązania równania Richardsa, bez konieczności rozwiązywania równań równowagi. Podejście takie było już stosowane wcześniej przez innych autorów (Navarro i inni 2007, 2009a,b). Na podstawie przedstawionych w dalszej części tej rozprawy wyników można założyć, że dokładność metody jest wystarczająca dla celów uproszczonych analiz inżynierskich. W niniejszej pracy uproszczony sposób określania odkształceń zostanie powiązany z autorską metodą numerycznego rozwiązania równania Richardsa, opisaną w rozdziale szóstym.

## 5. Równania przepływu

### 5.1. Przepływ przez ośrodek nieodkształcalny

Rozważmy przepływ przez wydzieloną z przestrzeni objętość gruntu nienasyconego jak na rysunku poniżej:



Rys. 5.1. Schemat przepływu przez wydzieloną z przestrzeni objętość \$V\$

Zmiany objętości wody zawartej w takiej wydzielonej przestrzeni możemy zbilansować następująco:

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{Zmiana objętości wody} \\ \text{zawartej w wydzielonej} \\ \text{objętości gruntu [V] w} \\ \text{czasie} \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|} \hline \text{Strumień pola wektorowego} \\ \text{prędkości przez powierzchnię} \\ \text{zamkniętą ograniczającą} \\ \text{wydzieloną objętość gruntu} \\ \text{[A]} \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|} \hline \text{Wydatek} \\ \text{źródłowy [S^*]} \\ \hline \end{array}
 = 0$$

Co matematycznie zapisać wyrazić można równaniem:

$$\frac{dV^w}{dt} + \iint_A \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA + S^* = 0 \quad (5.1)$$

gdzie: \$V\$ – objętość wydzielonego z przestrzeni gruntu .

\$V\_w\$ – objętość wody zawartej w objętości \$V\$

\$A\$ – powierzchnia, ograniczająca objętość gruntu \$V\$

\$\vec{n}\$ – jednostkowy wektor normalny do powierzchni \$A\$, skierowany na zewnątrz

\$\vec{v}\$ – wektor prędkości wody gruntowej wg Darcy.

$\frac{dV_w}{dt}$  – przyrost objętości wody zawartej w objętości gruntu  $V$  w czasie

$\iint_A \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA$  – strumień pola wektorowego prędkości wody gruntowej przepływający przez zamkniętą, zorientowaną na zewnątrz powierzchnię  $A$  ograniczającą objętość gruntu  $V$

$S^*$  - objętość wody, która ubywa z objętości  $V$  w jednostkowym czasie (tzw. wydatek źródłowy)

Zmianę objętości wody w czasie  $\frac{dV_w}{dt}$  można określić w funkcji objętościowej wilgotności gruntu  $\theta$ . Jeśli założyć, że  $\theta$  jest zmienna w objętości  $V$ , a ośrodek jest nieodkształcalny, to na podstawie równania (3.2) można zapisać:

$$\frac{dV_w}{dt} = \iiint_V \frac{d\theta}{dt} dv \quad (5.2)$$

Wydatek źródłowy dla całej objętości  $V$  można wyrazić:

$$S^* = \iiint_V s^{**} \cdot dv \quad (5.3)$$

gdzie:  $s^{**}$  - wydatek źródła przypadający na nieskończenie małą objętość  $dv$

Korzystając z twierdzenia Gaussa, strumień pola wektorowego prędkości wody gruntowej można wyrazić w funkcji dywergencji wektorowego pola prędkości:

$$\iint_A \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA = \iiint_V \nabla \cdot \vec{v} \cdot dv \quad (5.4)$$

Po podstawieniu (5.2),(5.3) i (5.4)  $\rightarrow$ (5.1) otrzymujemy:

$$\iiint_V \frac{d\theta}{dt} dv + \iiint_V \nabla \cdot \vec{v} \cdot dv + \iiint_V s^{**} \cdot dv = 0 \quad (5.5)$$

Z porównania wyrażen podcałkowych wynika następująca zależność dla każdej nieskończenie małej objętości  $dv$  wewnątrz objętości  $V$ :

$$\frac{d\theta}{dt} + \nabla \cdot \vec{v} + s^{**} = 0 \quad (5.6)$$

Korzystając z prawa Darcy wektorowe pole prędkości można określić (zgodnie z 3.18):

$$\vec{v} = -K \cdot \text{grad} \psi_C$$

Zatem na podstawie (5.6) z uwzględnieniem (3.18):

$$\frac{d\theta}{dt} + \nabla \cdot (-K \cdot \nabla \psi_C) + s^{**} = 0 \quad (5.7)$$

lub

$$\frac{d\theta}{dh_s} \cdot \frac{dh_s}{dt} + \nabla \cdot (-K \cdot \nabla \psi_C) + s^{**} = C(h) \frac{dh_s}{dt} + \nabla \cdot (-K \cdot \nabla \psi_C) + s^{**} \quad (5.8)$$

gdzie:  $C(h) = \frac{d\theta}{dh_s}$  to tzw. różniczkowa pojemność wodna gruntu (patrz rys. 3.2)

Powyższe równania (5.7) i (5.8) są zapisami znanego z literatury równania Richardsa (1931). Wiążą one wilgotność objętościową z prędkością przepływu wody gruntowej i funkcją źródłową dla każdego punktu wewnątrz objętości  $V$  w przypadku gruntu nieodkształcalnego, a które przy dodatkowym założeniu izotropowości ośrodka gruntowego można zapisać również w formie:

$$\frac{d\theta}{dt} + \nabla \cdot (-k(h_s) \cdot \nabla \psi_C) + s^{**} = 0, \text{ lub} \quad (5.9)$$

$$C(h) \frac{dh_s}{dt} + \nabla \cdot (-k(h_s) \cdot \nabla \psi_C) + s^{**} = 0 \quad (5.10)$$

gdzie:  $k(h_s)$  - współczynnik filtracji dla przepływu w strefie nienasyconej (jak w równaniu 3.20)

## 5.2. Przepływ przez ośrodek odkształcalny

Analogicznie jak dla ośrodka nieodkształcalnego, przeanalizujemy przepływ przez wydzieloną z przestrzeni objętość gruntu nienasyconego (wg rys. 5.1). Zawarty w objętości grunt traktujemy jako ośrodek trójfazowy.

Zastosujmy oznaczenia analogicznie jak w punkcie 5.1 i dodatkowo, dla poszczególnych faz gruntu:

$V_a$  – objętość powietrza w objętości  $[V]$

$V_s$  – objętość szkieletu gruntowego w objętości  $[V]$

$V_p = V_a + V_w$  – całkowita objętość porów w objętości  $[V]$

$\theta^a = \frac{V_a}{V}$  - zawartość objętościowa powietrza (porowatość powietrzna).

$\theta^s = \frac{V_s}{V}$  - zawartość objętościowa szkieletu gruntowego.

$n = \frac{V_p}{V}$  - porowatość

$e = \frac{V_p}{V_s}$  - wskaźnik porowatości

$\rho_w, \rho_a, \rho_s$  – gęstości właściwe faz, odpowiednio: wody, powietrza i szkieletu gruntowego.

$v^w, v^a, v^s$  – prędkości poszczególnych faz (wyzn. względem powierzchni ograniczającej  $A$ )

Zmiany objętości wody zawartej w takiej wydzielonej przestrzeni można zbilansować analogicznie jak punkcie 5.1, tj.:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Zmiana objętości wody} \\ \text{zawartej w wydzielonej} \\ \text{objętości gruntu [V] w} \\ \text{czasie} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{l} \text{Strumień pola wektorowego} \\ \text{prędkości przez powierzchnię} \\ \text{zamkniętą ograniczającą} \\ \text{wydzieloną objętość gruntu} \\ \text{[A]} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{l} \text{Wydatek} \\ \text{źródłowy [S']} \end{array}} = \mathbf{0}$$

Wobec czego, analogicznie jak w przypadku ośrodka nieodkształcalnego, zachodzą równania (5.1) i (5.6):

$$\frac{dV_w}{dt} + \iint_A \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA + S^* = 0$$

$$\frac{d\theta}{dt} + \nabla \cdot \vec{v} + s^{**} = 0$$

W powyższych wzorach  $\vec{v}$  oznacza wektor prędkości wody zdefiniowany wg Darcy. Rzeczywista prędkość wody  $v^w$ , odniesiona jedynie do wypełnionych przez nią przestrzeni porowych, jest większa. Między skalarami prędkości  $v$ , a rzeczywistej prędkości  $v^w$ , zachodzi relacja (obie prędkości wyznaczone względem powierzchni ograniczającej A):

$$v = \theta \cdot v^w \quad (5.11)$$

Po podstawieniu (5.11)  $\rightarrow$ (5.6) i przemnożeniu przez  $\rho^w$  otrzymujemy równanie prawa zachowania masy dla wody dla każdego punktu wewnątrz objętości w postaci  $V$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta \cdot \rho_w) + \nabla \cdot (\rho_w \cdot \theta \cdot v^w) + (s^{**} \cdot \rho_w) = 0 \quad (5.12)$$

W sposób analogiczny i zachowując powyżej przyjętą konwencję oznaczeń, dla każdego punktu wewnątrz objętości  $V$ , wyrazić można prawo zachowania masy dla powietrza (zaniedbując człon źródłowy):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta^a \cdot \rho_a) + \nabla \cdot (\rho_a \cdot \theta^a \cdot v^a) = 0 \quad (5.13)$$

oraz dla szkieletu gruntowego:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta^s \cdot \rho_s) + \nabla \cdot (\rho_s \cdot \theta^s \cdot v^s) = 0 \quad (5.14)$$

Zawartość objętościową szkieletu gruntowego można wyrazić w funkcji porowatości:

$$\theta^s = \frac{V_s}{V} = \frac{V - V_p}{V} = 1 - n \quad (5.15)$$

Co prowadzi do zapisu (5.15)  $\rightarrow$ (5.14):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s \cdot (1 - n)) + \nabla \cdot (\rho_s \cdot (1 - n) \cdot v^s) = 0 \quad (5.16)$$

Założmy, że ziarna szkieletu gruntowego są nieściśliwe, czyli  $\rho_s = \text{constans}$ . Wówczas równanie (5.16) po obustronnym podzieleniu przez  $\rho_s$  sprowadza się do:

$$\frac{\partial}{\partial t}(1 - n) + \nabla \cdot ((1 - n) \cdot v^s) = 0 \quad (5.17)$$

Korzystając z reguł różniczkowania sumy i iloczynu funkcji możemy (5.17) przekształcić następująco:

$$-\frac{\partial n}{\partial t} - v^s \cdot \nabla \cdot n + (1 - n) \cdot \nabla \cdot v^s = 0 \quad (5.18)$$

Z czego wynika, że:

$$\nabla \cdot v^s = \frac{1}{(1-n)} \cdot \left( \frac{\partial n}{\partial t} + v^s \cdot \nabla \cdot n \right) = \frac{1}{(1-n)} \cdot \frac{D^s n}{Dt} \quad (5.19)$$

gdzie:

$\frac{D^s n}{Dt} = \left( \frac{\partial n}{\partial t} + v^s \cdot \nabla \cdot n \right)$  - oznacza pochodną materialną względem poruszającego się szkieletu. W przypadku małych prędkości deformacji uprawnione jest przybliżenie:

$$\frac{D^s n}{Dt} \approx \frac{\partial n}{\partial t} \quad (5.20)$$

Podstawiając (5.20)  $\rightarrow$ (5.19) i na podstawie zależności  $n = \frac{e}{1+e}$  otrzymujemy:

$$\nabla \cdot v^s = \frac{1}{(1-n)} \cdot \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{(1+e)} \cdot \frac{\partial e}{\partial t} \quad (5.21)$$

Z prawa zachowania masy dla wody (5.12) i przy założeniu, że woda jest nieściśliwa, otrzymujemy – po podzieleniu równania (5.12) stronami przez  $\rho_w$ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\theta \cdot v^w) + s^{**} = 0 \quad (5.22)$$

Prędkość wody względem zewnętrznej powierzchni ograniczającej A rozłożyć możemy na sumę prędkości składowych, tj. prędkości szkieletu gruntowego  $v^s$  względem powierzchni A i prędkości wody względem szkieletu  $v^{ws}$ :

$$v = \theta \cdot v^w = \theta \cdot v^{ws} + \theta \cdot v^s = q^w + \theta \cdot v^s \quad (5.23)$$

gdzie:

$$\theta \cdot v^{ws} = q^w = -K \cdot \nabla \psi_C \quad (5.24)$$

Wzór (5.24) wyraża prędkość Darcy odniesioną do szkieletu gruntowego, w którym  $K$  – jest tensorowym współczynnikiem filtracji, a  $\psi_C$  oznacza całkowity potencjał wody gruntowej (jak w równaniu 3.7)

Podstawiając (5.23) i (5.24) →(5.22) otrzymujemy:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\theta \cdot v^s) + \nabla \cdot (-K \cdot \nabla \psi_C) + s^{**} = 0 \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v^s \nabla \cdot \theta + \theta \cdot \nabla \cdot v^s + \nabla \cdot (-K \cdot \nabla \psi_C) + s^{**} = 0 \quad (5.26)$$

Pomijając w równaniu (5.26) człon wyrażający prędkość deformacji szkieletu  $[v^s \nabla \cdot \theta^w]$ , otrzymujemy:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta \cdot \nabla \cdot v^s + \nabla \cdot (-K \cdot \nabla \psi_C) + s^{**} = 0 \quad (5.27)$$

Wykorzystując przekształcone powyżej równie zachowania masy dla szkieletu gruntowego, (5.21)→(5.27) możemy napisać:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta \cdot \frac{1}{(1+e)} \cdot \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (-K \cdot \nabla \psi_C) + s^{**} = 0 \quad (5.28)$$

$$\frac{1}{(1+e)} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\theta(1+e)) + \nabla \cdot (-K \cdot \nabla \psi_C) + s^{**} = 0 \quad (5.29)$$

Co przy założeniu izotropowości ośrodka gruntowego można zapisać również w formie:

$$\frac{d\theta}{dt} + \theta \cdot \frac{1}{(1+e)} \cdot \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (-k(h_s) \cdot \nabla \psi_C) + s^{**} = 0 \quad (5.30)$$

Powyższe równanie wykorzystano np. w artykule Navarro i inni (2009a). Inni autorzy zaniebują człon  $\theta \cdot \frac{1}{(1+e)} \cdot \frac{\partial e}{\partial t}$  (np. Vu 2002, Vu i Fredlund 2004,2006) i podają równanie przepływu wody w następującej formie:

$$\frac{m_1^w}{m_1^s} \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial t} + \left( m_2^w - \frac{m_1^w m_2^s}{m_1^s} \right) \frac{\partial \psi_m}{\partial t} - \nabla \left[ k_w(\psi_m) \nabla \left( \frac{u_w}{\gamma_w} + z \right) \right] = 0 \quad (5.31)$$

gdzie:  $m_1^s, m_2^s$  – współczynniki ścisłości objętościowej gruntu zdefiniowane wzorami (4.17) i (4.18),  $m_1^w, m_2^w$  – współczynniki opisujące zmiany wilgotności objętościowej gruntu  $\theta$  odpowiednio przy zmianach naprężenia netto i ssania matrycowego:

$$m_1^w = \frac{d\theta}{d\bar{\sigma}}, \quad m_2^w = \frac{d\theta}{d\psi_m} \quad (5.32a,b)$$

$k_w$  – współczynnik przewodności hydraulicznej gruntu (zależny od ssania),  $\gamma_w$  – ciężar właściwy wody.



W kolejnym rozdziale pracy opisana zostanie autorska metoda rozwiązania numerycznego przedstawionych powyżej równań (5.9) i (5.30).



## 6. Rozwiązanie numeryczne równania przepływu metodą objętości skończonych schematem jawnym

Rozwiązanie równań przepływu wody w strefie nienasyconej gruntu, w formie uwzględniającej zmienność porowatości ośrodka (np. 5.30) jak i w wersji uproszczonej (np. 5.7, 5.8, 5.9), jest trudne do przeprowadzenia drogą analityczną ze względu na postać równań (quasiliniowe typu parabolicznego) jak i złożoność oraz silnie nieliniową zależność między funkcjami składowymi i ssaniem gruntu ( $h_s(\theta)$ ;  $k(h_s)$ ). W praktyce stosuje się numeryczne metody rozwiązań, a opracowane dla szczególnych warunków przepływu rozwiązania analityczne wykorzystuje się głównie do walidacji zastosowanych metod obliczeniowych (np. Tracy 2006). Numeryczne rozwiązanie równań przepływu polega na tzw. dyskretyzacji obszaru rozwiązania, tj. na zamianie ciągłego obszaru rozwiązania na obszar punktowy (tzw. dyskretyzacja przestrzenna), a następnie na przybliżeniu wartości szukanej funkcji w wyznaczonych punktach rozwiązania (tzw. węzłach) w wyznaczonych odstępach czasu (dyskretyzacja czasowa).

Ze względu na sposób wyliczania szukanych wartości funkcji w węzłach, stosowane do rozwiązywania równań przepływu schematy obliczeniowe można podzielić na tzw. jawne i niejawne. Schemat jawny polega na prowadzeniu obliczeń na podstawie znanych, wyliczonych we wcześniejszych krokach czasowych wartościach zmiennych. Schematy, w których poszukiwane wartości funkcji w węzłach określają nieznanne w danym kroku czasowym (choć wzajemnie ze sobą powiązane) składowe równań nazywa się niejawnymi schematami obliczeniowymi. Prowadzenie obliczeń metodami niejawnymi wiąże się z koniecznością rozwiązywania układów równań opisujących wzajemne relacje między zmiennymi, lecz ich zaletą jest cecha stabilności, przez co możliwe jest prowadzenie obliczeń przy relatywnie długich krokach czasowych i mniejszej ilości węzłów w stosunku do metod jawnych. Metody jawne są stabilne warunkowo – dla zapewnienia zbieżności z rozwiązaniem dokładnym wymagają stosowania ograniczeń długości kroku czasowego jak i dostatecznie gęstej siatki przepływu, co wiąże się z dużą ilością (choć stosunkowo prostych) obliczeń. Zaletą jawnych metod obliczeniowych jest możliwość tzw. parallelizacji, tj. podziału obszaru rozwiązania na mniejsze części i prowadzenie obliczeń na osobnych komputerach.

Równania przepływu w strefie nienasyconej rozwiązywane są najczęściej z wykorzystaniem dyskretyzacji przestrzennej metodami różnic skończonych, elementów skończonych lub objętości skończonych (Szymkiewicz 2013). W dotychczas proponowanych metodach rozwiązań przeważają niejawne schematy dyskretyzacji czasowej. Dostępne są gotowe programy, np.: ABAQUS (np. Indraratna i inni 2006, Zhou 2011), Hydrus (np. Vrugt i inni 2001a,b), PDEase2D i FlexPDE (np. Vu 2002), CRISP i SEEP/W (np. Morsi 2010). W ostatnich latach opracowywane są również metody obliczeniowe oparte o schematy jawne (np. Navarro i inni 2009a,b, Anagnostopoulos i Burlando 2012).

Również poniżej zaprezentowana zostanie jawna metoda obliczeń przepływu w strefie nienasyconej.

## 6.1. Ogólny opis metody

Zaproponowana metoda rozwiązania równania przepływu w strefie nienasyconej polega na podziale obszaru rozwiązania na tzw. objętości skończone i prowadzeniu obliczeń wg schematu jawnego, w którym w kolejnych odstępach czasu ( $\Delta t$ ) wyznaczone będą wartości wilgotności objętościowej  $\theta$  gruntu. Zależności przybliżające wartości wilgotności dla kolejnych kroków czasowych opracowane zostały na podstawie równań opisu przepływu wg Richardsa w formie nieuwzględniającej wpływu zmienności porowatości na nasycenie (5.7 i 5.9) jak i z uwzględnieniem wpływu zmiany porowatości (5.28 i 5.30) w opisany poniżej sposób.

Przekształćmy równanie (5.7) pozostawiając po lewej stronie pochodną wilgotności objętościowej po czasie, wówczas zgodnie z (3.18) możemy zapisać:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\nabla \cdot (-K \cdot \nabla \psi_c) - s^{**} = -\nabla \cdot \vec{v} - s^{**} \quad (6.1)$$

gdzie  $\vec{v}$  oznacza wektor prędkości wody gruntowej wg Darcy, a  $s^{**}$  to wydatek źródła przypadający na nieskończenie małą objętość  $dv$

Powyższe równanie jest zapisem zależności w formie różniczkowej więc chcąc zastosować je do wydzielonej z obszaru rozwiązania objętości  $V$  należy je scałkować stronami, wówczas:

$$\int_V \frac{d\theta}{dt} dv = \int_V (-\nabla \cdot \vec{v}) dv - \int_V s^{**} dv \quad (6.2)$$

Założmy, że dla danej chwili czasu w całej objętości  $V$  jest taka sama wartość wilgotności objętościowej (dyskretyzacja przestrzenna), wówczas:

$$\frac{d\theta}{dt} \int_V dv = \int_V (-\nabla \cdot \vec{v}) dv - \int_V s^{**} dv \quad (6.3)$$

Co po scałkowaniu prowadzi do zależności:

$$\frac{d\theta}{dt} V = \int_V (-\nabla \cdot \vec{v}) dv - S^* \quad (6.4)$$

gdzie  $S^*$  wyraża objętość wody, która ubywa z objętości  $V$  (patrz rys. 5.1) w jednostkowym czasie (wydatek źródłowy).

Zakładając, że pochodną wilgotności objętościowej po czasie  $\frac{d\theta}{dt}$  można przybliżyć ilorazem różnicowym  $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$  (dyskretyzacja czasowa) zmianę wilgotności w kolejnych krokach czasowych symulacji można przybliżyć wyrażeniem

$$\theta^{t+\Delta t} = \theta^t - \frac{1}{V} [\int_V (\nabla \cdot \vec{v}) dv + S^*] \cdot \Delta t \quad (6.5)$$

W powyższym równaniu występuje człon związany z dywergencją pola prędkości wewnątrz objętości  $V$ , który zgodnie z prawem Gaussa można wyrazić poprzez strumień wektora prędkości przez powierzchnię ograniczającą objętość  $V$ , wówczas

$$\theta^{t+\Delta t} = \theta^t - \frac{1}{V} [\int_A \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA + S^*] \cdot \Delta t \quad (6.6)$$

gdzie  $A$  oznacza powierzchnię ograniczającą objętość  $V$ , a  $\vec{n}$  wektor normalny do powierzchni  $A$  skierowany na zewnątrz (jak na rys. 5.1).

Analogiczne przekształcenia można przeprowadzić dla równania opisującego przepływ z uwzględnieniem wpływu odkształcenia na zmiany wilgotności objętościowej (5.28), co przy dodatkowym założeniu że w każdym punkcie objętości  $V$  jest taka sama porowatość, oraz że  $\frac{de}{dt}$  można przybliżyć poprzez  $\frac{\Delta e}{\Delta t}$  prowadzi do wyrażenia:

$$\theta^{t+\Delta t} = \theta^t - \frac{1}{V} [\int_A \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA + S^*] \cdot \Delta t - \theta^* \cdot \frac{\Delta e}{(1+e)} \quad (6.7)$$

w którym z powodu przybliżenia pochodnej wilgotności objętościowej po czasie  $\frac{d\theta}{dt}$  ilorazem różnicowym  $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ ,  $\theta^*$  oznacza pewną wartość wilgotności w przedziale czasu pomiędzy  $t$  a  $t+\Delta t$  (przy czym w proponowanej metodzie zakłada się, że  $\theta^* \rightarrow \theta^{t+\Delta t}$  co zostanie omówione w dalszej części pracy).

Oba powyższe równania (6.6) i (6.7) stanowią zależności wykorzystywane do obliczeń zaproponowaną w niniejszej pracy metodą objętości skończonych, której istota polega na przybliżeniu strumienia wektora prędkości przez powierzchnię  $A$  ograniczającą objętość  $V$  (jak na rys. 5.1) wyrażeniem:

$$\int_A \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA = \sum_i P_i \cdot v_{D,i} \quad (6.8)$$

w którym przyjęto następujące oznaczenia:

$\vec{n}$  – jednostkowy wektor skierowany normalnie do powierzchni  $A$

$\vec{v}$  – wektor prędkości wody gruntowej wg Darcy.

$P_i$  – oznacza składowe pole powierzchni  $A$  ( $\sum_i P_i = A$ )

$v_{D,i}$  - oznacza składową prędkości Darcy prostopadłą do powierzchni  $P_i$ , określoną dodatnio, gdy wektor prędkości Darcy jest skierowany na zewnątrz objętości  $V$  lub ujemnie, gdy wektor prędkości Darcy skierowany jest do wewnątrz tej objętości.

Ostateczne zatem, zapisując równania (6.6) i (6.7) z uwzględnieniem (6.8) otrzymamy następujące formuły dla dowolnej objętości  $V$  z obszaru rozwiązania:

- dla symulacji bez uwzględnienia wpływu odkształcenia na zmiany wilgotności objętościowej w kolejnych krokach czasowych - (6.8)  $\rightarrow$  (6.6):

$$\theta^{t+\Delta t} = \theta^t - \frac{1}{V} [\sum_i P_i \cdot v_{D,i}^{t+\Delta t} + S^*] \cdot \Delta t \quad (6.09)$$

- oraz, dla symulacji przepływu z uwzględnieniem wpływu odkształcenia na zmiany wilgotności objętościowej w kolejnych krokach czasowych – (6.8)  $\rightarrow$  (6.7):

$$\theta^{t+\Delta t} = \theta^t - \frac{1}{V} [\sum_i P_i \cdot v_{D,i}^{t+\Delta t} + S^*] \cdot \Delta t - \theta^* \cdot \frac{\Delta e^{t,t+\Delta t}}{(1+e^t)} \quad (6.10)$$

W obu powyższych równaniach (6.09) i (6.10) składowe prędkości w kolejnych krokach czasowych  $v_{D,i}^{t+\Delta t}$  mogą być określane na podstawie zmiennych określonych dla  $\theta^t$  lub  $\theta^{t+\Delta t}$  – szerzej zostanie to omówione w punkcie 6.2 pracy.

Dla zobrazowania przyjętej metodyki przybliżania strumienia wektora prędkości oraz wilgotności objętościowej w kolejnych krokach czasowych przyjmijmy, że obszar rozwiązania równania przepływu stanowi przestrzeń trójwymiarowa, która podzielona została na sześciennie objętości skończone, z których każda reprezentowana jest przez punkt węzłowy leżący w jej geometrycznym środku. Przeanalizujemy bilans strumieni wody dopływający do pojedynczej, dowolnie wybranej objętości  $V_X$  z obszaru rozwiązania. Dla ułatwienia opisu przyjmijmy, że ta wybrana objętość reprezentowana jest przez węzeł oznaczony  $X$ , a przyległe węzły oznaczono numerami od 1 do 6 wówczas zgodnie z równaniem (6.8) i

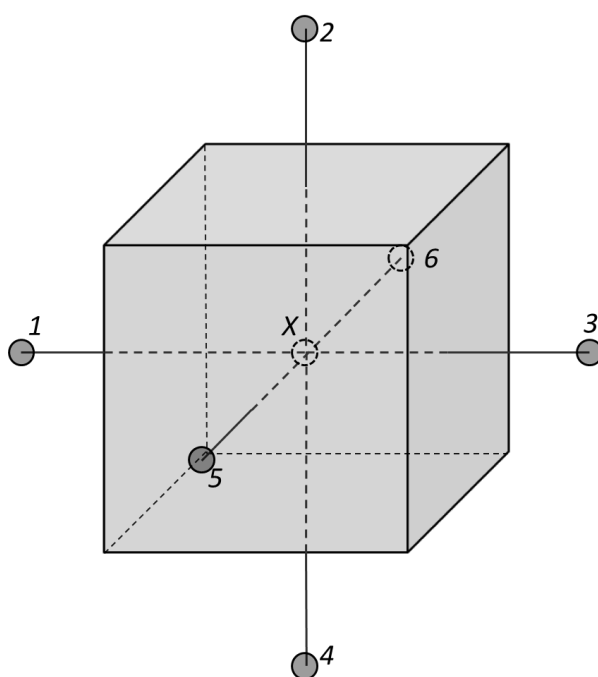


oznaczeniami na schemacie poniżej (rys. 6.1) strumień wektora prędkości dla tej pojedynczej objętości, określi wyrażenie:

$$\int_A \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA = \sum_{i=1}^6 P_{X-i} \cdot v_{D,X-i} \quad (6.11)$$

w którym:  $P_{X-i}$  – powierzchnia przez którą przepływa woda z węzła  $X$  do węzła  $i$

$v_{D,X-i}$  – skalar prędkości Darcy przy przepływie z węzła  $X$  do węzła  $i$ , określony (analogicznie jak w równaniu 6.9) dodatnio, gdy strumień wody wypływa z objętości  $V_X$  oraz ujemnie, gdy woda wpływa do tej objętości



Rys. 6.1. Przykładowy schemat przepływu przez sześcienną objętość skończoną

W przypadku opisanym powyżej wartości wilgotności objętościowej określone dla punktu węzłowego  $X$  w kolejnych krokach czasowych przybliży wyrażenie:

- dla symulacji bez uwzględnienia wpływu odkształcenia na zmiany wilgotności objętościowej w kolejnych krokach czasowych – (w oparciu o równanie 6.09):

$$\theta_X^{t+\Delta t} = \theta_X^t - \frac{1}{V_X} [\sum_{i=1}^6 P_{X-i} \cdot v_{D,X-i}^{t+\Delta t} + S^*] \cdot \Delta t \quad (6.12)$$

- oraz, dla symulacji przepływu z uwzględnieniem wpływu odkształcenia na zmiany wilgotności objętościowej w kolejnych krokach czasowych – (w oparciu o równanie 6.10):

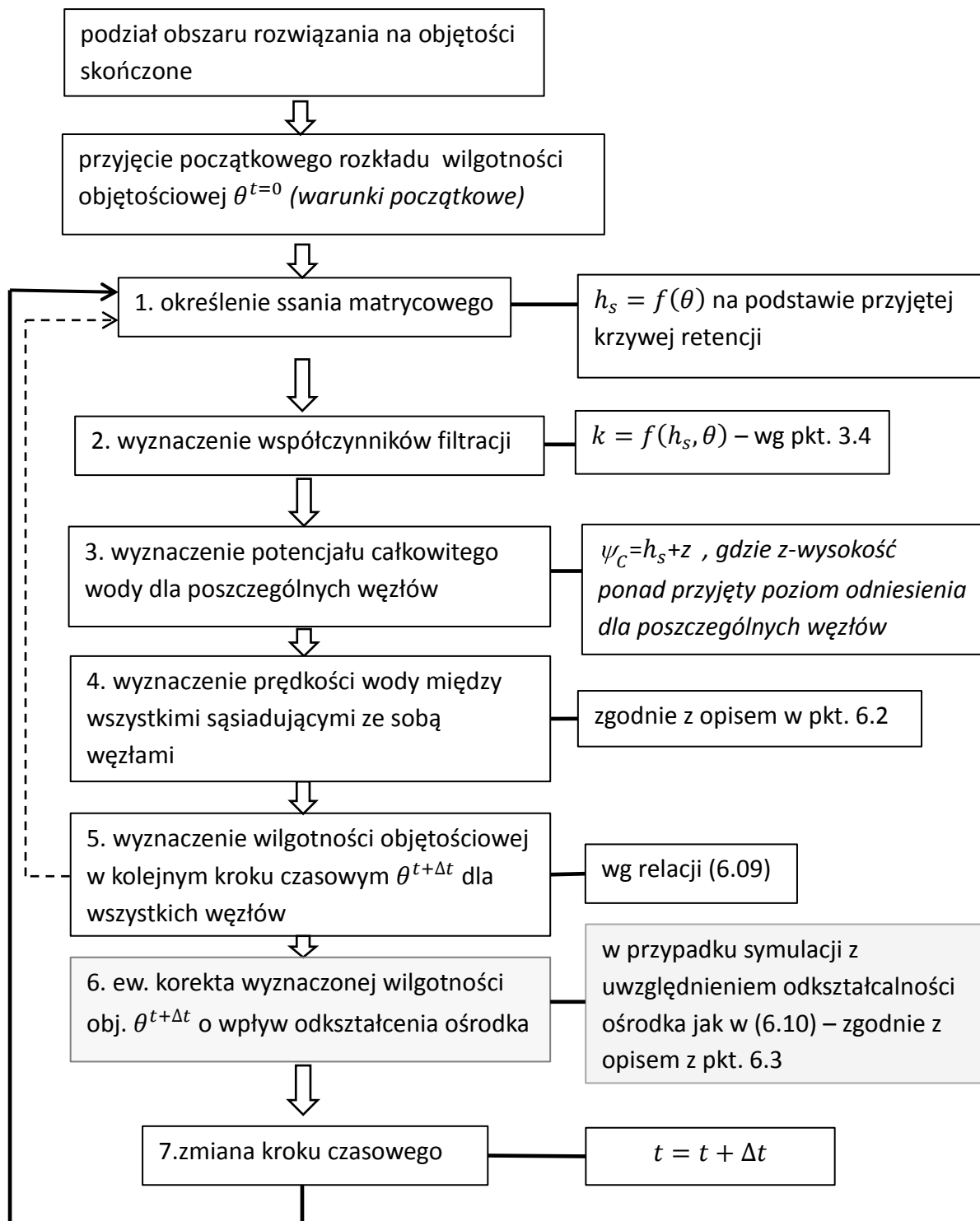


$$\theta_X^{t+\Delta t} = \theta_X^t - \frac{1}{V_X} \left[ \sum_{i=1}^6 P_{X-i} \cdot v_{D,X-i}^{t+\Delta t} + S^* \right] \cdot \Delta t - \theta_A^* \cdot \frac{\Delta e^{t,t+\Delta t}}{(1+e^t)} \quad (6.13)$$

gdzie:  $V_X$  - oznacza sześcienna objętość skończoną reprezentowaną przez węzeł  $X$

Ponieważ proponowana metoda wykorzystuje jawny schemat obliczeniowy, wartości wilgotności objętościowej dla całego obszaru rozwiązania w kolejnym kroku czasowym wyznaczone są bezpośrednio na podstawie zmiennych określonych dla znanej wilgotności objętościowej z kroku poprzedzającego. Sposób prowadzenia wyliczeń obrazuje poniższy, uogólniony dla metody schemat blokowy (rys.6.2):





Rys. 6.2. Ogólny schemat blokowy obliczeń dla przyjętej metody objętości skończonych

uwaga: kroki nr 4. i 6. w powyższym schemacie zostaną szerzej omówione w dalszej części pracy (pkt-y 6.2 i 6.3). Linia przerywaną zaznaczone są iteracje kolejnych przybliżeń  $\theta^{t+\Delta t}$  w przypadku wyliczania prędkości  $v_D^{t+\Delta t}$  na podstawie całkowitego potencjału oraz współczynnika filtracji wyznaczonych dla  $\theta^{t+\Delta t}$  - zgodnie z opisem w punkcie 6.2

## 6.2. Wyznaczanie prędkości wody w ośrodku gruntowym

W równaniach (6.09) i (6.10), które aproksymują wartości wilgotności objętościowej w kolejnych krokach czasowych wg proponowanej w tej pracy metody, pole prędkości wody w obszarze rozwiązania (w ogólnym przypadku określone równaniem 3.18) jest przybliżane skalarami prędkości Darcy ( $v_D$ ) między punktami węzłowymi sąsiadującymi ze sobą objętości skończonych. Prędkości te wyliczane są na podstawie wartości potencjałów wody w punktach węzłowych i odległości pomiędzy tymi punktami. Dla zobrazowania sposobu wyznaczania prędkości wody między punktami węzłowymi wygodnie jest posłużyć się przykładem węzła  $X$  (jak na rys. 6.1). W przypadku założenia izotropowości ośrodka gruntowego, wartość prędkości Darcy między węzłami możemy przybliżyć wyrażeniem (w oparciu o równanie 3.19):

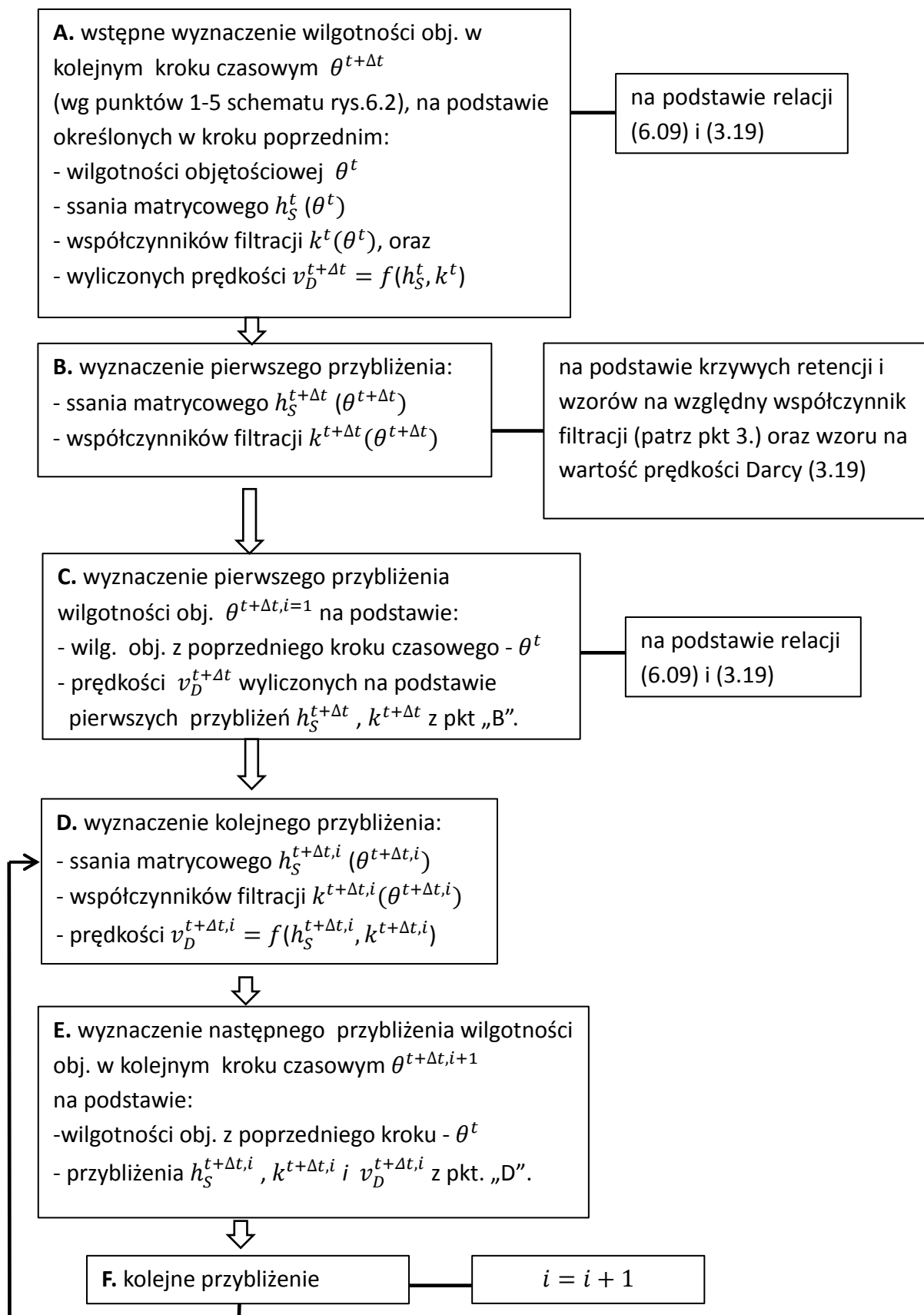
$$v_{D,X-i}^{t+\Delta t} = -k_{X-i}(h_s) \cdot \nabla(z + h_s)_{X-i} \quad (6.14)$$

gdzie:  $k_{X-i}(h_s)$  – współczynnik filtracji, zdefiniowany jak w równaniu (3.20) i uśredniony dla przepływu między węzłami  $X$  oraz  $i$

$\nabla(z + h_s)_{X-i}$  - gradient potencjału wyznaczony dla przepływu między węzłami  $X$  oraz  $i$   
 $z$ - wysokość ponad przyjęty poziom odniesienia.

Wartości ssania gruntu  $h_s$  oraz współczynnika filtracji są zależne od wilgotności gruntu. W przyjętej metodzie wyznaczane są one w oparciu o wartości  $\theta$ , na podstawie krzywych retencji i relacji opisujących współczynniki filtracji w strefie nienasyconej gruntu (punkty 3.3 i 3.4 pracy). W powyższym równaniu (6.14) celowo pominięto indeksację czasową dla składowej potencjału  $h_s$  oraz współczynnika filtracji, ponieważ mogą być określane na podstawie wilgotności wyznaczonej w poprzednim kroku czasowym  $\theta^t$  lub poszukiwanej wilgotności w kroku bieżącym  $\theta^{t+\Delta t}$ .

Oczywiście bez wyznaczonego rozkładu  $\theta^{t+\Delta t}$  nie można jednoznacznie określić odpowiadających mu wartości ssania matrycowego, ani współczynników filtracji w poszczególnych węzłach siatki przepływu, można je jednak wyznaczyć metodą kolejnych przybliżeń, rozpoczynając od wyliczenia prędkości w oparciu o potencjał wody i współczynniki filtracji odpowiadające wilgotności objętościowej w kroku poprzednim  $\theta^t$ . Proponowany sposób prowadzenia kolejnych przybliżeń przedstawia poniższy schemat (rys.6.3), stanowiący rozwinięcie schematu metody (rys. 6.2) w zakresie punktów od 1-5.



Rys. 6.3. Schemat blokowy wyliczeń wilgotności obj. dla kolejnego kroku czasowego

W przypadku prowadzenia obliczeń na podstawie prędkości wyznaczonych z poprzedniego kroku czasowego powyższy schemat sprowadza się tylko do realizacji w punkcie A. W przypadku prowadzenia obliczeń w oparciu o prędkości wyznaczone na podstawie ssania gruntu oraz współczynników filtracji wyznaczonych dla wilgotności objętościowej z bieżącego kroku czasowego, schemat realizowany jest od punktu A do F. Kolejne przybliżenia między punktami D-E-F prowadzone są do momentu, w którym  $\theta^{t+\Delta t, i+1} \approx \theta^{t+\Delta t, i}$  (lub odpowiadające im  $h_s(\theta^{t+\Delta t, i+1}) \approx h_s(\theta^{t+\Delta t, i})$ ), zatem osiągnięty zostaje stan w którym nasycenie w kolejnym kroku czasowym wyznaczone będzie w oparciu o nasycenie z kroku poprzedniego i prawidłowo estymowane współczynniki filtracji i potencjały wody we wszystkich punktach węzłowych dla bieżącego kroku czasowego.

### 6.3. Symulacja przepływu z uwzględnieniem wpływu odkształcenia na zmiany wilgotności w kolejnych krokach czasowych

Symulację rozwiązania prowadzić można z zaniedbaniem wpływu odkształcenia na zmiany  $\theta$  dla kolejnych kroków czasowych (tj. z pominięciem kroku 6. ogólnego schematu blokowego metody rys. 6.2) - w oparciu o równanie (6.09):

$$\theta^{t+\Delta t} = \theta^t - \frac{1}{V} [\sum_i P_i \cdot v_{D,i}^{t+\Delta t} + S^*] \cdot \Delta t$$

lub uwzględniając wpływ odkształcenia na zmiany  $\theta$  dla kolejnych kroków czasowych (realizując wszystkie kroki od 1-7 schematu blokowego metody rys. 6.2). Obliczenia z uwzględnieniem wpływu odkształcenia ośrodka prowadzone są wg zależności (6.10):

$$\theta^{t+\Delta t} = \theta^t - \frac{1}{V} [\sum_i P_i \cdot v_{D,i}^{t+\Delta t} + S^*] \cdot \Delta t - \theta^* \cdot \frac{\Delta e^{t,t+\Delta t}}{(1+e^t)}$$

Porównując (6.09) z (6.10) łatwo zauważyć, że oba równania różnią się o człon:

$$\theta^* \cdot \frac{\Delta e^{t,t+\Delta t}}{(1+e^t)} \quad (6.15)$$

w którym (zgodnie z opisem równania 6.7)  $\theta^*$  jest wartością wilgotności obj. z przedziału pomiędzy  $t$  a  $t+\Delta t$ . Ta niejednoznaczność określenia wartości  $\theta^*$  wynika z zastosowania dyskretyzacji czasowej przy wyprowadzeniu formuły (6.7) na podstawie równania (5.28), tj. przybliżenia pochodnej nasycenia po czasie  $\frac{d\theta}{dt}$  ilorazem różnicowym  $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta^{t+\Delta t} - \theta^t}{\Delta t}$ . W prezentowanym schemacie obliczeniowym proponuje się, aby przyjmować  $\theta^* \rightarrow \theta^{t+\Delta t}$ .

Przy założeniu jak wyżej i na podstawie (6.09) i (6.10) można zapisać:



$$\theta'^{t+\Delta t} = \theta^{t+\Delta t} - \theta^{t+\Delta t} \cdot \frac{\Delta e^{t,t+\Delta t}}{(1+e^t)} \quad (6.16)$$

$$\theta'^{t+\Delta t} = \theta^{t+\Delta t} \left[ 1 - \frac{\Delta e^{t,t+\Delta t}}{(1+e^t)} \right] \quad (6.17)$$

gdzie:

$\theta'^{t+\Delta t}$  – oznacza pierwsze przybliżenie wartości wilgotności obj. wyznaczonej z uwzględnieniem zmiany porowatości

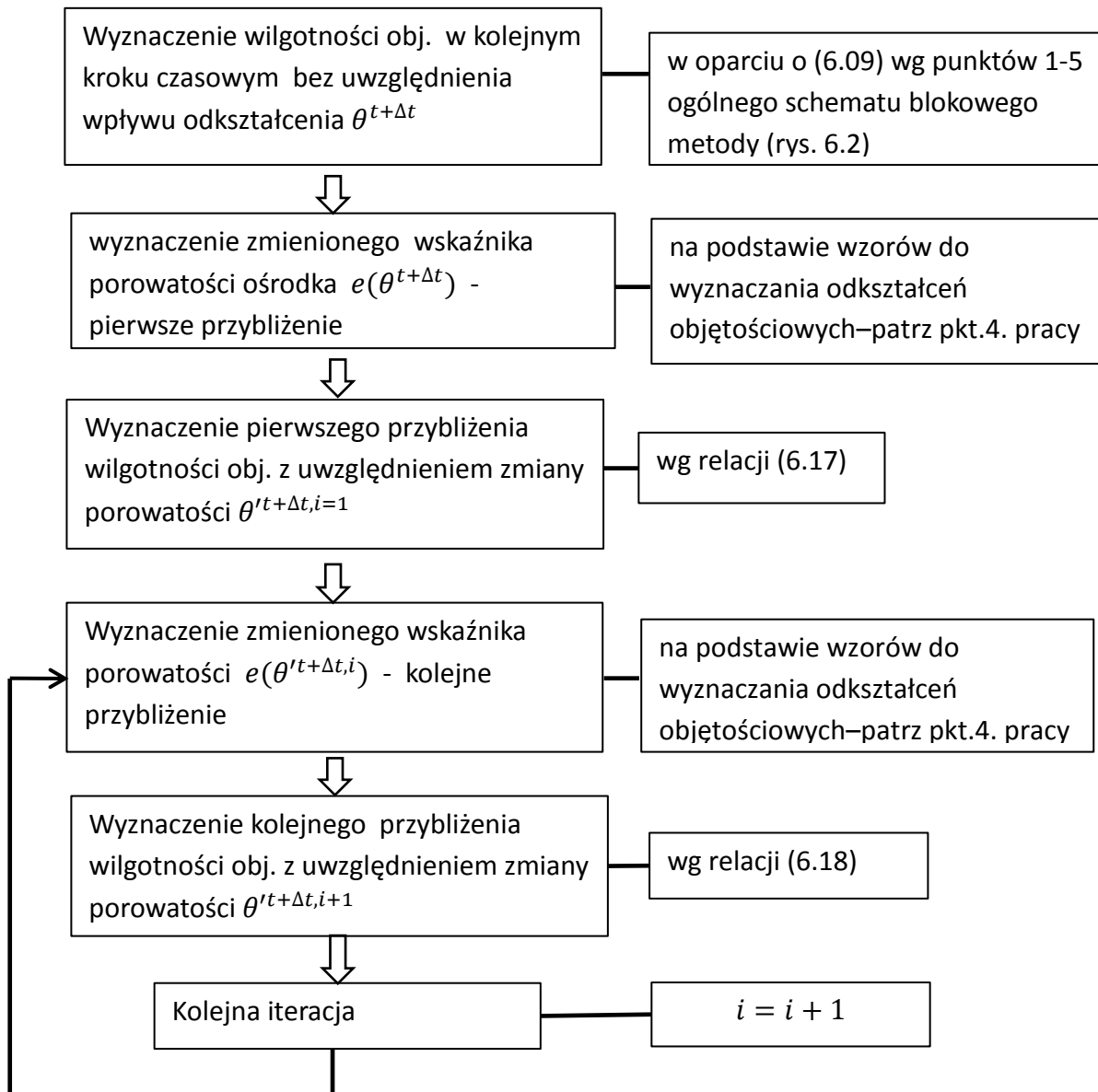
$\theta^{t+\Delta t}$  – oznacza wartość wilgotności obj. w kolejnym kroku wyznaczoną bez uwzględnienia zmiany porowatości

Oczywiście zmiana wilgotności obj. między  $\theta^{t+\Delta t}$ , a  $\theta'^{t+\Delta t}$  powoduje wtórną zmianę porowatości, możliwe jest zatem prowadzenie kolejnych przybliżeń skorygowanych wartości wilgotności obj. wg następującej reguły iteracyjnej:

$$\theta'^{t+\Delta t, i+1} = \theta'^{t+\Delta t, i} \left[ 1 - \frac{e^{(\theta'^{t+\Delta t, i})} - e^{(\theta'^{t+\Delta t, i-1})}}{[1+e^{(\theta'^{t+\Delta t, i-1})}]} \right] \quad (6.18)$$

Przy czym dla  $i=1$ ,  $\theta'^{t+\Delta t, i-1} = \theta^{t+\Delta t}$

Proponowany schemat blokowy prowadzenia wyliczeń wilgotności objętościowej z uwzględnieniem wpływu odkształcenia ośrodka dla poszczególnych węzłów siatki przepływu i w poszczególnych chwilach czasu prezentuje poniższy schemat (rys 6.4) będący rozwinięciem kroku 6. w ogólnym schemacie blokowym metody (rys. 6.2):



Rys. 6.4. Schemat blokowy wyliczeń wilgotności objętościowej z uwzględnieniem wpływu odkształcenia ośrodka

#### 6.4. Warunki początkowe i brzegowe

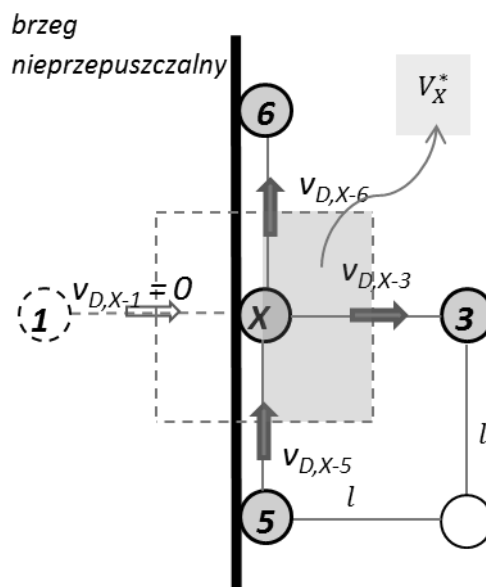
Rozwiązanie równania przepływu zaproponowaną metodą polega na wyznaczeniu wartości wilgotności objętościowej ośrodka gruntowego w kolejnych krokach czasowych. Przyjęta metoda jest schematem jawnym, czyli wartości wilgotności dla kolejnych kroków czasowych wyznaczone są na podstawie wilgotności i odpowiadających jej wartości ssania matrycowego oraz prędkości wody z kroku poprzedniego (lub prędkości wody wyznaczonych metodą iteracyjną – zgodnie z opisem z punktu 6.2). Z tego powodu, dla zadania warunków

początkowych, konieczne jest określenie wstępnego rozkładu wilgotności ( $\theta^{t=0}$ ) w całym obszarze rozwiązania (zgodnie z ogólnym schematem blokowym metody rys. 6.2).

W trakcie trwania symulacji niezbędne jest również zdefiniowanie warunków na brzegach obszaru rozwiązania. Najczęściej są to warunki Dirichleta lub Neumanna.

Zadanie warunku brzegowego typu Dirichleta polegać będzie na przyjęciu zadanej wartości wilgotności objętościowej w brzegowych punktach węzłowych.

Warunek brzegowy Neumanna wiąże się z przypadkiem brzegu nieprzepuszczalnego dla wody. Zadanie warunku Neumanna dla punktu węzłowego stykającego się z brzegiem nieprzepuszczalnym polega na „wyzeroowaniu”, w bilansie dopływu wody do objętości skończonej przez niego reprezentowanej, składowych strumieni o kierunkach prostopadłych do brzegu nieprzepuszczalnego (patrz rys. 6.5 poniżej).



Rys. 6.5. Przykładowy schemat „zerowania” strumieni dla węzła leżącego na brzegu nieprzepuszczalnym (warunek Neumanna)

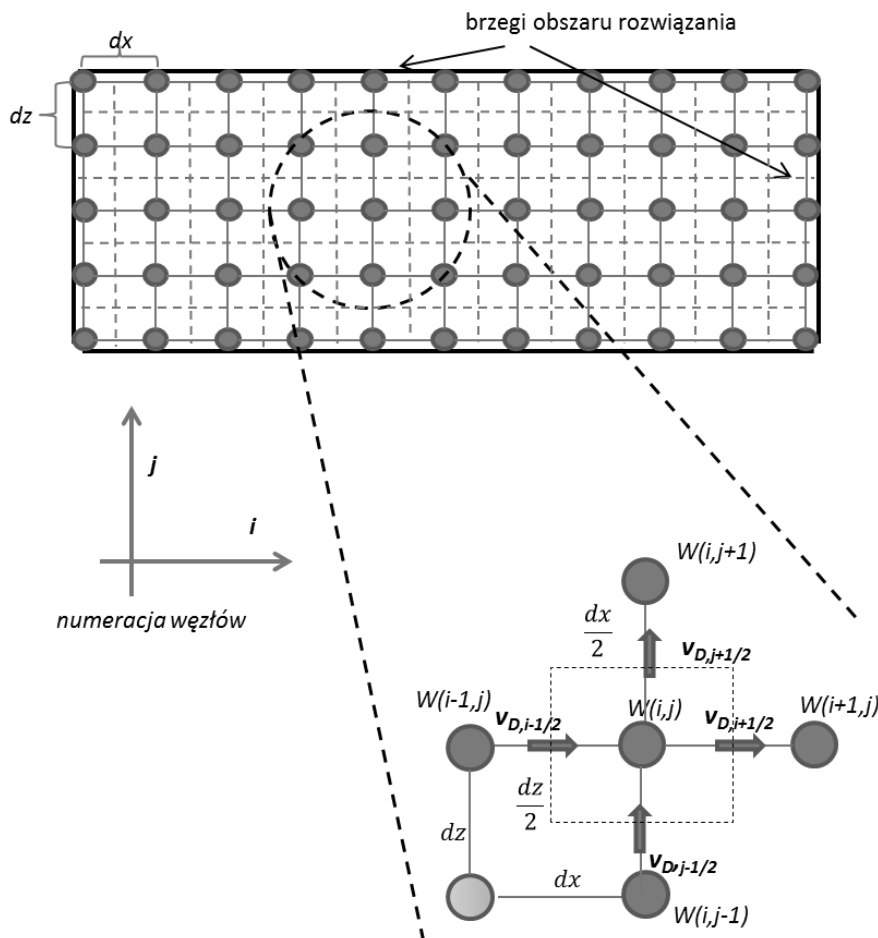
Na przykład – dla węzła X reprezentującego objętość sześcienną jak na rys. 6.1 (zgodnie z opisem z poprzedniego punktu 6.1), położonego na brzegu nieprzepuszczalnym (jak na rys. 6.5 stanowiącym rzut „z góry”, tj. wzdłuż osi węzłów 2-X-4), wyzerowaniu ulegnie prędkość  $v_{D,X-1}$ , a wilgotność objętościową w kolejnych krokach czasowych, wyliczaną wg punktów 1-5 schematu (rys. 6.2), przybliży wyrażenie (na podstawie relacji 6.09):

$$\theta_X^{t+\Delta t} = \theta_X^t - \frac{1}{V_X^*} [\sum_{i=2}^6 P_{X-i} \cdot v_{D,X-i}^{t+\Delta t} + S^*] \cdot \Delta t \quad (6.19)$$

gdzie:  $V_x^*$  - objętość skończona wyznaczona dla węzła leżącego na brzegu nieprzepuszczalnym (patrz rys. 6.5)

### 6.5. Metodyka obliczeń przepływu dwuwymiarowego płaskiego

Przedstawiony poniżej schemat dla przepływu dwuwymiarowego jest szczególnym przypadkiem ogólnego schematu obliczeniowego zaproponowanej metody (realizowanego w oparciu o ogólny schemat blokowy metody rys. 6.2), w którym przyjęto płaski obszar rozwiązania, reprezentowany przez prostokątną siatkę przepływu o rozmiarach  $dx, dz$  - wg poniższego rysunku (rys. 6.6).



Rys. 6.6. Schemat obszaru rozwiązania dla przepływu dwuwymiarowego – prostokątna siatka punktów węzłowych



Wyliczenia wartości wilgotności  $\theta$  (realizowane w krokach 1-5 schematu rys. 6.2) prowadzone są w oparciu o równanie (6.09):

$$\theta^{t+\Delta t} = \theta^t - \frac{1}{V} [\sum_i P_i \cdot v_{D,i}^{t+\Delta t} + S^*] \cdot \Delta t$$

które przy wyżej opisanej geometrii obszaru rozwiązania (rys.6.6), tj.:

$V = dx \cdot dz$  – objętość skończona

$P_i$  - składowe powierzchni ograniczającej objętość  $V$

$$P_i = \begin{cases} dz, & \text{dla przepływów w kier. węzłów } w(i-1, j) \text{ i } w(i+1, j) \\ dx, & \text{dla przepływów w kier. węzłów } w(i, j-1) \text{ i } w(i, j+1) \end{cases}$$

oraz, gdy prędkości wody określane są w kierunku rosnącej numeracji węzłów (zgodnie ze strzałkami jak na rys. 6.6), przekształca się w następującą zależność dla węzła  $w(i, j)$ :

$$\theta_{w(i,j)}^{t+\Delta t} = \theta_{w(i,j)}^t + \frac{\Delta t}{dx \cdot dz} \left[ dz \cdot \left( v_{D,i-\frac{1}{2}}^{t+\Delta t} - v_{D,i+\frac{1}{2}}^{t+\Delta t} \right) + dx \left( v_{D,j-\frac{1}{2}}^{t+\Delta t} - v_{D,j+\frac{1}{2}}^{t+\Delta t} \right) - S^* \right] \quad (6.20)$$

gdzie:  $\theta_{w(i,j)}^{t+\Delta t}, \theta_{w(i,j)}^t$  – nasycenie w punkcie węzłowym  $w(i, j)$  w kolejnych krokach czasowych

$v_{D,i-\frac{1}{2}}^{t+\Delta t}, v_{D,j-\frac{1}{2}}^{t+\Delta t}$  – prędkości dopływów z węzłów  $w(i-1, j)$  i  $w(i, j-1)$

$v_{D,i+\frac{1}{2}}^{t+\Delta t}, v_{D,j+\frac{1}{2}}^{t+\Delta t}$  – prędkość odpływów do węzłów  $w(i+1, j)$  i  $w(i, j+1)$

$S^*$  - funkcja źródłowa (ubytek) w objętości reprezentowanej przez węzeł  $w(i, j)$

Prędkości strumieni przepływających przez poszczególne punkty węzłowe  $w(i, j)$  siatki przepływu wyznaczone są w oparciu o wzór (3.19), co w przypadku przedstawionej na rys. 6.6 geometrii obszaru rozwiązania sprowadza się do zapisów:

- dla strumienia poziomego dopływającego z węzła  $w(i-1, j)$  do węzła  $w(i, j)$ :

$$v_{D,i-\frac{1}{2}}^{t+\Delta t} = -1 \cdot k_{i-\frac{1}{2}} \cdot \frac{h_{(i,j)} - h_{(i-1,j)}}{dx} \quad (6.21)$$

gdzie:  $k_{i-\frac{1}{2}}$  – uśredniony wsp. filtracji przy przepływie z węzła  $w(i-1, j)$  do  $w(i, j)$

$h_{(i,j)}, h_{(i-1,j)}$  – wysokości całkowitego potencjału wody w węzłach  $w(i, j)$  i  $w(i-1, j)$ . Indeksację czasową dla potencjału i współczynnika filtracji pominięto celowo, ponieważ mogą być określane na podstawie wilgotności wyznaczonej w poprzednim kroku czasowym ( $\theta^t$ ) lub szukanej w kroku bieżącym ( $\theta^{t+\Delta t}$ ) - zgodnie z opisem w punkcie 6.2

- i analogicznie dla pozostałych dopływów (i odpływów) do węzła  $w(i,j)$ :

$$\text{- odpływ do } w(i+1,j) \quad v_{D,i+\frac{1}{2}}^{t+\Delta t} = -1 \cdot k_{i+\frac{1}{2}} \cdot \frac{h_{(i+1,j)} - h_{(i,j)}}{dx} \quad (6.22)$$

$$\text{- odpływ do } w(i,j+1) \quad v_{D,j+\frac{1}{2}}^{t+\Delta t} = -1 \cdot k_{j+\frac{1}{2}} \cdot \frac{h_{(i,j+1)} - h_{(i,j)}}{dz} \quad (6.23)$$

$$\text{- dopływ z } w(i,j-1) \quad v_{D,j-\frac{1}{2}}^{t+\Delta t} = -1 \cdot k_{j-\frac{1}{2}} \cdot \frac{h_{(i,j)} - h_{(i,j-1)}}{dz} \quad (6.24)$$

Uśredniony współczynnik filtracji obliczany jest jako średnia arytmetyczna z wartości w węzłach między którymi wyliczana jest prędkość przepływu, np. dla przepływu między węzłami  $w(i,j)$  i  $w(i+1,j)$ :

$$k_{i+\frac{1}{2}} = \frac{k_{(i,j)} + k_{(i+1,j)}}{2} \quad (6.25)$$

gdzie:  $k_{(i,j)}$ ,  $k_{(i+1,j)}$  oznaczają wartości współczynnika filtracji dla węzłów  $w(i,j)$  i  $w(i+1,j)$

Wybór sposobu uśredniania może mieć wpływ na uzyskiwane wyniki (Szymkiewicz 2009), jednak w prezentowanych w niniejszej pracy przykładach, przyjęcie średniej arytmetycznej pozwalało na uzyskiwanie zadowalającej dokładności rozwiązania.

W sytuacji, w której wyliczona na podstawie (6.20) wartość  $\theta_{w(i,j)}^{t+\Delta t}$  wykracza poza dopuszczalne wartości wilgotności (z przedziału od  $\theta_r$  do  $\theta_s$ ) należy ograniczyć długość kroku czasowego i powtórzyć obliczenia (dla wszystkich objętości siatki przepływu) lub przyjąć dopuszczalną wartość graniczną.

Realizacja pozostałych kroków (uwzględnienie wpływu odkształcenia na wilgotność, spełnienie warunków początkowych i brzegowych) odbywa się z sposób opisany w punktach 6.3 – 6.4. W dalszej części pracy schemat ten wykorzystywany będzie m. innymi do symulacji poboru wody przez szpaler drzew. Tego rodzaju symulacje wiążą się z uwzględnieniem poboru wody przez drzewa. W przypadku w którym jedyną funkcją źródłową w obszarze rozwiązania będzie funkcja poboru wody w strefie korzeniowej, składowa  $S^*$  w równaniu (6.20), określona dla każdej objętości skończonej  $V$  będzie równa:

$$S^* = \begin{cases} \int_V S dV & \text{dla objętości skończonej znajdującej się w strefie korzeniowej} \\ 0 & \text{dla objętości poza strefą korzeniową} \end{cases} \quad (6.26)$$

gdzie:  $S$  - makroskopowa funkcja poboru wody przez drzewo – określona na podstawie (3.30) dla przepływu dwuwymiarowego



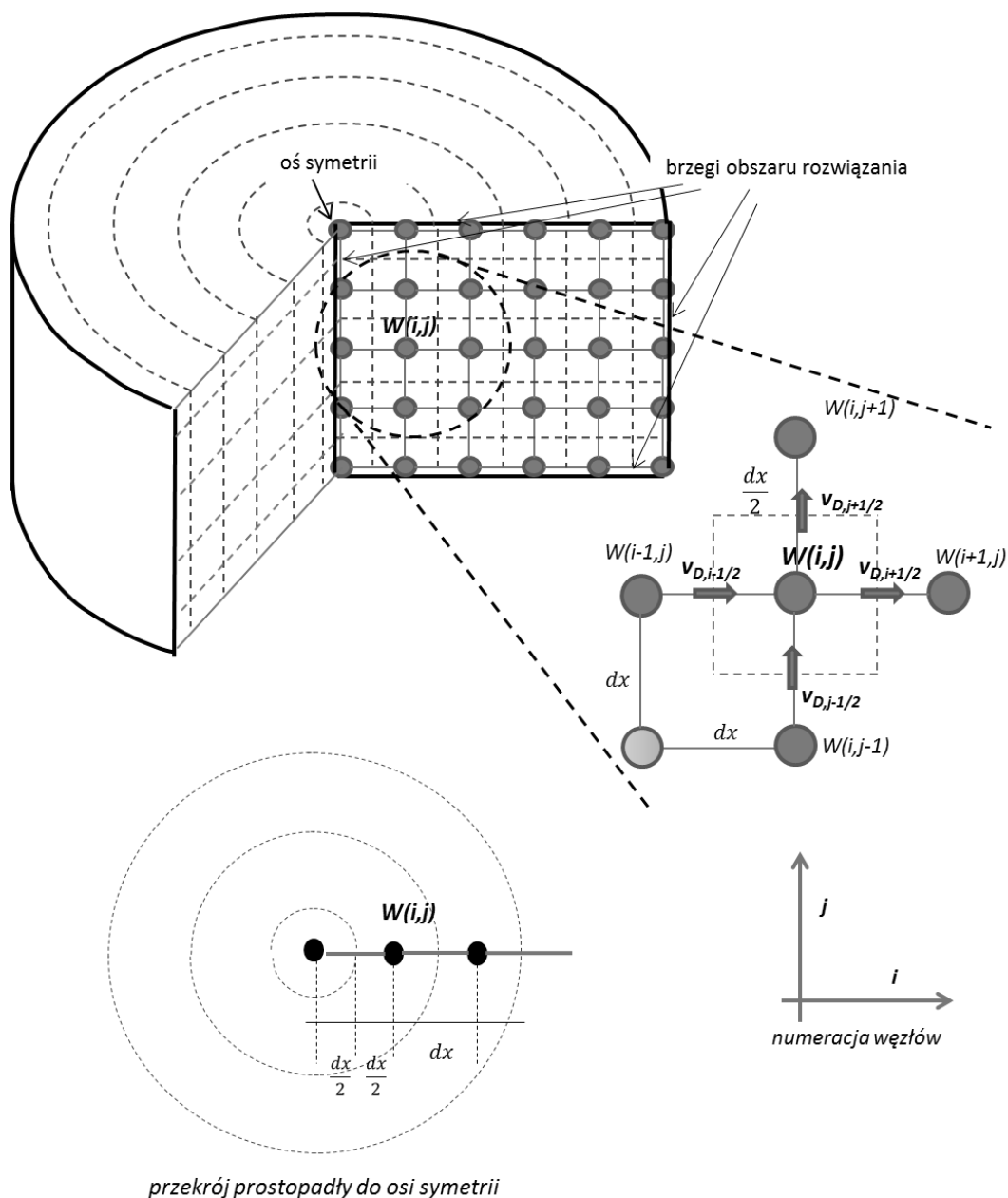
W sytuacji występowania dodatkowych funkcji źródłowych w obszarze rozwiązania należy stosować zasadę superpozycji.

W opisanych w dalszej części pracy przykładach rozwiązania przepływu dwuwymiarowego płaskiego przyjmowano kwadratową siatkę punktów węzłowych, wówczas  $dz = dx$ .

## 6.6. Metodyka obliczeń przepływu dwuwymiarowego osiowo-symetrycznego

Nie wszystkie przypadki filtracji przez ośrodek gruntowy wygodnie jest opisywać za pomocą modelu płaskiego przepływu. Typowym przykładem zjawiska, nie nadającym się do przedstawienia w płaskiej przestrzeni dwuwymiarowej, a związanym bezpośrednio z tematem niniejszej pracy, jest pobór wody przez pojedyncze drzewo. W takim przypadku wygodnie jest opisywać przepływ wg poniżej przedstawionego układu dwuwymiarowego-osiowosymetrycznego (zgodnie z rys. 6.7), który jest szczególnym przypadkiem ogólnego schematu obliczeniowego zaproponowanej metody (realizowanego w oparciu o ogólny schemat blokowy metody rys. 6.2). W proponowanym schemacie osiowosymetrycznym obszar rozwiązania podzielony został na objętości skończone stanowiące współosiowe pierścienie o szerokości i wysokości równej  $dx$ , które reprezentowane są przez kwadratową siatkę punktów węzłowych o rozmiarze  $dx$ . Przy tak przyjętej siatce przepływu, prędkości między węzłami są prostopadłe do powierzchni ograniczających poszczególne objętości skończone, przez co możliwe jest prowadzenie wyliczeń wilgotności objętościowej zgodnie ze schematem obliczeniowym zaproponowanej metody.

Różnicę w odniesieniu do układu dwuwymiarowego płaskiego stanowi sposób wyznaczenia objętości skończonej ( $V$ ) pojedynczego elementu skończonego oraz powierzchni ograniczających tę objętość skończoną ( $P_i$ ), które zależą od położenia w przestrzeni i należy je wyznaczyć dla każdego z elementów osobno.



Rys. 6.7. Schemat obszaru rozwiązania dla przepływu dwuwymiarowego osiowoosymetrycznego

Z uwagi na powyższe, równanie (6.09) wykorzystywane w trakcie realizacji kroków obliczeniowych 1-5 ogólnego schematu proponowanej metody (rys. 6.2) przyjmuje postać:

$$\theta_{w(i,j)}^{t+\Delta t} = \theta_{w(i,j)}^t + \frac{1}{V(i,j)} \left[ P_{i-\frac{1}{2}} \cdot v_{D,i-\frac{1}{2}}^{t+\Delta t} - P_{i+\frac{1}{2}} \cdot v_{D,i+\frac{1}{2}}^{t+\Delta t} + P_{j-\frac{1}{2}} \cdot v_{D,j-\frac{1}{2}}^{t+\Delta t} - P_{j+\frac{1}{2}} \cdot v_{D,j+\frac{1}{2}}^{t+\Delta t} - S^* \right] \cdot \Delta t \quad (6.27)$$

gdzie:  $\theta_{w(i,j)}^{t+\Delta t}, \theta_{w(i,j)}^t$  – nasycenie dla danego punktu węzłowego  $w(i, j)$  w kolejnych krokach czasowych

$v_{D,i-\frac{1}{2}}^{t+\Delta t}, v_{D,i+\frac{1}{2}}^{t+\Delta t}, v_{D,j-\frac{1}{2}}^{t+\Delta t}, v_{D,j+\frac{1}{2}}^{t+\Delta t}$  – prędkości strumieni dopływających z węzłów sąsiednich (lub odpływających w ich kierunku)

$P_{i-\frac{1}{2}}, P_{i+\frac{1}{2}}, P_{j-\frac{1}{2}}, P_{j+\frac{1}{2}}$  – powierzchnie ograniczające objętość węzła  $w(i, j)$ , np.  $P_{i-\frac{1}{2}}$

jest powierzchnią od strony dopływu z węzła  $w(i-1, j)$

$V_{(i,j)}$  – objętość skończona reprezentowana przez węzeł  $w(i, j)$

$S^*$  - funkcja źródłowa (ubytek) w objętości reprezentowanej przez węzeł  $w(i, j)$

Na przykład dla węzła  $w(i, j)$  położonego jak na rysunku (rys. 6.7) poszczególne powierzchnie i objętość skończoną określają wyrażenia:

$$P_{i-\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot \frac{dx}{2} \cdot dx \quad (6.28)$$

$$P_{i+\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot \left(\frac{dx}{2} + dx\right) \cdot dx \quad (6.29)$$

$$P_{j-\frac{1}{2}} = P_{j+\frac{1}{2}} = \pi \cdot \left\{ \left(\frac{dx}{2} + dx\right)^2 - \left(\frac{dx}{2}\right)^2 \right\} \quad (6.30)$$

$$V_{(i,j)} = P_{j-\frac{1}{2}} \cdot dx = \pi \cdot \left\{ \left(\frac{dx}{2} + dx\right)^2 - \left(\frac{dx}{2}\right)^2 \right\} \cdot dx \quad (6.31)$$

W przypadku węzła leżącego na osi symetrii (stanowiącej jednocześnie brzeg obszaru) dla zadanego warunku brzegowego Neumanna:

$$P_{i-\frac{1}{2}} = 0 \quad (6.32)$$

$$P_{i+\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot \left(\frac{dx}{2}\right) \cdot dx \quad (6.33)$$

$$P_{j-\frac{1}{2}} = P_{j+\frac{1}{2}} = \pi \cdot \left(\frac{dx}{2}\right)^2 \quad (6.34)$$

$$V_{(i,j)} = P_{j-\frac{1}{2}} \cdot dx = \pi \cdot \left(\frac{dx}{2}\right)^2 \cdot dx \quad (6.35)$$

Prędkości strumieni przepływających przez poszczególne punkty węzłowe  $w(i, j)$  siatki przepływu wyznaczone są analogicznie jak w metodzie dwuwymiarowej płaskiej, tj. w oparciu o wzór (3.19) i w kierunku rosnącej numeracji węzłów (zgodnie ze strzałkami jak na rys. 6.7) – np. dla strumienia poziomego dopływającego z węzła  $w(i-1, j)$  do węzła  $w(i, j)$ :

$$v_{D,i-\frac{1}{2}}^{t+\Delta t} = -1 \cdot k_{i-\frac{1}{2}} \cdot \frac{h_{(i,j)} - h_{(i-1,j)}}{dx} \quad (6.36)$$

Uśredniony współczynnik filtracji obliczany jest jako średnia arytmetyczna z wartości w węzłach między którymi wyliczana jest prędkość przepływu, analogicznie jak w przedstawionej w punkcie 6.5 metodyce dla przepływu płaskiego (równanie 6.25).

Realizacja pozostałych kroków (uwzględnienie wpływu odkształcenia na wilgotność, spełnienie warunków początkowych i brzegowych) odbywa się z sposób opisany w punktach 6.3 – 6.4.

W dalszej części pracy schemat ten wykorzystywany będzie do symulacji poboru wody przez pojedyncze drzewo. Sposób uwzględnienia poboru wody w strefie korzeniowej jest analogiczny jak dla przepływu płaskiego z punktu 6.5 (w oparciu o równanie 6.26).

### 6.7. Kryteria ograniczania długości kroku czasowego

Jak wskazano wcześniej (punkt 6.) metody niejawne nie są bezwarunkowo stabilne i konieczne jest stosowanie dodatkowych kryteriów ograniczających długość kroku czasowego w trakcie obliczeń.

W pracy zastosowano dwa kryteria ograniczające maksymalną długość kroku czasowego. Pierwszym z nich jest kryterium Couranta (*Courant-Friedrichs-Lewy 1928*), którego zastosowanie pozwala na dostosowanie długości kroku czasowego do rozmiarów siatki punktów węzłowych. W przypadku rozwiązań równań przepływu w strefie nienasyconej, spełnienie kryterium Couranta polega na takim przyjęciu kroku czasowego ( $\Delta t$ ), aby droga wyznaczona w tym kroku dla maksymalnej prędkości ( $v_{max}$ ) w obszarze rozwiązania była mniejsza od rozmiaru siatki ( $dx$ ), tj.  $C_r < 1$ , gdzie:

$$C_r = \frac{v_{max} \cdot \Delta t}{dx} \quad (6.37)$$

Liczba Couranta  $C_r$ , w formie określonej powyższym równaniem, została zastosowana w programie 2NSATv6 udostępnionym przez autorów artykułu Navarro i inni (2009a), jak również przytoczono ją w formie analogicznej w innych pracach (np. Šimunek 2005, Zaradny 2009).

Ze względu na silną nieliniowość równań opisujących przepływ w strefie nienasyconej, proponuje się, aby w przypadku zastosowania kryterium Couranta w opisanej w niniejszej pracy metodzie obliczeniowej, przyjmować wartości  $C_r$  równe bądź mniejsze od 0.001.

Obok opisanego powyższym równaniem (6.37) kryterium Couranta, na potrzeby niniejszej pracy opracowano również kryterium „przyrostowe”, które polega na takim doborze długości kroku czasowego, aby dla każdego węzła siatki przepływu spełniony był warunek

$$|\theta^{t+\Delta t} - \theta^t| < \Delta\theta_{dopuszczalne} \quad (6.38)$$

gdzie  $\Delta\theta_{dopuszczalne}$  oznacza zakładany, dopuszczalny (bezwzględny) przyrost wilgotności objętościowej między kolejnymi krokami czasowymi.

Zaletą proponowanego kryterium przyrostowego w stosunku do kryterium Couranta jest fakt, że uwzględnia ono wpływ funkcji źródłowej w rozwiązaniu równań przepływu i z tego powodu wskazuje się na potrzebę jego wykorzystywania w przypadku prowadzenia symulacji związanych z poborem wody przez korzenie drzew (można stosować je zamiennie lub najlepiej łącznie z kryterium Couranta). W tego rodzaju obliczeniach proponuje się, aby przyjmować maksymalną wartość  $\Delta\theta_{dopuszczalne}$  na poziomie 0.0001 lub mniejszą.

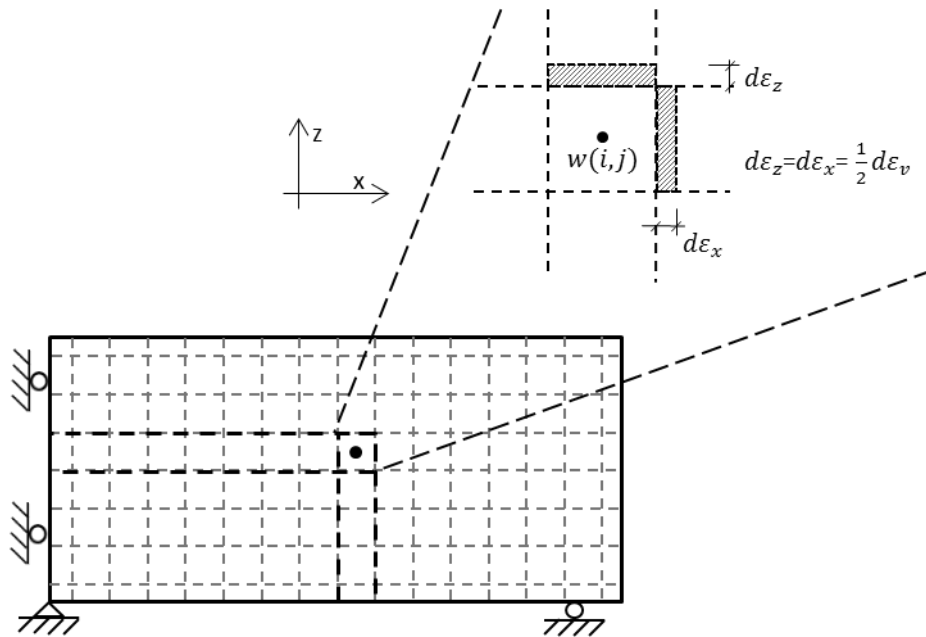
## 6.8. Wyznaczanie odkształceń i przemieszczeń gruntu

Wyznaczenie ssania matrycowego w obszarze rozwiązania stanowi pierwszy etap obliczeń wg zaproponowanej metody niesprężonej. W etapie drugim wyznaczane są odkształcenia i przemieszczenia gruntu.

W pierwszej kolejności, w oparciu o wzory do wyznaczania odkształceń objętościowych (przeгляд w punkcie 4.), dokonuje się obliczeń odkształceń objętościowych  $\varepsilon_v(i,j)$  dla każdej objętości skończonej reprezentowanej przez węzeł  $w(i,j)$  z obszaru rozwiązania. Następnie, na podstawie wyznaczonych odkształceń objętościowych  $\varepsilon_v(i,j)$ , dokonuje się obliczeń odkształceń liniowych. Wyznaczając przemieszczenie wybranego punktu z obszaru rozwiązania względem założonych osi nieruchomych, stosuje się metodę superpozycji (poprzez sumowanie deformacji poszczególnych objętości skończonych w odnośnych rzędach i kolumnach).

Dla płaskiego (2D) stanu odkształcenia, przy zapewnieniu swobodnej możliwości pęcznienia gruntu w kierunkach  $x$  i  $z$ , zachodzi następująca zależność między odkształceniami objętościowym a liniowymi:

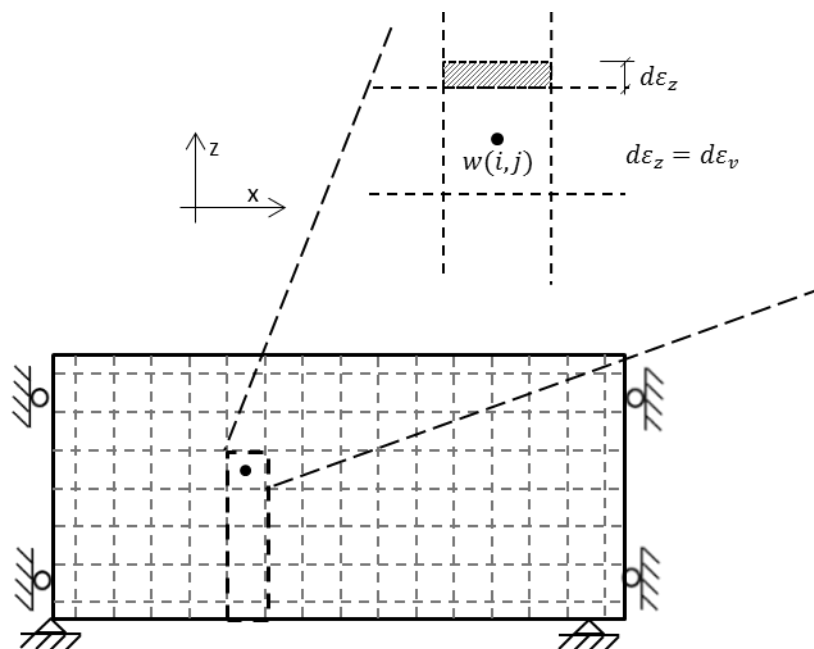
$$d\varepsilon_v \approx d\varepsilon_x + d\varepsilon_z, \text{ przy } d\varepsilon_x = d\varepsilon_z = \frac{d\varepsilon_v}{2} \quad (6.39)$$



Rys. 6.8. Schemat wyznaczania odkształceń liniowych dla płaskiego (2D) stanu odkształcenia

Dla jednowymiarowego stanu odkształcenia, przy założeniu, że grunt ma możliwość pęcznienia lub skurczu tylko w kierunku pionowym (kier. z), zachodzi następująca zależność między odkształceniami objętościowym a liniowymi:

$$d\epsilon_v \approx d\epsilon_z \quad (6.40)$$



Rys. 6.9. Schemat wyznaczania odkształceń liniowych dla jednowymiarowego stanu odkształcenia

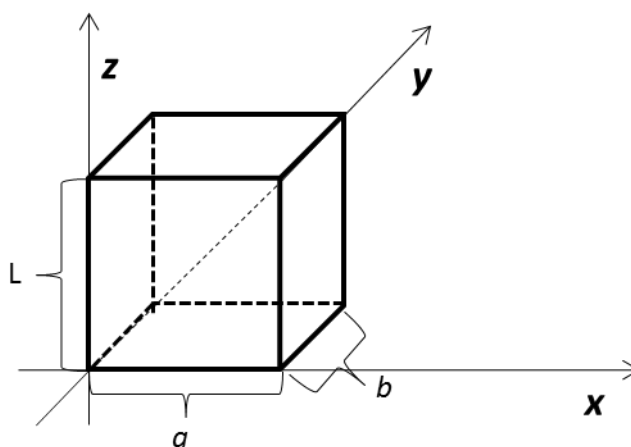


## 7. Weryfikacja modelu

Przedstawiony we wcześniejszym rozdziale algorytm obliczeniowy został zaimplementowany w języku Fortran. W niniejszym oraz kolejnych rozdziałach opisano przykładowe symulacje numeryczne wykonane za pomocą programu autorskiego.

### 7.1. Porównanie z rozwiązaniem analitycznym (Tracy 2006) dla przepływu w gruncie nieodkształcalnym

Dla sprawdzenia możliwości stosowania opisanej w pkt. 6 metody numerycznej, dokonano weryfikacji pod kątem zgodności uzyskiwanych wyników ze znanym z literatury rozwiązaniem analitycznym wg Tracy (Tracy 2006). Rozwiązanie analityczne (Tracy 2006) wyprowadzone zostało dla przepływu przez prostopadłościenny obszar przepływu o wymiarach (w kartezjańskim układzie odniesienia)  $a \times b \times L$ .



Rys. 7.1. Ilustracja obszaru rozwiązania analitycznego wg Tracy (2006)

Rozwiązanie przepływu przeprowadzone jest na podstawie równania Richardsa, z wykorzystaniem krzywej retencji wodnej i względnego współczynnika przewodności hydraulicznej gruntu wg Gardnera (1958) (cytowanie za Tracy 2006), zdefiniowanych w następującej formie przytoczonej za artykułem źródłowym:

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \cdot e^{\alpha h_s} \quad (7.1)$$

$$k^r = e^{\alpha h_s} \quad (7.2)$$

gdzie  $\alpha$  – parametr stały wg Gardnera

Rozwiązanie analityczne otrzymano dla następujących warunków początkowo-brzegowych:

- początkowa wartość ssania ( $h_s$ ) dla wszystkich punktów w obszarze rozwiązania jest taka sama i równa  $h_r$
- wartość ssania matrycowego na wszystkich płaszczyznach brzegowych obszaru rozwiązania (z wyjątkiem płaszczyzny na poziomie  $z=L$ ) przyjęto jako stałą i równą wartości początkowej ( $h_s = h_r$ )
- wartości ssania matrycowego dla punktów znajdujących się na płaszczyźnie  $z=L$  określone są następującą formułą :

$$h_s(x, y, L, t) = \frac{1}{\alpha} \ln(e^{\alpha h_r} + (1 - e^{\alpha h_r}) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}) \quad (7.3)$$

Dla powyższych warunków brzegowych wyznaczone zostało rozwiązanie analityczne określone równaniem:

$$h(x, y, z, t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ e^{\alpha h_r} + h_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} \cdot e^{\frac{\alpha}{2(L-z)}} \cdot \left[ \frac{\sinh(\beta \cdot z)}{\sinh(\beta \cdot L)} + \frac{2}{L_c} \cdot \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q \cdot \frac{\lambda_q}{\gamma} \cdot \sin(\lambda_q \cdot z) \cdot e^{(-\gamma \cdot t)} \right] \right\} \quad (7.4)$$

gdzie:  $\gamma = \frac{1}{c} (\beta^2 + \lambda_q^2)$ ,  $c = \frac{\alpha \cdot (\theta_r - \theta_s)}{k_s}$ ,  $\beta = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$

$$h_0 = 1 - e^{\alpha h_r}, \lambda_q = \frac{q \cdot \pi}{L}$$

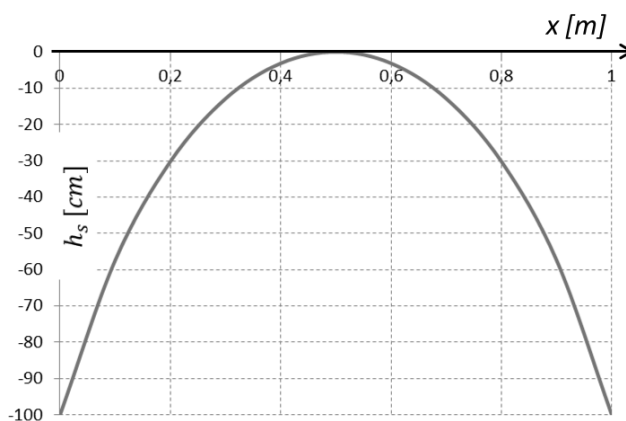
Powyższe równania (7.3) i (7.4) odnoszą się do rozwiązania dla przepływu trójwymiarowego - w celu przeprowadzenia obliczeń dla obszaru płaskiego należy przyjąć pewną stałą wartość zmiennej  $y=y_s$  - wówczas :

- z równania (7.3) wyznaczone zostaną warunki brzegowe dla granicy płaskiego obszaru rozwiązania rozpatrywanego przekroju w linii równoległej do osi  $x$  na wysokości  $z=L$
- równanie (7.4) stanowi analityczne rozwiązanie płaskiego przepływu dla przekroju sześcianu ( $a \times b \times L$ ) w płaszczyźnie równoległej do osi  $z, x$ , przecinającej oś  $y$  w punkcie przyjętej wartości  $y_s$ .

W celu sprawdzenia przedstawionej w punkcie 6. metody numerycznej, wyznaczono rozwiązanie analityczne dla następujących parametrów:

Tab. 7.1. Przyjęte parametry dla rozwiązania analitycznego wg Tracy (2006) oraz ilustracja warunku brzegowego dla  $z = L$  i  $y = y_s$

$axbxL$	100x100x100 [cm]
$\alpha$	0,01
$\theta_r$	0,10
$\theta_s$	0,45
$k_s$	100 [cm/db]
$h_r$	-100 [cm]
$t$	10 dni
$y_s$	0,5 [cm]



Porównawczo przeprowadzono symulację numeryczną płaskiego przepływu, wg schematu opisanego w punkcie 6.5, dla analogicznych jak w artykule źródłowym warunków początkowo-brzegowych oraz parametrów wg powyższej tabeli (tab. 7.1), przyjmując następującą dyskretyzację obszaru rozwiązania (tab. 7.2):

Tab. 7.2. Przyjęte parametry dyskretyzacji obszaru rozwiązania numerycznego.

rozmiar kwadratowej siatki punktów węzłowych - $dx$	10 [cm]
$\Delta t$ – max. długość kroku czasowego (krok czasowy jest zmienny w trakcie symulacji ze względu na stosowane kryteria ograniczające jego długość)	1 doba

Symulacje przeprowadzone zostały dla różnych wariantów opisanej w pkt. 6. metody (zestawionych w tab. 7.3), różniących się zastosowanym kryterium ograniczającym długość kroku czasowego (Couranta lub „przyrostowym” – patrz pkt. 6.7) oraz sposobem wyznaczania prędkości wody w kolejnych krokach czasowych (patrz pkt. 6.2), tj.:

- wyznaczonych z poprzedniego kroku czasowego (realizacja tylko punktu „A” schematu 6.3), lub
- wyznaczonych dla nasycenia z bieżącego kroku czasowego metodą iteracyjną realizacja punktów A do F schematu 6.3)

Tab. 7.3. Różne warianty proponowanej metody użyte do porównania z rozwiązaniem analitycznym

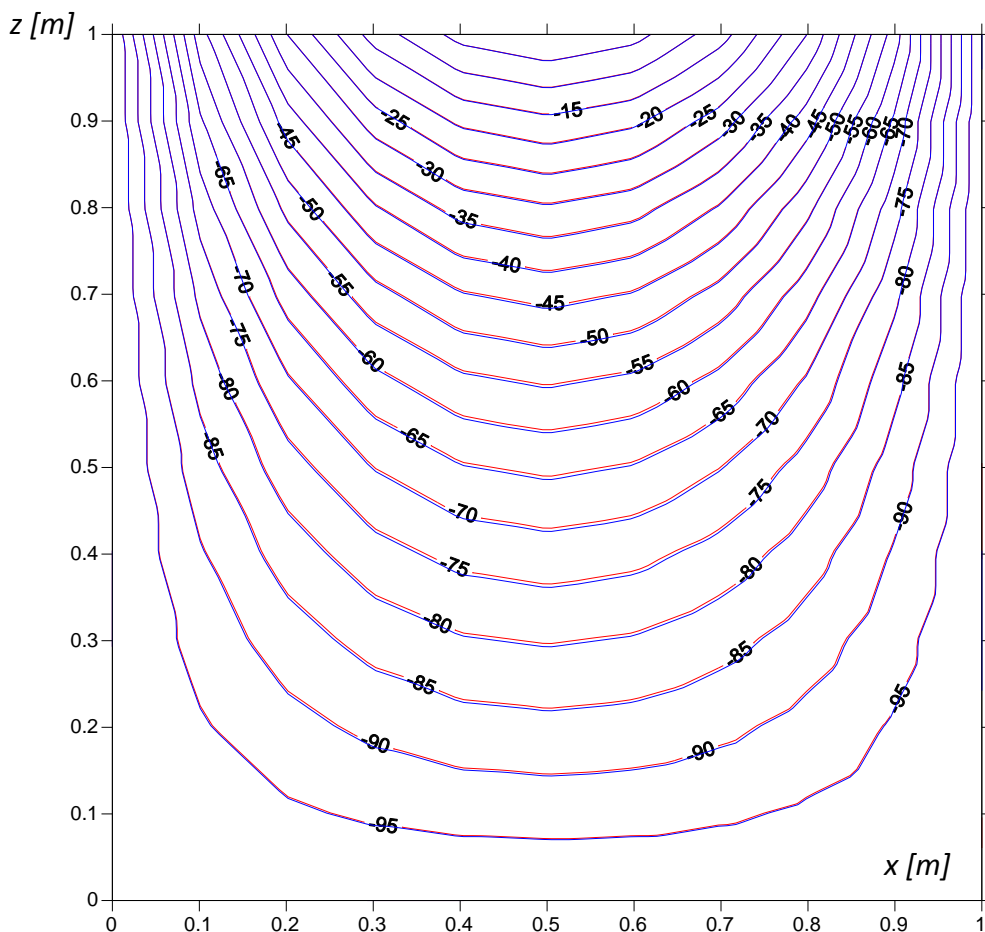
Wariant metody	Sposób wyliczania prędkości wody w kolejnych krokach czasowych	Kryterium ograniczania dł. kroku czasowego
A	na podstawie zmiennych z poprzedniego kroku czasowego (realizacja tylko punktu „A” schematu rys. 6.3)	Couranta, $C_r = 0.01$
B	na podstawie zmiennych z poprzedniego kroku czasowego (realizacja tylko punktu „A” schematu rys. 6.3)	Przyrostowe, $ \theta^{t+\Delta t} - \theta^t  < 0.001$
C	metodą iteracyjną (realizacja punktów od „A” do „F” schematu 6.3), $ h_s(\theta^{t+\Delta t, i+1}) - h_s(\theta^{t+\Delta t, i})  < 0.1 \text{ cm.}$	Couranta, $C_r = 0.1$
D	metodą iteracyjną (realizacja punktów od „A” do „F” schematu 6.3), $ h_s(\theta^{t+\Delta t, i+1}) - h_s(\theta^{t+\Delta t, i})  < 0.1 \text{ cm.}$	Przyrostowe, $ \theta^{t+\Delta t} - \theta^t  < 0.1$
E	metodą iteracyjną (realizacja punktów od „A” do „F” schematu 6.3), $ h_s(\theta^{t+\Delta t, i+1}) - h_s(\theta^{t+\Delta t, i})  < 0.1 \text{ cm.}$	bez kryteriów ogr. kroku czasowego ( $\Delta t = \text{const.} = 1 \text{ doba}$ )
F	na podstawie zmiennych z poprzedniego kroku czasowego (realizacja tylko punktu „A” schematu 6.3)	Couranta, $C_r = 0.1$
G	na podstawie zmiennych z poprzedniego kroku czasowego (realizacja tylko punktu „A” schematu 6.3)	Przyrostowe, $ \theta^{t+\Delta t} - \theta^t  < 0.1$

We wszystkich symulacjach numerycznych współczynnik filtracji między węzłami uśredniano metodą arytmetyczną.

Poniżej przedstawione zostało porównanie wyników numerycznej symulacji z rozwiązaniem analitycznym:

Tab. 7.4. Wartości ssania ( $h_s$ ) w poszczególnych punktach węzłowych [cm] – rozwiązanie analityczne

$x[m]$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0
0,1	-100,0	-97,78	-95,82	-94,30	-93,33	-93,00	-93,33	-94,30	-95,82	-97,78	-100,0
0,2	-100,0	-95,61	-91,82	-88,90	-87,08	-86,45	-87,08	-88,90	-91,82	-95,61	-100,0
0,3	-100,0	-93,29	-87,61	-83,32	-80,65	-79,75	-80,65	-83,32	-87,61	-93,29	-100,0
0,4	-100,0	-90,64	-82,89	-77,14	-73,61	-72,43	-73,61	-77,14	-82,89	-90,64	-100,0
0,5	-100,0	-87,48	-77,38	-70,04	-65,60	-64,11	-65,60	-70,04	-77,38	-87,48	-100,0
0,6	-100,0	-83,62	-70,84	-61,75	-56,32	-54,51	-56,32	-61,75	-70,84	-83,62	-100,0
0,7	-100,0	-78,88	-63,03	-52,02	-45,54	-43,41	-45,54	-52,02	-63,03	-78,88	-100,0
0,8	-100,0	-73,06	-53,74	-40,69	-33,13	-30,65	-33,13	-40,69	-53,74	-73,06	-100,0
0,9	-100,0	-65,96	-42,83	-27,65	-19,00	-16,18	-19,00	-27,65	-42,83	-65,96	-100,0
1,0	-100,0	-57,41	-30,19	-12,87	-3,14	0,00	-3,14	-12,87	-30,19	-57,41	-100,0
$z[m]$											



Rys. 7.2. Porównanie wyników symulacji –  $h_s$  [cm]- rozwiązanie analityczne (linia czerwona) i numeryczne (linia niebieska) wg wariantu „A” metody (zgodnie z tab. 7.3)

Tab. 7.5. Różnica  $h_s$  [cm] między rozwiązaniem analitycznym, a numerycznym wg wariantu „A” metody (zgodnie z tab. 7.3)

$x$ [m]	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	0,00	-0,03	-0,07	-0,09	-0,10	-0,11	-0,10	-0,09	-0,07	-0,03	0,00
0,2	0,00	-0,06	-0,12	-0,16	-0,19	-0,20	-0,19	-0,16	-0,12	-0,06	0,00
0,3	0,00	-0,09	-0,16	-0,22	-0,25	-0,26	-0,25	-0,22	-0,16	-0,09	0,00
0,4	0,00	-0,11	-0,19	-0,25	-0,29	-0,31	-0,29	-0,25	-0,19	-0,11	0,00
0,5	0,00	-0,11	-0,21	-0,27	-0,31	-0,33	-0,31	-0,27	-0,21	-0,11	0,00
0,6	0,00	-0,11	-0,20	-0,27	-0,31	-0,33	-0,31	-0,27	-0,20	-0,11	0,00
0,7	0,00	-0,09	-0,17	-0,24	-0,28	-0,30	-0,28	-0,24	-0,17	-0,09	0,00
0,8	0,00	-0,05	-0,13	-0,19	-0,22	-0,23	-0,22	-0,19	-0,13	-0,05	0,00
0,9	0,00	0,00	-0,06	-0,10	-0,13	-0,14	-0,13	-0,10	-0,06	0,00	0,00
1,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$z$ [m]											

Tab. 7.6. Różnica  $h_s$  [cm] między rozwiązaniem analitycznym, a numerycznym wg wariantu „B” metody (zgodnie z tab. 7.3)

$x[m]$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	0,00	0,00	-0,13	0,01	-0,22	0,02	-0,22	0,01	-0,13	0,00	0,00
0,2	0,00	-0,05	-0,16	-0,11	-0,24	-0,14	-0,24	-0,11	-0,16	-0,05	0,00
0,3	0,00	-0,10	-0,13	-0,26	-0,20	-0,31	-0,20	-0,26	-0,13	-0,10	0,00
0,4	0,00	-0,14	-0,13	-0,33	-0,21	-0,40	-0,21	-0,33	-0,13	-0,14	0,00
0,5	0,00	-0,11	-0,21	-0,27	-0,32	-0,32	-0,32	-0,27	-0,21	-0,11	0,00
0,6	0,00	-0,09	-0,24	-0,22	-0,37	-0,27	-0,37	-0,22	-0,24	-0,09	0,00
0,7	0,00	-0,07	-0,20	-0,21	-0,32	-0,26	-0,32	-0,21	-0,20	-0,07	0,00
0,8	0,00	-0,06	-0,10	-0,21	-0,19	-0,26	-0,19	-0,21	-0,10	-0,06	0,00
0,9	0,00	-0,02	-0,03	-0,14	-0,09	-0,17	-0,09	-0,14	-0,03	-0,02	0,00
1,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$z[m]$											

Tab. 7.7. Różnica  $h_s$  [cm] między rozwiązaniem analitycznym, a numerycznym wg wariantu „C” metody (zgodnie z tab. 7.3)

$x[m]$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	0,00	-0,03	-0,08	-0,07	-0,12	-0,09	-0,12	-0,07	-0,08	-0,03	0,00
0,2	0,00	-0,07	-0,10	-0,19	-0,16	-0,23	-0,16	-0,19	-0,10	-0,07	0,00
0,3	0,00	-0,08	-0,19	-0,18	-0,29	-0,22	-0,29	-0,18	-0,19	-0,08	0,00
0,4	0,00	-0,12	-0,17	-0,29	-0,26	-0,35	-0,26	-0,29	-0,17	-0,12	0,00
0,5	0,00	-0,10	-0,23	-0,24	-0,35	-0,29	-0,35	-0,24	-0,23	-0,10	0,00
0,6	0,00	-0,12	-0,18	-0,30	-0,28	-0,36	-0,28	-0,30	-0,18	-0,12	0,00
0,7	0,00	-0,08	-0,19	-0,22	-0,30	-0,27	-0,30	-0,22	-0,19	-0,08	0,00
0,8	0,00	-0,06	-0,12	-0,20	-0,21	-0,25	-0,21	-0,20	-0,12	-0,06	0,00
0,9	0,00	0,00	-0,07	-0,10	-0,13	-0,13	-0,13	-0,10	-0,07	0,00	0,00
1,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$z[m]$											

Tab. 7.8. Różnica  $h_s$  [cm] między rozwiązaniem analitycznym, a numerycznym wg wariantu „D” metody (zgodnie z tab. 7.3)

$x[m]$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	0,00	-0,03	-0,08	-0,07	-0,13	-0,08	-0,13	-0,07	-0,08	-0,03	0,00
0,2	0,00	-0,05	-0,15	-0,12	-0,23	-0,15	-0,23	-0,12	-0,15	-0,05	0,00
0,3	0,00	-0,11	-0,13	-0,26	-0,20	-0,31	-0,20	-0,26	-0,13	-0,11	0,00
0,4	0,00	-0,10	-0,19	-0,25	-0,30	-0,30	-0,30	-0,25	-0,19	-0,10	0,00
0,5	0,00	-0,13	-0,19	-0,30	-0,29	-0,36	-0,29	-0,30	-0,19	-0,13	0,00
0,6	0,00	-0,09	-0,23	-0,23	-0,35	-0,28	-0,35	-0,23	-0,23	-0,09	0,00
0,7	0,00	-0,09	-0,17	-0,25	-0,27	-0,30	-0,27	-0,25	-0,17	-0,09	0,00
0,8	0,00	-0,05	-0,13	-0,18	-0,22	-0,23	-0,22	-0,18	-0,13	-0,05	0,00
0,9	0,00	-0,01	-0,05	-0,12	-0,11	-0,15	-0,11	-0,12	-0,05	-0,01	0,00
1,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$z[m]$											

Tab. 7.9. Różnica  $h_s$  [cm] między rozwiązaniem analitycznym, a numerycznym wg wariantu „E” metody (zgodnie z tab. 7.3)

$x[m]$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	0,00	-0,03	-0,08	-0,07	-0,13	-0,08	-0,13	-0,07	-0,08	-0,03	0,00
0,2	0,00	-0,05	-0,15	-0,12	-0,23	-0,15	-0,23	-0,12	-0,15	-0,05	0,00
0,3	0,00	-0,11	-0,13	-0,26	-0,20	-0,31	-0,20	-0,26	-0,13	-0,11	0,00
0,4	0,00	-0,10	-0,19	-0,25	-0,30	-0,30	-0,30	-0,25	-0,19	-0,10	0,00
0,5	0,00	-0,13	-0,19	-0,30	-0,29	-0,36	-0,29	-0,30	-0,19	-0,13	0,00
0,6	0,00	-0,09	-0,23	-0,23	-0,35	-0,28	-0,35	-0,23	-0,23	-0,09	0,00
0,7	0,00	-0,09	-0,17	-0,25	-0,27	-0,30	-0,27	-0,25	-0,17	-0,09	0,00
0,8	0,00	-0,05	-0,13	-0,18	-0,22	-0,23	-0,22	-0,18	-0,13	-0,05	0,00
0,9	0,00	-0,01	-0,05	-0,12	-0,11	-0,15	-0,11	-0,12	-0,05	-0,01	0,00
1,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$z[m]$											

Tab. 7.10. Różnica  $h_s$  [cm] między rozwiązaniem analitycznym, a numerycznym wg wariantu „F” metody (zgodnie z tab. 7.3)

$x[m]$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	0,00	-0,49	1,27	-3,11	4,48	-7,05	4,48	-3,11	1,27	-0,49	0,00
0,2	0,00	0,79	-2,35	4,68	<b>-10,35</b>	<b>20,87</b>	<b>-10,35</b>	4,68	-2,35	0,79	0,00
0,3	0,00	-0,93	2,51	-5,44	<b>17,86</b>	<b>-34,53</b>	<b>17,86</b>	-5,44	2,51	-0,93	0,00
0,4	0,00	0,72	-1,60	3,93	-6,13	<b>14,82</b>	-6,13	3,93	-1,60	0,72	0,00
0,5	0,00	-0,50	1,07	-1,51	3,35	-3,13	3,35	-1,51	1,07	-0,50	0,00
0,6	0,00	0,27	-0,58	0,88	-0,98	1,57	-0,98	0,88	-0,58	0,27	0,00
0,7	0,00	-0,21	0,24	-0,47	0,43	-0,56	0,43	-0,47	0,24	-0,21	0,00
0,8	0,00	0,08	-0,21	0,09	-0,33	0,10	-0,33	0,09	-0,21	0,08	0,00
0,9	0,00	-0,02	0,02	-0,14	-0,01	-0,17	-0,01	-0,14	0,02	-0,02	0,00
1,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$z[m]$											

Tab. 7.11. Różnica  $h_s$  [cm] między rozwiązaniem analitycznym, a numerycznym wg wariantu „G” metody (zgodnie z tab. 7.3)

$x[m]$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	0,00	2,68	-6,39	<b>11,26</b>	<b>-13,01</b>	<b>16,03</b>	<b>-13,01</b>	<b>11,26</b>	-6,39	2,68	0,00
0,2	0,00	-5,77	<b>12,72</b>	<b>-16,56</b>	<b>24,55</b>	<b>-21,49</b>	<b>24,55</b>	<b>-16,56</b>	<b>12,72</b>	-5,77	0,00
0,3	0,00	8,45	<b>-14,55</b>	<b>24,86</b>	<b>-24,73</b>	<b>35,98</b>	<b>-24,73</b>	<b>24,86</b>	<b>-14,55</b>	8,45	0,00
0,4	0,00	-8,33	<b>16,71</b>	<b>-20,16</b>	<b>31,99</b>	<b>-26,27</b>	<b>31,99</b>	<b>-20,16</b>	<b>16,71</b>	-8,33	0,00
0,5	0,00	7,54	<b>-12,48</b>	<b>20,00</b>	<b>-20,35</b>	<b>26,24</b>	<b>-20,35</b>	<b>20,00</b>	<b>-12,48</b>	7,54	0,00
0,6	0,00	-5,63	<b>10,20</b>	<b>-12,65</b>	<b>16,76</b>	<b>-15,46</b>	<b>16,76</b>	<b>-12,65</b>	<b>10,20</b>	-5,63	0,00
0,7	0,00	3,96	-6,56	8,67	-9,53	10,59	-9,53	8,67	-6,56	3,96	0,00
0,8	0,00	-2,40	3,82	-4,80	5,16	-5,46	5,16	-4,80	3,82	-2,40	0,00
0,9	0,00	1,12	-1,71	1,92	-2,20	2,04	-2,20	1,92	-1,71	1,12	0,00
1,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$z[m]$											

Tab. 7.12. *Maksymalne i średnie wartości bezwzględne błędów dla różnych wariantów metody numerycznej (w stosunku do rozwiązania analitycznego)*

wariant metody (zgodnie z tab. 7.3)	A	B	C	D	E	F	G
max. błąd (wart. bezwzględna) [cm]	0,329	0,395	0,357	0,356	0,356	34,53	35,98
średnia wartość bezwzględna błędu [cm]	0,1715	0,1723	0,1715	0,1714	0,1714	2,9486	11,851

Jak widać z porównania wyników symulacji dla różnych wariantów metody, zawartych w tab. 7.3, zarówno obliczenia na podstawie prędkości wody wyznaczonych dla wilgotności z poprzedniego kroku czasowego (warianty metody A,B wg tab. 7.3), jak i z zastosowaniem iteracyjnej metody wyznaczania prędkości wody dla nasycenia z bieżącego kroku czasowego (warianty metody C,D wg tab. 7.3), pozwalają uzyskiwać wyniki zbieżne z rozwiązaniem analitycznym. Należy jednak zauważyć, że w przypadku stosowania iteracyjnej metody wyznaczania prędkości wody (realizacja punktów od „A” do „F” schematu 6.3) możliwe jest zastosowanie mniej rygorystycznych kryteriów ograniczania długości kroku czasowego (porównaj wyniki dla wariantów metody C i F oraz D i G z tabeli 7.3), a nawet całkowite wyeliminowanie ich zastosowania (patrz wyniki dla wariantu E z tab. 7.3). Oczywiście zagadnienie Tracy (2006) jest przypadkiem przepływu dla szczególnych warunków brzegowych i nie uwzględniającym występowania funkcji źródłowej. Zatem nieuprawnionym byłby wniosek o braku konieczności stosowania kryteriów ograniczających długość kroku czasowego w przypadku wykorzystywania iteracyjnego wariantu metody (realizacja punktów od „A” do „F” schematu 6.3) dla modelowania rzeczywistych zjawisk przepływu, jednak na podstawie uzyskanych wyników można wnioskować o większej stabilności obliczeń dla tej wersji modelu.

## 7.2. Weryfikacja metody Anagnostopoulos i Burlando (2012) z rozwiązaniem analitycznym

W celu dodatkowej weryfikacji opisanego w punkcie 6. modelu, w dalszej części pracy zostanie dokonane porównanie z wynikami analiz uzyskiwanymi innym jawnym schematem obliczeniowym wg Anagnostopoulos i Burlando (2012). Model Anagnostopoulos i Burlando (2012) jest również oparty o metodę objętości skończonych, wobec czego w sposób





analogiczny do zaproponowanego w niniejszej pracy dokonywana jest dyskretyzacja przestrzenna. Różnicę w stosunku do opisanej w punkcie 6. metody stanowi sposób prowadzenia obliczeń, który, dla kolejnych kroków czasowych, nie polega na wyznaczeniu wilgotności objętościowej  $\theta$ , a na wyliczaniu całkowitej wysokości potencjału wody w poszczególnych punktach węzłowych siatki przepływu, metodą iteracyjną, wg następującej relacji (oznaczenia zgodnie z artykułem źródłowym):

$$H_C^{t+\Delta t, m+1} = \frac{\sum_{\alpha \in I} \frac{\overline{K_{\alpha c}} \cdot A_{\alpha c}}{l_{\alpha c}} H_{\alpha}^{t+\Delta t, m} + \sum_{\alpha \in I'} Q_{bound}^{\alpha} + \frac{V_C}{\Delta t} (C_C^{t+\Delta t, m} H_C^{t+\Delta t, m} - \theta_C^{t+\Delta t, m} + \theta_C^t + S_e^{t+1/2} S_s \cdot H_C^t) + S_C}{\sum_{\alpha \in I} \frac{\overline{K_{\alpha c}} \cdot A_{\alpha c}}{l_{\alpha c}} + \frac{V_C}{\Delta t} (C_C^{t+\Delta t, m} + S_e^{t+1/2} S_s)} \quad (7.5)$$

gdzie:  $t, t + \Delta t, m$  – indeksy odnoszące się do kolejnego kroku czasowego i kolejnej iteracji

$V_C$  - objętość skończona reprezentowana przez węzeł „C”

$\alpha$  - reprezentuje sąsiednie objętości skończone i węzły przyległe do objętości  $V_C$

$l$  – powierzchnia ograniczająca objętość  $V_C$ ,

$H_C, H_{\alpha}$  – całkowita wartość potencjału wody w węźle (oznaczonego „C”) i węzłach sąsiednich

$\theta_C$  – nasycenie w węźle „C”

$l_{\alpha c}$  – odległości od węzła „C” do węzła sąsiedniego

$A_{\alpha c}$  – powierzchnia przez którą przepływa strumień wody z węzła sąsiedniego

$\overline{K_{\alpha c}}$  – uśredniona wartość współczynnika filtracji na drodze z węzła „C” do węzła sąsiedniego

$Q_{bound}^{\alpha}$  – strumień dopływający z brzegu obszaru rozwiązania (w przypadku węzła na brzegu i zadanego warunku Neumanna)

$C_C = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$  – różniczkowa pojemność wodna (patrz rys. 3.2)

$S_e^{t+1/2} = (S_e^{t+\Delta t, m} + S_e^t)/2$  - uśrednione nasycenie efektywne

$S_s$  - pojemność właściwa ośrodka

$S_C$  - wydatek źródła w węźle „C”

Warto zwrócić uwagę, że na podstawie relacji (7.5) można obliczyć wartości ssania matrycowego w kroku czasowym  $t+\Delta t$ , a następnie (korzystając z przyjętej krzywej retencji) wyznaczyć wartości  $\theta$  we wszystkich punktach węzłowych siatki przepływu, co odpowiada

realizacji kroków 1-5 schematu rys. 6.2. W dalszej kolejności możliwe jest uwzględnienie wpływu odkształcenia na wilgotność objętościową (wg kroku 6. schematu rys. 6.2) zgodnie z opisem z punktu 6.3 pracy. Zatem metodę (Anagnostopoulos i Burlando 2012) można zamiennie wykorzystywać do obliczeń  $\theta$  w punktach 1-5 schematu 6.2. Model ten sprawdzony został również pod kątem zgodności uzyskiwanych wyników z rozwiązaniem analitycznym (Tracy 2006) dla analogicznych jak w punkcie 7.1 parametrów, obszaru rozwiązania i warunków początkowo-brzegowych (patrz tab. 7.1). Poniżej przedstawione zostały wyniki symulacji dla dyskretyzacji obszaru rozwiązania i dopuszczalnej różnicy kolejnych iteracji wartości całkowitego potencjału wody ( $\Delta H_C^{m,m+1}$ ) zawartych w tab.7.13:

Tab. 7.13. Przyjęte parametry dyskretyzacji obszaru rozwiązania numerycznego Anagnostopoulos i Burlando (2012)

rozmiar siatki punktów węzłowych - dx	10 [cm]
$\Delta t$ – krok czasowy	0,1 doby
$\Delta H_C^{m,m+1}$	0,01 [cm]

Tab. 7.14. Różnica  $h_s$  [cm] między rozwiązaniem analitycznym, a numerycznym wg schematu Anagnostopoulos i Burlando (2012)

x[m]	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	0,00	0,035	0,065	0,089	0,104	0,109	0,104	0,089	0,065	0,035	0,00
0,2	0,00	0,064	0,119	0,160	0,186	0,195	0,186	0,160	0,119	0,064	0,00
0,3	0,00	0,089	0,161	0,216	0,249	0,261	0,249	0,216	0,161	0,089	0,00
0,4	0,00	0,106	0,191	0,254	0,293	0,306	0,293	0,254	0,191	0,106	0,00
0,5	0,00	0,114	0,206	0,273	0,315	0,329	0,315	0,273	0,206	0,114	0,00
0,6	0,00	0,110	0,201	0,270	0,312	0,326	0,312	0,270	0,201	0,110	0,00
0,7	0,00	0,089	0,175	0,241	0,282	0,296	0,282	0,241	0,175	0,089	0,00
0,8	0,00	0,049	0,126	0,186	0,222	0,233	0,222	0,186	0,126	0,049	0,00
0,9	0,00	0,002	0,061	0,105	0,129	0,136	0,129	0,105	0,061	0,002	0,00
1,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
z[m]											

Tab. 7.15. Różnica  $h_s$  [cm] między rozwiązaniami numerycznymi wg metody Anagnostopoulos i Burlando (2012) i wg metody przedstawionej w pkt. 6 (dla wariantu „A” zgodnie z tab. 7.3)

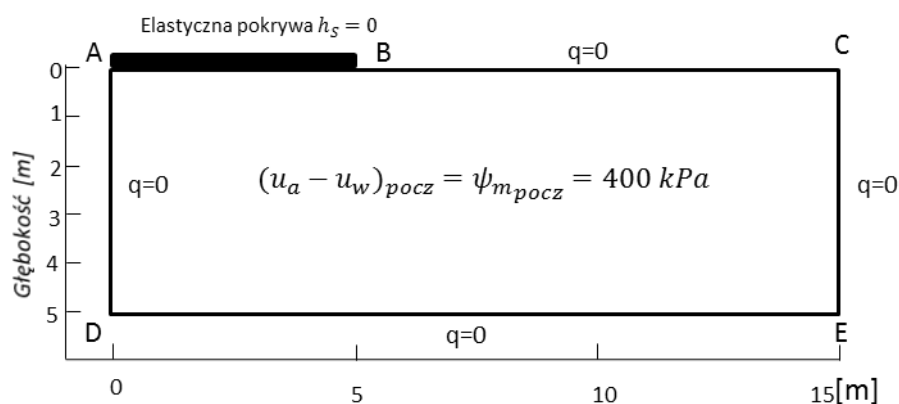
$x[m]$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,E+00	0,E+00	0,E+00	0,E+00	0,E+00	0,E+00	0,E+00	0,E+00	0,E+00	0,E+00	0,E+00
0,1	0,E+00	2,E-04	4,E-04	6,E-04	7,E-04	7,E-04	7,E-04	6,E-04	4,E-04	2,E-04	0,E+00
0,2	0,E+00	4,E-04	8,E-04	9,E-04	1,E-03	1,E-03	1,E-03	9,E-04	8,E-04	4,E-04	0,E+00
0,3	0,E+00	5,E-04	9,E-04	1,E-03	1,E-03	2,E-03	1,E-03	1,E-03	9,E-04	5,E-04	0,E+00
0,4	0,E+00	5,E-04	1,E-03	1,E-03	1,E-03	2,E-03	1,E-03	1,E-03	1,E-03	5,E-04	0,E+00
0,5	0,E+00	5,E-04	9,E-04	1,E-03	1,E-03	1,E-03	1,E-03	1,E-03	9,E-04	5,E-04	0,E+00
0,6	0,E+00	4,E-04	8,E-04	1,E-03	1,E-03	1,E-03	1,E-03	1,E-03	8,E-04	4,E-04	0,E+00
0,7	0,E+00	4,E-04	6,E-04	8,E-04	8,E-04	8,E-04	8,E-04	8,E-04	6,E-04	4,E-04	0,E+00
0,8	0,E+00	2,E-04	3,E-04	4,E-04	5,E-04	5,E-04	5,E-04	4,E-04	3,E-04	2,E-04	0,E+00
0,9	0,E+00	1,E-04	2,E-04	2,E-04	3,E-04	2,E-04	3,E-04	2,E-04	2,E-04	1,E-04	0,E+00
1,0	0,E+00	0,E+00	0,E+00	0,E+00	0,E+00	0,E+00	0,E+00	0,E+00	0,E+00	0,E+00	0,E+00
$z[m]$											

Z przedstawionych powyżej wyników (tab. 7.14 i 7.15) wynika, że numeryczne rozwiązanie opisanego w pkt. 7.1 przepływu wg Tracy (2006) metodą Anagnostopoulos i Burlando (2012) jest identyczne (co do drugiego miejsca po przecinku w cm) z rozwiązaniem wg metody przedstawionej w pkt. 6 (dla wariantu „A” zgodnie z tab. 7.3).

### 7.3. Porównanie z literaturowymi wynikami analiz i obserwacji

#### 7.3.1. Nawadnianie gruntu pod elastyczną płytą (Hung i Fredlund 2002)

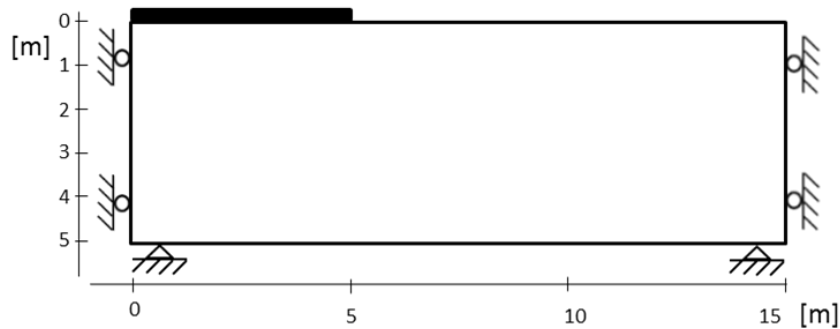
Symulacja dotyczy opisanego w artykule (Hung i Fredlund 2002) przykładu rozwiązania przepływu dwuwymiarowego (płaskiego), związanego z nawadnianiem gruntu gliniastego. Obszar rozwiązania (wg rys. 7.3) stanowi przekrój gruntu o głębokości 5 i długości 15 metrów nawadnianego pod elastyczną pokrywą (A-B).



Rys. 7.3. Ilustracja obszaru rozwiązania oraz warunków początkowych i brzegowych (za artykułem Hung i Fredlund 2002)

W stanie początkowym grunt jest jednolicie przesuszony – w całym przekroju ssanie matrycowe wynosi 400 kPa. W trakcie nawadniania zadane są następujące warunki brzegowe:

- na brzegu A-B (pod elastyczną pokrywą) zerowe ssanie gruntu ( $h_s = 0$ )
- pozostałe brzegi B-C-E-D-A są nieprzepuszczalne (zadany warunek Neumanna)



Rys. 7.4. Warunki brzegowe dla wyznaczenia odkształceń (za artykułem Hung i Fredlund 2002)

Celem jest wyznaczenie wartości ssania ( $\psi_m$ ) w przekroju ośrodka gruntowego dla wybranych czasów symulacji nawadniania oraz deformacji gruntu związanej ze zmianą wilgotności.

W artykule (Hung i Fredlund 2002) rozwiązanie przeprowadzono metodą tzw. niesprężoną poprzez:

1. rozwiązanie równania różniczkowego opisującego przepływ wody dla przypadku gruntu heterogenicznego, anisotropicznego wg (Thieu i in. 2000 – cytowanie za Hung i Fredlund 2002), które przy założeniu niezmienności naprężeń całkowitych i atmosferycznego ciśnienia powietrza ( $u_a = 0$ ) określa formuła (będąca uproszczeniem równania 5.31):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = m_2^w \gamma_w \frac{\partial h}{\partial t} \quad (7.6)$$

Gdzie:  $\gamma_w$  – ciężar właściwy wody,  $m_2^w$  – współczynnik wyrażający nachylenie krzywej retencji,  $h$  - całkowity potencjał wody wyrażony w formie wysokościowej

Zgodnie z artykułem (Hung i Fredlund 2002) do rozwiązania równania (7.6) przyjęto krzywą retencji oraz wzór na względny współczynnik filtracji wg Fredlund i Xing (1994) (równania 3.17 i 3.22). Zastosowano krzywą retencji w wersji uproszczonej, tj. z pominięciem współczynnika korekcyjnego  $C(\psi)$ .

2. rozwiązanie układu równań różniczkowych cząstkowych opisujących przemieszczenie w kierunkach poziomym  $x$  i pionowym  $z$  (przemieszczenia dla tych kierunków odpowiednio  $u$  i  $v$ ) w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ c \left[ (1 - \mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{(1 + \mu)}{H} (u_a - u_w) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ G \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} = 0 \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ G \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ c \left[ \mu \frac{\partial u}{\partial x} + (1 - \mu) \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{(1 + \mu)}{H} (u_a - u_w) \right] \right\} + \rho g = 0 \quad (7.8)$$

gdzie:  $c = \frac{E}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)}$ ,  $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ ,  $\rho g$  – ciężar właściwy gruntu,  $E$  i  $H$  są odpowiednio modułami odkształcenia przy zmianach naprężenia netto i ssania,  $\mu$  – wsp. Poissona,  $(u_a - u_w) = \psi_m$ . Zgodnie z artykułem (Hung i Fredlund 2002) przyjęto następującą zależność modułu  $H$  (patrz również równanie 4.16) od ssania matrycowego:

$$H = 124.335 \cdot (u_a - u_w) = 124.335 \psi_m \quad (7.9)$$

Warunki brzegowe dla wyznaczenia odkształceń ilustruje rysunek (rys. 7.4).

Równania (7.7) i (7.8) wywiedzione są z równania równowagi (4.21), wzoru (4.22) oraz relacji konstytutywnej wg Fredlund i Rahardjo (1993) na poszczególne składowe tensora odkształcenia (4.23).

Rozwiązania równań (7.6), (7.7) i (7.8) przeprowadzono programem FlexPDE przyjmując następującą charakterystykę gruntu:

Tab. 7.16. Charakterystyka gruntu dla rozwiązania zagadnienia dwuwymiarowego nawadniania bryły gruntu (za artykułem Hung i Fredlund 2002)

początkowy wskaźnik porowatości - $e_0$	1,0
współczynnik zmian objętościowych ze względu na zmianę ssania matrycowego - $C_\psi$ - patrz wzór 4.13	0.1
współczynnik przepuszczalności dla stanu pełnej saturacji $k_s$	$1 \frac{mm}{db}$
współczynnik nasycenia w stanie pełnej saturacji $\theta_s$	0,45
współczynnik Poissona $\mu$	0,35
początkowe ssanie matrycowe	400 kPa
parametry krzywej retencji wodnej wg oraz wzoru na względny współczynnik przepuszczalności wodnej wg (Fredlund & Xing 1994)	a = 100 kPa n=1,5 m=1 p=1

Rozwiązanie przeprowadzone zostało również metodą niesprężoną opisaną w punkcie 6., poprzez:

1. wyznaczenie rozkładu ssania matrycowego dla poszczególnych czasów symulacji (płaski obszar rozwiązania-zgodnie z opisem jak w pkt. 6.5), oraz
2. obliczenie odkształceń w oparciu o relacje konstytutywne wg modelu Fredlund i Rahardjo (1993) (równanie 4.16 - patrz pkt. 4.2):

$$d\varepsilon_v = m_1^s d\bar{\sigma} + m_2^s d\psi_m$$

Przy wyznaczaniu odkształceń objętościowych przyjęto, że w trakcie nawadniania nie zmieniają się naprężenia netto, wobec czego uwzględniono jedynie wpływ zmiany ssania matrycowego na odkształcenie objętościowe gruntu – przy takim założeniu równanie (4.16) redukuje się do zależności:

$$d\varepsilon_v \approx m_2^s d\psi_m \quad (7.10)$$

Przeprowadzono wyliczenia odkształceń liniowych zgodnie z opisem jak w punkcie 6.8 pracy wg dwóch wariantów, tj. przy założeniu możliwych odkształceń gruntu w obu kierunkach, poziomym i pionowym (rys. 6.8) oraz dla przypadku, w którym grunt ma możliwość odkształceń tylko w kierunku pionowym (rys. 6.9).

W przypadku, w którym uwzględniono możliwość odkształceń gruntu w obu kierunkach, odkształcenia objętościowe wyznaczono z relacji (7.11), która jest wariantem równania (7.10) dla przypadku płaskiego (2D) stanu odkształcenia:

$$d\varepsilon_{v-2D} = \frac{2(1+\mu)}{H} d\psi_{m(2D)} \quad (7.11)$$

Dla wariantu, w którym grunt ma możliwość odkształceń jedynie w kierunku pionowym zastosowano wzór (7.12) będący przypadkiem równania (7.10) dla jednowymiarowego (1D) stanu odkształcenia:

$$d\varepsilon_{v-1D} = \frac{(1+\mu)}{H(1-\mu)} d\psi_{m(1D)} \quad (7.12)$$

Wobec powyższego (z uwzględnieniem zależności 7.9) całkowite odkształcenie objętościowe dla zmiany ssania od wartości początkowej do końcowej określają wzory:

- dla płaskiego stanu odkształcenia:

$$\Delta\varepsilon_{v-2D} = \int_{\psi_{m(2D),0}}^{\psi_{m(2D),F}} \frac{2(1+\mu)}{124.335\psi_{m(2D)}} d\psi_{m(2D)} = 0,0217 [\ln(\psi_{m(2D),F}) - \ln(\psi_{m(2D),0})] \quad (7.13)$$

- dla jednowymiarowego stanu odkształcenia:

$$\Delta\varepsilon_{v-1D} = \int_{\psi_{m(1D),0}}^{\psi_{m(1D),F}} \frac{(1+\mu)}{(1-\mu) \cdot 124.335 \psi_{m(1D)}} d\psi_{m(1D)} = 0,0167 [\ln(\psi_{m(1D),F}) - \ln(\psi_{m(1D),0})] \quad (7.14)$$

gdzie  $\psi_{m,0}$  i  $\psi_{m,F}$  [kPa] oznaczają początkową i końcową wartość ssania matrycowego

W zastosowanym schemacie obliczeniowym przyjęto dyskretyzację obszaru rozwiązania oraz wariant metody zgodnie z poniższą tabelą 7.17. Obliczenia prowadzone były z zaniedbaniem jak i z uwzględnieniem wpływu zmian odkształcenia ośrodka na wilgotność objętościową (z pominięciem jak i z uwzględnieniem realizacji kroku 6. schematu metody rys. 6.2 - patrz pkt 6.3). Symulację nawadniania przeprowadzono dla wyznaczenia rozkładu ssania matrycowego w obszarze rozwiązania dla czasów trwania nawadniania 10, 25, 50, 100 i 200 dni.

Tab. 7.17. Przyjęta dyskretyzacja obszaru rozwiązania oraz wariant metody

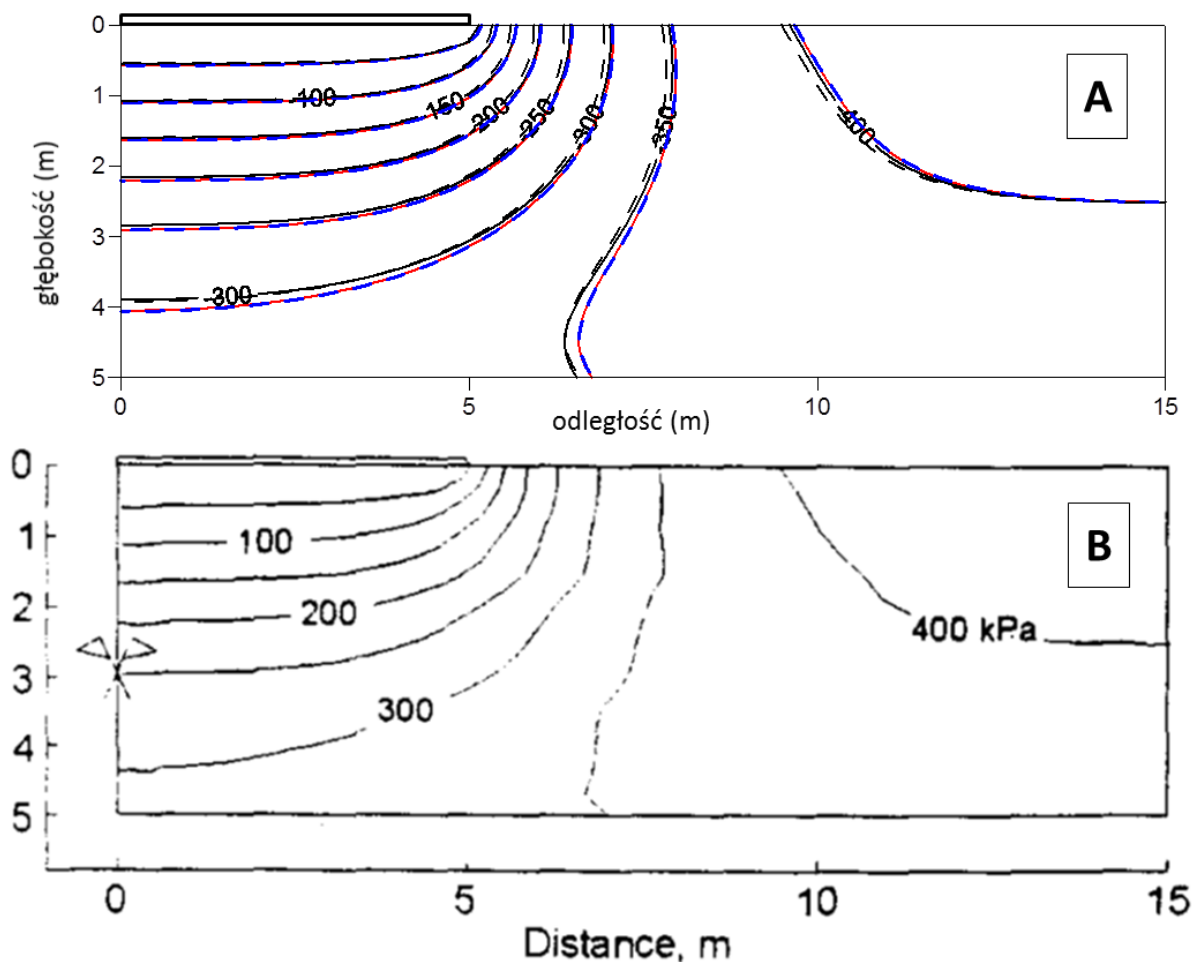
<i>rozmiar kwadratowej siatki punktów węzłowych – dx (patrz pkt 6.5)</i>	<i>20 [cm]</i>
<i><math>\Delta t</math> – max. długość kroku czasowego</i>	<i>0,1 doby</i>
<i>sposób wyliczania prędkości wody w kolejnych krokach czasowych</i>	<i>na podstawie zmiennych z poprzedniego kroku czasowego (tylko punkt „A” schematu rys. 6.3)</i>
<i>zastosowane kryterium ograniczenia długości kroku czasowego</i>	<i>Couranta, <math>C_r = 0.001</math></i>

Wyniki rozkładów ssania uzyskanych za pomocą zaproponowanej metody objętości skończonych zestawiono poniżej z uzyskanymi metodą niesprężoną w programie FlexPDE za artykułem źródłowym. Obliczenia przeprowadzono również dla dwukrotnie zagęszczonej siatki przepływu 10x10cm, choć nie zaobserwowano istotnego wpływu zwiększenia ilości punktów węzłowych na rozkład ssania matrycowego (patrz linia czarna względem czarnej przerywana na rys. 7.5 i 7.6)

Porównawczo wyznaczono również rozkład ssania wg metody Anagnostopoulos i Burlando (2012) (linia niebieska, przerywana na rys. 7.5a i 7.6a) dla analogicznego rozkładu siatki punktów węzłowych, sposobu uśredniania współczynnika filtracji i bez uwzględnienia wpływu odkształcenia na wilgotność objętościową.

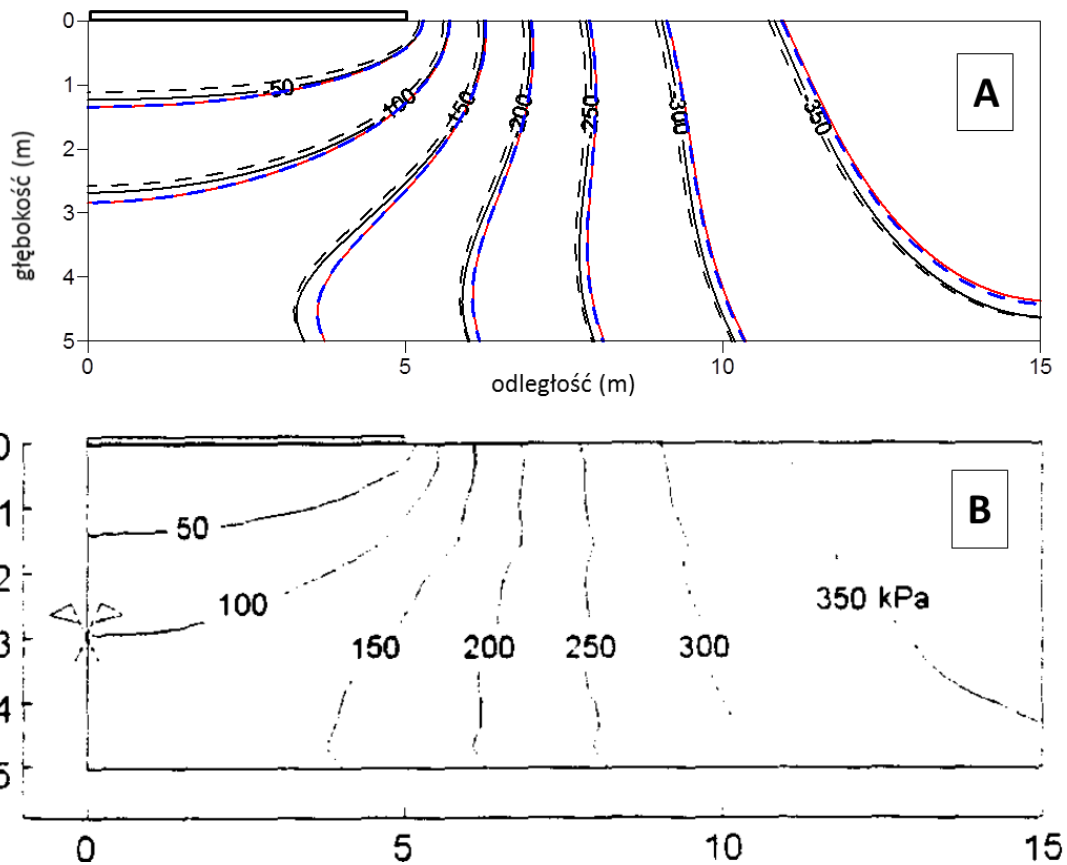
Tab. 7.18. Przyjęte parametry dla rozwiązania numerycznego wg Anagnostopoulos i Burlando (2012)

$\Delta t$ – krok czasowy	0,1 doby
dopuszczalna różnica między kolejnymi iteracjami $\Delta H_c^{m,m+1}$ (patrz wzór 7.5)	0,01 [cm]
rozmiar kwadratowej siatki punktów węzłowych – dx (patrz pkt 6.5)	20 [cm]

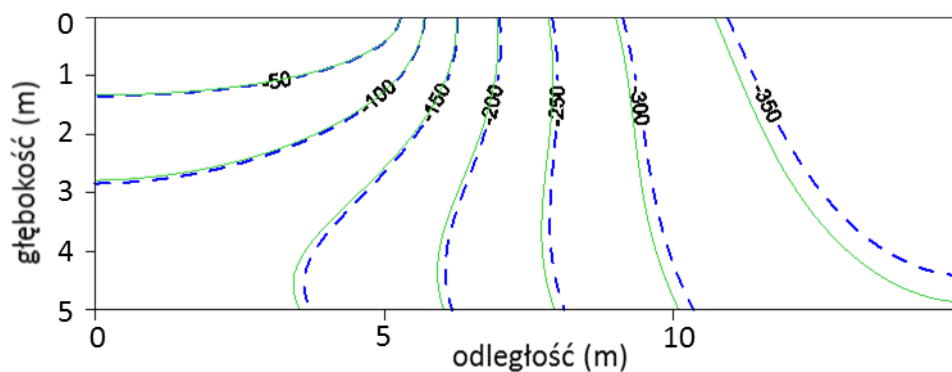


Rys. 7.5. Rozkład ssania matrycowego po 25-dniowym nawadnianiu [kPa]  
**A**-rozwiązanie zaproponowaną metodą objętości skończonych bez uwzględnienia wpływu odkształcenia na wilgotność (linia czerwona) i z uwzględnieniem tego wpływu (linia czarna oraz czarna przerywana, linia czarna przerywana dotyczy symulacji przeprowadzonej dla zagęszczonej siatki punktów węzłowych do rozmiaru 10x10cm) oraz wyniki uzyskane metodą Anagnostopoulos i Burlando (2012) bez uwzględnienia wpływu odkształcenia na wilgotność i dla dopuszczalnej różnicy  $\Delta H_c^{m,m+1} < 0,01$  cm (linia niebieska przerywana),  
**B**-rozwiązanie za artykułem (Hung i Fredlund 2002)





Rys. 7.6. Rozkład ssania matrycowego po 100-dniowym nawadnianiu [kPa]  
**A**-rozwiązanie zaproponowaną metodą objętości skończonych bez uwzględnienia wpływu odkształcenia na wilgotność (linia czerwona) i z uwzględnieniem tego wpływu (linia czarna oraz czarna przerywana, linia czarna przerywana dotyczy symulacji przeprowadzonej dla zagęszczonej siatki punktów węzłowych do rozmiaru 10x10cm) oraz wyniki uzyskane metodą Anagnostopoulos i Burlando (2012) bez uwzględnienia wpływu odkształcenia na wilgotność i dla dopuszczalnej różnicy  $\Delta H_c^{m,m+1} < 0,01$  cm (linia niebieska przerywana),  
**B**-rozwiązanie za artykułem (Hung i Fredlund 2002)



Rys. 7.7. Rozkład ssania matrycowego po 100-dniowym nawadnianiu [kPa] – wyniki wg Anagnostopoulos i Burlando (2012) bez uwzględnienia wpływu odkształcenia na wilgotność, dla dopuszczalnej różnicy  $\Delta H_c^{m,m+1} < 0,1$  cm (linia zielona) i dla dopuszczalnej różnicy  $\Delta H_c^{m,m+1} < 0,01$  cm (linia niebieska przerywana)

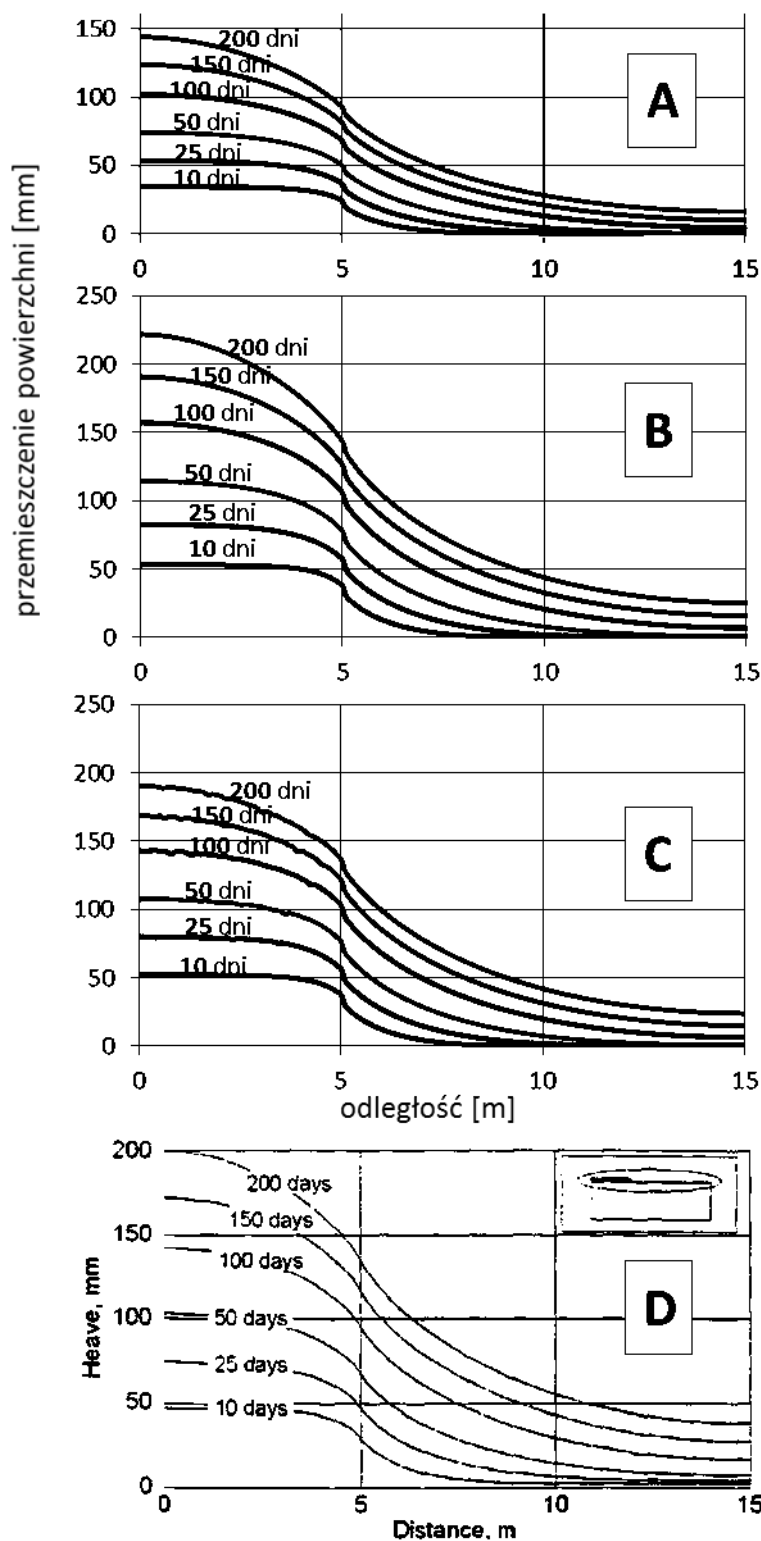
Wyznaczenie ssania matrycowego w obszarze rozwiązania stanowiło pierwszy etap obliczeń wg zaproponowanej metody niesprężonej. W etapie drugim obliczone zostały odkształcenia objętościowe wg zależności (7.13) i (7.14), a następnie odkształcenia liniowe – zgodnie z opisem jak w punkcie 6.8 pracy.

W artykule źródłowym przyjęto, że pionowe brzegi obszaru rozwiązania (AD,CE) są nieruchome w kierunku poziomym, dolny brzeg (DE) jest nieruchomy w obu kierunkach a powierzchnia terenu jest swobodna (patrz rys. 7.4). Wewnątrz obszaru rozwiązania możliwe są odkształcenia w obu kierunkach. W artykule (*Hung i Fredlund 2002*) wyznaczono odkształcenia w oparciu o równania równowagi (7.7 i 7.8), przez co uwzględniony został wpływ odkształceń kierunku poziomym ( $d\varepsilon_x$ ) na odkształcenie w kierunku pionowym ( $d\varepsilon_z$ ) w poszczególnych punktach obszaru rozwiązania.

W rozwiązaniu metodą opisaną w punkcie 6. wyznaczono odkształcenia w sposób uproszczony (zgodnie z opisem powyżej), dla dwóch przypadków, tj. przy założeniu, że każda objętość skończona gruntu ma możliwość odkształceń w obu kierunkach (poziomym i pionowym zgodnie z rys. 6.8) oraz dla przypadku, w którym grunt ma możliwość odkształceń tylko w kierunku pionowym (jak na rys. 6.9). Przyjęta metodyka wyznaczania odkształceń liniowych nie jest zatem tożsama z warunkami dla odkształceń z artykułu źródłowego. Wyznaczenie odkształceń w oparciu o jednowymiarowy stan odkształcenia (równania 7.14 i 6.40) jest bliższe warunkom z artykułu źródłowego, ponieważ zakłada analogiczne warunki przemieszczeń na brzegach obszaru rozwiązania (por. rys. 6.9 i 7.4), jednak uproszczenie związane z nieuwzględnianiem pęcznienia poszczególnych objętości skończonych w kierunku poziomym powoduje pominięcie wpływu odkształceń poziomych pomiędzy sąsiadującymi ze sobą objętościami. Dodatkowo, w metodzie uproszczonej uwzględniono jedynie wpływ zmian ssania matrycowego, zatem pominięto obciążenia od nadkładu.

Powyższe tłumaczy różnice w uzyskanych wynikach deformacji powierzchni gruntu (patrz rys. 7.8). Np. wartości maksymalnego przemieszczenia (dla punktu A jak na rys. 7.3 i czasu symulacji 200 dni) wynoszą (wyniki dotyczą deformacji powierzchni wyznaczonej dla zagęszczonej siatki punktów węzłowych do rozmiaru 10x10cm):

- dla wykresu jak na rys. 8.6a – 144 mm
- dla wykresu jak na rys. 8.6b – 222 mm
- dla wykresu jak na rys. 8.6c – 190 mm
- dla wykresu jak na rys. 8.6d (artykuł źródłowy) – 200mm



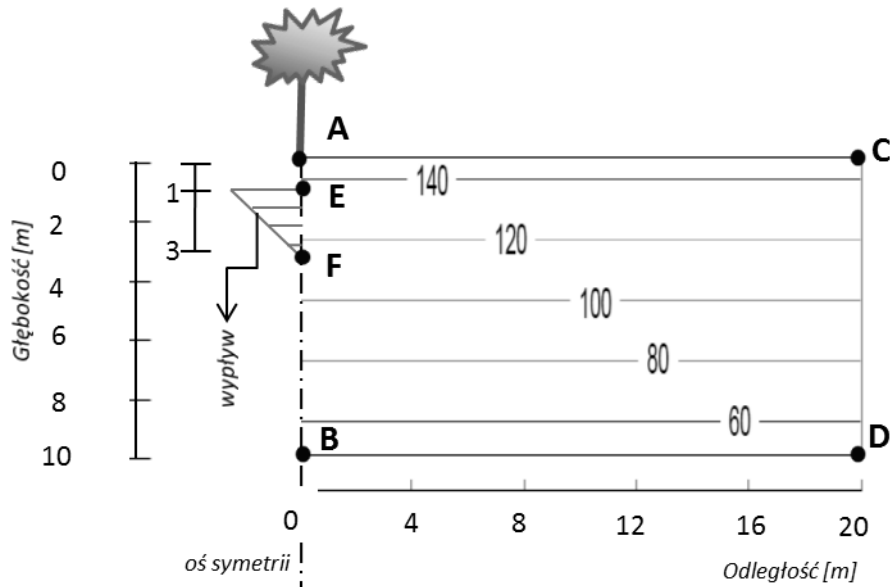
Rys. 7.8. Porównanie wyników wyliczeń przemieszczenia powierzchni w kierunku pionowym (dla zagęszczonej siatki punktów węzłowych o rozmiarze 10x10cm):

**A**- wg przyjętej metody, obliczenia **bez uwzgl.** wpływu odkształcenia na wilgotność, płaski stan odkształcenia (2D); **B** - wg przyjętej metody, obliczenia **bez uwzgl.** wpływu odkształcenia na wilgotność, jednowymiarowy stan odkształcenia (1D); **C**- wg przyjętej metody, obliczenia **z uwzgl.** wpływu odkształcenia na wilgotność, jednowymiarowy stan odkształcenia (1D); **D**-wg artykułu źródłowego (Hung i Fredlund 2002)

Wartym zauważenia jest wpływ uwzględnienia odkształcenia na wilgotność objętościową  $\theta$  w trakcie obliczeń. Z porównania rys.7.8b i rys.7.8c wynika, że uwzględnianie wpływu odkształcenia na wilgotność (realizacja kroku 6. ogólnego schematu metody rys. 6.2) wiąże się z uzyskaniem mniejszych odkształceń. Wynika to stąd, że uwzględnienie wpływu odkształcenia przy obliczaniu wilgotności dla kolejnego kroku czasowego zawsze powoduje jej korektę w kierunku wartości z kroku poprzedniego (patrz równanie 6.18), co przekłada się na mniejszą dynamikę zmian wilgotności w trakcie symulacji – zauważyć to można również na wykresach rozkładu ssania matrycowego (patrz linia czarna względem czerwonej na rys 7.5 i 7.6). Wyniki rozkładu ssania matrycowego w artykule źródłowym są bliższe wynikom symulacji zastosowaną metodą niesprzężoną opisaną w punkcie 6. w wariacie bez uwzględniania wpływu odkształcenia na wilgotność (linia czerwona na rys. 7.5 i 7.6). Analogiczne wyniki rozkładu ssania uzyskano metodą Anagnostopoulos i Burlando (2012) (linia niebieska przerywana na rys. 7.5, 7.6 i 7.7) choć wymagało to zastosowania rygorystycznego kryterium dopuszczalnej różnicy dla kolejnych iteracji wartości całkowitego potencjału wody  $\Delta H_c^{m,m+1} < 0,01 \text{ cm}$  (patrz rys. 7.7), co znacznie wydłużyło czas trwania obliczeń.

### 7.3.2. Pobór wody przez szpaler drzew wg Fredlund i Hung (2001)

Symulacja dotyczy opisanego w artykule źródłowym (Fredlund i Hung 2001) oraz w pracy doktorskiej Vu (2002) przykładu rozwiązania przepływu dwuwymiarowego (płaskiego) związanego z poborem wody przez szpaler drzew. Celem jest wyznaczenie rozkładu wilgotności i deformacji gruntu dla stanu ustalonego w odległości do 20 m od drzew. Ponieważ zjawisko poboru wody i powodowanego nim odkształcenia jest w tym wypadku symetryczne względem linii drzew, dla rozwiązania zagadnienia przyjęto obszar stanowiący przekrój gruntu o głębokości 10m i długości 20m zgodnie z rys (7.9)



Rys. 7.9. Ilustracja obszaru rozwiązania i warunków początkowych (wg artykułu Fredlund i Hung 2001)

Za artykułem źródłowym przyjęto, że na głębokości 15 m znajduje się zwierciadło wody gruntowej ( $h_s = 0$ ) oraz, że w stanie początkowym panuje hydrostatyczny (od 147 kPa na powierzchni gruntu do 47 kPa na brzegu BD) rozkład ssania matrycowego (zgodnie z rys. 7.9). Warunki brzegowe dla całego czasu trwania symulacji określono następująco:

- brzegi AE,FB, AC, CD są nieprzepuszczalne (warunek Neumanna)
- na brzegu EF przyjęto wypływ z obszaru rozwiązania, symulujący pobór wody przez drzewo, przyjmując maksymalną jego wartość na głębokości 1m i liniowy spadek do 0 na głębokości 3m (warunek Neumanna)
- na brzegu BD przyjęto niezmienną, równą początkowej wartość ssania matrycowego ( $h_s = 47 \text{ kPa}$ ) co odpowiada zadanemu warunkowi Dirichleta.

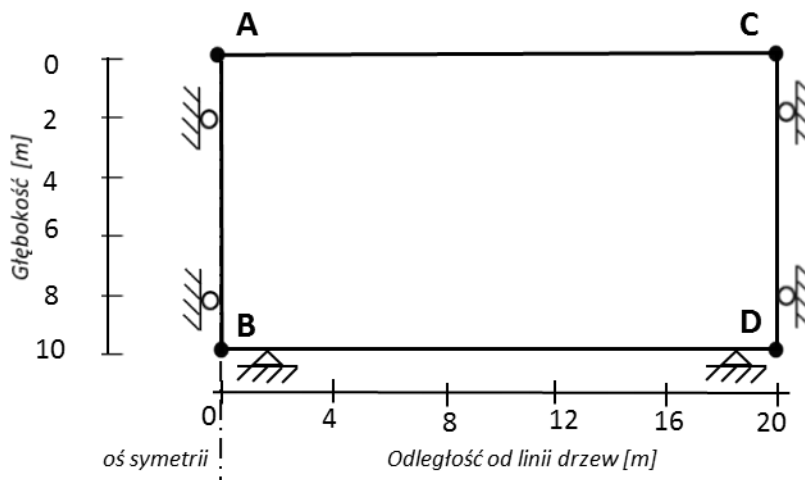
Zgodnie z artykułem źródłowym przyjęto, że drzewa w szpalerze rosną w odstępach co 5 metrów, a pobór wody przez jedno drzewo w szpalerze (dla całego czasu trwania symulacji) jest równe  $0.3 \frac{\text{m}^3}{\text{db}}$  i następuje na odcinku brzegu EF.

W artykułach źródłowych (Fredlund i Hung 2001 oraz Vu 2002) rozwiązanie przeprowadzono metodą tzw. niesprzężoną w sposób analogiczny jak w artykule opisanym w punkcie 7.3.1 (Hung i Fredlund 2002), tj.:

1. wyznaczono rozkład ssania matrycowego w oparciu o równanie opisujące przepływ wody (równanie 7.6). W artykule źródłowym (Fredlund i Hung 2001, Vu 2002), przyjęto, że analiza dotyczy stanu ustalonego, w związku z czym nie jest konieczne określenie krzywej retencji, a do rozwiązania wystarczy określenie wzoru na względny współczynnik filtracji wg Gardnera (1958) (3.21).

2. wyznaczono deformacje ośrodka poprzez rozwiązanie równań różniczkowych cząstkowych, opisujących przemieszczenie w kierunkach x i z (7.7) i (7.8). Warunki brzegowe dla wyznaczenia odkształceń ilustruje poniższy rysunek (rys. 7.10). Zgodnie z artykułem (Fredlund i Hung 2001) przyjęto następującą zależność modułu  $H$  od ssania matrycowego:

$$H = 59.9 \cdot (u_a - u_w) = 59.9\psi_m \quad (7.15)$$



Rys. 7.10. Warunki brzegowe dla wyznaczenia odkształceń (wg Vu 2002)

Rozwiązanie równań (7.6), (7.7) i (7.8) przeprowadzono programami PDEase2D (Fredlund i Hung 2001) oraz FlexPDE (Vu 2002) przyjmując następującą charakterystykę gruntu:

Tab. 7.19. Charakterystyka gruntu dla rozwiązania zagadnienia poboru wody przez szpaler drzew (za Fredlund i Hung 2002 oraz Vu 2002)

początkowy wskaźnik porowatości - $e_0$	1,0
współczynnik zmian objętościowych ze względu na zmianę ssania matrycowego - $C_{\psi}$ - patrz wzór 5.7 i rys. 5.1b	0.2
współczynnik przepuszczalności dla stanu pełnej saturacji $k_s$	$5 \frac{mm}{db}$
współczynnik Poissona $\mu$	0,3
parametry wzoru na względny współczynnik przepuszczalności wodnej wg (Gardner 1958)	$a = 0,001$ $n=2$

Rozwiązanie przeprowadzone zostało również metodą niesprężoną opisaną w punkcie 6., poprzez:

1. wyznaczenie rozkładu ssania matrycowego dla stanu ustalonego (płaski obszar rozwiązania-zgodnie z opisem jak w pkt. 6.5), oraz
2. obliczenie odkształceń w oparciu o relacje konstytutywne wg modelu *Fredlund i Rahardjo (1993)* (równanie 4.16 - patrz pkt. 4.2):

$$d\varepsilon_v = m_1^s d\bar{\sigma} + m_2^s d\psi_m$$

Przyjęto, analogicznie jak w przykładzie z punktu 7.3.1, że uwzględniony zostanie jedynie wpływ zmiany ssania matrycowego na odkształcenie objętościowe gruntu – przy takim założeniu równanie (4.16) redukuje się do zależności:

$$d\varepsilon_v \approx m_2^s d\psi_m \quad (7.16)$$

Przeprowadzono wyliczenia odkształceń liniowych zgodnie z opisem jak w punkcie 6.8 pracy wg dwóch wariantów, tj. przy założeniu możliwych odkształceń gruntu w obu kierunkach, poziomym i pionowym (rys. 6.8) oraz dla przypadku, w którym grunt ma możliwość odkształceń tylko w kierunku pionowym (rys. 6.9).

W przypadku, w którym uwzględniono możliwość odkształceń gruntu w obu kierunkach, odkształcenia objętościowe wyznaczono z relacji (7.17), która jest wariantem równania (7.16) dla przypadku płaskiego (2D) stanu odkształcenia.

$$d\varepsilon_{v-2D} = \frac{2(1+\mu)}{H} d\psi_{m(2D)} \quad (7.17)$$

Dla wariantu, w którym grunt ma możliwość odkształceń jedynie w kierunku pionowym zastosowano wzór (7.18) będący przypadkiem równania (7.16) dla jednowymiarowego (1D) stanu odkształcenia.

$$d\varepsilon_{v-1D} = \frac{(1+\mu)}{H(1-\mu)} d\psi_{m(1D)} \quad (7.18)$$

Wobec powyższego (z uwzględnieniem zależności 7.15) całkowite odkształcenie objętościowe dla zmiany ssania od wartości początkowej do końcowej określają wzory:

- dla płaskiego stanu odkształcenia:

$$\Delta\varepsilon_{v-2D} = \int_{\psi_{m(2D),0}}^{\psi_{m(2D),F}} \frac{2(1+\mu)}{59.9\psi_{m(2D)}} d\psi_{m(2D)} \approx 0,0451 [\ln(\psi_{m(2D),F}) - \ln(\psi_{m(2D),0})] \quad (7.19)$$

- dla jednowymiarowego stanu odkształcenia:

$$\Delta\varepsilon_{v-1D} = \int_{\psi_{m(1D),0}}^{\psi_{m(1D),F}} \frac{(1+\mu)}{(1-\mu) \cdot 59.9\psi_{m(1D)}} d\psi_{m(1D)} \approx 0,031 [\ln(\psi_{m(1D),F}) - \ln(\psi_{m(1D),0})] \quad (7.20)$$

gdzie  $\psi_{m,0}$  i  $\psi_{m,F}$  [kPa] oznaczają początkową i końcową wartość ssania matrycowego

Dla wyznaczenia rozkładu ssania dla stanu ustalonego opisaną w rozdziale 6. metodą konieczne jest pomocnicze przyjęcie krzywej retencji (dowolnej) i prowadzenie obliczeń do chwili, w której ustaną przepływy pomiędzy poszczególnymi punktami węzłowymi siatki przepływu. W tym przypadku zastosowana została krzywa wg Fredlund i Xing (1994) (wzór 3.17) w wersji bez współczynnika korekcyjnego  $C(\psi)$ . Przyjęto następujące parametry krzywej retencji  $a = 100 \text{ kPa}$ ,  $n=1,5$ ,  $m=1$ ,  $\theta_s=0,45$ .

W zastosowanym schemacie obliczeniowym przyjęto dyskretyzację obszaru rozwiązania oraz wariant metody zgodnie z poniższą tabelą (7.20):

Tab. 7.20. *Przyjęta dyskretyzacja obszaru rozwiązania oraz wariant metody*

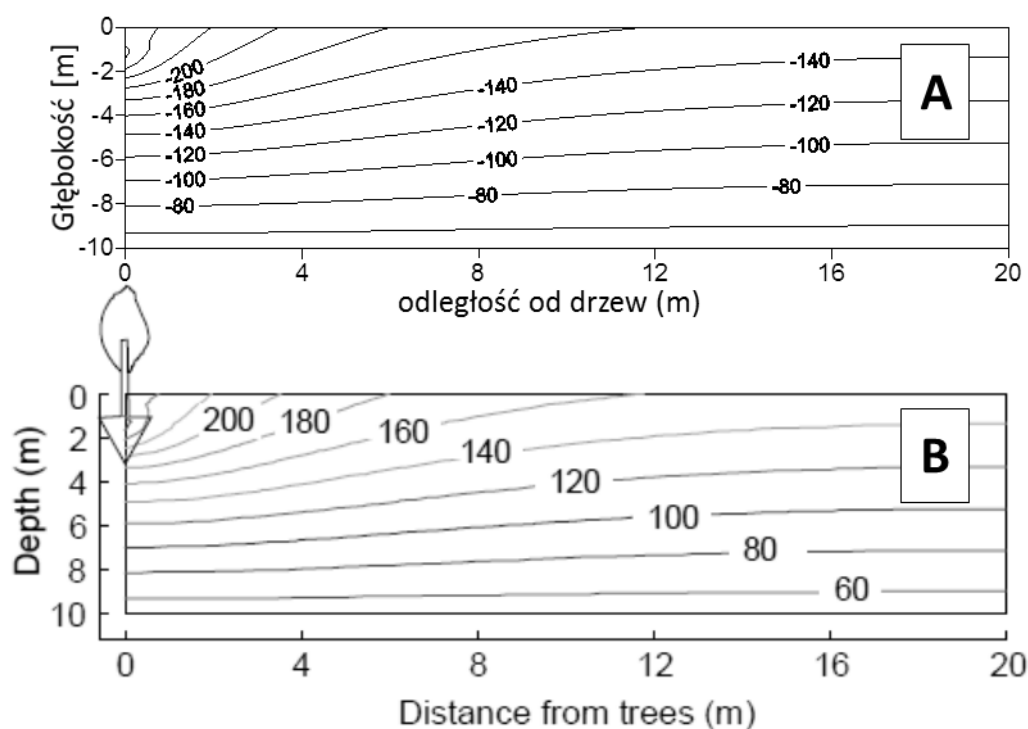
Rozmiar kwadratowej siatki punktów węzłowych – $dx$ (patrz pkt 6.5)	25 [cm]
$\Delta t$ – max. długość kroku czasowego	0,5 doby
sposób wyliczania prędkości wody w kolejnych krokach czasowych	metodą iteracyjną (realizacja punktów od „A” do „F” schematu 6.3), $ h_s(\theta^{t+\Delta t,i+1}) - h_s(\theta^{t+\Delta t,i})  < 0.01 \text{ cm}$ .
zastosowane kryteria ograniczenia długości kroku czasowego	Koniunkcja kryteriów: przyrostowego: $ \theta^{t+\Delta t} - \theta^t  < 0.0001$ Couranta: $C_r < 0.001$

Współczynnik filtracji określony był zgodnie z artykułem źródłowym (Gardner 1958) (wg wzoru 3.21 i tab.7.19). Symulację drenażu prowadzono do momentu ustania przepływów między punktami węzłowymi, w sposób uwzględniający wpływ zmian odkształcenia ośrodka na jego wilgotność (realizując wszystkie kroki od 1-7 schematu rys. 6.2) jak i z zaniedbaniem tego wpływu (tj. z pominięciem kroku 6. schematu rys. 6.2). Uzyskano identyczne wyniki rozkładu ssania matrycowego dla obu wariantów metody, choć przy prowadzeniu obliczeń z pominięciem kroku 6. schematu rys. 6.2, stan ustalony uzyskiwano szybciej (po ok. 500

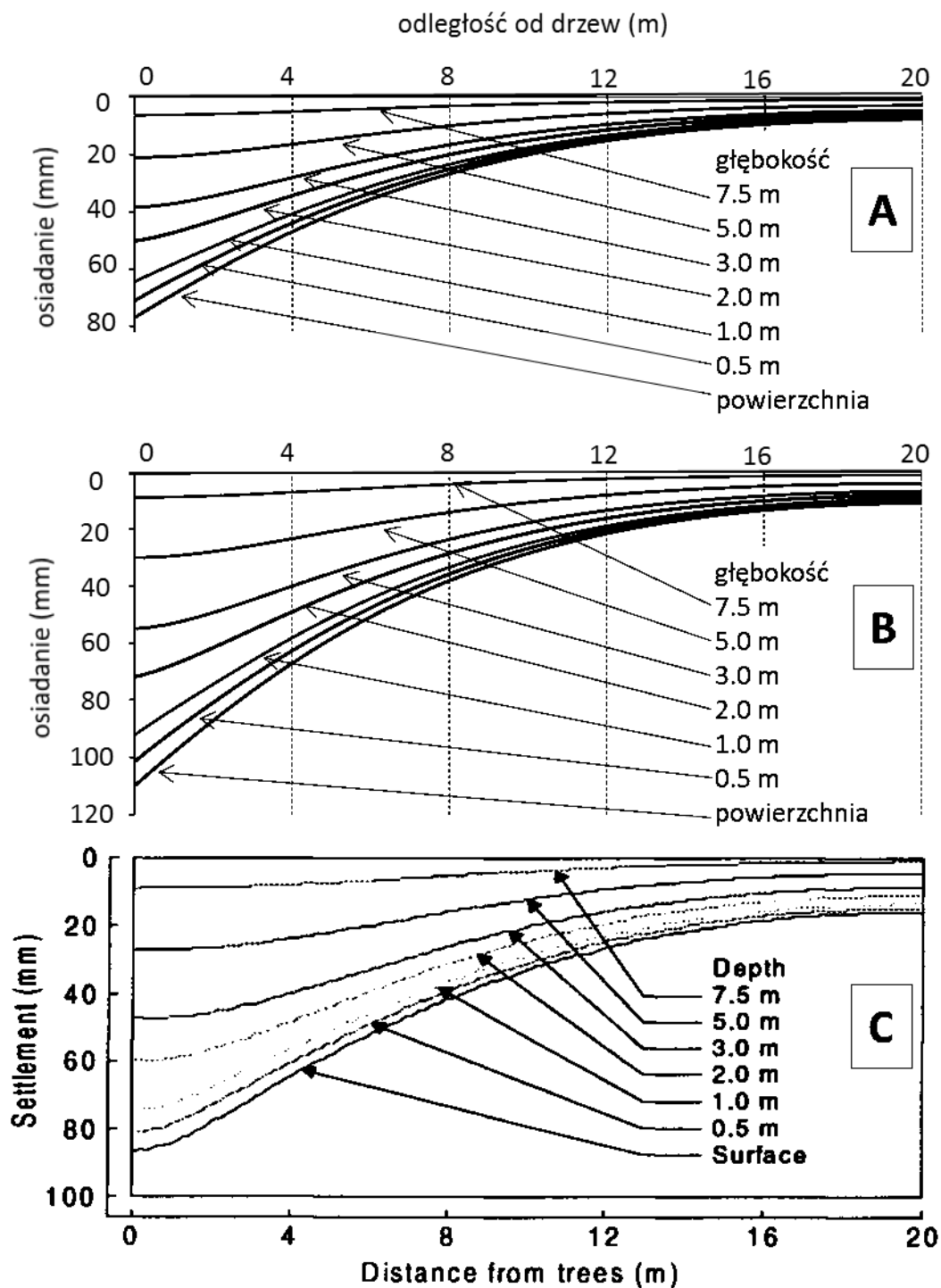


dniach, podczas gdy uzyskanie stanu ustalonego metodą z uwzględnieniem wpływu zmian odkształcenia na wilgotność trwało ok. 100 dni dłużej). Różnica w czasie uzyskiwania stanu ustalonego, w zależności od realizacji kroku 6. ogólnego schematu metody rys. 6.2, spowodowana jest faktem (na co zwrócono już uwagę w punkcie 7.3.1), że uwzględnienie wpływu odkształcenia przy obliczaniu wilgotności objętościowej dla kolejnego kroku czasowego powoduje jej korektę w kierunku wartości z kroku poprzedniego (patrz równanie 6.18), co wiąże się z mniejszą dynamiką zmian uwilgotnienia w trakcie symulacji.

Wyniki rozkładu ssania matrycowego uzyskanego za pomocą zaproponowanej metody objętości skończonych zestawiono poniżej z uzyskanym metodą niesprężoną za artykułem źródłowym (Fredlund i Hung 2001, oraz Vu 2002).



Rys. 7.11. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla stanu ustalonego  
 A-rozwiązanie zaproponowaną metodą objętości skończonych, B- według artykułu  
 źródłowego (Fredlund i Hung 2001)



Rys. 7.12. Osiadanie gruntu w pobliżu linii drzew  
**A**- wg przyjętej metody, płaski stan odkształcenia (2D); **B** - wg przyjętej metody, jednowymiarowy stan odkształcenia (1D); **C**-według artykułu źródłowego (Fredlund i Hung 2001 i Vu 2002)

W artykule źródłowym przyjęto (zgodnie z rys. 7.10), że pionowe brzegi obszaru rozwiązania (AB,CD) są nieruchome w kierunku poziomym, dolny brzeg (BD) jest nieruchomy w obu kierunkach a powierzchnia terenu jest swobodna. Wewnątrz obszaru rozwiązania możliwe są

odkształcenia w obu kierunkach. W artykule (Fredlund i Hung 2001) wyznaczono odkształcenia w oparciu o równania równowagi (7.7 i 7.8), a zatem uwzględniono wpływ odkształceń kierunku poziomym ( $d\varepsilon_x$ ) na odkształcenia w kierunku pionowym ( $d\varepsilon_z$ ) wewnątrz obszaru rozwiązania.

W rozwiązaniu metodą opisaną w punkcie 6. wyznaczono odkształcenia w sposób uproszczony (zgodnie z opisem powyżej i analogicznie jak w pkt. 7.3.1), dla dwóch przypadków, tj. przy założeniu, że każda objętość skończona gruntu ma możliwość odkształceń w obu kierunkach (płaski stan odkształcenia, zgodnie z rys. 6.8) oraz dla przypadku, w którym grunt ma możliwość odkształceń tylko w kierunku pionowym (jednowymiarowy stan odkształcenia, jak na rys 6.9). Wyznaczenie osiadań w oparciu o jednowymiarowy stan odkształcenia (równania 7.20 i 6.40) jest bliższe warunkom z artykułu źródłowego, ponieważ zakłada analogiczne warunki przemieszczeń na brzegach obszaru rozwiązania (por. rys. 6.9 i 7.10), jednak uproszczenie związane z nieuwzględnianiem skurczu poszczególnych objętości skończonych w kierunku poziomym powoduje pominięcie wpływu odkształceń poziomych pomiędzy sąsiadującymi ze sobą objętościami. Dodatkowo, w metodzie uproszczonej pominięto obciążenia od nadkładu. Powyższe przekłada się na różnice osiadania, zwłaszcza na brzegach obszaru rozwiązania (porównaj odkształcenia w linii drzew na rys. 7.12 z odkształceniami w odległości 4m od linii drzew w tab. 7.21).

Wartości maksymalnego osiadania (dla punktu A jak na rys. 7.9) wynoszą (rys. 7.12):

- dla wykresu jak na rys. 7.12a – 77 mm
- dla wykresu jak na rys. 7.12b – 110 mm
- dla wykresu jak na rys. 7.12c (artykuł źródłowy) – 85mm

Natomiast w odległości 4 metrów od linii drzew:

	<i>dla wykresu jak na rys. 7.12a (odkształcenia 2D)</i>	<i>dla wykresu jak na rys. 7.12b (odkształcenia 1D)</i>	<i>według artykułu (Fredlund i Hung 2001)</i>
<i>na powierzchni</i>	<i>47mm</i>	<i>67mm</i>	<i>65mm</i>
<i>na gł. 3 m</i>	<i>28mm</i>	<i>40mm</i>	<i>40mm</i>
<i>na gł. 5 m</i>	<i>16,5mm</i>	<i>23.5 mm</i>	<i>20mm</i>

Tab. 7.21. Osiedania gruntu w odległości 4m od linii drzew





## 8. Wpływ zasięgu i rozkładu gęstości strefy korzeniowej oraz dobowej transpiracji na wielkość spodziewanych deformacji gruntu

Niniejszy rozdział oparto w znacznym stopniu na treści referatu przedstawionego na konferencji Computational Methods in Water Resources w Stuttgarcie w roku 2014 (Michalski i Szymkiewicz 2014).

W oparciu o przedstawiony w punkcie 6. pracy model numeryczny, przeprowadzona została analiza spodziewanych deformacji powierzchni gruntu, powodowanych przez pojedyncze drzewo oraz przez szpaler drzew. Dla potrzeb symulacji poboru wody przyjęto makroskopowy model funkcji źródłowej (3.30), ze zdefiniowaną dwuwymiarową funkcją przestrzennego rozkład gęstości poboru wody wg Vrugt i inni (2001b) – (3.33). Model (Vrugt i in. 2001b) jest modelem zakładającym cylindryczny kształt strefy korzeniowej i opisany jest równaniami (poniższy wzór 8.1 jest przypadkiem wzoru 3.30 dla dwuwymiarowego obszaru rozwiązania opisanego współrzędnymi biegunowymi):

$$S(r, z, t) = \alpha(h_s) \frac{\beta(r, z) \cdot T_p^*}{2\pi \int_0^{Z_m} \int_0^{R_m} r \cdot \beta(r, z) dz \cdot dr} \quad (8.1)$$

$$\beta(r, z) = \left[1 - \frac{z}{Z_m}\right] \cdot \left[1 - \frac{r}{R_m}\right] e^{-\left\{\left(\frac{p_z}{Z_m}\right) \cdot |z^* - z| + \left(\frac{p_r}{R_m}\right) \cdot |r^* - r|\right\}} \quad (8.2)$$

gdzie:  $(r, z)$  – współrzędne punktu w obrębie strefy korzeniowej na głębokości  $z$  i w odległości  $r$  od pnia drzewa.

$Z_m$  – maksymalna głębokość strefy korzeniowej

$R_m$  - maksymalny poziomy zasięg występowania strefy korzeniowej

$z^*, r^*, p_z, p_r$  – parametry (mające wpływ na rozkład gęstości poboru w strefie korzeniowej)

$\alpha(h_s)$  – funkcja opisująca dostępność wody w warunkach ograniczonej wilgotności (patrz pkt. 3.6, wzór 3.26)

$\beta$  – funkcja gęstości rozkładu poboru wody w obrębie strefy korzeniowej

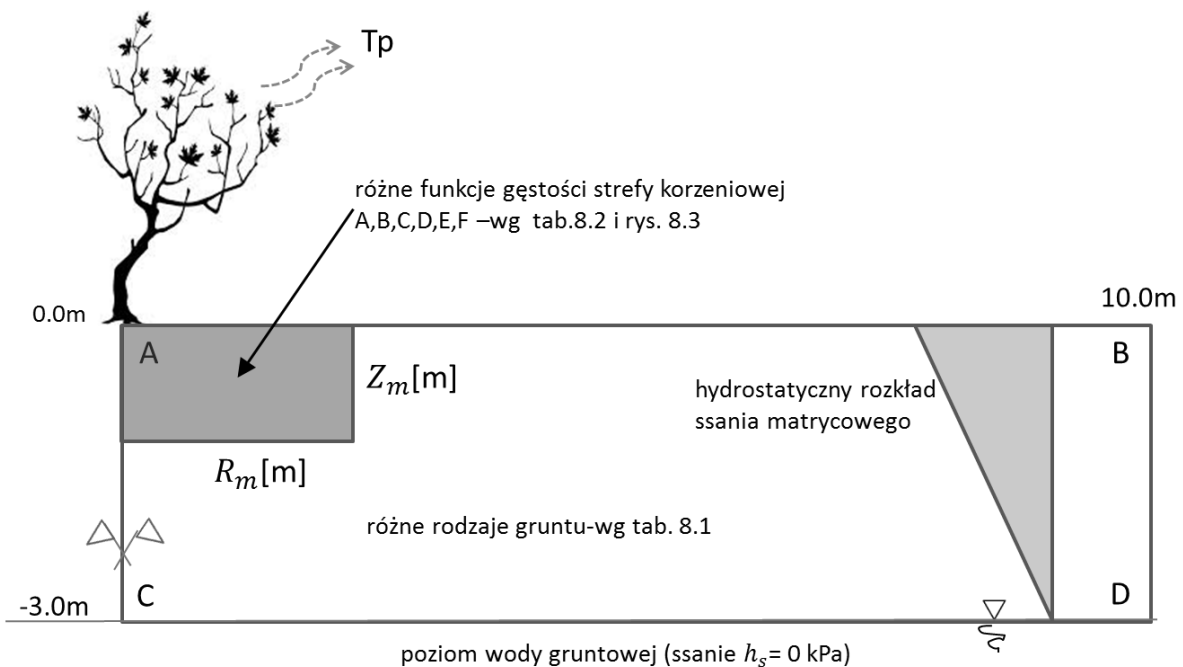
$T_p^*$  - całkowity pobór wody przez drzewo ze strefy korzeniowej w warunkach nieograniczonej dostępności.

Założono ponadto, że rozkład funkcji  $\beta$  odpowiada przestrzennemu rozkładowi gęstości strefy korzeniowej.

Celem analizy będzie zbadanie wpływu:

- całkowitego poboru wody przez drzewa w warunkach nieograniczonej dostępności wody ( $T_p^*$  we wzorze 8.1)
- maksymalnego zasięgu strefy korzeniowej ( $Z_m$  i  $R_m$  we wzorach 8.1 i 8.2)
- przyjętego rozkładu gęstości strefy korzeniowej ( $z^*$ ,  $r^*$ ,  $p_z$ ,  $p_r$ )

na spodziewane deformacje powierzchni gruntu, dla przypadku pojedynczego drzewa oraz szpaleru drzew.



Rys. 8.1. Schemat przyjętego obszaru rozwiązania

Dla potrzeb symulacji przyjęto dwuwymiarowy, osiowo-symetryczny względem drzewa obszar rozwiązania o zasięgu  $r=10$  m od pnia drzewa i głębokości 3m (zgodnie z rys. 8.1). Założono, że na brzegu CD obszaru, na głębokości 3 metrów, znajduje się zwierciadło wody gruntowej ( $h_s = 0$ ) oraz, że w stanie początkowym panuje hydrostatyczny (od 29.43 kPa na powierzchni gruntu do 0 kPa na brzegu CD) rozkład ssania matrycowego (zgodnie z rys. 8.2). Warunki brzegowe dla całego czasu trwania symulacji określono następująco:

- brzegi AB, AC, BD są nieprzepuszczalne (warunek Neumanna)

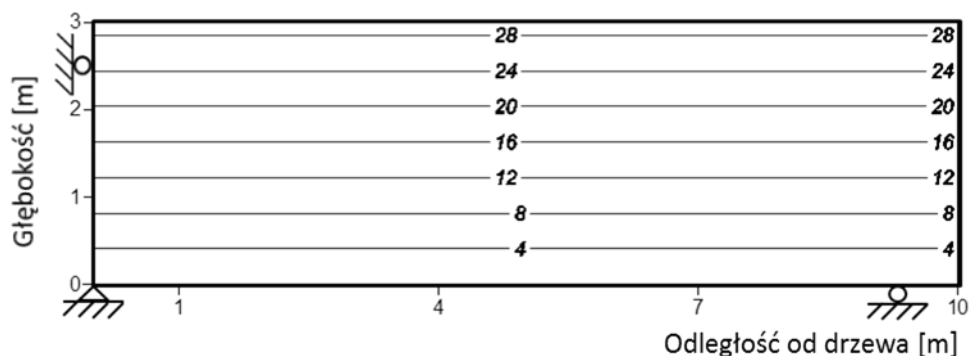
- na brzegu CD (zwierciadło wody gruntowej) przyjęto niezmienną, równą początkowej wartość ssania matrycowego ( $h_s = 0 \text{ kPa}$ ), co odpowiada zadanemu warunkowi Dirichleta.

Zastosowana została krzywa retencji wg Van Genuchtena (*Van Genuchten 1980* – wzór 3.15):

$$\Theta = [1 + (\alpha \cdot h_s)^n]^{-m}$$

oraz wzór na względny współczynnik filtracji wg propozycji Navarro i inni (*2009a*):

$$k_r = \Theta^{3+2/(n-1)} \quad (8.3)$$



Rys. 8.2. Początkowy (hydrostatyczny) rozkład ssania matrycowego [kPa] oraz warunki brzegowe dla wyznaczenia odkształceń

Przyjęto następującą charakterystykę gruntów i parametry do powyższych wzorów (3.15) i (8.3) - z wykorzystaniem artykułu Carsel i Parrish (*1988*):

Tab. 8.1. Przyjęte charakterystyki gruntu

charakterystyka gruntu	Silty Clay Loam	Clay Loam	Silty Loam	Silty Clay
współczynnik filtracji dla stanu pełnej saturacji - $k_s$	$13.3 \frac{\text{mm}}{\text{db}}$	$85.8 \frac{\text{mm}}{\text{db}}$	$108 \frac{\text{mm}}{\text{db}}$	$4.8 \frac{\text{mm}}{\text{db}}$
$\theta_s$	0,43	0,41	0,45	0,36
$\theta_r$	0.08	0.0954	0.067	0.07
parametry krzywej retencji wg Van Genuchten – Mualem (3.15) oraz do równania (8.3)	$\alpha = 0.0104/\text{cm}$ $n=1.23$	$\alpha = 0.019/\text{cm}$ $n=1.3158$	$\alpha = 0.02/\text{cm}$ $n=1.41$	$\alpha = 0.005/\text{cm}$ $n=1.09$
$e_0$	0.754	0.695	0.82	0.562
współczynnik zmian objętościowych wg McKeen'a - $C_h$	0.09	0.09	0.09	0.09

Zastosowano jednolity współczynnik  $C_h$  zmian objętościowych wg McKeen'a dla wszystkich gruntów opisanych w tab. 8.1, dla ujednoczenia skali otrzymanych wyników deformacji gruntu.

Symulacje prowadzone były dla:

- dwóch wartości całkowitego poboru wody w warunkach nieograniczonej dostępności, przypadających na jedno drzewo  $T_p^* = 0.02 \frac{m^3}{db}$  i  $T_p^* = 0.04 \frac{m^3}{db}$  (w przypadku obliczeń dla szpaleru drzew założono, że drzewa rosną w odstępach co 1m)
- różnych zestawów parametrów makroskopowej funkcji poboru wody wg Vrugt i inni (2001b) (do wzorów 8.1 i 8.2), oznaczonych A,B,C,D,E,F – wg tab. 8.2
- różnych rodzajów gruntu – wg. tab. 8.1
- jednakowego czasu trwania 180 dni.

Tab. 8.2. Przyjęte parametry makroskopowej funkcji źródłowej wg Vrugt i inni (2001b)

	$z_m$ [m]	$r_m$ [m]	$z^*$ [m]	$r^*$ [m]	$p_z$ [-]	$p_r$ [-]	autor
<b>A</b>	1.0	2.0	0.0	0.0	1.0	1.0	Vrugt i inni (2001b)
<b>B</b>	1.0	2.0	0.2	0.0	1.0	1.0	Vrugt i inni (2001b)
<b>C</b>	1.0	2.0	0.0	1.0	1.0	1.0	Vrugt i inni (2001b)
<b>D</b>	1.0	2.0	0.2	1.0	5.0	5.0	Vrugt i inni (2001b)
<b>E</b>	2.0	2.0	0.0	0.0	1.0	1.0	zestaw dodatkowy
<b>F</b>	1.0	4.0	0.0	0.0	1.0	1.0	zestaw dodatkowy

Parametry  $z^*, r^*$  określają położenie punktu o największym poborze w strefie korzeniowej względem dnia drzewa (patrz rys. 8.3).

Funkcję  $\alpha(h_s)$ , opisującą dostępność wody w warunkach ograniczonego nasycenia, przyjęto wg propozycji Kowalika (1973b), zgodnie z rys. 3.6a.

W przypadku symulacji poboru przez pojedyncze drzewo zastosowano metodykę obliczeń dla przepływu dwuwymiarowego osiowo-symetrycznego, zgodnie z pkt. 6.6.

Dla szpaleru drzew prowadzono obliczenia jak dla przepływu dwuwymiarowego płaskiego, zgodnie z opisem jak w punkcie 6.5 pracy.



W obu przypadkach przyjęto ten sam rozmiar kwadratowej siatki punktów węzłowych - 25 cm (zgodnie z tab. 8.3).

W zastosowanych schematach obliczeniowych przyjęto dyskretyzację obszaru rozwiązania oraz wariant metody zgodnie z poniższą tabelą (8.3):

Tab. 8.3. Przyjęta dyskretyzacja obszaru rozwiązania oraz zastosowany wariant metody

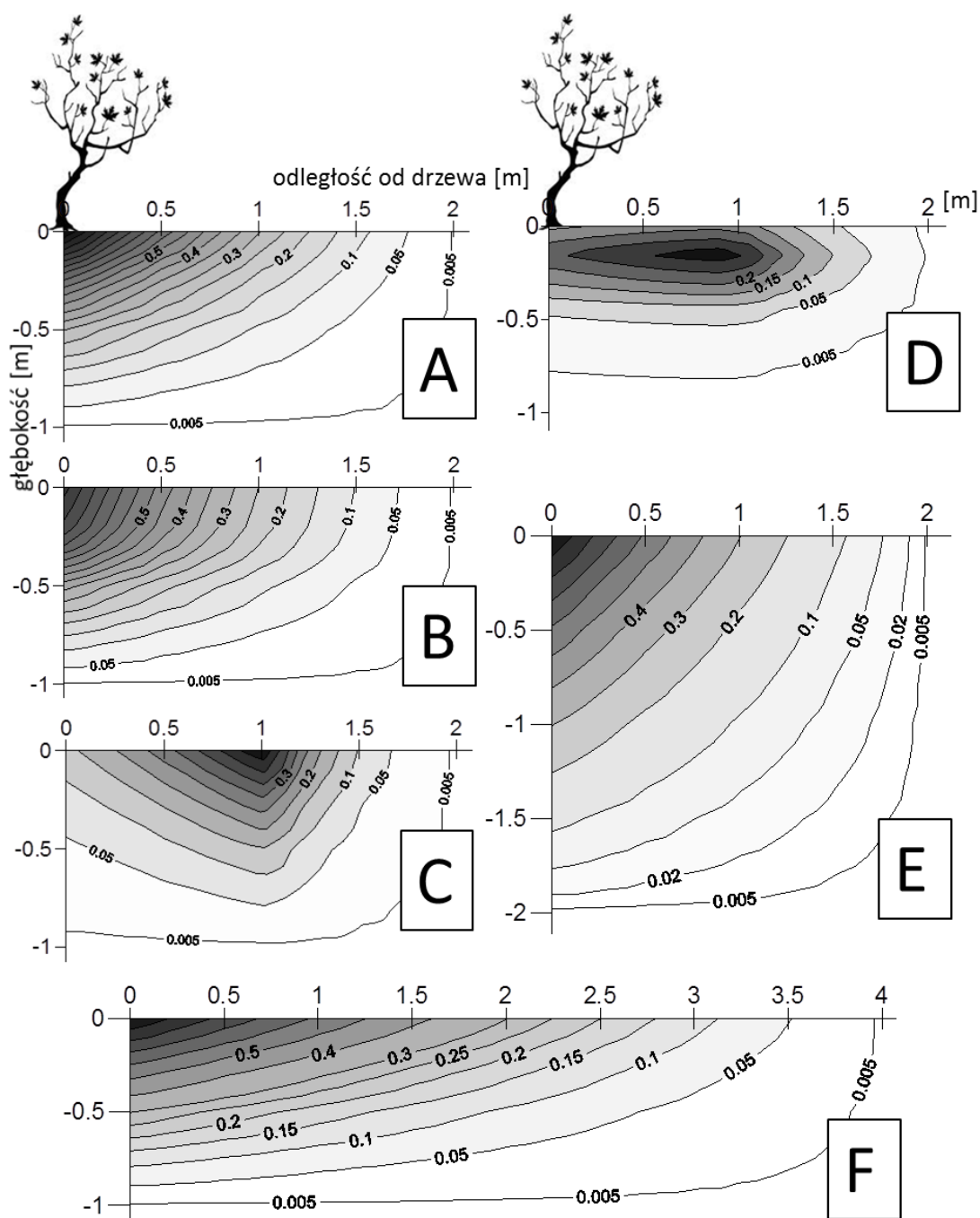
Rozmiar kwadratowej siatki punktów węzłowych – $dx$ (patrz pkt 6.5 i 6.6)	25 [cm]
$\Delta t$ – max. długość kroku czasowego	1 doba
sposób wyliczania prędkości wody w kolejnych krokach czasowych	metodą iteracyjną (realizacja punktów od „A” do „F” schematu 6.3), $ h_s(\theta^{t+\Delta t, i+1}) - h_s(\theta^{t+\Delta t, i})  < 0.01 \text{ cm}$ .
zastosowane kryteria ograniczenia długości kroku czasowego	Koniunkcja kryteriów: przyrostowego: $ \theta^{t+\Delta t} - \theta^t  < 0.0001$ Couranta: $C_r < 0.001$
uwzględnienie wpływu zmian odkształcenia ośrodka na nasycenie w trakcie symulacji (realizacja kroku 6-go w schemacie rys. 6.2)	TAK

Odształcenia objętościowe wyznaczone zostały na podstawie relacji (Navarro i inni 2009a,b):

$$\Delta e = -C_h \cdot \Delta \log(h_s + p_{atm}) \quad (8.4)$$

gdzie  $C_h$  - współczynnik zmian objętościowych wg McKeen’a zgodnie z tab. 8.1

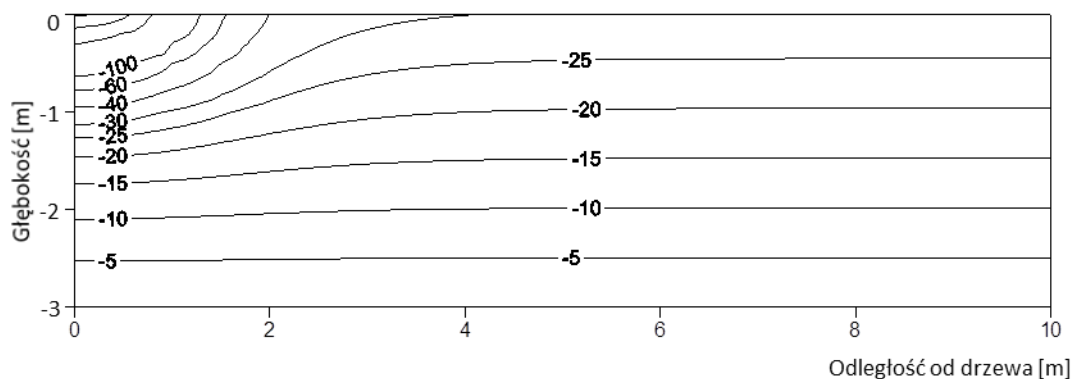
Wyliczenia odkształceń liniowych dla zadanych warunków brzegowych (jak na rys. 8.2) przeprowadzono zgodnie z opisem jak w punkcie 6.9 pracy przy założeniu możliwych odkształceń gruntu w obu kierunkach, poziomym i pionowym (zgodnie z rys. 6.8).



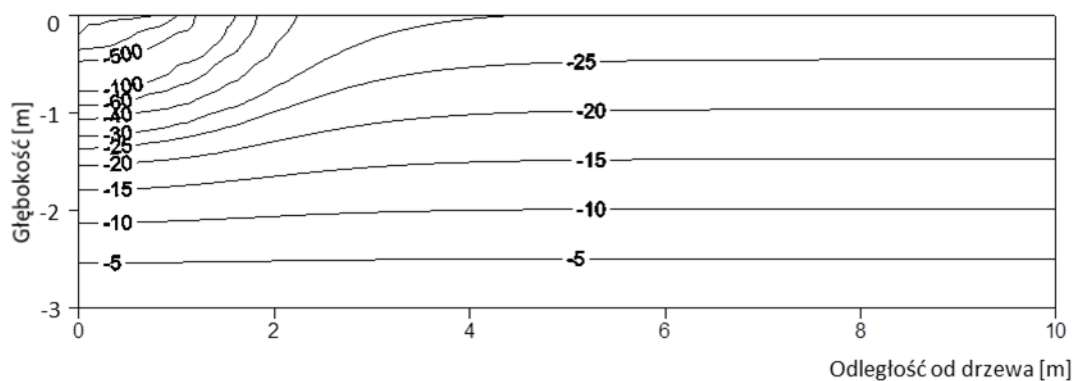
Rys. 8.3. Graficzna ilustracja rozkładu gęstości poboru wody w strefie korzeniowej dla różnych parametrów z tabeli 8.2 –miejsca o największej gęstości zaznaczone kolorem czarnym

Wyniki (profile ssania matrycowego, odkształcenia powierzchni gruntu, całkowitą i średnią ilość pobranej wody przez drzewa w trakcie trwania symulacji) zaprezentowano na poniższych wykresach i tabelach.

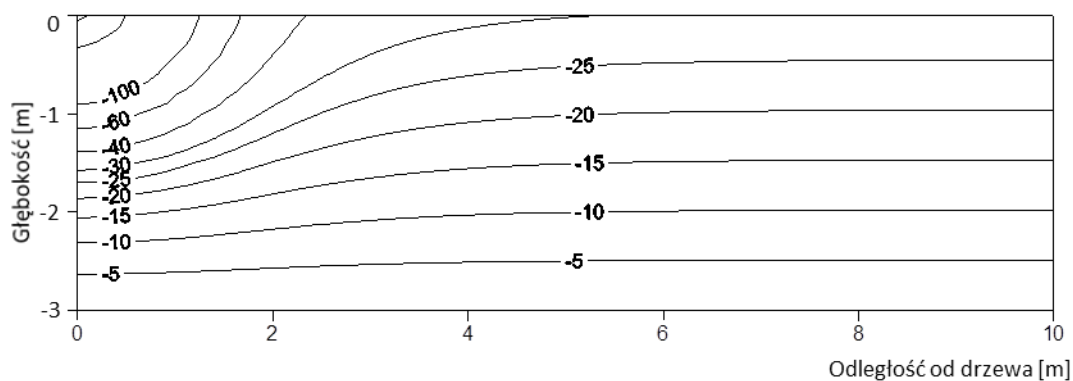
Wyniki symulacji dla poboru przez pojedyncze drzewo:



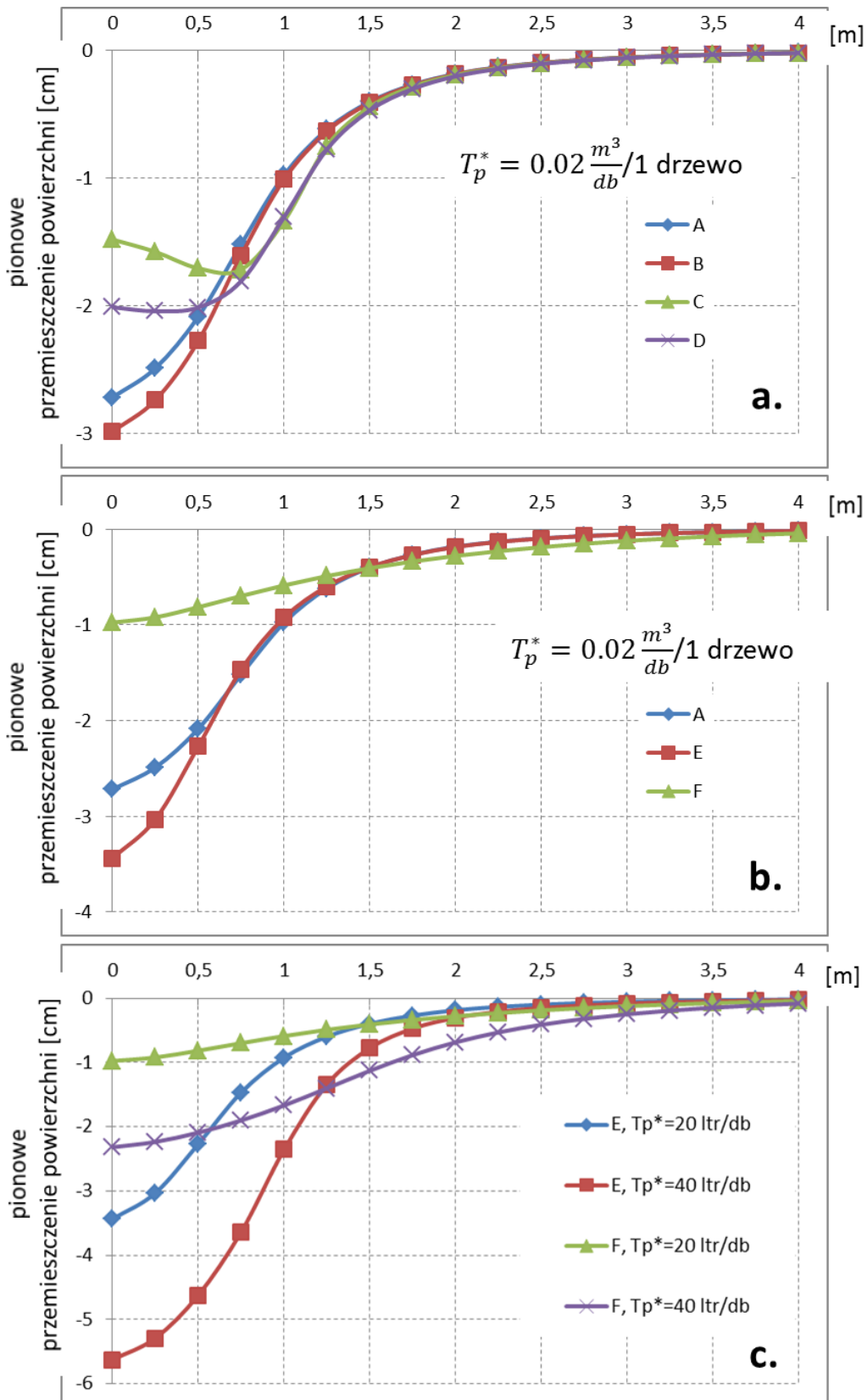
Rys. 8.4. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla gruntu Silty Clay Loam po 180 dniach poboru,  
 $T_p^* = 0.02 \frac{m^3}{db}$ , model funkcji źródłowej „A”- wyniki dla poj. drzewa



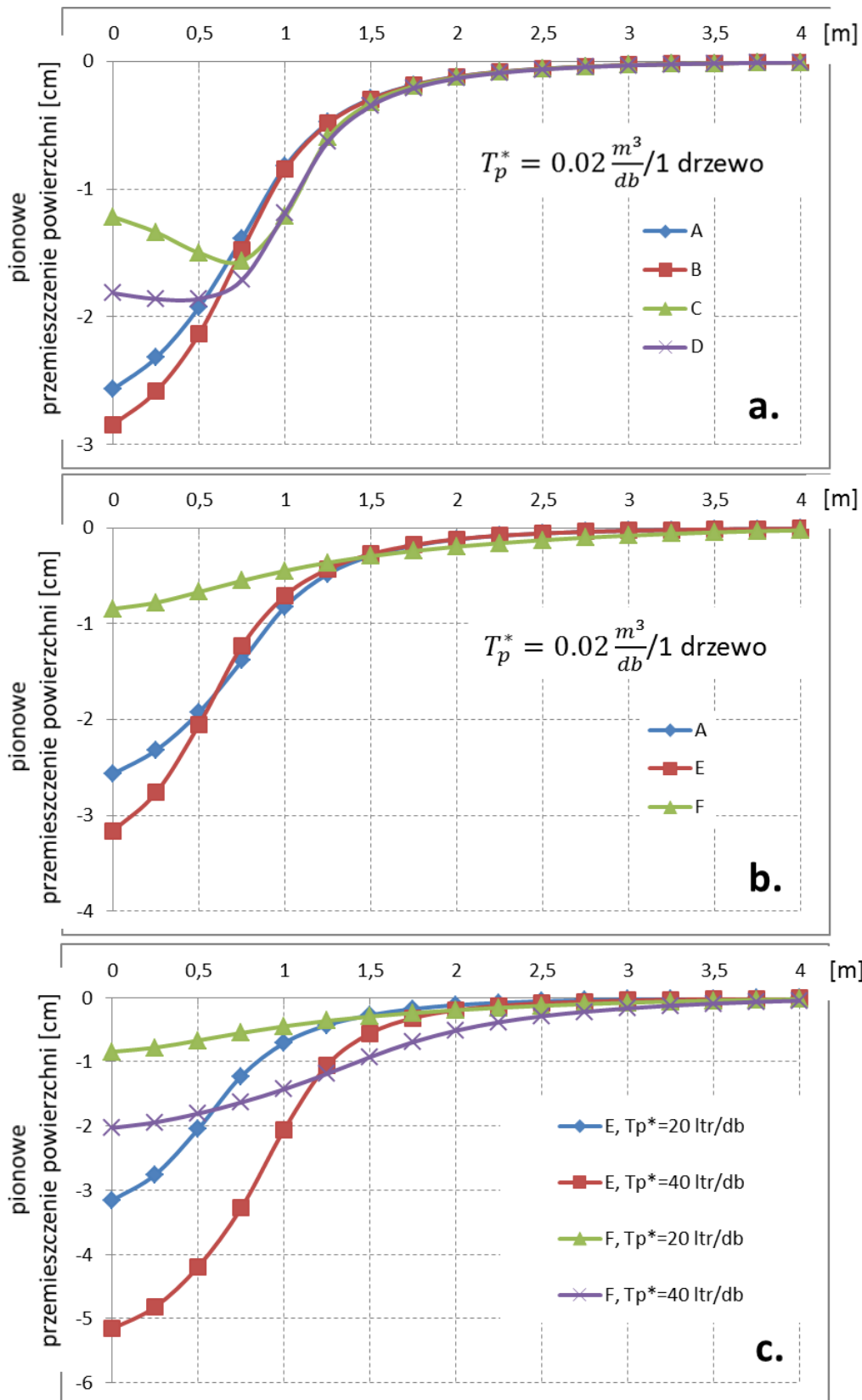
Rys. 8.5. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla gruntu Silty Clay Loam po 180 dniach poboru,  
 $T_p^* = 0.04 \frac{m^3}{db}$ , model funkcji źródłowej „A”- wyniki dla poj. drzewa



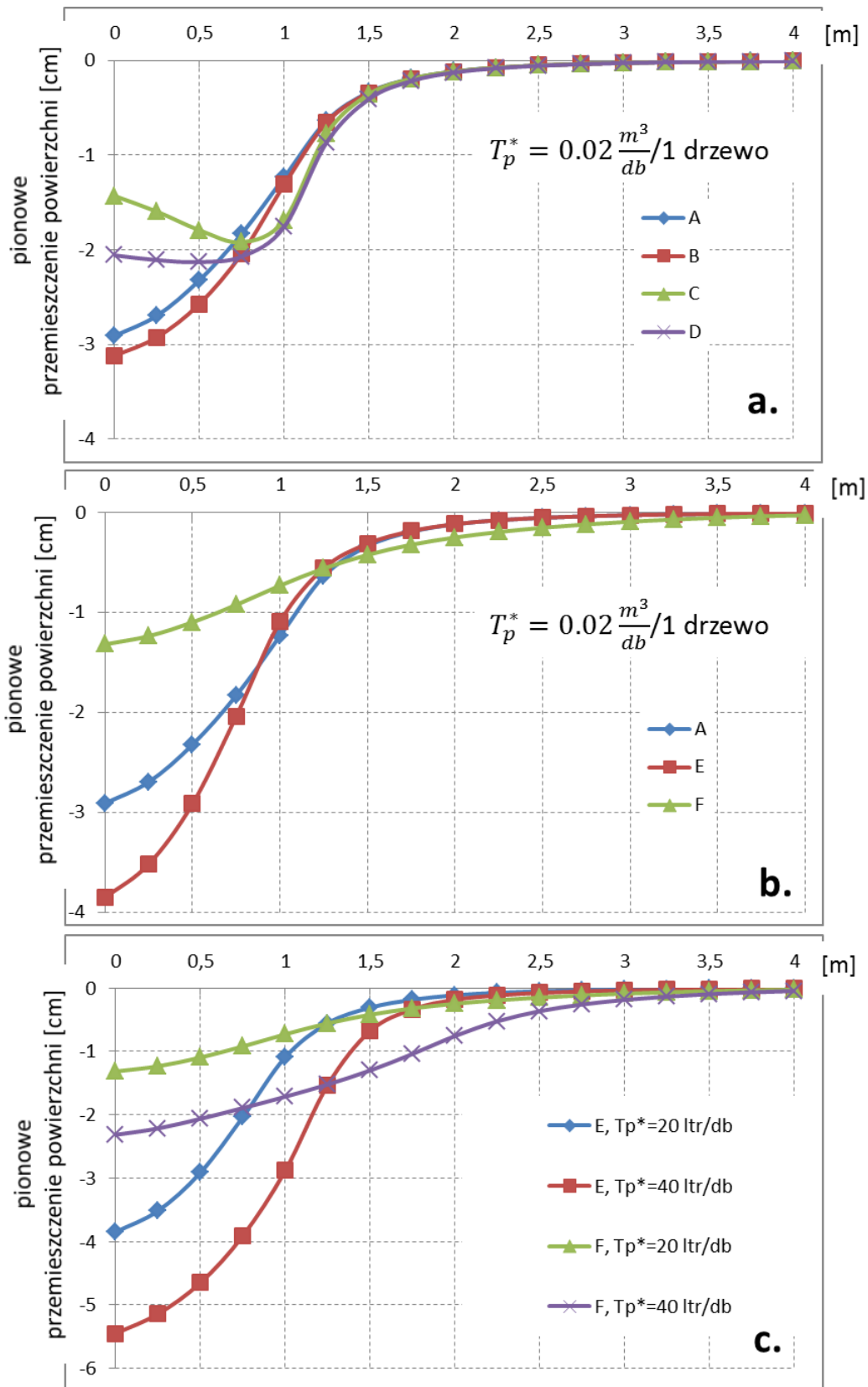
Rys. 8.6. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla gruntu Silty Clay po 180 dniach poboru,  
 $T_p^* = 0.04 \frac{m^3}{db}$ , model funkcji źródłowej „E”- wyniki dla poj. drzewa



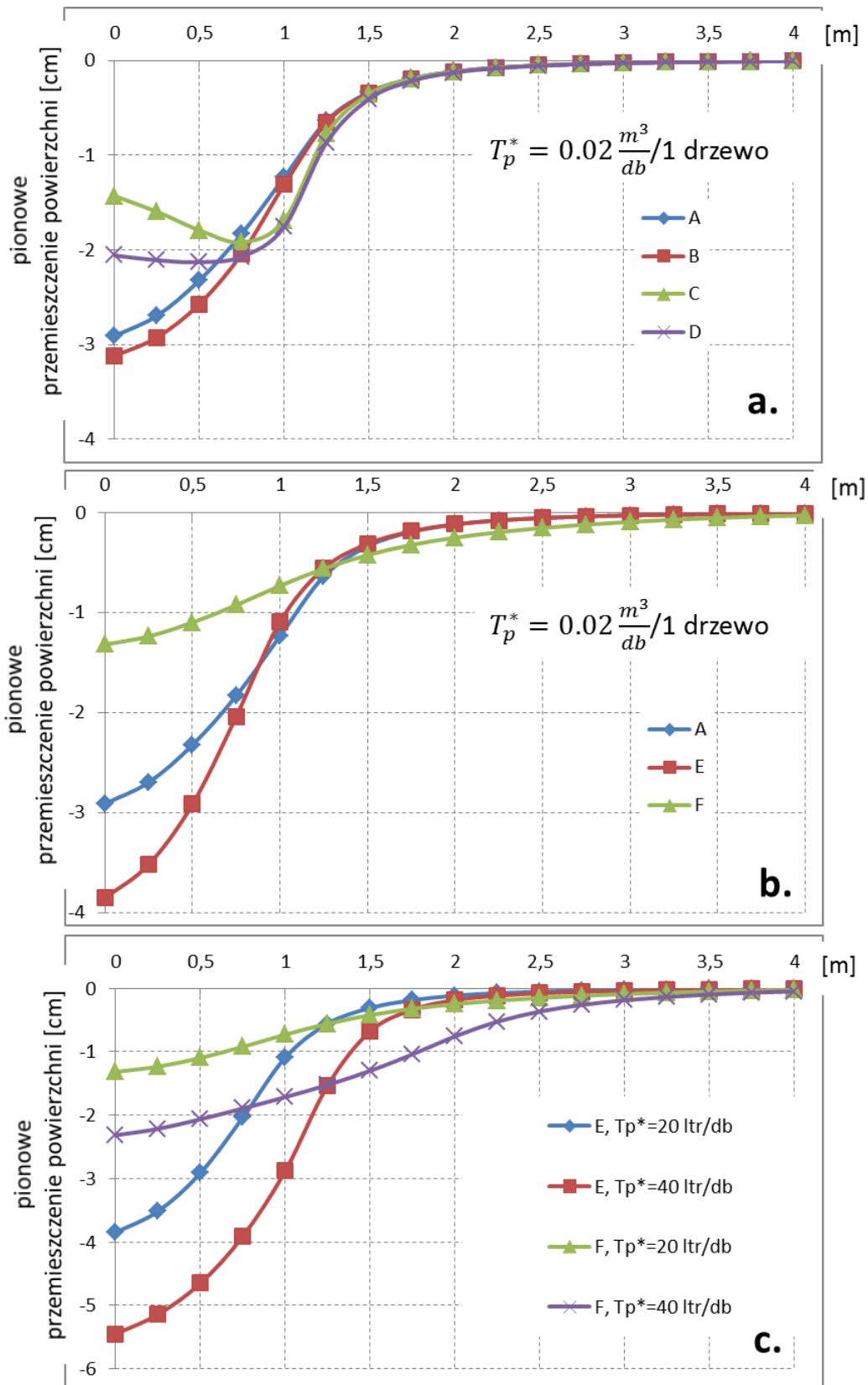
Rys. 8.7. Porównanie deformacji powierzchni gruntu Silty Clay Loam po 180 dniach symulacji poboru przez **pojedyncze drzewo** dla: **a.** różnych funkcji gęstości (ten sam zasięg strefy korzeniowej i pobór  $T_p^*$ ); **b.** różnych zasięgów strefy korzeniowej (ten sam punkt największej gęstości strefy korzeniowej i pobór  $T_p^*$ ); **c.** różnych poborów  $T_p^*$ , dla funkcji gęstości strefy korzeniowej „E” i „F”



Rys. 8.8. Porównanie deformacji powierzchni gruntu Clay Loam po 180 dniach symulacji poboru przez **pojedyncze drzewo** dla: **a.** różnych funkcji gęstości (ten sam zasięg strefy korzeniowej i pobór  $T_p^*$ ); **b.** różnych zasięgów strefy korzeniowej (ten sam punkt największej gęstości strefy korzeniowej i pobór  $T_p^*$ ); **c.** różnych poborów  $T_p^*$ , dla funkcji gęstości strefy korzeniowej „E” i „F”

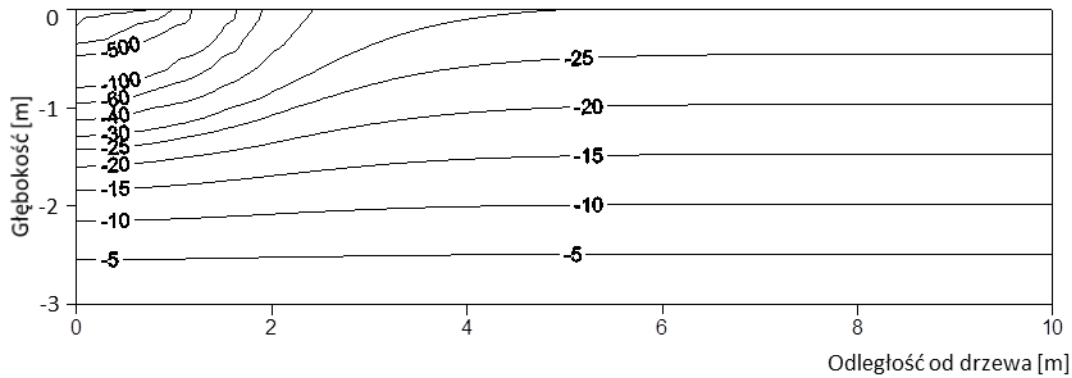


Rys. 8.9. Porównanie deformacji powierzchni gruntu Silty Loam po 180 dniach symulacji poboru przez **pojedyncze drzewo** dla: **a.** różnych funkcji gęstości (ten sam zasięg strefy korzeniowej i pobór  $T_p^*$ ); **b.** różnych zasięgów strefy korzeniowej (ten sam punkt największej gęstości strefy korzeniowej i pobór  $T_p^*$ ); **c.** różnych poborów  $T_p^*$ , dla funkcji gęstości strefy korzeniowej „E” i „F”

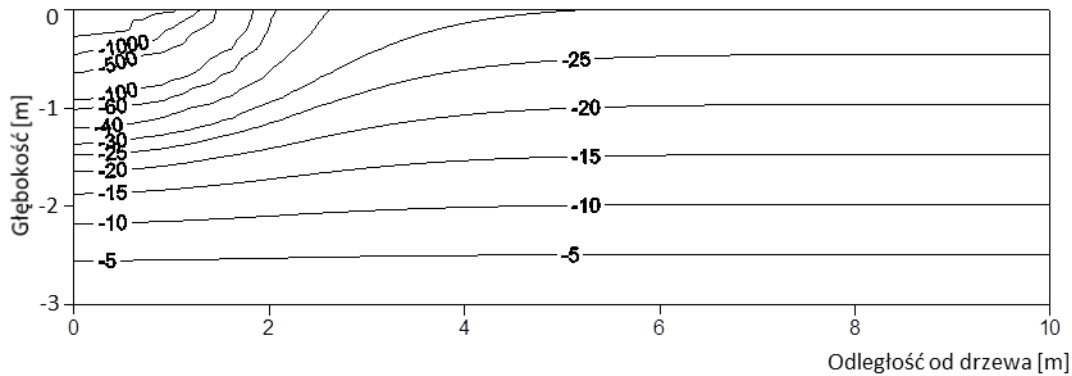


Rys. 8.10. Porównanie deformacji powierzchni gruntu Silty Clay po 180 dniach symulacji poboru przez pojedyncze drzewo dla: **a.** różnych funkcji gęstości (ten sam zasięg strefy korzeniowej i pobór  $T_p^*$ ); **b.** różnych zasięgów strefy korzeniowej (ten sam punkt największej gęstości strefy korzeniowej i pobór  $T_p^*$ ); **c.** różnych poborów  $T_p^*$ , dla funkcji gęstości strefy korzeniowej „E” i „F”

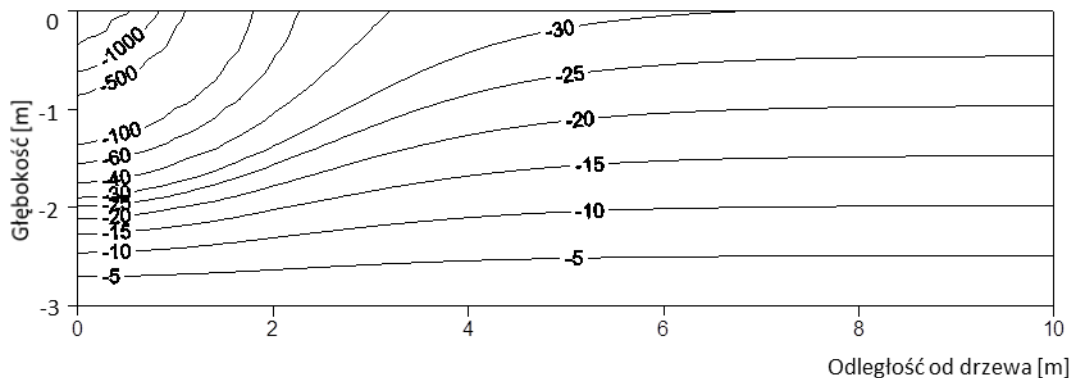
Wyniki symulacji dla poboru przez szpaler drzew:



Rys. 8.11. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla gruntu Silty Clay Loam po 180 dniach poboru,  $T_p^* = 0.02 \frac{m^3}{db}$ , model funkcji źródłowej „A”- wyniki dla szpaleru drzew

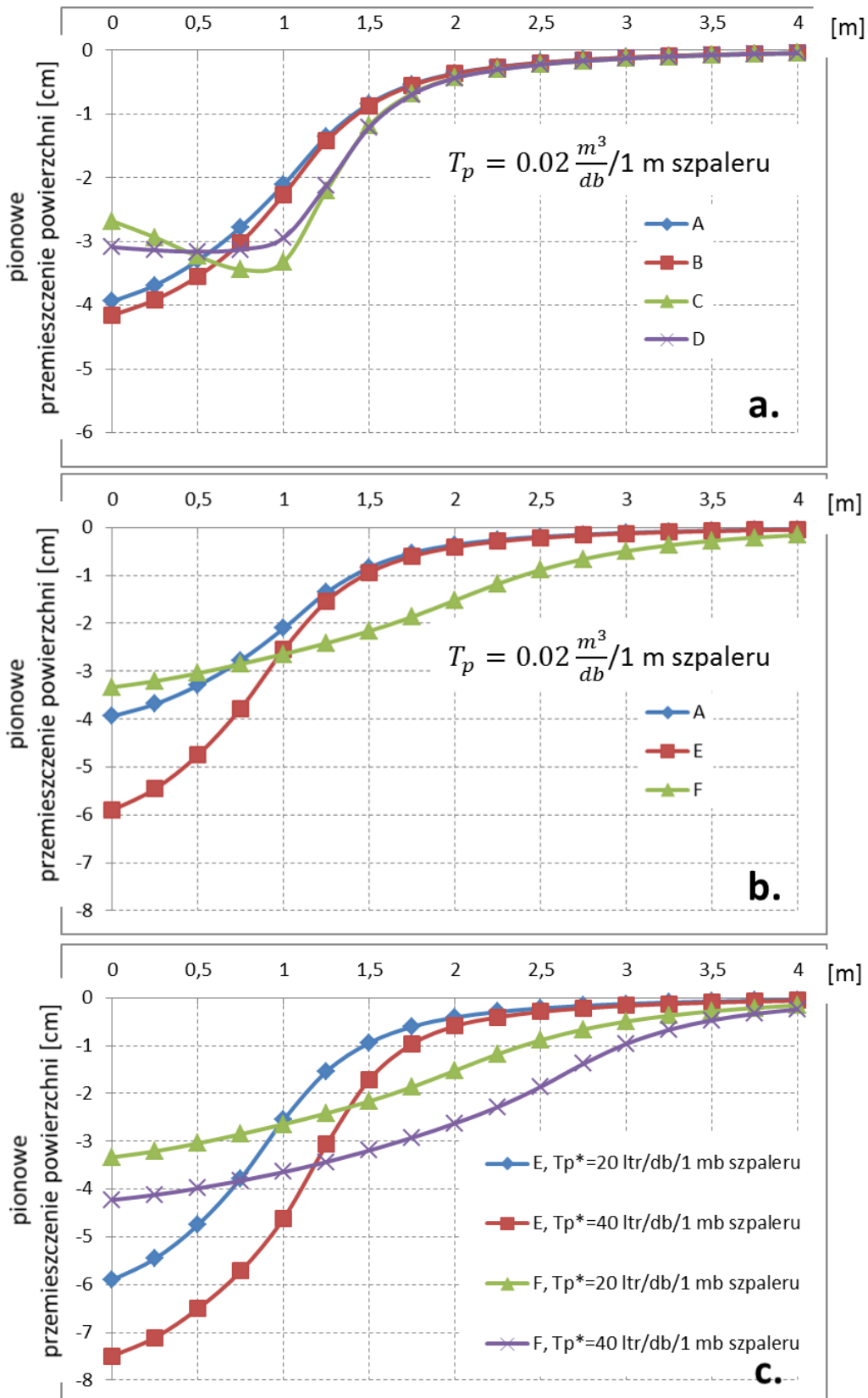


Rys. 8.12. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla gruntu Silty Clay Loam po 180 dniach poboru,  $T_p^* = 0.04 \frac{m^3}{db}$ , model funkcji źródłowej „A”- wyniki dla szpaleru drzew

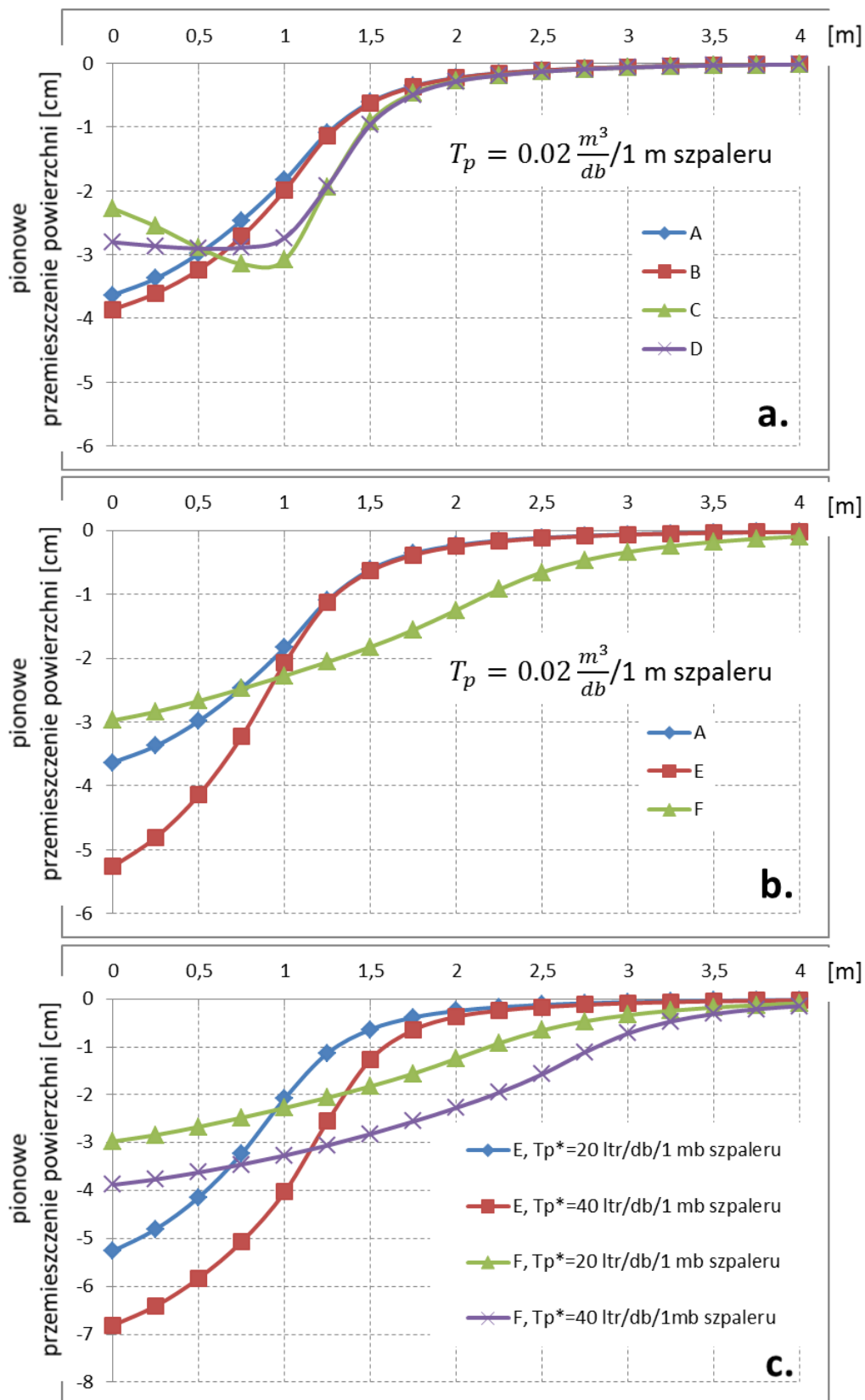


Rys. 8.13. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla gruntu Silty Clay po 180 dniach poboru,  $T_p^* = 0.04 \frac{m^3}{db}$ , model funkcji źródłowej „E”- wyniki dla szpaleru drzew

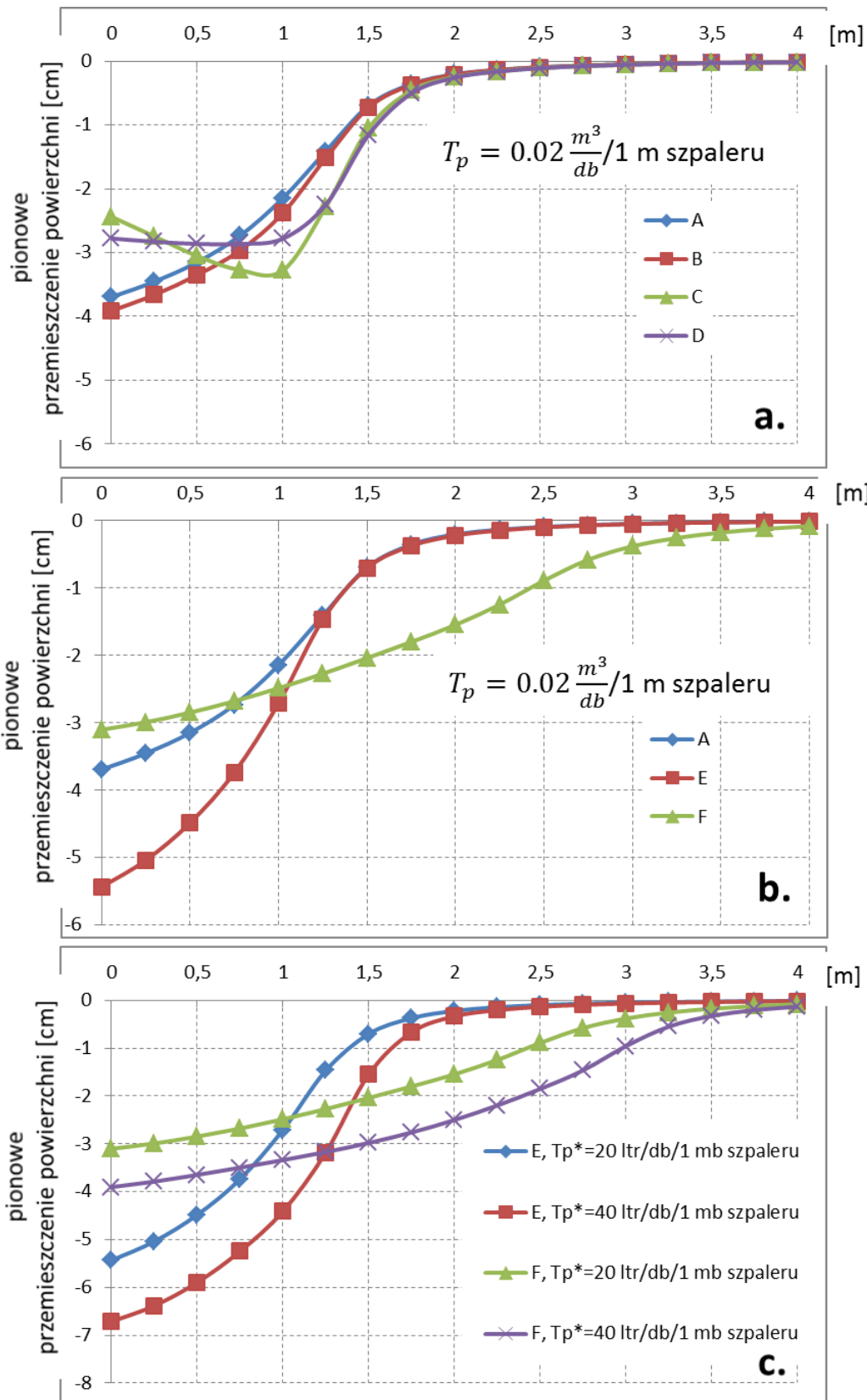




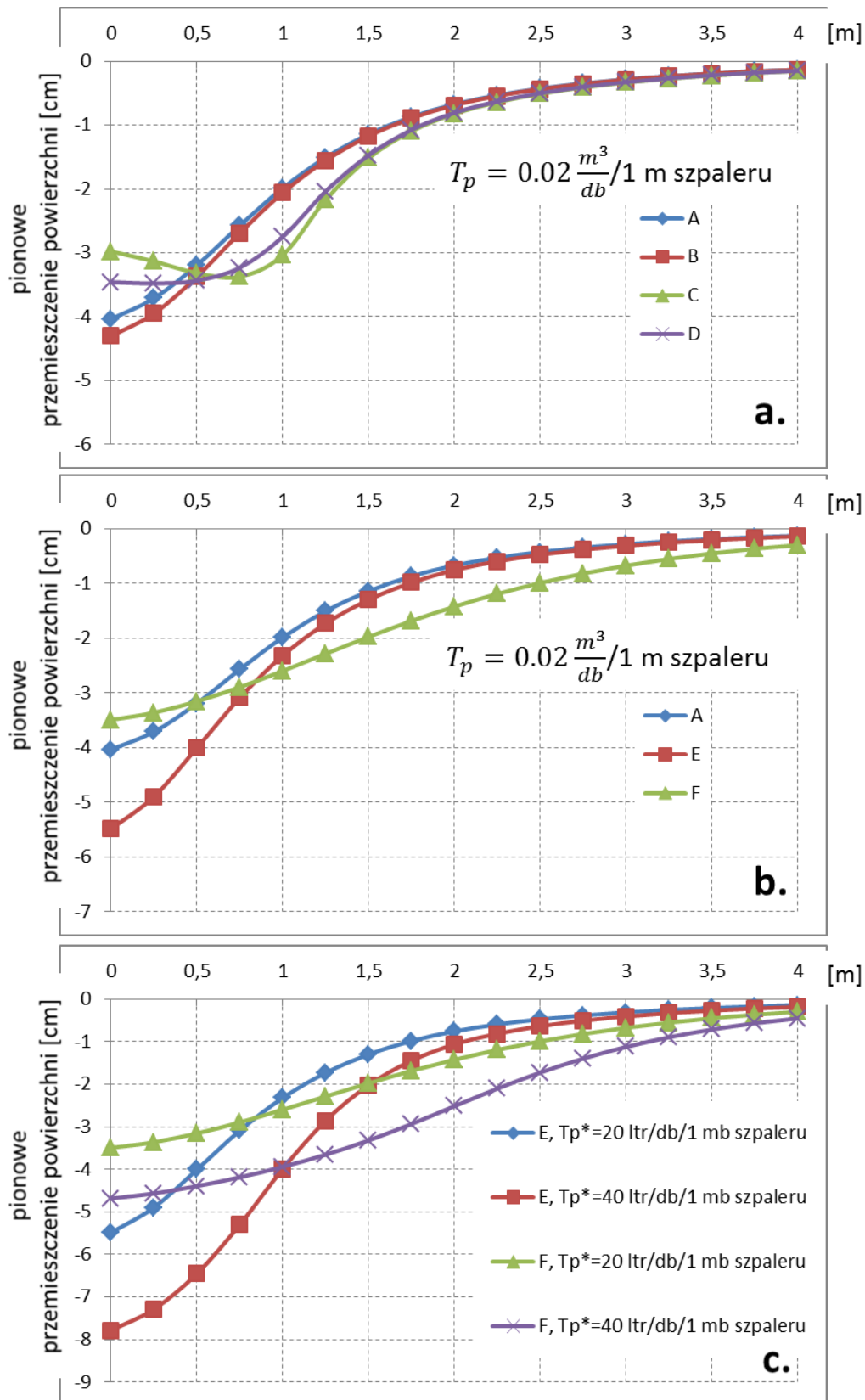
Rys. 8.14. Porównanie deformacji powierzchni gruntu Silty Clay Loam po 180 dniach symulacji poboru przez **szpaler drzew** dla: **a.** różnych funkcji gęstości (ten sam zasięg strefy korzeniowej i pobór  $T_p^*$ ); **b.** różnych zasięgów strefy korzeniowej (ten sam punkt największej gęstości strefy korzeniowej i pobór  $T_p^*$ ); **c.** różnych poborów  $T_p^*$ , dla funkcji gęstości strefy korzeniowej „E” i „F”



Rys. 8.15. Porównanie deformacji powierzchni gruntu Clay Loam po 180 dniach symulacji poboru przez **szpaler drzew** dla: **a.** różnych funkcji gęstości (ten sam zasięg strefy korzeniowej i pobór  $T_p^*$ ); **b.** różnych zasięgów strefy korzeniowej (ten sam punkt największej gęstości strefy korzeniowej i pobór  $T_p^*$ ); **c.** różnych poborów  $T_p^*$ , dla funkcji gęstości strefy korzeniowej „E” i „F”



Rys. 8.16. Porównanie deformacji powierzchni gruntu Silty Loam po 180 dniach symulacji poboru przez **szpaler drzew** dla: **a.** różnych funkcji gęstości (ten sam zasięg strefy korzeniowej i pobór  $T_p$ ); **b.** różnych zasięgów strefy korzeniowej (ten sam punkt największej gęstości strefy korzeniowej i pobór  $T_p$ ); **c.** różnych poborów  $T_p^*$ , dla funkcji gęstości strefy korzeniowej „E” i „F”



Rys. 8.17. Porównanie deformacji powierzchni gruntu Silty Clay po 180 dniach symulacji poboru przez szpaler drzew dla: **a.** różnych funkcji gęstości (ten sam zasięg strefy korzeniowej i pobór  $T_p^*$ ); **b.** różnych zasięgów strefy korzeniowej (ten sam punkt największej gęstości strefy korzeniowej i pobór  $T_p^*$ ); **c.** różnych poborów  $T_p^*$ , dla funkcji gęstości strefy korzeniowej „E” i „F”

Tab. 8.4. Zestawienie uzyskanych poborów wody w trakcie symulacji dla pojedynczego drzewa

Lp	rodzaj gruntu	model funkcji	zasięg poziomy $R_m$	zasięg pionowy $Z_m$	pobór w warunkach nieogr. dostępności	całkowity pobór podczas symulacji 180 dniowej	średni pobór w trakcie całego czasu trwania symulacji
[-]	[-]	[-]	[m]	[m]	$\left[\frac{m^3}{\text{doba} \cdot \text{drzewo}}\right]$	$\left[\frac{m^3}{1 \text{ drzewo}}\right]$	$\left[\frac{\text{litr}}{\text{doba} \cdot \text{drzewo}}\right]$
1	Silty Clay Loam	A	2	1	0,02	2,808	15,60
2	Silty Clay Loam	B	2	1	0,02	2,880	16,00
3	Silty Clay Loam	C	2	1	0,02	2,933	16,29
4	Silty Clay Loam	D	2	1	0,02	2,987	16,59
5	Silty Clay Loam	E	2	2	0,02	3,217	17,87
6	Silty Clay Loam	F	4	1	0,02	3,583	19,91
7	Silty Clay Loam	A	2	1	0,04	3,966	22,03
8	Silty Clay Loam	E	2	2	0,04	4,994	27,74
9	Silty Clay Loam	F	4	1	0,04	6,390	35,50
10	Clay Loam	A	2	1	0,02	2,772	15,40
11	Clay Loam	B	2	1	0,02	2,851	15,84
12	Clay Loam	C	2	1	0,02	2,895	16,08
13	Clay Loam	D	2	1	0,02	2,964	16,47
14	Clay Loam	E	2	2	0,02	3,205	17,81
15	Clay Loam	F	4	1	0,02	3,582	19,90
16	Clay Loam	A	2	1	0,04	3,930	21,83
17	Clay Loam	E	2	2	0,04	5,017	27,87
18	Clay Loam	F	4	1	0,04	6,376	35,42
19	Silty Loam	A	2	1	0,02	2,431	13,51
20	Silty Loam	B	2	1	0,02	2,517	13,98
21	Silty Loam	C	2	1	0,02	2,492	13,84
22	Silty Loam	D	2	1	0,02	2,574	14,30
23	Silty Loam	E	2	2	0,02	2,951	16,39
24	Silty Loam	F	4	1	0,02	3,489	19,38
25	Silty Loam	A	2	1	0,04	3,364	18,69
26	Silty Loam	E	2	2	0,04	4,516	25,09
27	Silty Loam	F	4	1	0,04	5,904	32,80
28	Silty Clay	A	2	1	0,02	3,474	19,30
29	Silty Clay	B	2	1	0,02	3,510	19,50
30	Silty Clay	C	2	1	0,02	3,584	19,91
31	Silty Clay	D	2	1	0,02	3,586	19,92
32	Silty Clay	E	2	2	0,02	3,592	19,96
33	Silty Clay	F	4	1	0,02	3,602	20,01
34	Silty Clay	A	2	1	0,04	5,439	30,22
35	Silty Clay	E	2	2	0,04	6,239	34,66
36	Silty Clay	F	4	1	0,04	7,117	39,54

Tab. 8.5. Zestawienie uzyskanych poborów wody w trakcie symulacji dla szpaleru drzew

Lp	rodzaj gruntu	model funkcji	zasięg poziomy $R_m$	zasięg pionowy $Z_m$	pobór w warunkach nieogr. dostępności	całkowity pobór podczas symulacji 180 dniowej	średni pobór w trakcie całego czasu trwania symulacji
[-]	[-]	[-]	[m]	[m]	$\frac{m^3}{\text{doba} \cdot 1mb \text{ szpaleru}}$	$\frac{m^3}{1mb \text{ szpaleru}}$	$\frac{ltr}{\text{doba} \cdot 1mb \text{ szpaleru}}$
1	Silty Clay Loam	A	2	1	0,02	1,385	7,69
2	Silty Clay Loam	B	2	1	0,02	1,432	7,96
3	Silty Clay Loam	C	2	1	0,02	1,480	8,22
4	Silty Clay Loam	D	2	1	0,02	1,441	8,01
5	Silty Clay Loam	E	2	2	0,02	1,882	10,46
6	Silty Clay Loam	F	4	1	0,02	1,960	10,89
7	Silty Clay Loam	A	2	1	0,04	1,680	9,33
8	Silty Clay Loam	E	2	2	0,04	2,480	13,78
9	Silty Clay Loam	F	4	1	0,04	2,500	13,89
10	Clay Loam	A	2	1	0,02	1,395	7,75
11	Clay Loam	B	2	1	0,02	1,449	8,05
12	Clay Loam	C	2	1	0,02	1,490	8,28
13	Clay Loam	D	2	1	0,02	1,455	8,08
14	Clay Loam	E	2	2	0,02	1,937	10,76
15	Clay Loam	F	4	1	0,02	1,974	10,97
16	Clay Loam	A	2	1	0,04	1,719	9,55
17	Clay Loam	E	2	2	0,04	2,630	14,61
18	Clay Loam	F	4	1	0,04	2,542	14,12
19	Silty Loam	A	2	1	0,02	1,213	6,74
20	Silty Loam	B	2	1	0,02	1,264	7,02
21	Silty Loam	C	2	1	0,02	1,284	7,13
22	Silty Loam	D	2	1	0,02	1,230	6,83
23	Silty Loam	E	2	2	0,02	1,768	9,82
24	Silty Loam	F	4	1	0,02	1,760	9,78
25	Silty Loam	A	2	1	0,04	1,486	8,26
26	Silty Loam	E	2	2	0,04	2,395	13,31
27	Silty Loam	F	4	1	0,04	2,249	12,49
28	Silty Clay	A	2	1	0,02	1,835	10,19
29	Silty Clay	B	2	1	0,02	1,879	10,44
30	Silty Clay	C	2	1	0,02	1,993	11,07
31	Silty Clay	D	2	1	0,02	1,960	10,89
32	Silty Clay	E	2	2	0,02	2,262	12,57
33	Silty Clay	F	4	1	0,02	2,417	13,43
34	Silty Clay	A	2	1	0,04	2,215	12,31
35	Silty Clay	E	2	2	0,04	2,932	16,29
36	Silty Clay	F	4	1	0,04	3,108	17,27

Z przeprowadzonych wyliczeń wynika, że dla wszystkich rodzajów gruntów, największy wpływ na wielkość odkształceń, zarówno w przypadku pojedynczego drzewa jak i szpaleru drzew, ma określenie dobowego poboru wody przez drzewo w warunkach nieograniczonej dostępności  $T_p^*$  (patrz wykresy 8.7c; 8.8c; 8.9c; 8.10c; 8.14c; 8.15c; 8.16c; 8.17c). Można się zatem spodziewać zwiększonych odkształceń gruntu w trakcie nasilonych procesów

transpiracji (np. dłuższe okresy nasłonecznienia, suche lata), co znajduje również potwierdzenie w obserwacjach opisanych literaturowo (np. Jeż 1995, Tarnawski 2013). Przy stałym poborze  $T_p^*$  (patrz wykresy 8.7b; 8.8b; 8.9b; 8.10b; 8.14b; 8.15b; 8.16b; 8.17b), większy pionowy zasięg strefy korzeniowej wiąże się z większymi odkształceniami powierzchni gruntu, szczególnie w bezpośredniej bliskości drzew (choć w przypadku symulacji dla pojedynczego drzewa, w dalszych odległościach od nasadzenia i dla niektórych rodzajów gruntów wyniki mogą być niejednoznaczne – patrz. rys. 8.8b, 8.9b i 8.10b). Natomiast zwiększenie poziomego zasięgu strefy korzeniowej powoduje zwiększenie zasięgu deformacji, przy jednoczesnym zmniejszeniu ich maksymalnej wartości.

Z powyższego wynika, że określenie zarówno pionowego jak i poziomego zasięgu korzeni jest ważne, szczególnie z uwagi na fakt, że drzewa posiadają dużą zdolność do adaptacji kształtu i zasięgu strefy korzeniowej w zależności od warunków gruntowych (Feddes i inni 2001, Suchocka 2011). Dodatkowo, należy zwrócić uwagę, że przy większych rozmiarach strefy korzeniowej, drzewa są w stanie pobrać więcej wody (patrz wyniki średniego poboru wody w trakcie trwania symulacji tab. 8.4 i 8.5). Uprawnionym zatem wydaje się wniosek, że wraz ze wzrostem drzewa, należy liczyć się ze zwiększaniem zasięgu jego strefy korzeniowej (szczególnie poziomego – patrz pkt. 3.9) dla zaspokojenia rosnącego zapotrzebowania na wodę. Stanowi to wytłumaczenie obserwacji, że poziomy zasięg strefy korzeniowej często jest kilkukrotnie większy niż obrys korony drzewa (np. Stone i Kalisz 1991, Day i inni 2010, Suchocka 2011).

Porównanie uśrednionych poborów wody w trakcie trwania symulacji z poborem w warunkach nieograniczonej dostępności  $T_p^*$  pozwala oszacować, czy założony rozmiar strefy korzeniowej jest wystarczający dla zapewnienia potrzeb wodnych rośliny, czy należy się liczyć z większym zasięgiem korzeni.

Wydaje się to być istotne, ponieważ z opracowanych wykresów deformacji wynika, że odkształcenia powierzchni gruntu są znikome poza obszarem występowania strefy korzeniowej (w przypadku przeprowadzonych symulacji - pow. 4 metrów od pni drzew).

Można zatem, na podstawie oszacowanego zapotrzebowania drzewa na wodę, charakterystyki gruntu oraz założonego pionowego zasięgu występowania korzeni (najczęściej ok. 1 m – patrz punkt. 3.9), oszacować spodziewany zasięg poziomy, a tym samym zasięg występowania odkształceń.

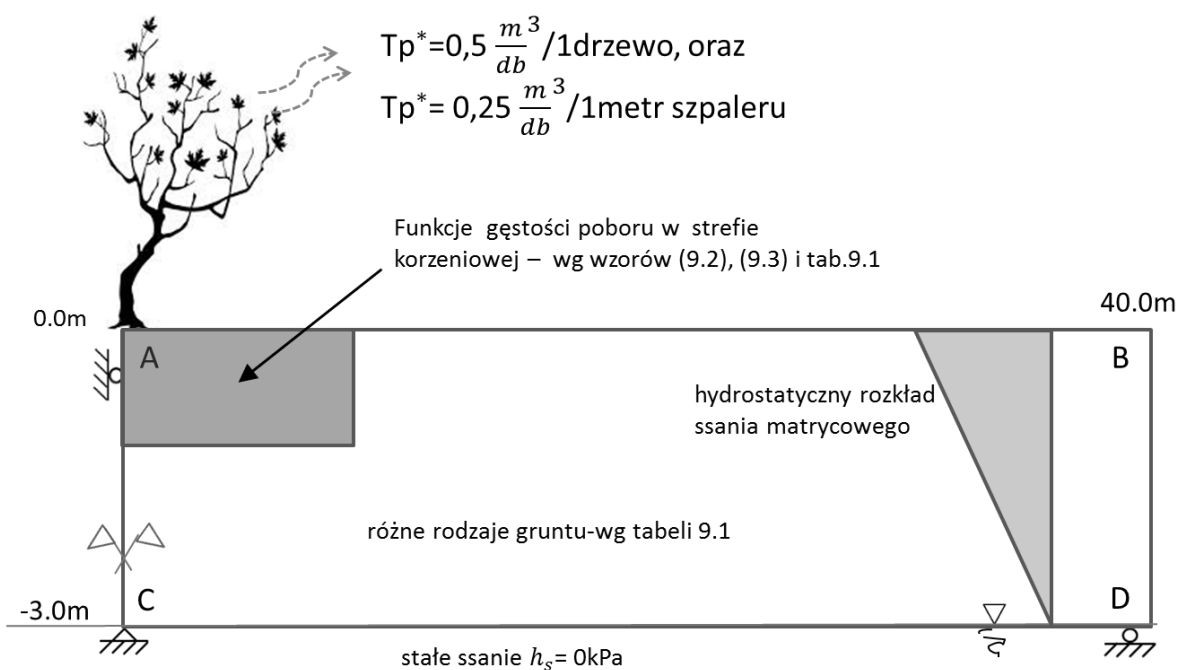
Najmniejszy wpływ na wielkość odkształceń ma przyjęcie modelu rozkładu funkcji gęstości w obrębie strefy korzeniowej – w tym wypadku różnice w pionowych przemieszczeniach powierzchni występują jedynie w bezpośrednim sąsiedztwie drzew (patrz wykresy 8.7a; 8.8a; 8.9a; 8.10a; 8.14a; 8.15a; 8.16a; 8.17a) oraz nieznaczają się większe różnice w średnich poborach wody w trakcie całego czasu trwania symulacji.

Mimo, że z przeprowadzonych obliczeń wynika, że drzewa nie wywołują istotnych odkształceń gruntów ekspansywnych poza obszarem występowania ich strefy korzeniowej, zachodzi konieczność dalszych symulacji (oraz badań terenowych) dla ostatecznego zweryfikowania takiej obserwacji. Jeśli powyższe znalazłoby potwierdzenie, mogłaby to być istotna wytyczna dla rozstrzygnięcia w trakcie wizji terenowych o przyczynach zaistniałych awarii budowlanych, a prowadzone symulacje i porównanie założonych poborów z uśrednionymi (jak w tabelach 8.4 i 8.5) mogłoby stanowić istotną wytyczną projektową w zakresie doboru właściwego gatunku, odległości nasadzenia od budowli i stosowania środków zapobiegawczych oraz zaradczych w przypadku powstałych uszkodzeń budynków przez korzenie.



## 9. Przykład oszacowania spodziewanego zasięgu strefy korzeniowej drzew

Ponieważ porównanie uśrednionych poborów wody w trakcie trwania symulacji z poborem w warunkach nieograniczonej dostępności wody  $T_p^*$  pozwala oszacować, czy założony rozmiar strefy korzeniowej jest wystarczający dla zapewnienia potrzeb wodnych rośliny (patrz tabele 8.4 i 8.5 z poprzedniego punktu), poniżej przedstawione zostaną wyniki symulacji poboru wody przez pojedyncze drzewo i przez szpaler drzew, dla zweryfikowania założonego zasięgu korzeni. Analiza przeprowadzona została dla drzew o wysokości  $H=21$  m i dla gruntów opisanych z poprzednim (8.) punkcie pracy, których charakterystyki zestawione zostały w tabeli 8.1. Mimo, że wg badań empirycznych (*Wullschleger i inni 1998*) w 90 % przypadków dobowy pobór wody przez pojedyncze drzewo o wysokości ok. 21 metrów zawiera się w przedziale od 0,01 do 0,2  $m^3/db$ , to dla celów symulacji przyjęto pobór w warunkach nieograniczonej dostępności  $T_p^* = 0,5 m^3/db$ , co stanowi górną granicę sugerowanego przez *Perpicha* poboru wody do celów tego rodzaju symulacji (*Perpich 1965 - cytowanie za Fredlund i Hung 2001, Vu 2002, Morsi 2010*).



Rys. 9.1. Schemat przyjętego obszaru rozwiązania – warunki początkowej i brzegowej dla wyznaczenia odkształceń

Dla potrzeb symulacji przyjęto dwuwymiarowy, osiowo-symetryczny względem drzewa obszar rozwiązania o zasięgu  $r=40$  m od pnia drzewa i głębokości 3m (zgodnie z rys. 9.1). Założono, że na brzegu CD obszaru, na głębokości 3 metrów znajduje się zwierciadło wody gruntowej ( $h_s = 0$ ) oraz, że w stanie początkowym panuje hydrostatyczny rozkład ssania matrycowego (od 29.43 kPa na powierzchni gruntu do 0 kPa na brzegu CD).

Warunki brzegowe dla całego czasu trwania symulacji określono następująco:

- brzegi AB, AC, BD są nieprzepuszczalne (warunek Neumanna)
- na brzegu CD (zwierciadło wody gruntowej) przyjęto niezmienną, równą początkowej wartość ssania matrycowego ( $h_s = 0$  kPa) co odpowiada zadanemu warunkowi Dirichleta.

Do obliczeń zastosowane zostały krzywa wg Van Genuchtena (*Van Genuchten 1980 – wzór 3.15*):

$$\Theta = [1 + (\alpha \cdot h_s)^n]^{-m}$$

oraz wzór na względny współczynnik filtracji wg propozycji Navarro i inni (*2009a*):

$$k_r = \Theta^{3+2/(n-1)} \quad (9.1)$$

przy czym parametry do wzorów (3.15) i (9.1) przyjęto wg tabeli 8.1.

Symulacje przeprowadzono w oparciu o makroskopowy model funkcji źródłowej wg Vrugt i inni (*2001b*) (wzór 9.2) ze zdefiniowaną dwuwymiarową funkcją gęstości strefy korzeniowej (wzór 9.3 – na podstawie 3.33) analogicznie jak w punkcie 8. pracy:

$$S(r, z, t) = \alpha(h_s) \frac{\beta(r, z) \cdot T_p^*}{2\pi \int_0^{z_m} \int_0^{R_m} r \cdot \beta(r, z) dz \cdot dr} \quad (9.2)$$

$$\beta(r, z) = \left[1 - \frac{z}{z_m}\right] \cdot \left[1 - \frac{r}{R_m}\right] e^{-\left\{\left(\frac{pz}{z_m}\right) \cdot |z^* - z| + \left(\frac{pr}{R_m}\right) \cdot |r^* - r|\right\}} \quad (9.3)$$

Parametry funkcji  $\beta$  przyjęto zgodnie z tabelą 9.1 zakładając pionowy ( $z_m$ ) i poziomy ( $r_m$ ) zasięg strefy korzeniowej dla pojedynczego drzewa odpowiednio  $r_m=20$  m (~1H) i  $z_m=1$  m (zastaw 1.) oraz dla szpaleru drzew  $r_m= 31,5$  m (1,5H) i  $z_m=2,5$  m (zestaw 2.). Zestawy parametrów 1,2 funkcji  $\beta$  stanowią zmodyfikowaną funkcję gęstości wg Vrugt, Hopmans, Šimunek (*2001b*) – model A wg tabeli 8.2, w którym poszerzono zasięg strefy korzeniowej (parametry  $z^*, r^*$  określają położenie punktu o największej gęstości strefy korzeniowej względem pnia drzewa – tj. względem punktu „A” na jak na rys. 9.1).

Tab. 9.1. Przyjęte parametry makroskopowej funkcji źródłowej wg Vrugt i inni (2001b)

	$z_m$ [m]	$r_m$ [m]	$z^*$ [m]	$r^*$ [m]	$p_z$ [-]	$p_r$ [-]
<b>1.</b>	1.0	20.0	0.0	0.0	1.0	1.0
<b>2.</b>	2.5	31.5	0.0	0.0	1.0	1.0

Funkcję  $\alpha(h_s)$  opisującą dostępność wody w warunkach ograniczonego nasycenia przyjęto wg propozycji Kowalika (1973b), zgodnie z rys. 3.6a

W przypadku symulacji poboru przez pojedyncze drzewo zastosowano metodykę obliczeń dla przepływu dwuwymiarowego, osiowo-symetrycznego, zgodnie z pkt. 6.6.

Dla szpaleru drzew prowadzono obliczenia jak dla przepływu dwuwymiarowego płaskiego (zgodnie z opisem jak w punkcie 6.5 pracy), zakładając, że drzewa rosną w odstępach co 2 metry, co odpowiada poborowi  $T_p^* = 0,25 \frac{m^3}{ab} / 1 \text{ metr szpaleru}$  (patrz rys. 9.1)

W obu przypadkach przyjęto ten sam rozmiar kwadratowej siatki punktów węzłowych - 25 cm (zgodnie z tab. 9.2)

W zastosowanych schematach obliczeniowych przyjęto dyskretyzację obszaru rozwiązania oraz wariant metody (analogicznie jak w pkt.8.), zgodnie z poniższą tabelą (9.2):

Tab. 9.2. Przyjęta dyskretyzacja obszaru rozwiązania oraz zastosowany wariant metody

Rozmiar kwadratowej siatki punktów węzłowych – $dx$ (patrz pkt 6.5 i 6.6)	25 [cm]
$\Delta t$ – max. długość kroku czasowego	1 doba
sposób wyliczania prędkości wody w kolejnych krokach czasowych	metodą iteracyjną (realizacja punktów od „A” do „F” schematu 6.3), $ h_s(\theta^{t+\Delta t, i+1}) - h_s(\theta^{t+\Delta t, i})  < 0.01 \text{ cm.}$
zastosowane kryteria ograniczenia długości kroku czasowego	Koniunkcja kryteriów: przyrostowego: $ \theta^{t+\Delta t} - \theta^t  < 0.0001$ Couranta: $C_r < 0.001$
uwzględnienie wpływu zmian odkształcenia ośrodka na nasycenie w trakcie symulacji (realizacja kroku 6-go w schemacie rys. 6.2)	TAK

Przyjęto warunki brzegowe dla wyznaczenia odkształceń wg rys. 9.1.

Odształcenia objętościowe wyznaczone zostały na podstawie relacji (Navarro i inni 2009a,b):

$$\Delta e = -C_h \cdot \Delta \log(h_s + p_{atm}) \quad (9.4)$$

gdzie  $C_h$  - współczynnik zmian objętościowych wg McKeen'a zgodnie z tab. 8.1

Wyliczenia odkształceń liniowych dla zadanych warunków brzegowych przeprowadzono zgodnie z opisem jak w punkcie 6.8 pracy, przy założeniu możliwych odkształceń gruntu w obu kierunkach, poziomym i pionowym (zgodnie z rys. 6.8).

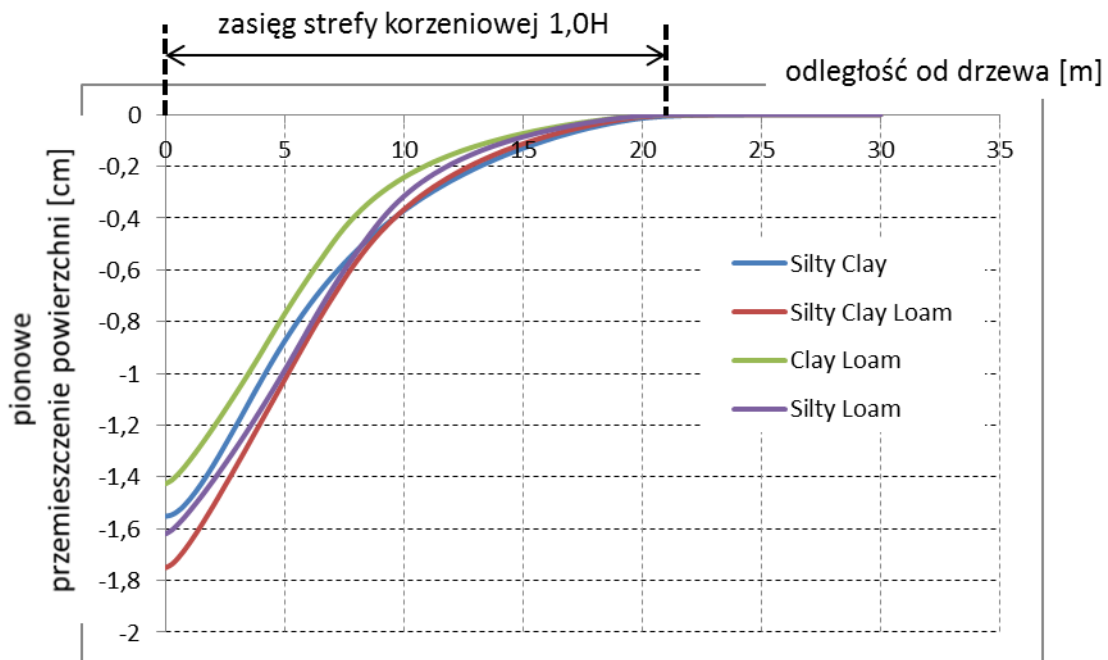
We wszystkich przypadkach przyjęto ten sam czas trwania symulacji wynoszący 180 dni (półroczny czas trwania wegetacji).

Uzyskano następujące średnie pobory wody w trakcie trwania symulacji (tab.9.3) oraz deformacje powierzchni gruntu (rys. 9.2 i 9.3):

Tab. 9.3. Średnie pobory wody przez pojedyncze drzewo i przez szpaler drzew dla 180 dniowej symulacji

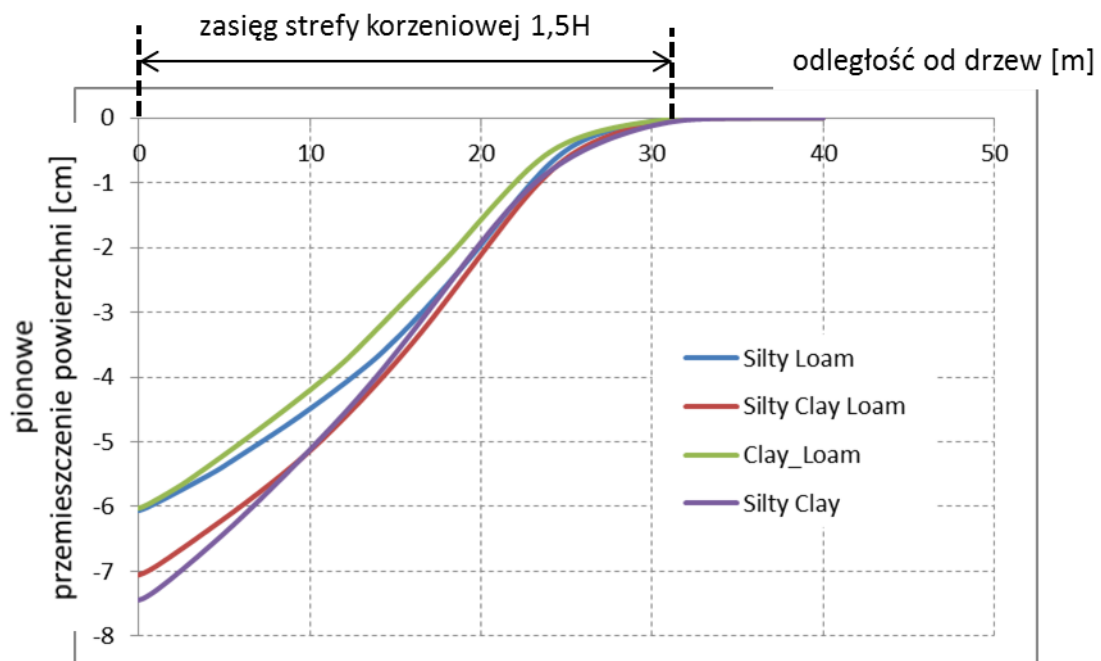
	Lp	rodzaj gruntu	model f. gęstości-wg tab.10.2	zasięg poziomy $R_m$ [m]	zasięg pionowy $Z_m$ [m]	pobór w warunkach nieogr. dostępności $[\frac{m^3}{db}/1drzewo]$ $[\frac{m^3}{db}/1mb]$	całkowity pobór podczas symulacji 180 dniowej $[\frac{m^3}{1drzewo}]$ $[\frac{m^3}{1mb}]$	średni pobór w trakcie całego czasu trwania symulacji $[\frac{m^3}{db}/1drzewo]$ $[\frac{m^3}{db}/1mb]$
poj. drzewo	1	Silty Clay Loam	1	20	1	0,5	87,618	0,487
	2	Clay Loam	1	20	1	0,5	87,865	0,488
	3	Silty Loam	1	20	1	0,5	85,531	0,475
	4	Silty Clay	1	20	1	0,5	89,799	0,499
szpaler	5	Silty Clay Loam	2	31,5	2,5	0,25	25,883	0,144
	6	Clay Loam	2	31,5	2,5	0,25	27,033	0,150
	7	Silty Loam	2	31,5	2,5	0,25	25,666	0,143
	8	Silty Clay	2	31,5	2,5	0,25	27,044	0,150





Rys. 9.2. Osiadanie powierzchni gruntu wywołane wpływem pojedynczego drzewa.

$$T_p^* = 0,5 \frac{m^3}{db} / 1 \text{ drzewo, różne rodzaje gruntu wg tab.8.1}$$



Rys. 9.3. Osiadanie powierzchni gruntu wywołane wpływem szpaleru drzew.

$$T_p^* = 0,25 \frac{m^3}{db} / 1 \text{ metr szpaleru, różne rodzaje gruntu wg tab. 8.1}$$

Zgodnie z wykresami deformacji powierzchni gruntu (rys. 9.2 i 9.3), wpływ drzew nie wykracza poza zasięg strefy korzeniowej (podobnie jak w symulacjach prowadzonych w punkcie 8. pracy).

W przypadku pojedynczego drzewa średnie pobory wody (poz. 1-4 tab. 9.3), w trakcie całej 180 dniowej symulacji (półrocznej wegetacji), są zbliżone do zapotrzebowania wody w warunkach nieograniczonej dostępności wody  $T_p^*$ . Można zatem przyjąć, że założony zasięg strefy korzeniowej (poz. 1 tab. 9.1) jest wystarczający dla pojedynczego drzewa i nie należy spodziewać się odkształceń w odległości większej niż 1H od pnia drzewa.

W przypadku szpaleru drzew uzyskane wyniki średniego poboru (poz. 5-8 tab. 9.3) wynoszą ok.  $0.14..0.15 \frac{m^3}{db}$  na 1 mb szpaleru, co przy założonym rozstawie drzew co dwa metry, odpowiada średniemu poborowi wody przez 1 drzewo w szpalerze ok.  $0.28..0.3 \frac{m^3}{db}$ .

Powyższe wartości są mniejsze od przyjętej dla celów symulacji wartości  $T_p^*$ , jednak przekraczają podane przez Wullschlegera i in. (1998) wartości średnich poborów dla 90 % drzew o wysokości ok. 21m (wynoszących od 0,01 do  $0,2 \frac{m^3}{db}$ ), w związku z czym można przyjąć, że rozmiar strefy korzeniowej (poz. 2 tab. 9.1) okazał się wystarczający również dla szpaleru drzew i przy założonym pionowym zasięgu drzew wynoszącym 2,5m nie należy spodziewać się odkształceń w odległości większej niż 1,5H od linii nasadzeń.

Powyższe wyniki są zgodne z zaleceniami projektowymi dla terenów Australii (*standard AS2870 – 1988 do 1996 – cytowanie za Cameron i Beal 2011*), wg których należy przyjmować bezpieczną odległość od pojedynczego drzewa, w zależności od rodzaju gruntów w zakresie od 0,75H do 1,5H oraz 1,12H-2,5H dla grupy drzew.

Dla porównania, wg Jeża (1995) poziomy zasięg wpływu drzew jest nieco większy i wynosi ok. 1,5H dla pojedynczego drzewa oraz 2H w przypadku grupy drzew.

Oczywiście powyższa symulacja stanowi jedynie przykład dla szczególnego rodzaju gruntów (charakterystyka zgodnie z tab. 8.1) i przy założonym poziomie zwierciadła wody gruntowej, stanowi jednak opis metodyki szacowania zasięgu strefy korzeniowej dla przypadków innych warunków gruntowo wodnych.

## 10. Przykładowe obliczenia deformacji związanych z poborem wody przez drzewo dla gruntu z terenu Bydgoszczy

W celu zaprezentowania możliwości wykorzystania opracowanego w punkcie 6. modelu numerycznego, poniżej przeprowadzono próbę oszacowania deformacji powierzchni gruntu ekspansywnego z terenu Bydgoszczy, spowodowanych poborem wody przez pojedyncze drzewo oraz przez szpaler drzew. Dla porównania uzyskanych wyników z danymi empirycznymi (*Wullschleger i in. 1998*), analiza przeprowadzona została dla drzew o wysokości ok. 21 m.

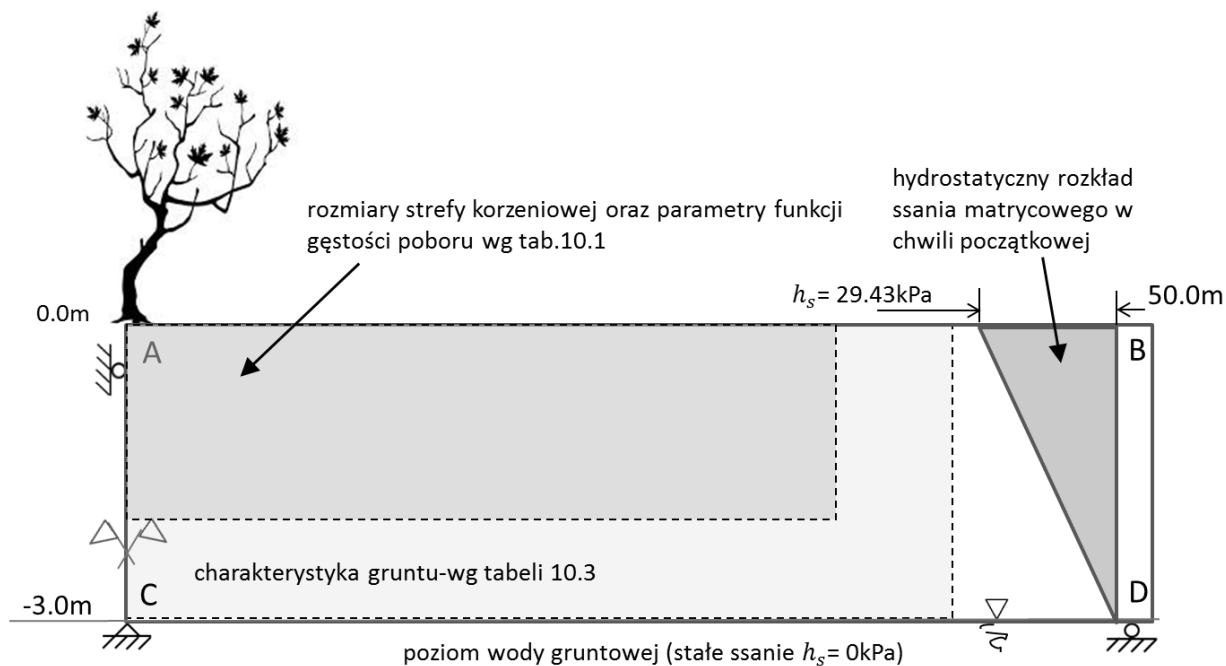
Przyjęto, że pobór w warunkach nieograniczonej dostępności wody wynosi:

- w przypadku pojedynczego drzewa  $T_p^* = 0,25 \text{ m}^3/\text{db}$
- w przypadku szpaleru drzew  $T_p^* = 0,1 \text{ m}^3/\text{db}$  na jeden metr bieżący szpaleru, co przy dodatkowym założeniu, że drzewa rosną w odstępach co dwa metry przekłada się na pobór przypadający na jedno drzewo  $0,2 \text{ m}^3/\text{db}$ .

Dla potrzeb symulacji przyjęto dwuwymiarowy, symetryczny względem osi drzewa (szpaleru drzew) obszar rozwiązania o zasięgu  $r=50$  m od pni drzew i głębokości 3m. Założono, że w stanie początkowym panuje hydrostatyczny rozkład ssania matrycowego oraz, że na głębokości 3 metrów poniżej poziomu terenu znajduje się zwierciadło wody gruntowej ( $h_s=0$ ), przez co na brzegu obszaru CD przyjęto stałą wartość ssania matrycowego równą 0 kPa, natomiast na brzegu AB (powierzchnia gruntu) ssanie matrycowe w chwili początkowej wynosi 29.43 kPa ( $h_s=300$  cm) (rys. 10.1).

Warunki brzegowe dla całego czasu trwania symulacji określono następująco:

- brzegi AB, AC i BD są nieprzepuszczalne (warunek Neumanna)
- na brzegu CD przyjęto niezmienną, równą początkowej wartość ssania matrycowego ( $h_s = 0 \text{ kPa}$ ) co odpowiada zadanemu warunkowi Dirichleta.



Rys. 10.1. Schemat przyjętego obszaru rozwiązania – warunki brzegowe dla wyznaczenia odkształceń

Dla potrzeb symulacji poboru wody przyjęto makroskopowy, dwuwymiarowy model funkcji źródłowej wg Vrugt i inni (2001b) (analogicznie jak w punkcie 8. pracy, wg równań 8.1 i 8.2). Rozmiary strefy korzeniowej oraz parametry funkcji gęstości poboru  $\beta$  w jej obrębie przyjęto zgodnie z tabelą 10.1, zakładając zasięg korzeni dla pojedynczego drzewa odpowiednio  $r_m=35$  m ( $\sim 1,65H$ ,  $H$ -wys. drzewa) i  $z_m=2$  m (zastaw 1.), oraz dla szpaleru drzew  $r_m=40$  m ( $\sim 2H$ ) i  $z_m=3$  m (zestaw 2.). Zestawy parametrów 1 i 2 funkcji  $\beta$  stanowią zmodyfikowane funkcje gęstości wg Vrugt i inni (2001b) – model A wg tabeli 8.2, w którym poszerzono obszar strefy korzeniowej.

Tab. 10.1. Przyjęte parametry makroskopowej funkcji źródłowej wg Vrugt i inni (2001b) dla symulacji poboru wody przez drzewo w gruncie ekspansywnym z terenu Bydgoszczy

	$z_m$ [m]	$r_m$ [m]	$z^*$ [m]	$r^*$ [m]	$p_z$ [-]	$p_r$ [-]
<b>1.</b>	2.0	35.0	0.0	0.0	1.0	1.0
<b>2.</b>	3.0	40.0	0.0	0.0	1.0	1.0

Funkcję  $\alpha(h_s)$  opisującą dostępność wody w warunkach ograniczonego nasycenia przyjęto wg propozycji Kowalika (1973b), zgodnie z rys. 3.6a.



W przypadku symulacji poboru przez pojedyncze drzewo zastosowano metodykę obliczeń dla przepływu dwuwymiarowego osiowo-symetrycznego, zgodnie z pkt. 6.6.

Dla szpalery drzew prowadzono obliczenia przepływu dwuwymiarowego płaskiego wg opisu jak w punkcie 6.5. W obu przypadkach przyjęto ten sam rozmiar kwadratowej siatki punktów węzłowych - 25 cm (zgodnie z tab. 10.2).

W zastosowanych schematach obliczeniowych przyjęto dyskretyzację obszaru rozwiązania oraz wariant metody zgodnie z poniższą tabelą (10.2):

Tab. 10.2. Przyjęta dyskretyzacja obszaru rozwiązania oraz zastosowany wariant metody

Rozmiar kwadratowej siatki punktów węzłowych – $dx$ (patrz pkt 6.5 i 6.6)	25 [cm]
$\Delta t$ – max. długość kroku czasowego	0,25 doby
sposób wyliczania prędkości wody w kolejnych krokach czasowych	metodą iteracyjną (realizacja punktów od „A” do „F” schematu 6.3), $ h_s(\theta^{t+\Delta t, i+1}) - h_s(\theta^{t+\Delta t, i})  < 0.01 \text{ cm.}$
zastosowane kryteria ograniczenia długości kroku czasowego	Koniunkcja kryteriów: przyrostowego: $ \theta^{t+\Delta t} - \theta^t  < 0.0001$ Couranta: $C_r < 0.001$
uwzględnienie wpływu zmian odkształcenia ośrodka na nasycenie w trakcie symulacji (realizacja kroku 6-go w schemacie rys. 6.2)	TAK

W obu przypadkach przyjęto ten sam czas trwania symulacji wynoszący 4500 dni (12,5 roku). W obliczeniach uwzględniono sezonową zmienność poboru. W tym celu przyjęto półroczny czas trwania wegetacji (zerowy pobór w miesiącach październik – marzec).

Obliczenia deformacji przeprowadzone zostały na podstawie badań nad skurczalnością oraz pęcznieniem gruntów ekspansywnych z terenu Bydgoszczy, opisanych w artykułach Kumora (2006, 2007, 2008). Wg Kumora (2007, 2008) zmiany objętościowe gruntów występujących w Bydgoszczy można przybliżyć równaniem (10.1):

$$\Delta \varepsilon_v = -0,783 * (w_0 - w_k) \quad (10.1)$$

$$\text{dla } w_k > w_s$$

gdzie:  $w_0$ ,  $w_k$  i  $w_s$  oznaczają odpowiednio wilgotności masowe początkową, końcową oraz dla granicy skurczalności gruntu, a  $\Delta \varepsilon_v$  – odkształcenie objętościowe

Ponieważ opisana w rozdziale metoda jawna pozwala wyznaczyć wilgotność objętościową  $\theta$ , w pierwszej kolejności należy wprowadzić zależność, między  $\theta$  a wilgotnością masową gruntu.

Na podstawie definicji wilgotności masowej możemy zapisać:

$$w = \frac{m_w}{m_s} = \frac{\rho_w \cdot \theta \cdot V}{\rho_s \cdot (1-n) \cdot V} = \frac{\rho_w}{\rho_s} \cdot \frac{\theta}{(1-n)} \quad (10.2)$$

Z równania (10.2) wynika zależność:

$$\theta = w \cdot (1 - n) \cdot \frac{\rho_s}{\rho_w} = w \cdot \left( \frac{1}{1+e} \right) \cdot \frac{\rho_s}{\rho_w} \quad (10.3)$$

Dla wyznaczenia relacji między wilgotnością masową  $w$  a objętościową  $\theta$ , należy określić związek między wilgotnością masową  $w$  a porowatością  $n$  (lub wskaźnikiem porowatości  $e$ ). W tym celu, na podstawie artykułu źródłowego (Kumor 2008) przyjęto, że granicznymi wielkościami wilgotności dla których zachodzą zmiany objętościowe w badanych procesach skurczu i pęcznienia są:

- wilgotność maksymalna  $w_{max}=48,5\%$  , oraz
- wilgotność granicy skurczalności  $w_s = 18,5\%$

Zakładając, że przy wilgotności  $w_{max}$  grunt znajduje się w stanie pełnej saturacji ( $\theta = \theta_s$ ), na podstawie (10.2) możemy zapisać:

$$\theta_s = w_{max} \cdot (1 - n_{max}) \cdot \frac{\rho_s}{\rho_w} \quad (10.4)$$

W powyższym równaniu (10.4) nieznaną jest porowatość ośrodka  $n_{max}$ , można ją jednak wyznaczyć, zakładając dodatkowo, że skoro  $w_{max}$  określana była w warunkach laboratoryjnego nawadniania, to dla tego rodzaju procesu  $\theta_s \approx n_{max}$  (patrz punkt 3.1). Przy założeniu jw., na podstawie (10.4) zachodzi:

$$n_{max} = w_{max} \cdot (1 - n_{max}) \cdot \frac{\rho_s}{\rho_w} \quad (10.5)$$

Przyjmując, że  $\rho_s = 2.75 \frac{Mg}{m^3}$ , z (10.5) wynika, że maksymalna porowatość spęczniałego gruntu wynosi  $n_{max} \approx 57,15\%$ , a zatem w warunkach rzeczywistych (tj. z uwzględnieniem residualnej zawartości powietrza – patrz rys. 3.2):

$$\theta_s = 0,87 \cdot n_{max} \approx 0,497 \quad (10.6)$$

Maksymalny wskaźnik porowatości gruntu natomiast określa równanie:

$$e_{max} = \frac{n_{max}}{1-n_{max}} \approx 1,334 \quad (10.7)$$

Z (10.1) wynika, że dla procesu skurczu zachodzi relacja:

$$\Delta \varepsilon_v = \frac{\Delta e}{1+e_{max}} = \frac{e-e_{max}}{1+e_{max}} = -0,783 * (w_{max}-w) \quad (10.8)$$

A zatem:

$$e = e_{max} - 0,783 \cdot (w_{max} - w) \cdot (1 + e_{max}) \quad (10.9)$$

Co po podstawieniu  $w_{max} = 0,485$  oraz z wykorzystaniem (10.7) daje następujące przybliżenie relacji między porowatością a wilgotnością masową dla procesu skurczu gruntu z Bydgoszczy:

$$e \approx 1,827w + 0,448 \quad (10.10)$$

Po podstawieniu (10.10) do (10.3), otrzymujemy ostatecznie:

$$\theta = w \cdot (1 - n) \cdot \frac{\rho_s}{\rho_w} \approx w \cdot \left( \frac{1}{1,827w + 1,448} \right) \cdot \frac{\rho_s}{\rho_w} \quad (10.11)$$

Z czego wynika, że:

$$w \approx \frac{1,448 \cdot \theta \rho_w}{\rho_s - 1,827 \cdot \theta \rho_w} \quad (10.12)$$

Zatem obliczenie zmiany objętości w trakcie poboru wody przez drzewo obywać się będzie na podstawie relacji (10.1) z uwzględnieniem (10.12).

Z uwagi na brak literaturowych danych nt. krzywych retencji oraz współczynników filtracji w stanach nienasyconych dla gruntów z terenu Bydgoszczy, w celu wyliczenia rozkładu wilgotności objętościowej w trakcie symulacji poboru wody przez drzewa, przyjęto krzywą retencji opisaną wzorem Van Genuchtena (3.15), oraz wzór na względny współczynnik przewodnictwa hydraulicznego ( $k^r$ ) wg Van Genuchtena-Mualema (3.24), przyjmując współczynniki do wzorów (3.15) i (3.24) jak dla innego gruntu ilastego opisanego w artykule Brandyk i in. (1993). Przyjęty zastępczo grunt jest iłem pylastym, występującym w dolinie Wisły na terenie Żuław, na głębokości pow. 80 cm, o zbliżonej do gruntu z rejonu Bydgoszczy wartości maksymalnej wilgotności objętościowej  $\theta_s = 0.498$ . Przyjęte do obliczeń parametry (tab. 10.3) wyznaczają krzywą retencji, której kształt jest analogiczny do krzywych

retencji iłó w mio-plioceńskich z terenu Warszawy, opisanych w artykułach Wójcik (2005) oraz Barański i Wójcik (2007,2008).

Tab. 10.3. Przyjęta charakterystyka gruntu

współczynnik filtracji dla stanu pełnej saturacji - $k_s$ (wg Brandyk i inni 1993)	$8,7 \frac{mm}{db}$
$\theta_s$ (zgodnie z 11.6)	0,497
parametry do wzorów (3.15 i 3.24) (wg Brandyk i inni 1993)	$\alpha = 0.0165/cm$ $n=1.072$

Dla przyjętego, hydrostatycznego rozkładu ssania matrycowego w chwili początkowej (jak na rys. 10.1), wartości  $\theta$ ,  $w$ ,  $e$  oraz  $\rho$  (wyznaczone w oparciu o wzory 3.15, 10.10, 10.12 i parametry z tabeli 10.3) wynoszą:

- dla powierzchni terenu (brzeg AB)  $\theta = 0.438$ , co odpowiada wilgotności masowej  $w = 32.53\%$ , wskaźnika porowatości  $e=1,042$  oraz gęstości objętościowej  $\rho = 1,785 \frac{Mg}{m^3}$
- dla powierzchni zw. wody gruntowej (brzeg CD)  $\theta = \theta_s = 0.497$ , co odpowiada wilgotności masowej  $w = 39,07\%$ , wskaźnika porowatości  $e=1,162$  oraz gęstości objętościowej  $\rho = 1,769 \frac{Mg}{m^3}$ .

Powyższe wartości wilgotności  $w$  i gęstości  $\rho$  mieszczą się w granicach opisanych przez Kumora (2008) charakterystyk iłó w poznańskich z terenu Bydgoszczy.

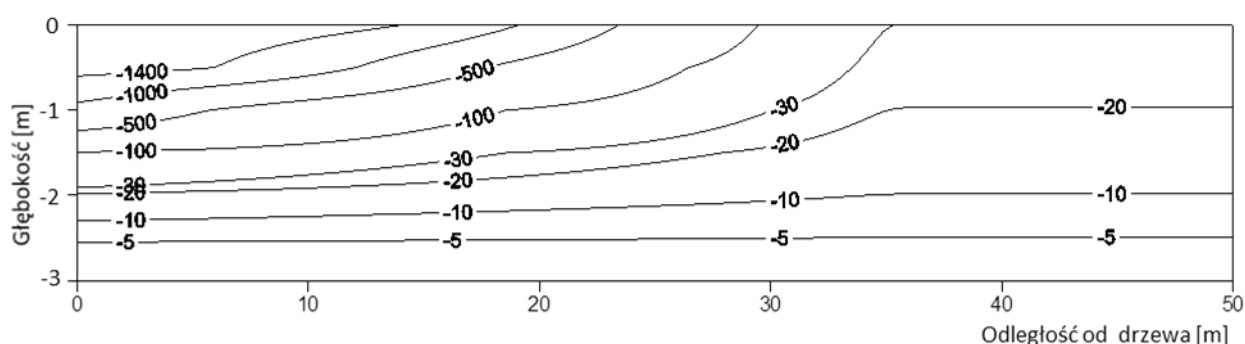
Przyjęto warunki brzegowe dla wyznaczenia odkształceń liniowych wg rys. 10.1

Wyliczenia odkształceń liniowych dla zadanych warunków brzegowych przeprowadzono zgodnie z opisem jak w punkcie 6.8 pracy przy założeniu możliwych odkształceń gruntu w obu kierunkach, poziomym i pionowym (zgodnie z rys. 6.8).

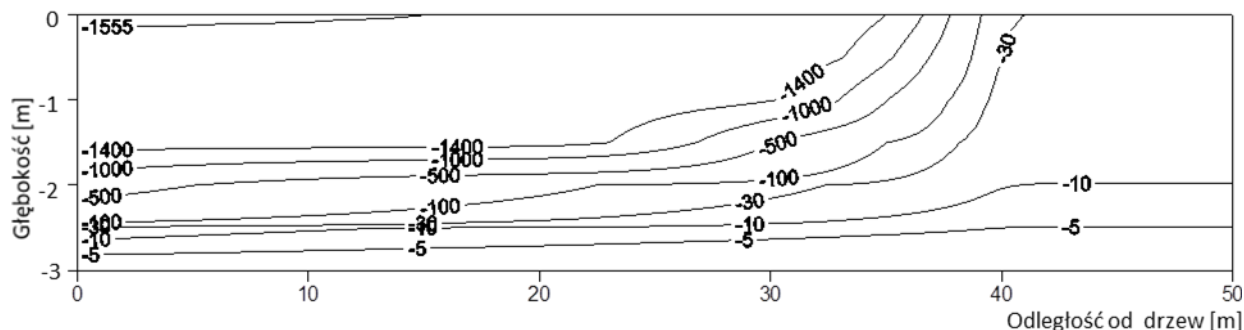
Poniżej przedstawiono wartości średnich poborów wody w trakcie trwania symulacji (tab.10.4), rozkłady ssania matrycowego (rys. 10.2 i 10.3) oraz odkształcenia powierzchni gruntu (rys. 10.4).

Tab. 10.4. Średnie pobory wody przez pojedyncze drzewo i przez szpaler drzew dla 4500 dniowej symulacji

	zestaw parametrów f. źródłowej - wg tab.10.1	zasięg poziomy $R_m$ [m]	zasięg pionowy $Z_m$ [m]	pobór w warunkach nieogr. dostępności $[\frac{m^3}{db}/1drzewo]$ $[\frac{m^3}{db}/1mb]$	całkowity pobór podczas symulacji 4500 dniowej $[\frac{m^3}{1 drzewo}]$ $[\frac{m^3}{1 mb}]$	średni pobór w trakcie okresu wegetacji $[\frac{m^3}{db}/1drzewo]$	pobór w ostatnich dniach symulacji $[\frac{m^3}{db}/1drzewo]$
pojedyncze drzewo	1	35	2	0,25	404,759	0,1730	0,1084
szpaler drzew	2	40	3	0,1	38,214	0,0327	0,0147



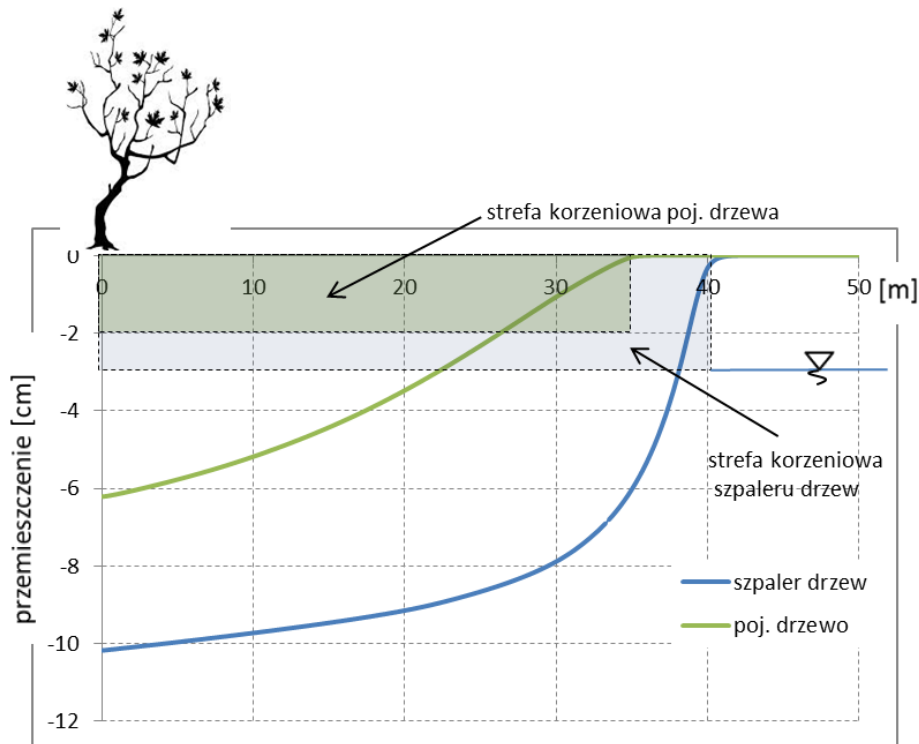
Rys. 10.2. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla poboru przez pojedynczego drzewo



Rys. 10.3. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla poboru przez szpaler drzew

Porównując wyniki (tab.10.4) z danymi empirycznymi (Wullschleger i inni 1998), wg których w 90% przypadków drzew o wysokości ok. 21 m średni pobór wynosi od 0,01 do 0,2  $\frac{m^3}{db}$ , widać, że w przypadku pojedynczego drzewa, średni pobór wody w trakcie całego czasu trwania symulacji (odniesiony do półrocznych okresów wegetacji) zawiera się w górnym zakresie przedziału odnotowywanych, rzeczywistych poborów wody. Należy jednak zwrócić uwagę, iż dużo niższy jest średni pobór w ostatnich dniach symulacji, co wskazuje na stopniowe przesuszanie się ośrodka gruntowego. Nasuwa się zatem wniosek, że w

przypadku pojedynczego drzewa założony rozmiar strefy korzeniowej może być niewystarczający dla zaspokojenia potrzeb wodnych w dłuższym okresie czasu (patrz również punkt 9.).



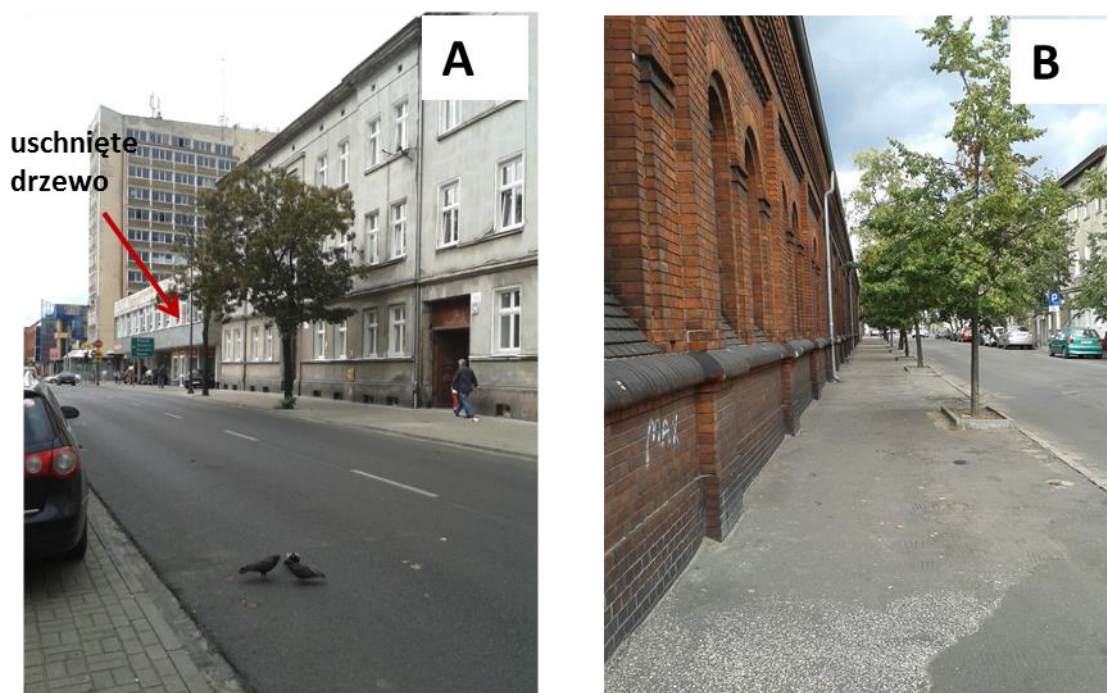
Rys. 10.4. Osiadanie powierzchni gruntu wywołane wpływem pojedynczego drzewa oraz szpaleru drzew

W przypadku symulacji dotyczącej szpaleru drzew, uzyskane wyniki poboru przypadającego na pojedyncze drzewo są bliskie dolnej granicy odnotowywanych wyników empirycznych zarówno w przypadku średniej wieloletniej jak i z końcowej fazy symulacji. Oznacza to prawdopodobnie, że rozmiar strefy korzeniowej jest niedostateczny i należy liczyć się z rozrostem korzeni w kierunku potencjalnych źródeł wilgoci (a w przypadku ich braku, z niedostateczną ilością dostępnej dla drzew wody, co może prowadzić do ich usychania – patrz rys.10.5a). Analizując wyniki poborów wody i uzyskanych odkształceń należy wziąć pod uwagę, że w symulacji nie uwzględniono dopływu wód opadowych, które mogą mieć znaczący udział w bilansie wody w strefie korzeniowej. Na przykład, dla drzewa o poborze ok.  $0,2 \frac{m^3}{ab}$ , roczny pobór (odniesiony do 180 dniowego czasu wegetacji) wyniesie ok.  $0,2 \times 180 = 36 m^3$ , co przy założeniu opadów przypadających na okres wegetacji rośliny ok. 300mm, odpowiada dopływowi wód deszczowych z powierzchni ok.  $120 m^2$ . Oczywiście nie cała objętość wody opadowej może zostać zaabsorbowana przez drzewo, jednakże dopływ

wód deszczowych stanowi dodatkowy czynnik wpływający na uwilgotnienie gruntu (zwłaszcza w okresie poza wegetacją - patrz również przykład opisany w punkcie 11.)

Biorąc pod uwagę powyższe, należy uzyskane wyniki deformacji (rys. 10.4) oraz poborów wody (tab.10.4) traktować jako prawdopodobne dla gruntów ekspansywnych z terenu Bydgoszczy, dla sytuacji obecności drzew w utwardzonych i uszczelnionych powierzchniach (przypadek występujący na terenie miasta - patrz zdjęcia poniżej, rys.10.5a,b). Biorąc pod uwagę przyjęty hydrostatyczny rozkład ssania w chwili początkowej (rys.10.1), trzeba dodatkowo zaznaczyć, że symulacja dotyczy ośrodka gruntowego stosunkowo dobrze nawodnionego. Wyniki deformacji (rys. 10.4) będą zatem dotyczyć raczej nowych nawierzchni (np. nowe ulice lub parkingi), zwłaszcza realizowanych po długotrwałych opadach lub po okresie zimowym (patrz również punkt 11.). W przypadku starszych realizacji grunt może być dużo bardziej przesuszony w chwili początkowej, na przykład poprzez pobór wody przez rosnące już drzewa, wówczas odkształcenia nawierzchni wywołane kolejnymi nasadzeniami będą mniejsze.

Wartym zauważenia jest również, że nie odnotowano odkształceń poza zasięgiem występowania strefy korzeniowej (patrz również punkty 8. i 9.), a uzyskany zasięg deformacji jest zbliżony do zasięgów wpływów drzew podawanych przez Jeża (1995), wynoszących ok.  $1,5 H$  dla pojedynczego drzewa oraz  $2H$  dla grupy drzew.



Rys. 10.5. Przykłady szczelnych nawierzchni wokół rosnących drzew na terenie Bydgoszczy





## 11. Przykład wyznaczenia rozkładu ssania dla gruntu torfowo-murszowego

Poniżej zaprezentowane zostanie rozwiązanie przepływu dla poboru wody przez szpaler drzew na przykładzie dwóch gruntów opisanych w artykule Iwanek i inni (2004). Opisany przykład nie zawiera obliczeń odkształceń (w artykule źródłowym brak jest informacji nt. odkształcalności opisanych gruntów), jednak może stanowić opis metodyki wyznaczania uwilgotnienia gleby, pomocny np. dla celów rolniczych.

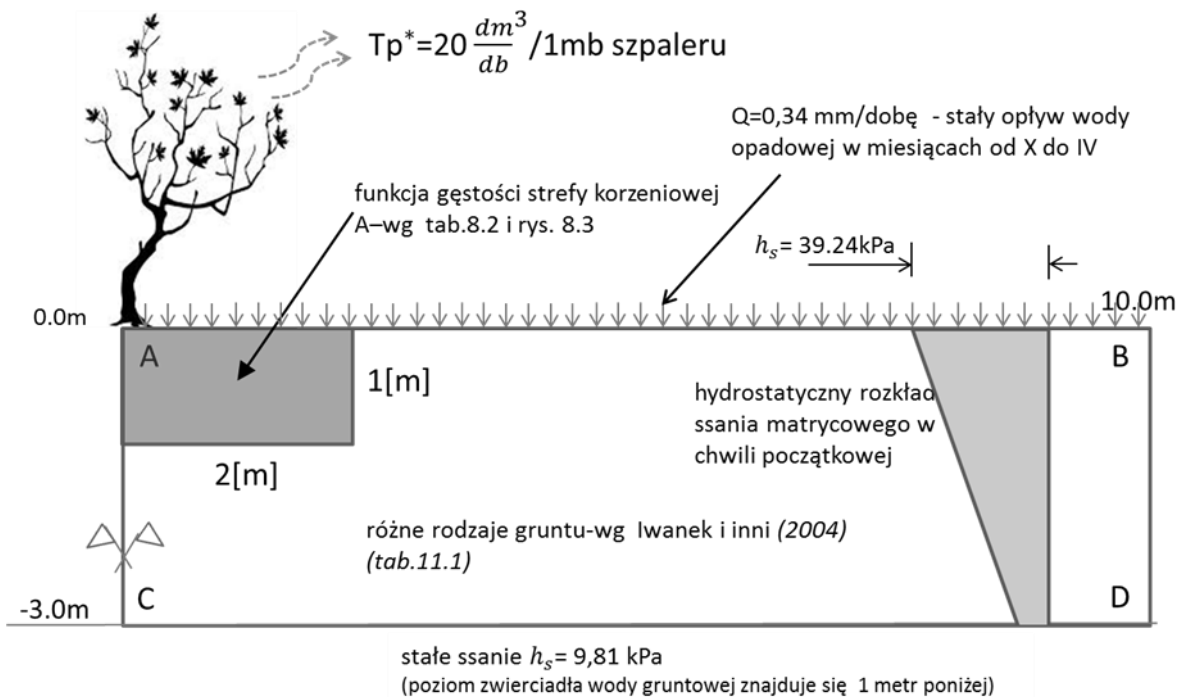
Grunty opisane w artykule źródłowym stanowią utwory torfowo-murszowe, dla których wyznaczone zostały krzywe retencji oraz formuły określające względny współczynnik przewodnictwa hydraulicznego wg propozycji Van Genuchtena (1980) (wzory 3.15 i 3.24).

Dla celów analizy wybrano grunty Krowie Bagno 7 i Krowie Bagno 467 (tab. 11.1).

Tab. 11.1. Przyjęte charakterystyki gruntu (Iwanek i inni 2004)

charakterystyka gruntu	Krowie Bagno 7 Mt I ab	Krowie Bagno 476 Mt I bb
współczynnik filtracji dla stanu pełnej saturacji - $k_s$	$210 \frac{mm}{db}$	$110 \frac{mm}{db}$
$\theta_s$	0,88	0,89
$\theta_r$	0.086	0.006
parametry krzywej retencji wg Van Genuchten - Mualem	$\alpha = 0.016/cm$ $n=1.413$	$\alpha = 0.029/cm$ $n=1.252$

Dla potrzeb symulacji przyjęto dwuwymiarowy, symetryczny względem osi szpaleru drzew obszar rozwiązania o zasięgu  $r=10$  m od pni drzew i głębokości 3m (jak na rys. 11.1). Założono, że w stanie początkowym panuje hydrostatyczny rozkład ssania matrycowego oraz, że na głębokości 4 metrów poniżej poziomu terenu znajduje się zwierciadło wody gruntowej ( $h_s = 0$ ) przez co na brzegu obszaru CD przyjęto stałą wartość ssania matrycowego równą 9.81 kPa, natomiast na brzegu AB (powierzchnia gruntu) ssanie matrycowe w chwili początkowej wynosi 39,24 kPa.



Rys. 11.1. Schemat przyjętego obszaru rozwiązania

Warunki brzegowe dla całego czasu trwania symulacji określono następująco:

- brzegi AB, AC i BD są nieprzepuszczalne (warunek Neumanna)
- na brzegu CD przyjęto niezmienną, równą początkowej wartość ssania matrycowego ( $h_s = 9,81 \text{ kPa}$ ) co odpowiada zadanemu warunkowi Dirichleta.

Dla potrzeb symulacji poboru wody przyjęto makroskopowy, dwuwymiarowy model funkcji źródłowej wg Vrugt i inni (2001b) (analogicznie jak w punkcie 8 – równania 8.1, 8.2). Zasięg oraz funkcję gęstości poboru wody wewnątrz strefy korzeniowej przyjęto jak dla modelu „A” wg tabeli 8.2. W obliczeniach uwzględniono sezonową zmienność poboru. W tym celu założono półroczny czas trwania wegetacji (w miesiącach od kwietnia do września), w trakcie którego dobowy pobór wody przez szpaler drzew w warunkach nieograniczonej dostępności wody  $T_p^*$  wynosi 20 litrów na metr bieżący szpaleru. Poza okresem wegetacji (miesiące październik-marzec) założono zerowy pobór wody przez drzewa ( $T_p^* = 0$ ).

Funkcję  $\alpha(h_s)$  opisującą dostępność wody w warunkach ograniczonego nasycenia przyjęto wg propozycji Kowalika (1973b), zgodnie z rys. 3.6a.

W zastosowanych schematach obliczeniowych przyjęto dyskretyzację obszaru rozwiązania oraz wariant metody zgodnie z poniższą tabelą (11.2):

Tab. 11.2. Przyjęta dyskretyzacja obszaru rozwiązania oraz zastosowany wariant metody

Rozmiar kwadratowej siatki punktów węzłowych – dx (patrz pkt 6.5)	25 [cm]
$\Delta t$ – max. długość kroku czasowego	0,5 doby
sposób wyliczania prędkości wody w kolejnych krokach czasowych	metodą iteracyjną (realizacja punktów od „A” do „F” schematu 6.3), $ h_s(\theta^{t+\Delta t, i+1}) - h_s(\theta^{t+\Delta t, i})  < 0.01 \text{ cm.}$
zastosowane kryteria ograniczenia długości kroku czasowego	Koniunkcja kryteriów: przyrostowego: $ \theta^{t+\Delta t} - \theta^t  < 0.0001$ Couranta: $C_r < 0.001$
uwzględnienie wpływu zmian odkształcenia ośrodka na nasycenie w trakcie symulacji (realizacja kroku 6-go w schemacie rys. 6.2)	NIE

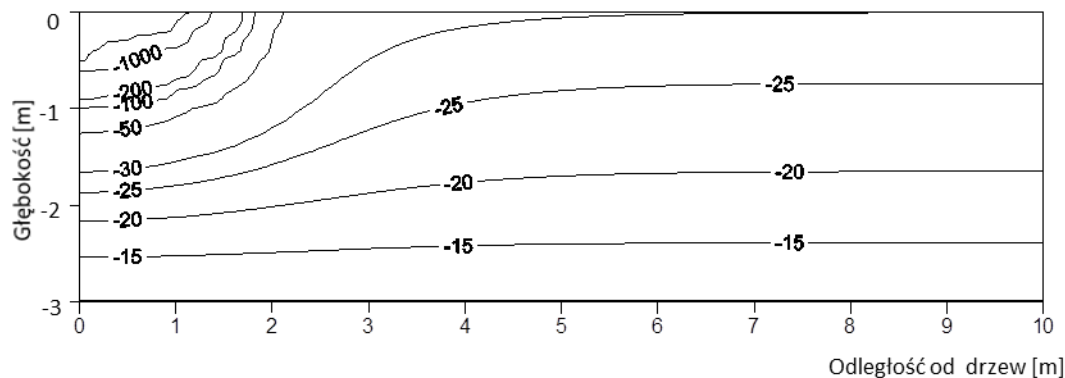
Przyjęto czas trwania symulacji wynoszący 3780 dni (10,5 roku).

W trakcie obliczeń uwzględniony został również dopływ wód opadowych. W tym celu przyjęto, że:

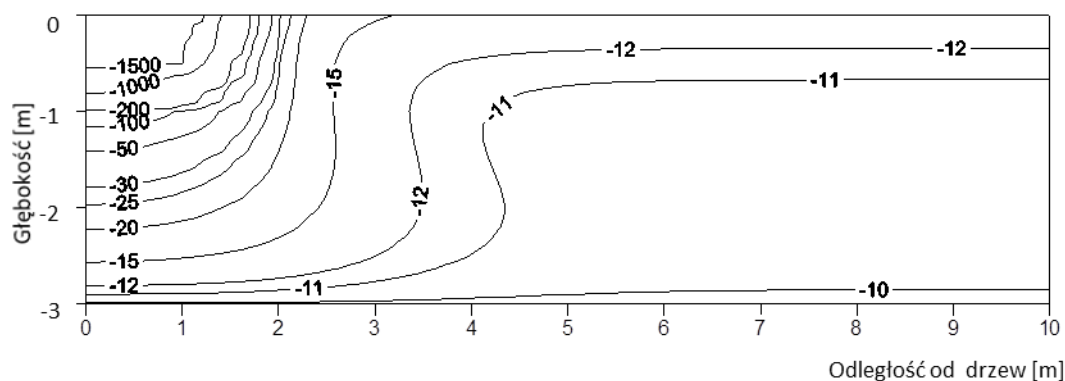
- w okresie wegetacji dopływ wód opadowych do wnętrza obszaru rozwiązania jest zerowy, ponieważ w okresie kwiecień – wrzesień ewapotranspiracja z powierzchni gruntu na ogół przewyższa dopływ wód deszczowych (Łabędzki i inni 2012). Założono zatem, że wody deszczowe w tym czasie są w całości przejmowane przez pozostałe rośliny występujące w otoczeniu szpaleru drzew, natomiast drzewa w szpalerze dla celów transpiracji pobierają wodę z gruntu.
- w miesiącach od października do marca (poza okresem wegetacyjnym) średni dopływ wody deszczowej wynosi 217,7 mm (wartość przyjęta za Kirschenstein 2005 dla rejonu Chojnic) oraz, że średnie parowanie z powierzchni to ok. 156,8 mm (za Bac i inni 2008). Nadwyżkę opadów względem parowania w okresie od października do marca (w zaokrągleniu 61 mm) rozłożono równomiernie w czasie, przyjmując średni, stały dopływ wody padowej w tym półroczu w wielkości 0,34 mm/dobę.

Dopływ wód opadowych uwzględniany był jako funkcja źródłowa dla węzłów leżących na brzegu AB obszaru rozwiązania.

Poniżej przedstawiono uzyskane rozkłady nasycenia dla długotrwałych – 10,5 letnich czasów trwania symulacji.



Rys. 11.2. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla gruntu Krowie Bagno 7 Mt I ab dla symulacji 10,5 rocznej



Rys. 11.3. Rozkład ssania matrycowego [kPa] dla gruntu Krowie Bagno Mt I ab dla symulacji 10,5 rocznej

Uzyskano następujące wyniki średniego poboru wody przez drzewa, przypadające na 1 mb szpaleru w okresie wegetacyjnym:

- dla gruntu Krowie Bagno 7 Mt I ab –  $3,962 \frac{\text{ltr}}{\text{dobę}}$
- dla gruntu Krowie Bagno 476 Mt I bb –  $2,443 \frac{\text{ltr}}{\text{dobę}}$

Zakładając, że rozstaw nasadzeń wynosi 2m, daje to średnie pobory w okresie wegetacji, przypadające na jedno drzewo:

- dla gruntu Krowie Bagno 7 Mt I ab –  $7,92 \frac{\text{ltr}}{1\text{drzewo} \cdot 1\text{dobę}}$
- dla gruntu Krowie Bagno 476 Mt I bb –  $4,89 \frac{\text{ltr}}{1\text{drzewo} \cdot 1\text{dobę}}$

Powyższe wyniki odbiegają od notowanych dla dużych drzew (*np. o wys. ok 21 m – Wullschleger i inni 1998*), lecz z drugiej strony dotyczą relatywnie niskich roślin – w odniesieniu do poziomego rozmiaru strefy korzeniowej związane są z drzewkami o wysokości ok. 1,5 – 2 m (patrz punkt 3.9). Przeprowadzona symulacja, choć nie opisuje odkształcenia ośrodka gruntowego, może być wykorzystana w rolnictwie. Na przykład w przypadku uprawy drzewek o wysokości ok. 1,5-2m, uzyskane rozkłady uwilgotnienia (rys. 11.2 i 11.3) jak i estymowane średnie pobory wody stanowiąc mogą podstawę do decyzji o doborze właściwego gatunku upraw, rozstawu nasadzeń lub o dodatkowym nawadnianiu.



## 12. Wnioski i kierunki dalszych badań

Głównym celem niniejszej pracy doktorskiej było opracowanie i wstępna weryfikacja autorskiego modelu numerycznego opisującego zmiany wilgotności i towarzyszące im odkształcenia gruntów ekspansywnych, zachodzące pod wpływem poboru wody przez korzenie drzew. Wyniki uzyskane w ramach pracy potwierdzają postawioną na jej początku tezę, iż możliwe jest prowadzenie symulacji zmian uwilgotnienia gruntów i wywołanych tymi zmianami odkształceń gruntów ekspansywnych za pomocą jawnych schematów numerycznych, pod warunkiem stosowania odpowiednich ograniczeń długości kroku czasowego ze względu na przyjętą geometrię siatki przepływu – np. stosując kryterium Couranta lub zamiennie (bądź łącznie) kryterium ze względu na dopuszczalny przyrost wartości nasycenia w pojedynczym kroku czasowym. W zaproponowanej i opisanej w rozdziale 6. metodzie obliczeniowej, stosowanie kryterium przyrostowego jest niezbędne w przypadku występowania funkcji źródłowej (np. w przypadku symulacji związanych z poborem wody przez korzenie drzew). Dodatkowym czynnikiem poprawiającym stabilność obliczeń jest stosowanie zaproponowanej w punkcie 6.2 metodyki wyznaczania prędkości wody gruntowej w oparciu o szukaną dla danego kroku czasowego wartość wilgotności objętościowej (wg schematu – rys. 6.3).

Zaproponowana metoda obliczeniowa (opisana w sposób ogólny schematem blokowym rys. 6.2) może być pomocna w przybliżonym szacowaniu odkształceń gruntów powodowanych przez drzewa (patrz punkty 8., 9. i 10.). Model w wariacie bez uwzględniania wpływu odkształcenia ośrodka na wilgotność objętościową w trakcie trwania symulacji jest użyteczny dla symulacji w stanach ustalonych (patrz przykład 7.3.2 pracy).

Wyniki przeprowadzonych symulacji potwierdzają, że drzewa wpływają na odkształcenia gruntów ekspansywnych, a wpływ ten zależy (wg malejącej zależności) od całkowitego poboru wody przez drzewo, zasięgu poziomego strefy korzeniowej, zasięgu pionowego strefy korzeniowej i rozkładu gęstości korzeni w obrębie strefy korzeniowej (patrz punkt 8.). Decydujący wpływ wielkości poboru wody przez drzewo na wielkość odkształceń znalazł potwierdzenie także w innych pracach (np. *Lawson i O'Callaghan 1995, Vu 2002, Morsi 2010*).

Treść pracy wskazuje również, że symulacje poboru wody przez drzewa i porównanie założonych poborów z uśrednionymi (patrz punkt 9. oraz tabele 8.4, 8.5 i 9.3)

mogą stanowić istotną podpowieź projektową o spodziewanym zasięgu występowania strefy korzeniowej i dodatkowych odkształceniach gruntu.

Zachodzi potrzeba prowadzenia dalszych badań – zwłaszcza w zakresie charakteryzacji (na bazie istniejących modeli) występujących w Polsce gruntów ekspansywnych pod kątem przewodności hydraulicznej w warunkach niepełnego nasycenia (np. wg propozycji Van Genuchtena), krzywych retencji oraz opracowania modeli odkształceń w zależności od zmian ssania matrycowego. Dla potwierdzenia obserwacji, że odkształcenia gruntów ekspansywnych zachodzą głównie w obrębie strefy korzeniowej (patrz punkty 8. 9. i 10.), konieczne jest prowadzenie dalszych sukcesywnych badań terenowych określających zasięg korzeni dla różnych gatunków drzew oraz różnych gruntów i miejsc ich występowania. Ewentualne potwierdzenie takiej zależności mogłoby być istotne ze względu na rozstrzygnięcie w trakcie wizji terenowych o przyczynach zaistniałych awarii budowlanych.

Zaproponowana w rozdziale 6. jawna metoda obliczeniowa może służyć nie tylko dla celów wyznaczania spodziewanych odkształceń wywołanych obecnością drzew w gruncie ekspansywnym. Możliwe jest stosowanie jej również dla wyznaczania rozkładów uwilgotnienia gruntów (gleb) wykorzystywanych rolniczo (patrz punkt 11.), co w chwili obecnej daje szersze możliwości jej zastosowania ze względu na podejmowane w kraju prace nad opracowywaniem krzywych retencji i charakterystyk hydraulicznych (najczęściej w oparciu o równania Van Genuchtena i Mualema – patrz wzory 3.15 i 3.24) gleb uprawnych (np. *Czyż i inni 2003, Iwanek i inni 2004, Bryk 2009, Klatka i inni 2010*). Wydaje się, że obliczeniowe prognozowanie zmian uwilgotnienia w czasie gleb może być pomocne np. w podejmowaniu decyzji o rodzajach i sposobach (rozstawach) nasadzeń, kwalifikacji gleb pod kątem konkretnych upraw czy weryfikacji co do potrzeb dodatkowego nawadniania istniejących plantacji (rolnych lub leśnych). W tym sensie obszar możliwego zastosowania zaproponowanego modelu numerycznego wykracza poza tematykę związaną wyłącznie z zagadnieniami geotechniki.



## 13. Literatura

1. Adem H.H. (2015) Modulus of elasticity based method for estimating the vertical movement of natural unsaturated expansive soils. Rozprawa doktorska, University of Ottawa, Ottawa, Kanada.
2. Adem H.H., Vanapalli S.K. (2013) A simple approach for predicting vertical movements of expansive soils using the mechanics of unsaturated soils. Proceedings of the 18th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Paris 2013: 1069-1072
3. Adem H.H., Vanapalli S.K. (2015) Review of methods for predicting in situ volume change movement of expansive soil over time. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering 7: 73-86.
4. Agus S.S., Schanz T., Fredlund D.G. (2010) Measurements of suction versus water content for bentonite -sand mixtures. Canadian Geotechnical Journal 47: 583-594.
5. Agus S.S., Arifin Y.F., Tripathy S., Schanz T. (2013) Swelling pressure-suction relationship of heavily compacted bentonite-sand mixtures. Acta Geotechnica 8: 155-165.
6. Ali N., Rees S.W. (2009) Linear Root Water Uptake by Vegetation. Malaysian Journal of Civil Engineering 21(2):110-124 (2009)
7. Alonso E.E., Gens A., Josa A. (1990) A constitutive model for partially saturated soils. Geotechnique 40: 405-430.
8. Alonso E.E., Vaunat J., Gens A. (1999) Modelling the mechanical behaviour of expansive clays. Engineering Geology 54: 173-183.
9. Alonso E.E., Pereira J.-M., Vaunat J., Olivella S. (2010) A microstructurally based effective stress for unsaturated soils. Geotechnique 60: 913-925.
10. Al-Shamrani M.A., Dhowian A.W. (2003) Experimental study of lateral restraint effects on the potential heave of expansive soils. Engineering Geology, 69: 63-91.
11. Anagnostopoulos G.G., Burlando P. (2012) An Object-oriented computational framework for the simulation of variably saturated flow in soils, using reduced complexity model. Elsevier. Environmental Modelling & Software 38 (2012) 191-202
12. ASTM D 4829-88 – Standard test methods for expansion index of soils
13. Bac S., Iwański S., Kuchar L. (2008) Porównanie wybranych modeli do szacowania parowania potencjalnego w okresie zimowym dla potrzeb modelowania hydrologicznego. Acta Agrophysica, 2008, 12(2), 305-314.
14. Bagherieh A.R., Khalili N., Habibagahi G., Ghahramani A. (2009) Drying response and effective stress in a double porosity aggregated soil. Engineering Geology 105: 44-50.

15. Baker R., Frydman S. (2009) Unsaturated soil mechanics: Critical review of physical foundations. *Engineering Geology* 106: 26-39.
16. Barański M., Wójcik E. (2007) Ocena zdolności do zmian deformacyjnych iłów mio-pliocenicznych z poligonu badawczego Stegny w Warszawie. III Sympozjum WPGIWP Puszczykowo 31.V-1.VI.2007. *Geologos* 11 (2007)
17. Barański M., Wójcik E. (2008) Estimation of ability to volume changes of Mio-Pliocene clay from Warsaw. *Geologija*. 2008. Vol.50. Supplement. P. S49-S54
18. Biddle P.G. (1983) Patterns of soil drying & moisture deficit in the vicinity of trees on clay soils. *Geotechnique*, vol. 83(2), pp.107-126
19. Bishop A.W. (1959) The principle of effective stress. *TechniskUkeblad*, 39: 859-863.
20. Bolzon G. Schrefler B.A. (1995) State Surfaces of Partially Saturated Soils: An Effective Pressure Approach, article in *Applied Mechanics Reviews* – January 1995
21. Brandyk T., Brandyk T., Skąpski K. (1993) Ocena wysokości podsiąku kapilarnego w kilku profilach mad rzecznych. *Roczniki gleboznawcze t. XLIV nr 1/2 Warszawa 1993*: 5-17.
22. Briaud J.-L., Zhang X., Moon S., (2003) Shrink test – water content method for shrink and swell predictions. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 129:590-600.
23. Brooks R.H., Corey A.T. (1964) Hydraulic properties of porous media. *Hydrology papers*, Colorado State University Fort Collins, Colorado
24. Bryk M. (2009) Przewodnictwo wodne i wskaźnik jakości leśnej gleby rdzawej. *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska Lublin Polonia*. Vol. LXIV (4) Sectio E 2009
25. Büsgen M., Münch E. (1928) *The Structure and Life of Forest Trees*, 3<sup>rd</sup> edn., translated by T. Thompson, Wiley, New York, 436pp.
26. Cameron D.A. (2001) The extent of soil desiccation near trees in a semi-arid environment. *Geotechnical and Geological Engineering* 19: 357-370, 2001
27. Cameron D.A., Beal N.S. (2011) Estimation of foundation movement and design of footing systems on reactive soils for the effects of trees. *Australian Geomechanics* Vol. 46 No. 3. September 2011
28. Carsel R.F., Parrish R.S. (1988) Developing Joint Probability Distributions of Soil Water Retention Characteristics. *Water Resources Research*, vol. 24, No 5, p. 755-769, May 1988
29. Chao C.K. (2007) *Design Principles for Foundations on Expansive Soils*, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, 2007
30. Chen F.N. (1988) Foundations on expansive soils. *Dev. On Geotech. Eng.* Vol.12, Elsevier 1988
31. Choma-Moryl K. (1988) Zmienność własności fizycznych iłów poznańskich okolic Wrocławia na tle ich genezy i litostratygrafii. *Geologia sudetica* 1988, vol. XXIII, nr 1 PL ISSN 0072-100X
32. Chen F.H. (2012) Foundations on expansive soils. Elsevier.



33. Courant R., Friedrichs K., Lewy H. (1928) On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics. IBM Journal, March 1967
34. Crow P. (2005) The Influence of Soils and Species on Tree Root Depth. Information note of forest research. Forestry Commission, 231 Corstorphine Road Edinburgh EH12 7AT, Nov. 2005
35. Czyż E.A., Dexter A.R., Niedzwiecki J. (2003) Retencja wodna gleb wieloletnich statycznych doświadczeń poletkowych. Roczniki gleboznawcze tom LIV nr 3 Warszawa 2003: 27-37
36. Day S.D., Wiseman P.E., Dickinson S.B., Harris J.R. (2010) Contemporary Concepts of Root System Architecture of Urban Trees. *Arboriculture & Urban Forestry* 2010. 36(4): 149-159.
37. Dhowian A.W. (1990) Heave Prediction Techniques and Design Consideration on Expansive Soils. *J. King Saud Univ., Vol.2, Eng Sci. (2)*, pp.335-377 (1410H/1990)
38. Dohnal M., Dusek J., Vogel T., Herza J., Tacheci P. (2006) Analysis of soil Water Response to Grass Transpiration. *Soil & Water Res.*, 1, 2006 (3): 85–98
39. Dunin F., Passioura J. (2006) Prologue: Amending agricultural water use to maintain production while affording environmental protection through control of outflow. *Australian Journal of Agricultural Research*, 2006, 57, 251-255
40. Feddes R.A., Kowalik P.J., Zaradny H. (1978) Simulation of field water use and crop yield. *Simulation Monograph 17*. Pudoc, Wageningen oraz Wiley&Sons, New York, Toronto
41. Feddes R.A., Hoff H., Bruen M., Dawson T., de Rosnay P., Dirmeyer P., Jackson R.B., Kabat P., Kleidon A.L., Pitman A.J. (2001) Modeling Root Water Uptake in Hydrological and Climate Models, *Bulletin of American Meteorological Society* Vol. 82, No. 12, December 2001.
42. Fityus S., Buzzi O. (2008) The place of expansive clays in the framework of unsaturated soil mechanics. *Applied Clay Science* (2008), doi:10.1016/j.clay.2008.08.005
43. Fredlund D.G. (1983) "Prediction of Ground Movements in Swelling Clays" 31<sup>st</sup>. Annual Soil Mechanics and Foundation Engineering Conference Earle Brown Center University of Minnesota Minneapolis, Minnesota 1983
44. Fredlund D.G., Hung V.Q. (2001) Proceedings of the ASCE Conference on Expansive Clay Soils and Vegetative Influences on shallow Foundations, *Geotechnical Special Publication*, Houston, Texas, Reston. Vol.115. pp.24-43. Oct. 10-13. 2001.
45. Fredlund D.G., Morgenstern N.R. (1977) Stress State Variables for Unsaturated Soils, *ASCE J. Geotech. Eng. Div. (GT5)*, vol. 103: pp. 447-466.
46. Fredlund D.G., Rahardjo H. (1993) *Soil mechanics for unsaturated soils*. John Wiley & Sons.
47. Fredlund D.G., Rahardjo H., Fredlund M.D. (2012) *Unsaturated soil mechanics in engineering practice*. John Wiley & Sons.
48. Fredlund D.G., Xing A. (1994) Equations for the soil–water characteristic curve. *Canadian Geotechnical Journal*, 31(3):521-532,1994

49. Garbulewski K. (2000) Ocena ekspansywności gruntów na podstawie skurczalności. *Inżynieria Morska i Geotechnika* 3/2000: 136-140.
50. Garbulewski K., Żakowicz S. (1993) Potencjał ssania jako wskaźnik pęcznienia gruntów nienasyconych. *Materiały X Krajowej Konferencji Mechaniki Gruntów i Fundamentowania*, Warszawa: 137-142.
51. Garbulewski K., Żakowicz S. (2007) Skurcz gruntu – zjawisko groźne w uszczelnieniach mineralnych. *Inżynieria Morska i Geotechnika* 2/2007: 86-91.
52. Gardner W.R. (1958) Some steady state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from water table. *Soil Sci.* 85(4), 228-232
53. Gardner W.R. (1960) Dynamic aspects of water availability to plants, *Soil Sci.*, 89, 63–73, 1960.
54. Gardner W.R., Ehlig C. F. (1962) Some observations on water movement to plant roots, *Agron. J.*, 54, 453–456, 1962.
55. Gatmiri B., Najari M. (2010) Modeling of settlement and induced matric suction in multiphase porous media under root water uptake effect by F.E.M. , *Int. Journal for Numerical Meth. Biomed. Engineering.* 2010;26:1764-1780.
56. Gawriuczenkow I. (2001) Ocena właściwości iłów serii poznańskiej jako potencjalnych, izolacyjnych barier geologicznych. *Rozprawa doktorska. Uniwersytet Warszawski, Wydział Geologii, Instytut Hydrogeologii i Geologii Inżynierskiej. Warszawa 2001.*
57. Gawriuczenkow I. (2011) Ocena ekspansywności iłów plioceńskich z rejonu Dobrego. *Biuletyn Państwowego Instytutu Geologicznego* 446: 273-276, 2011 R.
58. Gens A., Sanchez M., Sheng D. (2006) On constitutive modeling of unsaturated soils. *Acta Geotechnica* 1:137-147
59. Gorączko A., Kumor M. (2006) Próba określenia zależności funkcyjnej sezonowych zmian wilgotności podłoża ekspansywnego. *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Budownictwo Lądowe LX, Nr 603:* 47-53.
60. Gorączko A., Kumor M.K. (2011) Pęcznienie miopliocieńskich iłów serii poznańskiej z rejonu Bydgoszczy na tle ich litologii. *Biuletyn Państwowego Instytutu Geologicznego* 446: 305-314, 2011.
61. Grabowska-Olszewska B., Kaczyński R. (1994) Metody badania pęcznienia gruntów spoistych. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi, Tom 10, Zeszyt 1*
62. Grabowska-Olszewska B., Kaczyński R., Trzciniński J., Zboiński A. (1998) *Geologia stosowana. Właściwości gruntów nienasyconych.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
63. Green S.R., Vogeler I., Clothier B.E., Mills T.M., van den Dijssel C. (2003) Modelling water uptake by a mature apple tree. *Australian Journal of Soil Research*, 2003, 41, 365-380



64. Hamberg D.J., Nelson J.D. (1984) Prediction of Floor Slab Heave. The 5th International Conference Expansive Soils, Adelaide, South Australia, 137–217.
65. Helmig R. (1997) Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1997
66. Hillel D. (1975) Evaporation from bare soil under steady and diurnally fluctuating evaporativity. Soil Sci. 120, 230–237
67. Holtz W.G. (1983) The Influence of Vegetation on the Swelling and Shrinking of Clays in the United States of America, Geotechnique, 18(2): 159-163
68. Hung V.Q., Fredlund D.G. (2000) Volume change predictions in expansive soils using a two-dimensional finite element method, Proceedings of the Asian Conference in Unsaturated Soils, UNSAT ASIA 2000, Singapore, pp.231-236, May 18-19, 2000
69. Hung V.Q., Fredlund D.G. (2002) Using volume change indices for two-dimensional swelling analysis. Proceedings of the 55<sup>th</sup> Canadian Geotechnical and 3<sup>rd</sup> Joint IAH-CNC and CGS Groundwater Specialty Conferences. Niagara Falls, Ontario, October 20-23 2002
70. Indraratna B., Fatahi B., Khabbaz H. (2006) Numerical Analysis of Matric Suction Effects Induced by Tree Roots. Geotechnical Engineering, 159(2), 2006, 77-90.
71. Iwanek M., Kowalski D., Olszta W. (2004) Obliczanie współczynnika przewodnictwa hydraulicznego metodą Van Genuchtena-Mualem w zależności od parametrów krzywej retencji wodnej. Acta Agrophysica, 2004 3(3).
72. Izdebska-Mucha D., Wójcik E. (2013a) Wpływ struktury na skurczalność gruntów spoistych. Przegląd Geologiczny 61: 195-202.
73. Izdebska-Mucha D., Wójcik E. (2013b) Testing shrinkage factors: comparison of methods and correlation with index properties of soils. Bull Eng Geol Environ (2013) DOI 10.1007/s10064-012-0449-0.
74. Jaksa M.B., Kaggwa W.S., Woodburn J.A., Sinclair R. (2002) Influence of large gum trees on the soil suction profile in expansive soils. Australian Geomechanics March 2002.
75. Jeż J. (1995) Przyrodnicze aspekty bezpiecznego budownictwa. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1995.
76. Jeż T. (2010) Wpływ czynników przyrodniczych na stabilność posadowienia obiektów budowlanych. Rozprawa doktorska. Politechnika Poznańska, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Instytut Inżynierii Lądowej, Zakład Geotechniki i Geologii Inżynierskiej, Poznań 2010.
77. Jommi C. (2000) Remarks on the constitutive modeling of unsaturated soils. w: Tarantino A. Mancuso C. (red) Experimental evidence and theoretical approaches in unsaturated soils. Balkema, Rotterdam.



78. Jones D.E., Holtz W.G. (1973) *Expansive Soils – The Hidden Disaster*. Civil Eng., New York, pp.87-89
79. Khalili N., Khabbaz M.H. (1998) A unique relationship for  $\chi$  for determination of the shear strength of unsaturated soils. *Geotechnique* 1988; 48(5):681-687
80. Kirschenstein M. (2005) Wieloletnie zmiany sum opadów atmosferycznych na wybranych stacjach północno-zachodniej Polski. *Słupskie prace geograficzne* 2. 2005.
81. Klatka S., Ryczek M., Boroń K. (2010) Krzywe charakterystyki wodnej gleb zdegradowanych przez przemysł wydobywczy. *Ochrona Środowiska i Zasobów Naturalnych* nr 42, 2010r.
82. Kohgo Y., Nakano M., Miyazaki T. (1993) Theoretical aspects of constitutive modelling for unsaturated soils. *Soils and Foundations* 33(4):49-63.
83. Kopcewicz J., Lewak S., Gabryś H., Kacperska A., Starck Z., Strzałka K., Tretyn A. (2005) *Fizjologia roślin*, Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa 2005 .
84. Kowalik P.J. (1973b) *Zarys fizyki gruntów*. Wyd. Politech. Gdańskiej., Gdańsk; s.130
85. Kowalik P.J. (2007) *Zarys fizyki gruntów*. Wydawnictwa Politechniki Gdańskiej.
86. Kowalik P.J. (2010) *Agrohydrologia Obliczeniowa*. Monografie Komitetu Gospodarki Wodnej Polskiej Akademii Nauk – zeszyt 33/2010 – W-wa 2010
87. Kumor M.K. (2006) Badanie fazy skurcz-pęcznienie iltu jako możliwość przewidywania przemieszczeń podłoża ekspansywnego. *Zeszyty naukowe Politechniki Białostockiej* 2006. *Budownictwo-Zeszyt* 28.
88. Kumor M.K. (2007) Wybrane problemy skurczu iltów ekspansywnych rejonu Bydgoszczy. *Zeszyty naukowe Politechniki Śląskiej* 2007, Seria: *Budownictwo* z.111, nr kol. 1756
89. Kumor M.K. (2008) Selected geotechnical problems of expansive clays in the area of Poland. *Architecture, Civil Engineering, Environment* 4/2008: 75-92.
90. Kumor M.K. (2016) Iły ekspansywne podłoża budowlanego Bydgoszczy. *Wybrane problemy geotechniczne*. Wydawnictwa Uczelniane Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego w Bydgoszczy. Bydgoszcz 2016.
91. Lawson M., O’Callaghan D. (1995) Trees and Soil Subsidence. A critical analysis of of the role of trees in damage to low rise buildings. *Journal of Arboriculture* 21 (2): March 1995
92. Lendo-Siwicka M. (2009) Wpływ stanu nasycenia na zmiany objętości iltów warszawskich. *Praca zbiorowa pod redakcją Dembickiego E., Kumora M.K., Lechowicza Z. Problemy geotechniczne i środowiskowe z uwzględnieniem podłoży ekspansywnych*. Wydawnictwa Uczelniane UTP Bydgoszcz 2009, str. 583-590
93. Lendo-Siwicka M., Garbulewski K. (2013) Pęcznienie a odprężenie nienasyconych iltów warszawskich. *Budownictwo i Inżynieria Środowiska* 4(2013) ISSN:2081-3279



94. Leong E.C., Rahardjo H., Fredlund D.G. (2003) "A comparative study of constitutive models for unsaturated soils" Second Asian Conference on Unsaturated Soils UNSAT-ASIA 2003, April 15-17, Osaka, Japan
95. Leong E.C, Rahardjo H. (1997a) Review of soil-water characteristic curve equations. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, Vol.123, No. 12, December 1997
96. Leong E.C., Rahardjo H. (1997b) Permeability functions for unsaturated soil. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, Vol.123, No. 12, December 1997
97. Levin A., Shaviv A., Indelman P. (2007) Influence of root resistivity on plant water uptake mechanism, part I: numerical solution. Transp. Porous. Med.(2007) 70:63-79
98. Li K.Y., De Jong R., Boisvert J.B. (1999) Comparison of Root-Water-Uptake Models. 10<sup>th</sup> International Soil Conservation Organization Meeting held May 24-29 1999 at Purdue University
99. Lu N., Likos W.J. (2004) Unsaturated soil mechanics. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey 2004
100. Łabędzki L., Bąk B., Kanecka-Geszke E. (2012) Wielkość i zmienność ewapotranspiracji wskaźnikowej według Penmana-Monteitha w okresie wegetacyjnym w latach 1970-2004 w wybranych rejonach Polski. Woda-Środowisko-Obszary Wiejskie 2012 (IV-VI):t. 12 z. 2 (38) ISSN 1642-8125 s.159-170.
101. Mašin D., Khalili K. (2015) Swelling phenomena and effective stress in compacted expansive clays. Canadian Geotechnical Journal (online) 10.1139/cgj-2014-0479.
102. Mbonimpa M., Bedard C., Aubertin M., Bussiere B. (2004) A model to predict the unsaturated hydraulic conductivity from basic soil properties. 57<sup>th</sup> Canadian Geotechnical Conference. Quebec 2004
103. Mbonimpa M., Aubertin M., Maqsoud A., Bussiere B. (2006) Predictive model for the water retention curve of deformable clayey soils. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering 132: 1121-1132.
104. McKeen R.G. (1985) Validation procedures for pavement design on expansive soils. US Department of Transportation, Federal Aviation Administration, Report DOT/FAA/PM-85/15.
105. McKeen R.G. (1992) A Model for Predicting Expansive Soil Behaviour. Proc. 7th Int. Conf. Expansive Soils, Dallas, Texas. Vol.1 pp. 1-6.
106. McKeen R.G., Nielsen J.P. (1978) Characterization of expansive soils for airport pavement design. US Department of Transportation, Federal Aviation Administration, Technical report FAA-RD-78-59.



107. Michalski S., Zygmontowicz M. (2001) Czynniki środowiskowe zagrażające bezpieczeństwu obiektów budowlanych. XIII Ogólnopolska Interdyscyplinarna Konferencja Naukowo-Techniczna „Ekologia a Budownictwo”. Bielsko-Biała, 11-13.10.2001 r.
108. Michalski S., Szymkiewicz A. (2014) Evaluation of a simple numerical model for water flow in expansive soils influenced by tree roots. Prezentacja multimedialna na konferencji Computational Methods in Water Resources, Stuttgart 2014.
109. Michalski S., Szymkiewicz A. (2016) Przegląd wybranych metod wyznaczania odkształceń objętościowych w gruntach ekspansywnych. Artykuł nieopublikowany
110. Mokhtari M., Dehghani M. (2012) Swell-Shrink Behavior of Expansive Soils, Damage and Control. EJGE Vol. 17 [2012], Bund R 2673-2682
111. Molz F.J., Remson I. (1970) Extraction of soil moisture use by transpiring plants. Water Resour. Res. 6(5), 1346–1356
112. Morsi Y.G.Y. (2010) Numerical modeling of expansive soils using uncoupled approach. Rozprawa doktorska, Faculty of Engineering, Cairo University.
113. Navarro V., Candel M., Yustres A., Garcia B. (2007) Effects on urban foundations of soil-moisture changes caused by trees. Estudios de la Zona No Saturada del Suelo Vol. VIII J.V. Giraldez Cervera y F.J. Jimenez Hornero, 2007
114. Navarro V., Candel M., Yustres A., Sanchez J., Alonso J. (2009a) Trees, soil moisture and foundation movements. Computers and Geotechnics 36: 810-818.
115. Navarro V., Candel M., Yustres A., Alonso J., Garcia B. (2009b) Trees, lateral shrinkage and building damage. Engineering Geology 108 (2009) 189-198
116. Nelson J.D., Chao K.C., Chao G.K., Overton D.D., Nelson E.J. (2015) Foundation engineering for expansive soils. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey
117. Nelson J.D., Miller D.J. (1992) Expansive Soils: Problems in Practice in Foundation and Pavement Engineering, J. Wiley, New York 1992
118. Niedzielski A., Kumor M. (2009) Geotechniczne problemy posadowień na gruntach ekspansywnych w Polsce. Inżynieria Morska i Geotechnika 3/2009: 180-190.
119. Nosalewicz A. (2013) Wpływ zlokalizowanego nawożenia oraz stanu zagęszczenia gleby na pobieranie wody i składników mineralnych przez kukurydzę. Acta agrophysica monografie. Instytut Agrofizyki PAN w Lublinie 2013 (3).
120. Nowamooz H. (2014) Effective stress concept on multi-scale swelling soils. Applied Clay Science 101: 205-214.
121. Nuth M., Laloui L. (2008) Effective stress concept in unsaturated soils: Clarification and validation of unified framework. International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 32:771-801.





122. Ossowski R., Sikora Z. (2004) Numeryczne modelowanie sondowania statycznego CPTU. Politechnika Gdańska Wydział Budownictwa Wodnego i Inżynierii Środowiska, Monografie-Rozprawy Doktorskie. Gdańsk 2004
123. Pająk-Komorowska A. (2003) Swelling, expansion and shrinkage properties of selected clays in Mazowsze province, central Poland. Państwowy Instytut Geologiczny, Geological Quarterly, 2003, 47 (1): 55–62
124. Perko H.A., Thompson R.W., Nelson J.D. (2000) Suction Compression Index based on CLOD Test Results. In Advances in Unsaturated Geotechnics, edited by C. D. Shackelford, S. L. Houston, and N. Chang. Reston, VA: ASCE Press, 393–408..
125. Perpich W.M., Lukas R.G., Baker Jr C.N. (1965) Desiccation of Soil by Trees Related to Foundation Settlement. Canadian Geotechnical Journal, 1(2): 23-39
126. Philip J.R. (1966) Plant water relations, some physical aspects. Annual Review of Plant Physiology, 17, 245-268.
127. Prieto I., Armas C., Pugnaire F.I. (2012) Water release through plant roots: new insights into its consequences at the plant and ecosystem level. Tansey review. New Phytologist (2012) 193:830-841
128. Pritchard O.G., Hallett S.H., Farewell T.S. (2013) Soil movement in the UK – Impacts on critical infrastructure. Infrastructure Transitions Research Consortium. Working paper series. Cranfield University.
129. Przysański J. (red.) (1991) Posadowienie budowli na gruntach ekspansywnych. Wydawnictwa Politechniki Poznańskiej.
130. Ranatunga K. (2012). Soil-Tree-Atmosphere Water Relations, Atmospheric Model Applications, Dr. Ismail Yucel (Ed.), ISBN: 978-953-51-0488-9, InTech,
131. Raats P.A.C. (1974) Steady flows of water and salt in uniform soil profiles with plant roots. Soil Sci. Soc. Am. Proc. 38:717–722.
132. Richards L.A. (1931) Capillary conduction of liquids through porous mediums. Cornell University. Physics Vol. 1, November 1931
133. Seed H., Woodward R., Lundgren R. (1962) Prediction of swelling potential for compacted clays. Journ. Soil Mech. Found. Division, SM 3 pp. 53-87
134. Sheng D., Fredlund D.G., Gens A. (2008) A new modelling approach for unsaturated soils using independent stress variables. Canadian Geotechnical Journal 45: 511-534.
135. Sheng D. (2011) Constitutive modeling of unsaturated soils: Discussion of fundamental principles. w: Alonso E.E. i Gens A. (red.) Unsaturated soils, Taylor & Francis.
136. Šimunek J. (2005) Models of Water Flow and Solute Transport in the Unsaturated Zone. Encyclopedia of Hydrological Sciences. Edited by M G Anderson. 2005 John Wiley & Sons, Ltd.

137. Singhal S., Houston S.L., Houston W.N. (2014) Swell pressure, matric suction, and matric suction equivalent for undisturbed expansive clays. *Canadian Geotechnical Journal* 52: 356-366.
138. Skaggs T.H., van Genuchten M.T., Shouse P.J., Poss J.A. (2006) Macroscopic approaches to root water uptake as a function of water and salinity stress. *Agricultural water management* 86 (2006) 140-149. Elsevier 2006.
139. Snethen D.R. (1979) Technical guidelines for expansive soils in highway subgrades. Federal Highway Administration, Technical Report FHWA-RD-79-51.
140. Solomon E.P., Berg L., Martin D.W., Vilee C.A. (1996) *Biology* 3rd Ed. "Multico" oficyna wydawnicza, Warszawa 1996
141. Standards Association of Australia (1988). Residential Slabs and Footings. Part 1: Construction. AS2870.1-1988, Standards House, North Sydney, NSW.
142. Stone E.L., Kalisz P.J. (1991) On the maximum extent of tree roots. *Forest Ecology and Management*, 46 (1991) 59-102. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam
143. Suchocka M. (2011) Wpływ zmiany warunków siedliskowych na stan drzewostanu na terenach inwestycji. *Człowiek i Środowisko* 35 (1-2) 2011, s. 73-91
144. Sudjianto A.T., Suryolelono K.B., Rifa' A., Mochtar I.B. (2011) The Effect of Water Content Change and Variation Suction in Behavior Swelling of Expansive Soil. *International Journal of Civil & Environmental Engineering IJCEE-IJENS* Vol:11 No:03
145. Szymkiewicz A. (2004) Modeling of Unsaturated Water Flow in Highly Heterogeneous Soils. Rozprawa doktorska. Joseph Fourier University-Grenoble 1, Gdańsk University of Technology (2004)
146. Szymkiewicz A. (2009) Approximation of internodal conductivities in numerical simulation of one-dimensional infiltration, drainage, and capillary rise in unsaturated soils. *WATER RESOURCES RESEARCH*, VOL. 45, W10403, doi:10.1029/2008WR007654, 2009
147. Szymkiewicz A. (2013) Modelling water flow in unsaturated media. December 7 2012 Springer
148. Szymkiewicz A., Sikora Z., Ossowski R., Tisler W. (2014) Właściwości retencyjne, przewodność hydrauliczna i naprężenia efektywne w gruntach nienasyconych. *Inżynieria Morska i Geotechnika* 5/2014: 445-452.
149. Tarnawski M. (2013) Awarie budowli posadawianych na łąkach. XXVI Konferencja Naukowo-Techniczna Awarie Budowlane, Szczecin 2013
150. Thieu N.T.M., Fredlund D.G., Hung V.Q. (2000) General Partial Differential Equation Solvers for Saturated-Unsaturated Seepage. *Proceeding. Asian Conference on Unsaturated Soils*, Singapore, pp.201-206.
151. Tracy F.T. (2006) , Clean two- and three-dimensional analytical solutions of Richard's equation for testing numerical solvers. *Water Resources Research* 42 (8) , 1-11



152. Van der Merwe D.H. (1964) The prediction of heave from the plasticity index and percentage clay fraction of soils. *Trans. South Africa Inst. Civ. Engrs.* 6, pp. 103-107
153. Van Genuchten M.Th. (1980) A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils. *Soil Society of America Journal*, vol. 44, no.5
154. Van Genuchten M.Th., Nielsen D.R. (1985) On describing and predicting the hydraulic properties of unsaturated soils. *Annales Geophysicae*, 1985, 3, 5, 615-628
155. Vanapalli S.K., Oh W.T. (2010) A model for predicting the modulus of elasticity of unsaturated soils using the soil-water characteristic curve. *International Journal of Geotechnical Engineering*, 4(4): 425–433.
156. Vanapalli S.K., Lu L. (2012) A state-of-the art review of 1-D heave prediction methods for expansive soils. *International Journal of Geotechnical Engineering* 6: 15-41.
157. Vijayvergiya V.N., Ghazzaly O.I. (1973) Prediction of swelling potential of natural clays. *Proc. of the 3<sup>rd</sup> Int. Conf. on Expansive Soils*. Haifa 1973.
158. Volpe V., Marani M., Albertson J.D., Kagul G. (2013) Root controls on water redistribution and carbon uptake in the soil –plant system under current and future climate. *Advances in Water Resources* 60 (2013) 110-120
159. Vrugt A.J., van Wijk M.T., Hopmans J.W., Simunek J. (2001a) One-, two- and three-dimensional root water uptake functions for transient modeling. *Water resources research*, vol.37, No.10, p.2457-2470, October 2001
160. Vrugt J.A., Hopmans J.W., Simunek J. (2001b) Calibration of a Two-Dimensional Root Water Uptake Model. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 65:1027–1037 (2001).
161. Vu H.Q. (2000) Finite element method for the prediction of volume change in expansive soils. *Praca magisterska*. University of Saskatchewan, Saskatoon.
162. Vu H.Q. (2002) Uncoupled and coupled solutions of volume change problems in expansive soils. *Rozprawa doktorska*, University of Saskatchewan, Saskatoon.
163. Vu H.Q., Fredlund D.G. (2004) The prediction of one-, two-, and three-dimensional heave in expansive soils. *Canadian Geotechnical Journal* 41(4):713 - 737.
164. Vu H.Q., Fredlund D.G. (2006) Challenges to modeling heave in expansive soils. *Canadian Geotechnical Journal* 43(12): 1249 - 1272.
165. Warrick A.W. (2002) *Soil physics companion*. ISBN 0-8493-0837-2. 2002 by CRC Press LCC
166. Wesseldine M.A. (1982) House foundation failures due to clay shrinkage caused by gum trees. *Transactions, Institution of Professional Engineers*, N.Z. March, CE9(1).
167. Wesley L.D. (2010) *Fundamentals of soil mechanics for sedimentary and residual soils*. John Wiley & Sons.



168. Wójcik E. (2005) Zależność między wilgotnością a ciśnieniem ssania w profilu mio-pliocenów na Stegnach. *Przegląd Geologiczny* 53: 699-702.
169. Wray W.K., El-Garhy B.M., Youssef A.A. (2005) Three-dimensional model for moisture and volume changes prediction in expansive soils. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 131(3): 311-324.
170. Wullschleger S.D., Meinzer F.C., Vertessy R.A. (1998) A review of whole-plant water use studies in trees. *Tree Physiology* 18, 499-512. Heron Publ.-Victoria, Canada 1998
171. Yong R.N. (1999) Soil suction and soil-water potentials in swelling clays in engineered clay barriers. *Engineering Geology* 54: 3-13.
172. Zaradny H. (1990) Matematyczne metody opisu i rozwiązań zagadnień przepływu wody w nienasyconych i nasyconych gruntach i glebach”, *Prace IBW PAN, Gdańsk* 1990
173. Zaradny H. (2009) Remarks upon numerical solutions of infiltration into a soil profile. *Hydrological Sciences Journal*, 54:2, 349-362, DOI: 10.1623/hysj.54.2.349
174. Zawalski A., Woźniak Z. (2009) Wpływ usunięcia drzew na zachowanie się konstrukcji budynków posadowionych na łąkach. Praca zbiorowa pod redakcją Dembickiego E., Kumora M.K., Lechowicza Z. *Problemy geotechniczne i środowiskowe z uwzględnieniem podłoża ekspansywnych*. Wydawnictwa Uczelniane UTP Bydgoszcz 2009, str. 397-404
175. Zhang X. (2004) Consolidation theories for saturated-unsaturated soils and numerical simulation of residential buildings on expansive soils. *Rozprawa doktorska*, Texas A&M University.
176. Zhou Y. (2011) Numerical and experimental studies of influence of trees on ground movements in expansive soils. *Rozprawa doktorska*. School of Civil, Environmental and Chemical Engineering. College of Science Engineering and Health RMIT University. December 2011.