

Czy kurtoza mierzy spiczastość rozkładu?

Błażej Kochański^a

Streszczenie. Celem artykułu jest przedstawienie i uzasadnienie interpretacji klasycznego współczynnika kurtozy jako miary grubości ogonów oraz zaproponowanie modyfikacji treści dydaktycznych w tym zakresie. W wielu polskich podręcznikach akademickich podaje się, że współczynnik kurtozy (lub ekscesu) mierzy „wysmukłość”, „spiczastość” lub „spłaszczenie” rozkładu. Taka interpretacja jest nieprawidłowa. Kurtoza mierzy bowiem w istocie stopień rozproszenia wartości cechy w ogonach rozkładu lub – innymi słowy – intensywność wartości skrajnych. W artykule wskazano, dlaczego starsze interpretacje, mówiące o kształcie wierzchołka krzywej gęstości, są niewłaściwe. Zaprezentowano przykładowe leptokurtyczne rozkłady spłaszczone i platykurtyczne rozkłady wysmukłe. Na podstawie danych z Diagnozy Społecznej z lat 2000–2015 wykazano, że w badaniach empirycznych wartość kurtozy wynika ze stopnia natężenia wartości odstających. Zaproponowano nowe sformułowania, które można wykorzystać w dydaktyce statystyki zamiast nieprawidłowych, stosowanych dotychczas.

Słowa kluczowe: kurtoza, eksces, rozkład leptokurtyczny, rozkład platykurtyczny, spłaszczenie rozkładu, wysmukłość rozkładu, spiczastość rozkładu

JEL: A20, C18, C46

Does kurtosis measure the peakedness of a distribution?

Abstract. The aim of the article is to present and justify the interpretation of the classical kurtosis as a measure of fat-tailedness and to propose modifications in the relevant didactic content. Many Polish academic textbooks describe kurtosis (or excess kurtosis) as a measure of the ‘slenderness’, ‘peakedness’ or ‘flat-toppedness’ of a distribution. This interpretation is incorrect. Kurtosis in fact measures the level of the dispersion of the values in the tails of the distribution or, in other words, the intensity of the extreme values. The article illustrates why the older interpretations which refer to the shape of the peak of the probability density function are incorrect. The study provides examples of leptokurtic flat-topped distributions and platykurtic peaked distributions. Using data from the 2000–2015 Social Diagnosis, the paper demonstrates that in empirical studies, the value of the kurtosis results from the level of the extremity of the outliers. New formulations are proposed which could replace the current, incorrect ones in statistical didactics.

Keywords: kurtosis, excess, leptokurtic distribution, platykurtic distribution, flat-toppedness of a distribution, slenderness of a distribution, peakedness of a distribution

^a Politechnika Gdańska, Wydział Zarządzania i Ekonomii, Polska / Gdańsk University of Technology, Faculty of Management and Economics, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8502-931X>.
E-mail: blazej.kochanski@pg.edu.pl.

1. Wprowadzenie

Klasyczny współczynnik kurtozy został zaproponowany przez Karla Pearsona w 1905 r. (Fiori i Zenga, 2009; Pearson, 1905). Nazwa nadana współczynnikiowi wywodzi się od greckiego słowa *κρῦτός* (wygięty) i może sugerować – wprowadzającą w błąd – interpretację kurtozy jako miary spiczastości (lub spłaszczenia) rozkładu zmiennej. Taka interpretacja nie ma matematycznego uzasadnienia, co zostanie wykazane w dalszej części artykułu. Wynika ona prawdopodobnie z tego, że dla niektórych rodzin rozkładów teoretycznych (np. dla rozkładu Pearsona typu VII, czyli niestandardowanego rozkładu *t*-Studenta) wysokiej kurtozie towarzyszy „wysmukłość” krzywej gęstości. Nie jest to jednak matematyczna konieczność. Współczynnik kurtozy nie mierzy tej własności rozkładu („wysmukłości”), mierzy on natomiast natężenie rozproszenia wartości cechy w ogonach rozkładu. Kształt centralnej części krzywej gęstości jest dla tej miary w zasadzie bez znaczenia. W rzeczywistości rozkład z zupełnie płaskim wierzchołkiem może mieć nieskończoną kurtozę, podczas gdy rozkład nieskończenie spiczasty może charakteryzować się kurtozą niższą niż rozkład Gaussa.

Celem artykułu jest przedstawienie i uzasadnienie interpretacji klasycznego współczynnika kurtozy jako miary grubości ogonów oraz zaproponowanie modyfikacji treści dydaktycznych w tym zakresie. W artykule zaprezentowano użyteczną interpretację kurtozy, przytoczono również przykłady nieprawidłowych interpretacji tej miary. Przywołano podstawowe argumenty matematyczne przemawiające za tym, że kurtoza nie jest miarą spłaszczenia, spiczastości ani wysmukłości, ale miarą rozproszenia wartości w ogonach rozkładu (intensywności występowania wartości skrajnych). Czytelnika mogą przekonać podane kontrprzykłady: funkcje gęstości leptokurtycznych rozkładów spłaszczonych i platykurtycznych rozkładów wysmukłych. Zaproponowano też odpowiednią korektę treści dydaktycznych.

2. Kurtoza – definicja i problemy interpretacyjne

Definicja klasycznego współczynnika kurtozy, który w tym artykule będzie oznaczany symbolem K , jest wyrażona wzorem:

$$K = \frac{E[X - \mu]^4}{\sigma^4}, \quad (1)$$

gdzie:

E – operator wartości oczekiwanej,

X – zmienna losowa,

μ – wartość oczekiwana zmiennej losowej X ,

σ – odchylenie standardowe X .

Konstrukcja miary (1) wymaga istnienia skończonych momentów zmiennej X (do czwartego włącznie), jeżeli chcemy, żeby kurtoza istniała i była skończona.

Analogicznie można wyznaczyć kurtozę z próby i na jej podstawie zbudować estymator odpowiedniej nieznannej wielkości populacyjnej (por. np. Joanes i Gill, 1998).

Najczęściej kurtozę przedstawia się jako kurtozę nadwyżkową (ang. *excess kurtosis*) w odniesieniu do rozkładu normalnego, nazywaną w polskiej literaturze przedmiotu *współczynnikiem ekscesu* (ewentualnie *kurtożą względną* – w odróżnieniu od kurtozy absolutnej), którą w tym artykule oznaczono symbolem K_E . Wyznacza się ją poprzez odjęcie od standaryzowanego czwartego momentu centralnego wartości kurtozy dla rozkładu normalnego:

$$K_E = K - 3.$$

Klasyczne współczynniki kurtozy i ekscesu mierzą ogony rozkładu: wyższa wartość kurtozy oznacza większe natężenie występujących (w przypadku rozkładów empirycznych) lub generowanych (w przypadku rozkładów teoretycznych) wartości skrajnych, czyli wartości znacznie oddalonych od średniej. Dodatni współczynnik ekscesu oznacza większą intensywność wartości skrajnych niż w rozkładzie normalnym, a ujemny eksces świadczy o tym, że ogony rozkładu są węższe w porównaniu z rozkładem normalnym (Campbell i in., 1997; Weisstein, b.r.). Pearson (1905) nazywał rozkłady z dodatnim ekscesem ($K > 3$) *leptokurtycznymi*, a rozkłady z ujemnym ekscesem ($K < 3$) – *platokurtycznymi*.

Westfall (2014) zwrócił uwagę, że o ile statystycy próbują wyjaśnić i uporządkować sytuację (dosłownie ang. *set the record straight*), o tyle niektórzy autorzy pod ręczników nadal stosują opis kurtozy niezgodny z rzeczywistością. Taka sytuacja ma miejsce również w Polsce. W popularnym, tłumaczonym z języka angielskiego, podręczniku Aczel i Sounderpandian (2018, s. 50–51) twierdzą, że „kurtoza to miara spłaszczenia” (angielski oryginał nie mówi o spłaszczeniu, ale o *peakedness* – spiczastości), dodając, że ujemny współczynnik ekscesu „charakteryzuje rozkłady spłaszczone bardziej niż rozkład normalny, nazywane są one platokurtycznymi” (pisownia oryginalna), a dodatnią kurtozę „mają rozkłady bardziej spiczaste w porównaniu z rozkładem normalnym, tzw. leptokurtyczne”. Sobczyk (2007, s. 63–64), opisując współczynnik kurtozy, kilkakrotnie odwołuje się do „wysmukłości” i „spłaszczenia” rozkładu, np.: „Im wyższa wartość m_4 i a_4 [czwartego momentu centralnego i współczynnika kurtozy K – przyp. autora], tym większa wysmukłość krzywej li-



czebności, co sygnalizuje, że warianty zmiennej mają tendencję do skupiania się wokół średniej”. Maksimowicz-Ajchel (2007, s. 110–112), interpretując rozpatrywane przez siebie dane, wyjaśnia: „Współczynnik ekscesu jest dużo większy od 0, co oznacza, że rozkład stażu pracy charakteryzuje się silniejszą tendencją skupiania wartości wokół średniej niż rozkład standardowy”. Dębski (2014, s. 617) pisze: „Kurtoza rozkładu oznacza z kolei jego smukłość lub płaskość. Wskazuje, czy odchylenia od średniej będą silnie wokół niej się koncentrować (rozkład smukły lub leptokurtyczny), czy też będą szeroko rozproszone (rozkład płaski lub platykurtyczny)”. W podręczniku Wiktorowicz i in. (2020, s. 64–65) podano, że gdy zmienne są „leptokurtyczne – $K' > 0$, wartości cechy są bardziej skoncentrowane wokół średniej niż w rozkładzie normalnym (rozkład jest bardziej smukły niż «odpowiedni» rozkład normalny, tj. rozkład normalny o konkretnych parametrach μ i σ)”. Podobne przykłady można mnożyć. Daje się zauważyć, że taka nieprawidłowa interpretacja pojawia się w tej czy innej formie w większości polskich podręczników, w których wzmiankuje się o kurtozie.

W niewielu podręcznikach i materiałach dydaktycznych wspomina się w kontekście kurtozy o „grubych ogonach” lub wartościach skrajnych. Wagner i Mantaj (2014, s. 163) piszą: „Porównując kształty wielokąta liczebności rozkładu empirycznego z krzywą normalną, można wskazać typ kurtozy, czyli odstępstwo zachodzące między obu rozkładami także na ich końcach. [...] Cienkie i grube ogony mogą występować jednostronnie lub dwustronnie wokół skupienia próby”.

Innym przykładem jest Górecki (2013, s. 150), w tym jednak przypadku dokonano zamiany definicji rozkładu platykurtycznego i leptokurtycznego oraz smukłości, co niestety wprowadza dodatkowe zamieszanie: „Dla rozkładu normalnego kurtoza wynosi 3. Gdy $K > 3$ rozkład staje się platokurtyczny [pisownia oryginalna – przyp. autora] (jest spłaszczony; mówimy, że rozkład ma grube ogony), a rozkład, w którym $K < 3$ nazywamy rozkładem leptokurtycznym (jest on smuklejszy od rozkładu normalnego)”.

Jak pokazują przytoczone fragmenty, polskojęzyczne źródła dość często interpretują współczynnik kurtozy w kategoriach „spiczastości” i „spłaszczenia”. Warto więc wskazać, że taka interpretacja nie ma matematycznego uzasadnienia, i zaproponować modyfikację sformułowań stosowanych w dydaktyce i piśmiennictwie.

3. Kurtoza jako miara rozproszenia wartości w ogonach rozkładu

Formuła definiująca współczynnik kurtozy wskazuje, że nie może on mierzyć spiczastości rozkładu. Aby wyznaczyć kurtozę, podnosi się standaryzowane odchylenia wartości zmiennej od średniej do czwartej potęgi, co oznacza, że odchylenia

w pobliżu średniej niemal zupełnie znikają, kluczowego znaczenia nabierają zaś obserwacje lub wartości zmiennej znajdujące się w znacznym oddaleniu od średniej. Tym samym wpływ tego, co dzieje się w pobliżu centrum (np. w przedziale $\mu \pm \sigma$), w zasadzie nie ma znaczenia dla wartości współczynnika kurtozy lub ekscesu. Na kurtozę mają zaś wpływ wartości skrajne, oddalone od średniej, znajdujące się w ogonach. Zgodnie bowiem z formułą (1) gęstość lub masa prawdopodobieństwa jest ważona w ten sposób, że wartości odległe o dwa odchylenia standardowe (σ) od średniej ważą 16 razy więcej niż wartości odległe o jedno odchylenie, wartości odległe o 3σ ważą 81 razy więcej, o 4σ – 256 razy więcej itd.

Dla funkcji gęstości zmiennych ciągłych można określić, jaka część kurtozy jest wyznaczana przez typowy obszar zmienności (oznaczymy tę wartość symbolem ω), w następujący sposób:

$$\omega = \frac{\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^4 f_X(x) dx}{K(X)} = \frac{\int_{-1}^1 x^4 f_Z(x) dx}{K(X)}, \quad (2)$$

gdzie:

X – zmienna losowa,

x – zmienna całkowania,

f_X – funkcja gęstości zmiennej losowej X ,

f_Z – funkcja gęstości zmiennej losowej standaryzowanej $Z_X = (X - \mu_X)/\sigma_X$,

$K(X)$ – kurtoza zmiennej X :

$$K(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^4 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} z^4 f_Z(z) dz = E(Z_X^4). \quad (3)$$

Dla rozkładu normalnego ω wynosi

$$\omega = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 z^4 \phi(z) dz \approx 0,037,$$

gdzie $\phi(\cdot)$ to gęstość standardowego rozkładu normalnego.

Oznacza to, że w przypadku rozkładu normalnego wpływ na wartość kurtozy kształtu funkcji gęstości w typowym obszarze zmienności ($\mu \pm \sigma$) to zaledwie kilka procent. Kształt wierzchołka nie ma więc żadnego znaczenia dla wartości K lub K_E . Tablica 1 zawiera wartości ω dla wybranych rozkładów wyznaczone przez Westfalla (2014).

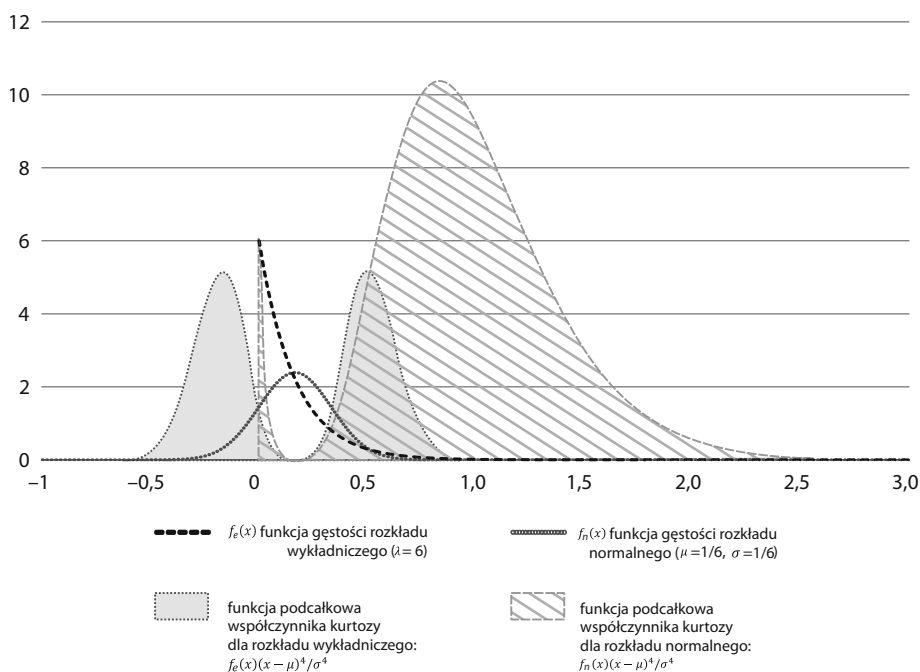


Tabl. 1. Współczynnik kurtozy i proporcja^a

Rozkłady	K	ω
Jednostajny ciągły	1,8	0,064
Trójkątny (symetryczny)	2,4	0,045
Normalny	3,0	0,037
t-Studenta: $\nu = 10$	4,0	0,028
$\nu = 5$	9,0	0,012
Logistyczny	4,2	0,026
Wykładniczy	9,0	0,023
Laplace'a	6,0	0,015

a Proporcja (ω) pokazuje, jaka część współczynnika kurtozy jest zdeterminowana przez wartości w przedziale $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ dla wybranych rozkładów teoretycznych.

Źródło: Westfall (2014).

Wykr. 1. Funkcja gęstości i funkcja podcałkowa współczynnika kurtozy rozkładu wykładniczego i normalnego

Źródło: obliczenia własne na podstawie odpowiednich funkcji gęstości.

Aby zilustrować, że to ogony – a nie centrum rozkładu – wpływają na wartość kurtozy, można wykreślić funkcję podcałkową z równania (3) dla wybranego rozkładu prawdopodobieństwa. Na wyk. 1 przedstawiono funkcje gęstości i funkcje podcałkowe dla dwóch rozkładów prawdopodobieństwa: wykładniczego o parametrze $\lambda = 6$ oraz normalnego o tej samej średniej i odchyleniu standardowym. Rozkład



wykładniczy jest skrajnie asymetryczny ze spiczastym wierzchołkiem, ale – jak widać na wykresie – wyższa niż w rozkładzie Gaussa kurtoza tego rozkładu ($K = 9$) wynika przede wszystkim z szerszego ogona.

Artykuł Westfalla (2014) zawiera argumentację matematyczną dotyczącą współczynnika kurtozy, którą można przedstawić za pomocą trzech twierdzeń (tylko drugie z nich zostało w oryginalnym tekście nazwane *twierdzeniem*):

Twierdzenie 1. Dla dowolnego rozkładu zmiennej X spełniona jest nierówność

$$E[Z_X^4 I(|Z_X| > 1)] \leq K(X) \leq E[Z_X^4 I(|Z_X| > 1)] + 1,$$

gdzie:

$I(\cdot)$ – funkcja charakterystyczna (indykator) przyjmująca wartość 1, gdy warunek w nawiasie jest spełniony, i wartość 0, gdy nie jest spełniony,

$Z_X = (X - \mu_X)/\sigma_X$, gdzie μ_X – wartość oczekiwana zmiennej X ,

σ_X – odchylenie standardowe zmiennej X ,

$K(X) = E[Z_X^4]$ – kurtoza zmiennej X .

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcja gęstości zmiennej Z_X^2 jest malejąca w przedziale $[0, 1]$, to

$$E[Z_X^4 I(|Z_X| > 1)] \leq K(X) \leq E[Z_X^4 I(|Z_X| > 1)] + 0,5.$$

Twierdzenia 1 i 2 pokazują, że nawet w najbardziej skrajnych przypadkach wkład kształtu wierzchołka rozkładu (części wykresu gęstości dla $x = \mu \pm \sigma$) do całościowej wartości K będzie niewielki.

Twierdzenie 3. Rozważmy ciąg zmiennych losowych X_i , $i = 1, 2, \dots$, dla których $K(X_n) \rightarrow \infty$, gdy $n \rightarrow \infty$. Wtedy dla dowolnego $b > 0$: $E[Z_{X_i}^4 I(|Z_{X_i}| > b)] / K(X_i) \rightarrow 1$.

Twierdzenie 3 wskazuje, że dla zmiennych losowych o wysokiej kurtozie współczynnik K jest zdefiniowany głównie przez wartości skrajne, tzn. obserwacje, które są oddalone o więcej niż b odchyłeń standardowych od średniej.

4. Wpływ wartości skrajnych na kurtozę – wyniki empiryczne

Twierdzenia 1–3 jasno ilustrują fakt, że współczynniki kurtozy i ekscesu opisują to, co dzieje się w ogonach rozkładu, a nie w jego centrum. Fakt ten sprawia, że współczynnik kurtozy wykorzystuje się w badaniach empirycznych jako miarę natężenia



wartości ekstremalnych (por. np. Livesey, 2007; Mandelbrot, 1963). Jest to szczególnie widoczne w obszarze finansów, gdzie występowanie wartości odstających i grubość ogonów mają istotne implikacje dla zarządzania ryzykiem (Campbell i in., 1997; Danielsson i in., 2013). Taleb (2009) stosuje kurtozę, aby pokazać na podstawie danych historycznych, że stopy zwrotu oparte na różnorodnych instrumentach rynkowych (w tym kursach walutowych, aktywach giełdowych, stopach procentowych, cenach surowców itd.) mają bez wyjątku rozkłady charakteryzujące się mocno odstającymi wartościami skrajnymi. Dla wszystkich badanych zmiennych wartość kurtozy wynika z niewielkiej części obserwacji, np. ponad 75% wartości współczynnika kurtozy obliczonego na podstawie 10 tys. obserwacji indeksu amerykańskiego rynku giełdowego jest efektem występowania jednej wartości odstającej i jej wielkości (Taleb i Goldstein, 2012).

Obliczając kurtozę na podstawie danych empirycznych, można zauważyć, że wysoka wartość K lub K_E wskazuje na występowanie wartości ekstremalnych. Gdy studenci uczestniczący w kursie statystyki opisowej uzyskują wysokie wartości kurtozy dla zmiennych pochodzących z analizowanych danych empirycznych, wynika to właściwie zawsze z tego, że w obserwowanym zbiorze pojawiają się duże wartości skrajne. Wykres 2 otrzymano na podstawie danych z Diagnozy Społecznej 2000–2015 (Rada Monitoringu Społecznego, 2015). Większość cech w tym badaniu miała charakter jakościowy, jednak znalazły się w nim również 272 zmienne ilościowe (w tym: wzrost, masa ciała, dochody, wydatki, liczba wypalanych papierosów, liczba przyjaciół, liczba pracowników, powierzchnia mieszkania).

Dla tych cech obliczono współczynnik kurtozy (K) oraz wartość bezwzględną najbardziej odstającej standaryzowanej wartości skrajnej (ang. *maximum absolute z-score*; Schiffler, 1988):

$$\text{maximum absolute z-score} = \max_i \left| \frac{x_i - \bar{x}}{s} \right|, \quad (4)$$

gdzie:

\bar{x} – średnia arytmetyczna obserwacji,

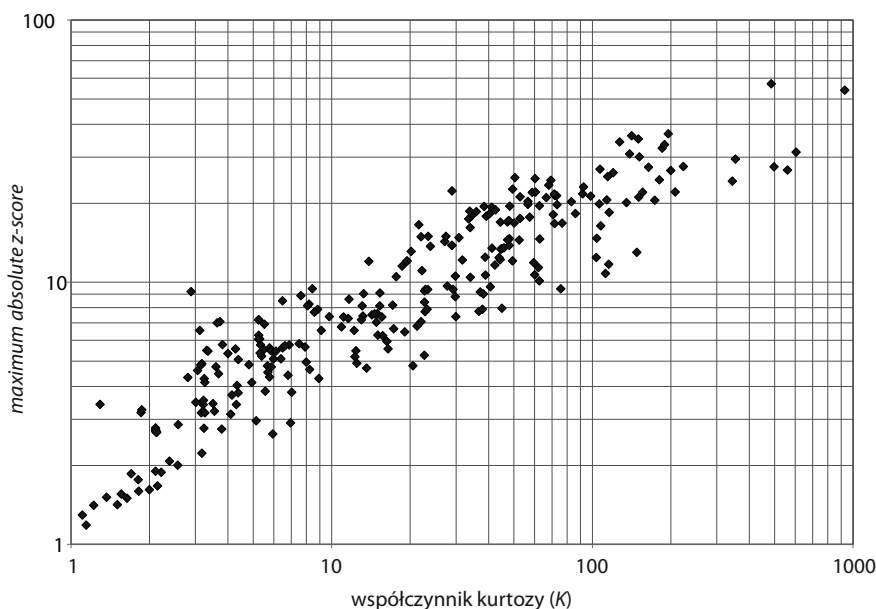
s – odchylenie standardowe z próby.

Współczynnik korelacji Pearsona między K a wyznaczoną zgodnie ze wzorem (4) maksymalną bezwzględną wartością standaryzowaną w tym zbiorze cech wyniósł 0,751, a współczynnik korelacji rang Spearmana (zależność nie jest liniowa, stąd skala logarytmiczna na wykresie) osiągnął wartość 0,929. Zależność wartości kurtozy od wartości pojedynczej najbardziej odstającej obserwacji jest, jak widać, bardzo duża: współczynnik determinacji prostej regresji log-log pokazuje, że model oparty



na logarytmie maksymalnego bezwzględnego z -score wyjaśnia ok. 85% zmienności $\log(K)$. Wynik ten jest przejawem działania współczynnika kurtozy opisanego przez twierdzenia 1–3. W rozkładach empirycznych nawet pojedyncza wystarczająco ekstremalna obserwacja odstająca może spowodować duży wzrost współczynnika.

Wykr. 2. Zależność pomiędzy kurtozą a *maximum absolute z-score* dla cech ilościowych zebranych w ramach badań Diagnozy Społecznej



Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z Diagnozy Społecznej (Rada Monitoringu Społecznego, 2015).

5. Kurtoza to nie spiczastość – przykłady rozkładów

Skoro kurtoza jest miarą intensywności wartości ekstremalnych, to niewielkie znaczenie dla interpretacji otrzymanych wyników tego współczynnika ma to, czy dany rozkład jest symetryczny czy asymetryczny. Gdyby jednak kurtoza miała mierzyć spiczastość rozkładu, wówczas należałoby rozważać przede wszystkim rozkłady symetryczne. Poniżej zostaną przedstawione przykłady symetrycznych rozkładów leptokurtycznych (charakteryzujących się wysoką kurtozą), których wierzchołek jest bardziej spłaszczony niż wierzchołek rozkładu normalnego, i rozkładów platykurtycznych (charakteryzujących się niską kurtozą) z wysmukłym wierzchołkiem. Przykłady te mogą pomóc w prawidłowej interpretacji współczynnika kurtozy.

Do formalnej oceny wysmukłości rozkładów możemy zastosować miary spiczastości zaproponowane przez Hoggę (Hogg, 1974; Hogg i Lenth, 1984; Schmid i Trede, 2003) i Horna (1983). Horn zaproponował, żeby spiczastość jednomodalnych rozkładów symetrycznych osiągających maksimum w medianie mierzyć, wykorzystując stosunek pola pod krzywą gęstości nad przedziałem osi x między medianą a trzecim kwantylem ($= 0,25$) do pola prostokąta o wysokości równej maksymalnej wartości funkcji gęstości zbudowanego nad tym przedziałem ($x_{0,5}$ oznacza 50. percentyl, czyli medianę, a $x_{0,75}$ – 75. percentyl, czyli trzeci kwantyl):

$$mt_p = 1 - \frac{0,25}{f_X(x_{0,5}) \cdot (x_{0,75} - x_{0,5})}. \quad (5)$$

Miara spiczastości Horna mt_p jest wyskalowana w ten sposób, że wynosi 0 dla rozkładu jednostajnego ciągłego, którego kształt jest płaski, zbliża się zaś do 1 w przypadku rozkładów, które mają bardzo wysoki i wyostrzony wierzchołek. Dla rozkładu normalnego mt_p wynosi ok. 0,071.

Hogg zaproponował, żeby przy pomiarze spiczastości rozkładów posługiwać się ilorazem rozstępów między kwantylami. Za Schmidem i Tredem (2003) przyjęto następującą miarę spiczastości Hoggę P_H (x_p oznaczają odpowiednie kwantyle):

$$P_H = \frac{x_{0,875} - x_{0,125}}{x_{0,75} - x_{0,25}}. \quad (6)$$

P_H rozkładu jednostajnego ciągłego wynosi 1,5, rozkładu normalnego – $\sim 1,71$, a rozkładu Cauchy'ego – $\sim 2,41$.

Przykłady rozkładów, dla których wyższej spiczastości towarzyszy niższa wartość kurtozy (i odwrotnie), podał już Kaplansky (1945). Na wyk. 3 przedstawiono funkcję gęstości standardowego rozkładu normalnego daną wzorem:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (7)$$

oraz gęstości dwóch innych rozkładów zaproponowanych przez Kaplansky'ego:

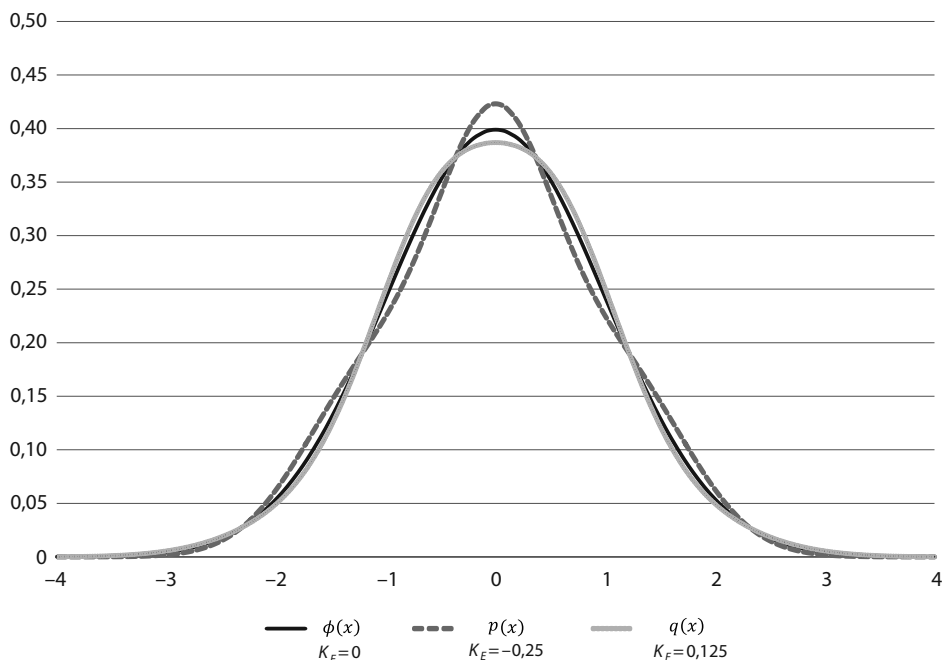
$$p(x) = \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{9}{4} + x^4 \right) e^{-x^2}, \quad (8)$$

$$q(x) = \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left(\frac{9}{4} + x^4 \right) e^{-x^2}. \quad (9)$$



Funkcje gęstości zostały opracowane w taki sposób, żeby ich wartość oczekiwana wynosiła 0, a wariancja 1, dzięki czemu można je przedstawić na jednym wykresie (wykr. 3).

Wykr. 3. Funkcje gęstości rozkładu normalnego oraz $p(x)$ i $q(x)$



Źródło: obliczenia własne na podstawie propozycji Kaplansky'ego (1945) – wzory (7)–(9).

Współczynnik ekscesu zmiennej definiowanej funkcją gęstości $\phi(x)$ wynosi oczywiście 0. Współczynnik ekscesu dla $p(x)$ to $-0,25$, więc rozkład jest platykurtyczny. Dla $q(x)$ $K_E = 0,125$, co oznacza rozkład leptokurtyczny. Pomimo to wierzchołek rozkładu $p(x)$ znajduje się powyżej wierzchołka krzywej gaussowskiej; tym samym rozkład można określić jako wysmukły, a rozkład $q(x)$ jest wyraźnie spłaszczony.

Zastosowanie miar Horna i Hogga do rozkładów $p(x)$ i $q(x)$ pokazuje, że rzeczywiście rozkład $p(x)$, pomimo niższej kurtozy, jest bardziej spiczasty niż rozkład normalny. Dla rozkładu $p(x)$ otrzymujemy $mt_p \approx 0,118$ i $P_H \approx 1,78$, a dla $q(x)$ mamy $mt_p \approx 0,045$ i $P_H \approx 1,67$.

Przykłady przytoczone przez Kaplansky'ego pokazują dość umiarkowane wyniki. Można jednak posłużyć się przykładami o dużo bardziej ekstremalnym charakterze.

W tym celu skonstruujemy funkcje gęstości $t(x)$ i $u(x)$ ¹:

$$t(x) = 0,99f_u(x) + 0,01\sqrt{\frac{v}{v-2}}f_v\left(\sqrt{\frac{v}{v-2}}x\right), \quad v = 4,0001, \quad (10)$$

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{5}}f_B\left(\frac{|x|}{\sqrt{5}}\right) & \text{gdy } |x| < \sqrt{5}, \\ 0 & \text{gdy } |x| \geq \sqrt{5} \end{cases} \quad x \neq 0. \quad (11)$$

Zmienna losowa opisana przez funkcję gęstości $t(x)$ to połączenie rozkładu jednostajnego ciągłego o parametrach takich, żeby wartość oczekiwana wynosiła 0, a wariancja 1:

$$f_u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \text{gdy } |x| \leq \sqrt{3}, \\ 0 & \text{gdy } |x| > \sqrt{3} \end{cases}, \quad (12)$$

i odpowiednio przeskalowanego rozkładu t -Studenta o parametrze v (liczbie stopni swobody) równym 4,0001:

$$f_v(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}. \quad (13)$$

Funkcja gęstości $u(x)$ powstała poprzez „sklejenie” dwóch odpowiednio przeskalowanych rozkładów beta o parametrach $\alpha = 0,5$ i $\beta = 1$. Jeden z tych rozkładów został odbity względem osi y . Funkcja f_B ma zatem następującą ogólną postać:

$$f_B(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \quad \text{dla } x \in (0, 1). \quad (14)$$

Dla $\alpha = 0,5$ i $\beta = 1$ funkcja f_B może zostać sprowadzona do następującej postaci:

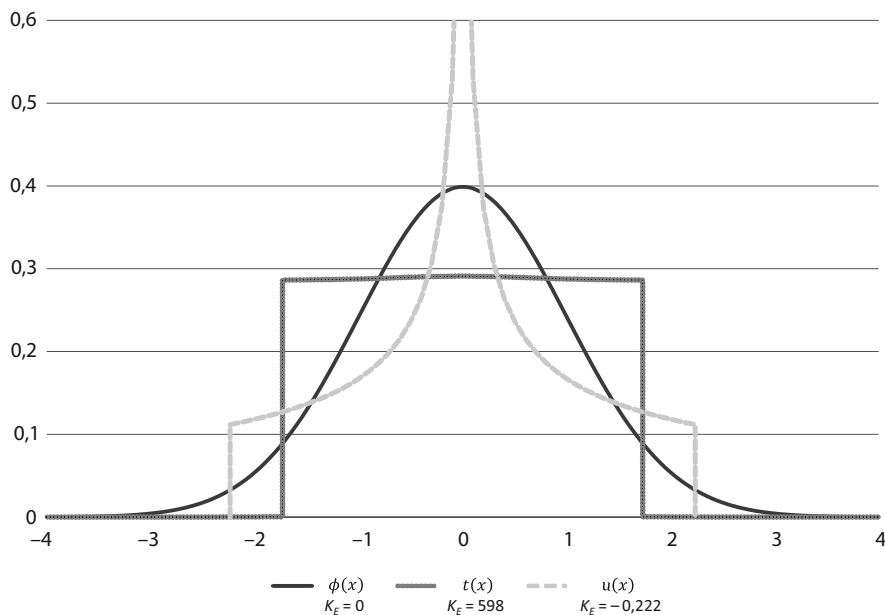
$$f_B(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{dla } x \in (0, 1). \quad (15)$$

¹ Rozkłady $t(x)$ i $u(x)$ zostały zaproponowane na podstawie podobnych rozkładów, które skrótowo opisał wikipedysta BigBendRegion w anglojęzycznej Wikipedii w ramach edycji hasła *Kurtosis* (Kurtosis: Difference between revisions, 2019).



Zmienna określona przez $u(x)$ ma również wartość oczekiwaną równą 0 i wariancję równą 1 (wykr. 4).

Wykr. 4. Funkcje gęstości rozkładu normalnego oraz $t(x)$ i $u(x)$



Źródło: obliczenia własne na podstawie funkcji gęstości przedstawionych we wzorach (10)–(15).

Funkcja gęstości $u(x)$ jest nieskończenie wysmukła; w pobliżu $x = 0$ wartość funkcji dąży do nieskończoności. Miara Horna nie istnieje (ze względu na nieskończoną wysmukłość można uznać, że przyjmuje maksymalną możliwą wartość $mt_p = 1$), a miara Hogga wynosi $P_H \approx 2,25$. Współczynnik ekscesu tej zmiennej okazuje się ujemny i wynosi $K_E = -\frac{2}{9} \approx -0,222$. Jest to więc ekstremalnie wysmukły rozkład platykurtyczny.

Z kolei rozkład opisywany przez $t(x)$ ma niemal zupełnie płaski wierzchołek ($mt_p \approx 0,004$, $P_H \approx 1,504$), współczynnik ekscesu jest tu jednak wyjątkowo wysoki ($K_E = 598,812$). Jest to zasługa niewielkiej domieszki rozkładu t -Studenta o parametry gwarantującym bardzo szerokie ogony (szersze od ogonów rozkładu normalnego). Funkcja $t(x)$ opisuje więc rozkład spłaszczony w centralnej części funkcji gęstości, który jednocześnie jest skrajnie leptokurtyczny.

Funkcje przedstawione na wykr. 3 i 4 stanowią przykłady unaoczniające fakt, że o wartościach współczynników K i K_E decyduje zdolność do generowania ekstremalnych wartości w ogonach rozkładu, a nie kształt funkcji gęstości w pobliżu śred-

niej. Rzeczywiście, wysmukła funkcja $u(x)$ ma ucięte ogony, a grubość ogona funkcji $p(x)$ dla $x = 5$ (w odległości pięciu odchyłeń od średniej) jest niemal tysiąc razy mniejsza niż grubość ogona rozkładu normalnego $\phi(x)$. Z drugiej strony ogon funkcji $q(x)$ jest dla wartości oddalonych od średniej o 50% szerszy od ogona rozkładu normalnego, a $t(5)$ ponadpięciokrotnie przekracza $\phi(5)$. W tabl. 2 przedstawiono porównanie grubości ogonów pięciu funkcji gęstości w różnych odległościach od średniej.

Tabl. 2. Szerokość ogona rozkładów przedstawionych na wykr. 3 i 4 w procentach szerokości ogona rozkładu normalnego w odległości 4, 5 i 6 odchyłeń standardowych od średniej

Odległość	$p(x)$ $K_E = -0,25$	$q(x)$ $K_E = 0,125$	$t(x)$ $K_E = 598,812$	$u(x)$ $K_E = -0,222$	$\phi(x)$ $K_E = 0$
$x = 4$	4,1	148,0	16,3	0,0	100,0
$x = 5$	0,1	149,9	532,7	0,0	100,0
$x = 6$	0,001	150,0	55 467,1	0,0	100,0

Źródło: obliczenia własne na podstawie funkcji gęstości.

W tabl. 3 przedstawiono współczynniki kurtozy i ekscesu oraz miary spiczastości Horna i Hogga dla wybranych rozkładów. Można zaobserwować, że o ile w przypadku rodziny rozkładów t -Studenta większej kurtozie (grubszym ogonom) towarzyszy większa spiczastość, o tyle dla rozkładów opisanych równaniami 8–11 zależność jest odwrotna. Porównanie rozkładu jednostajnego z rozkładem $t(x)$ pozwala unaocznic fakt, że rozkład o zerowej spiczastości i niewielkiej kurtozie można zmienić w rozkład o nadal niemal zerowej spiczastości i dowolnie wielkiej kurtozie, stosując niewielką domieszkę rozkładu o szerokich ogonach.

Przykłady przedstawione w tej części artykułu pomagają sfalsyfikować stwierdzenie, że każda miara wyprowadzona dla scharakteryzowania ogonów będzie z konieczności charakteryzować także centrum rozkładu (lub odwrotnie).

Tabl. 3. Kurtoza, eksces oraz dwie miary spiczastości dla wybranych ciągłych symetrycznych rozkładów prawdopodobieństwa

Rozkłady	K	K_E	mt_p	P_H
Cauchy'ego	0,215	2,41
t -Studenta: $\nu = 3$	∞	∞	0,111	1,86
$\nu = 5$	9	6	0,094	1,79
$\nu = 7$	5	2	0,087	1,76
Gaussa: $\phi(x)$	3	0	0,071	1,71
$p(x)$	2,75	-0,25	0,118	1,78
$q(x)$	3,125	0,125	0,044	1,67
$t(x)$	601,8	598,8	0,004	1,504
$u(x)$	2,778	-0,222	1	2,25
Jednostajny	1,8	-1,2	0	1,50

Źródło: obliczenia własne na podstawie funkcji gęstości wskazanych zmiennych losowych i wzorów (5) i (6).

6. Kurtoza w dydaktyce statystyki – propozycja

W dydaktyce statystyki, nawet na poziomie podstawowym, nie może zabraknąć tematyki związanej z wartościami odstającymi. Jak pokazano, współczynnik kurtozy jest stosunkowo prostą miarą intensywności wartości ekstremalnych (w uproszczeniu: grubości ogona rozkładu), dlatego – jak się wydaje – nie należy pomijać informacji o współczynniku kurtozy w kursach akademickich. W związku z brakiem merytorycznego powiązania pomiędzy spiczastością wierzchołka funkcji gęstości a wartością współczynników kurtozy czy ekscesu wskazana byłaby modyfikacja treści w podręcznikach i materiałach dydaktycznych. Przy omawianiu kurtozy należy odejść od przywoływania „wysmukłości”, „spiczastości” czy „spłaszczenia”, ponieważ takie określenia – choć rozpowszechnione – nie mają uzasadnienia. Niepoprawne pod względem merytorycznym jest również stwierdzenie, że kurtoza mierzy „koncentrację wartości wokół średniej”. Jak się wydaje, takie sformułowanie odwodzi odbiorcę od właściwego zrozumienia znaczenia kurtozy. Wysoka wartość współczynnika ekscesu nie oznacza większej „koncentracji obserwacji wokół średniej”, ale większe niż w rozkładzie normalnym rozproszenie wartości w ogonach rozkładu.

Termin „miara spłaszczenia” w kontekście kurtozy również wprowadza w błąd: zazwyczaj „spłaszczenie” interpretowane jest jako przeciwieństwo „spiczastości”. Nawiązuje do tego wprost określenie *flat-topped* (rozkład o spłaszczonym wierzchołku), używane w literaturze anglojęzycznej (np. Pearson, 1905). Ponadto użycie tego terminu rodzi wątpliwości, który rozkład można uznać za spłaszczony. W kontekście przykładów rozkładów podanych wcześniej można zapytać, czy spłaszczony jest rozkład z płaskim wierzchołkiem i wysoką kurtozą (grubymi ogonami), z płaskim wierzchołkiem i niską kurtozą, ze spiczastym wierzchołkiem i grubymi ogonami, czy może ze spiczastym wierzchołkiem i niską kurtozą? Wątpliwości budzą również terminy *współczynnik skupienia* i *współczynnik koncentracji*. Skoro kurtoza mierzy rozproszenie wartości cechy w ogonach, to może powinna być nazywana *współczynnikiem dekoncentracji*?

Zamiast wymienionych powyżej błędnych lub mylących określeń należałoby zatem wprowadzić takie, które wspominają o intensywności występowania (w przypadku rozkładów empirycznych) lub generowania (w przypadku rozkładów teoretycznych) wartości skrajnych i o rozproszeniu wartości w ogonach rozkładu. Do wyobraźni odbiorców mogą przemawiać obrazowe, choć uproszczone, sformułowania o *grubym* (ewentualnie szerokim, ciężkim) i *cienkim* (wąskim, lekkim) *ogonie rozkładu*. Pojęcie *ogona* (czyli części rozkładu oddalonej od jego centrum) jest zrozumiałe dla osób nieposiadających specjalistycznej wiedzy w tym zakresie i szeroko stosowane przez statystyków, choć – podobnie jak *wierzchołek* – nie ma jednej ogólnej przyjętej definicji.



W zestawieniu poniżej zaproponowano korektę treści zgodną z interpretacją współczynnika kurtozy przedstawioną w niniejszym artykule. W lewej kolumnie znajdują się przykłady nieprawidłowych sformułowań dotyczących kurtozy, a w prawej umieszczono propozycje odpowiednich modyfikacji uwzględniających interpretację kurtozy jako miary grubości ogonów, czyli intensywności wartości skrajnych. Podane przykłady oparte są na autentycznych sformułowaniach znalezionych przez autora w polskich akademickich materiałach dydaktycznych.

Zestawienie przykładowych nieprawidłowych lub mylących treści w materiałach dydaktycznych i propozycja ich poprawienia

Przykłady	Propozycja ich poprawienia
Jeżeli dla pewnego rozkładu skupienie wartości zmiennej wokół średniej jest większe niż w rozkładzie normalnym, to taki rozkład nazywamy wysmukłym (leptokurtycznym)	Jeżeli dla pewnego rozkładu intensywność wartości skrajnych („grubość ogona”) jest większa niż w rozkładzie normalnym, to taki rozkład nazywamy leptokurtycznym
Współczynnik ekscesu informuje o tym, czy koncentracja wartości badanej cechy wokół średniej w danym rozkładzie jest większa czy mniejsza niż w zbiorowości o rozkładzie normalnym	Współczynnik ekscesu informuje o tym, czy rozproszenie wartości badanej cechy w ogonach rozkładu jest większe czy mniejsze niż w zbiorowości o rozkładzie normalnym
Rozkład leptokurtyczny (wysmukły)	Rozkład leptokurtyczny
Rozkład platykurtyczny (spłaszczony)	Rozkład platykurtyczny
Rozkład platykurtyczny (eksces < 0): liczba obserwacji w każdym regionie wartości zmiennej jest równomierna – jednakowa (np. płaski i szeroki rozkład)	Rozkład platykurtyczny (eksces < 0): liczba obserwacji skrajnych w ogonach rozkładu i/lub ich odległość od średniej jest względnie mała (mniejsza niż w rozkładzie normalnym)
Im wyższa jest wartość K , tym bardziej wysmukła jest krzywa liczebności, a zatem większa koncentracja cechy wokół średniej	Im wyższa jest wartość K , tym większe jest natężenie oddalonych od średniej wartości skrajnych, a zatem większe rozproszenie wartości w ogonach rozkładu
Kurtoza jest miarą spłaszczenia rozkładu częstości	Kurtoza jest miarą kształtu rozkładu częstości opisującą rozproszenie wartości skrajnych w jego ogonach
Jeśli kurtoza przyjmuje wartości dodatnie, świadczy to o większej koncentracji wartości niż przy rozkładzie normalnym. Kształt rozkładu jest wówczas bardziej wysmukły, a taki rozkład nazywamy leptokurtycznym. Natomiast jeśli kurtoza ma wartość ujemną, świadczy to o większym niż przy rozkładzie normalnym rozproszeniu wartości cechy, a wykres jest bardziej spłaszczony niż przy rozkładzie normalnym. Wówczas mówimy o rozkładzie platykurtycznym	Jeśli współczynnik ekscesu przyjmuje wartości dodatnie, świadczy to o większym niż w rozkładzie normalnym rozproszeniu wartości w ogonach rozkładu. Taki rozkład, charakteryzujący się szerokimi ogonami, nazywamy leptokurtycznym. Natomiast jeśli współczynnik ekscesu ma wartość ujemną, świadczy to o mniejszej niż w rozkładzie normalnym intensywności wartości skrajnych, a wykres ma węższe ogony niż rozkład normalny. Wówczas mówimy o rozkładzie platykurtycznym
Współczynnik skupienia (kurtoza) jest standaryzowanym momentem centralnym czwartego rzędu	Współczynnik kurtozy jest standaryzowanym momentem centralnym czwartego rzędu

Źródło: opracowanie własne na podstawie przykładowych sformułowań znalezionych w polskojęzycznych materiałach dydaktycznych.



Współczynnik kurtozy nie opisuje kształtu wierzchołka rozkładu, zatem podręczniki i materiały dydaktyczne nie powinny interpretować kurtozy jako miary spiczastości/wysmukłości lub spłaszczenia. Byłoby to bowiem wprowadzanie w błąd odbiorców i w żaden sposób nie dostarczałoby użytecznych informacji. Intencją autora tego opracowania jest więc propozycja zastąpienia – a nie jedynie uzupełnienia – dotychczas rozpowszechnionych nieprawidłowych interpretacji kurtozy.

7. Podsumowanie

Interpretacja kurtozy jako miary spłaszczenia lub spiczastości funkcji gęstości nie ma matematycznego uzasadnienia. Jak dowiedziono w artykule, współczynniki kurtozy i ekscesu mierzą intensywność wartości skrajnych lub – innymi słowy – rozproszenie wartości w ogonach rozkładu. Przedstawione przykłady rozkładów leptokurtycznych o spłaszczonym wierzchołku i platykurtycznych o spiczastym wierzchołku pomagają dodatkowo sfalsyfikować stwierdzenie, że każda miara charakteryzująca ogony rozkładu będzie jednocześnie opisywać własności jego wierzchołka. Przykład obliczeń z wykorzystaniem empirycznego zbioru danych jest dobrą ilustracją tego, że w praktyce dydaktycznej z wysoką kurtozą mamy do czynienia w sytuacjach, kiedy w zbiorze danych pojawiają się, nawet pojedyncze, wartości ekstremalne.

W ostatnich latach w literaturze anglojęzycznej odchodzi się od dawnego sposobu opisywania kurtozy jako miary spiczastości. Wiele najnowszych opracowań dydaktycznych i encyklopedycznych zawiera już poprawiony opis, odwołujący się do grubości ogonów rozkładu. Zmiany w swoich publikacjach wprowadzili m.in. redaktorzy encyklopedii Britannica czy popularnego profesjonalnego portalu Wolfram-Alpha. W Polsce w ostatnim czasie definicję pojęcia *kurtozy* w słowniku na swojej stronie internetowej zmienił również Główny Urząd Statystyczny. Wprowadzenie modyfikacji dotyczących tej kwestii w polskojęzycznych podręcznikach i materiałach dydaktycznych, np. z wykorzystaniem sformułowań zaproponowanych w tym artykule, wydaje się więc pożądane, a nawet konieczne.

Bibliografia

- Aczel, A. D., Sounderpandian, J. (2018). *Statystyka w zarządzaniu*. Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W., MacKinlay, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- Daniélsson, J., Jorgensen, B. N., Samorodnitsky, G., Sarma, M., de Vries, C. G. (2013). Fat tails, VaR and subadditivity. *Journal of Econometrics*, 172(2), 283–291. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2012.08.011>.
- Dębski, W. (2014). *Rynek finansowy i jego mechanizmy. Podstawy teorii i praktyki*. Wydawnictwo Naukowe PWN.



- Fiori, A. M., Zenga, M. (2009). Karl Pearson and the Origin of Kurtosis. *International Statistical Review*, 77(1), 40–50. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2009.00076.x>.
- Górecki, B. R. (2013). *Ekonometria. Podstawy teorii i praktyki*. Wydawnictwo Key Text.
- Hogg, R. V. (1974). Adaptive Robust Procedures: A Partial Review and Some Suggestions for Future Applications and Theory. *Journal of the American Statistical Association*, 69(348), 909–923. <https://doi.org/10.2307/2286160>.
- Hogg, R. V., Lenth, R. V. (1984). A review of some adaptive statistical techniques. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 13(13), 1551–1579. <https://doi.org/10.1080/03610928408828779>.
- Horn, P. S. (1983). A Measure for Peakedness. *The American Statistician*, 37(1), 55–56. <https://doi.org/10.1080/00031305.1983.10483090>.
- Joanes, D. N., Gill, C. A. (1998). Comparing measures of sample skewness and kurtosis. *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, 47(1), 183–189. <https://doi.org/10.1111/1467-9884.00122>.
- Kaplansky, I. (1945). A common error concerning kurtosis. *Journal of the American Statistical Association*, 40(230), 259–259. <https://doi.org/10.2307/2280139>.
- Kurtosis: Difference between revisions. (2019, 6 grudnia). W: *Wikipedia*. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?diff=929535964&oldid=928282329&title=Kurtosis&type=revision>.
- Livesey, J. H. (2007). Kurtosis provides a good omnibus test for outliers in small samples. *Clinical Biochemistry*, 40(13–14), 1032–1036. <https://doi.org/10.1016/j.clinbiochem.2007.04.003>.
- Maksimowicz-Ajchel, A. (2007). *Wstęp do statystyki*. Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego. <https://doi.org/10.31338/uw.9788323527909>.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36(4), 394–419. https://web.williams.edu/Mathematics/sjmillier/public_html/341Fa09/econ/Mandelbroit_VariationCertainSpeculativePrices.pdf.
- Pearson, K. (1905). “Das Fehlergesetz und Seine Verallgemeinerungen Durch Fechner und Pearson.” A Rejoinder. *Biometrika*, 4(1–2), 169–212. <https://doi.org/10.2307/2331536>.
- Rada Monitoringu Społecznego. (2015). *Diagnoza Społeczna* [zbiór danych]. Pobrane 28 marca 2022 r. z <http://www.diagnoza.com>.
- Schiffler, R. E. (1988). Maximum Z-Score and outliers. *The American Statistician*, 42(1), 79–80. <https://doi.org/10.1080/00031305.1988.10475530>.
- Schmid, F., Trede, M. (2003). Simple tests for peakedness, fat tails and leptokurtosis based on quantiles. *Computational Statistics & Data Analysis*, 43(1), 1–12. [https://doi.org/10.1016/S0167-9473\(02\)00170-6](https://doi.org/10.1016/S0167-9473(02)00170-6).
- Sobczyk, M. (2007). *Statystyka*. Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Taleb, N. N. (2009). Errors, robustness, and the fourth quadrant. *International Journal of Forecasting*, 25(4), 744–759. <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2009.05.027>.
- Taleb, N. N., Goldstein, D. G. (2012). The problem is beyond psychology: The real world is more random than regression analyses. *International Journal of Forecasting*, 3(28), 715–716. <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2012.02.003>.



Wagner, W., Mantaj, A. (2014). *Zasady statystyki jedno- i dwuwymiarowej. Metodyka, teoria i zastosowania* (t. 1). Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania w Rzeszowie, Wydawnictwo Oświatowe „Fosze”.

Weisstein, E. W. (b.r.). *Kurtosis Excess*. Pobrane 28 marca 2022 r. z <https://mathworld.wolfram.com/KurtosisExcess.html>.

Westfall, P. H. (2014). Kurtosis as Peakedness, 1905–2014. R.I.P. *The American Statistician*, 68(3), 191–195. <https://doi.org/10.1080/00031305.2014.917055>.

Wiktorowicz, J., Grzelak, M. M., Grzeszkiewicz-Radulska, K. (2020). *Analiza statystyczna z IBM SPSS Statistics*. Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.