



Imię i nazwisko autora rozprawy: mgr inż. Kamil Stawiarski  
Dyscyplina naukowa: Automatyka, elektronika i elektrotechnika

## ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim:

Estymacja współrzędnych kątowych w radarze trójwspółrzędnym z elektronicznym skanowaniem wiązki i obracaną anteną planarną.

Tytuł rozprawy w języku angielskim:

Estimation of angular coordinates in three-dimensional radar with electronically scanned array and rotating planar antenna.

Promotor	Drugi promotor
<i>podpis</i>	<i>podpis</i>
prof. PG, dr hab. inż. Michał Meller	
Promotor pomocniczy	Kopromotor
<i>podpis</i>	<i>podpis</i>



---

### **Podziękowania.**

*Serdecznie dziękuję prof. PG dr. hab. inż. Michałowi Mellerowi, mojemu naukowemu przewodnikowi za poświęcony czas, okazaną pomoc i wsparcie.*

*Dziękuję również żonie Alicji za ogrom cierpliwości i wyrozumiałości, którymi wykazała się w trakcie pisania niniejszej pracy.*

*Kamil Stawiarski*





# Abstract

Praca dotyczy zagadnienia estymacji współrzędnych w radarze, w szczególności elewacji w warunkach propagacji wielodrogowej oraz azymutu przy obracanej antenie. Pierwsze dwa rozdziały pełnią funkcję wprowadzenia. W pierwszym z nich przybliżono historię radiolokacji. Omówione zostały pierwsze z urządzeń tego typu oraz funkcjonalności jakie z czasem dodawane były do nowszych konstrukcji. Historię zamyka opis najnowszych, popularnych tematów poruszanych w trakcie konferencji radiolokacyjnych. Dalsza część rozdziału skupia się na omówieniu sposobu przetwarzania sygnałów radarowych przed etapem estymacji. Przedstawiono klasyczne algorytmy pozwalające na detekcję echa w zarejestrowanym sygnale. Poruszone zostały również tematy związane z przetwarzaniem danych radarowych takie jak śledzenie, czy przelicznik balistyczny. Drugi rozdział skupia się wyłącznie na algorytmach estymacji współrzędnych. Przedstawiono tam różne (parametryczne i nieparametryczne) podejścia do tego zagadnienia - od klasycznego estymatora monoimpulsowego do estymatorów największej wiarygodności. Każdy z opisów zawiera podstawę matematyczną oraz szereg testów pokazujących działanie algorytmów w różnych warunkach. Wyniki symulacji porównywane są z ograniczeniem Craméra-Rao, którego wyprowadzenie znajduje się w dodatku.

Rozdziały 3-6 stanowią zasadniczą część pracy. W trzecim z rozdziałów skupiono się na estymacji elewacji. Przedstawione zostają modele pozwalające symulować zjawiska wielodrogowości w postaci odbić lustrzanych, jak i rozproszonych. Zaproponowane zostają modyfikacje estymatorów największej wiarygodności pozwalające poprawić jakość oszacowania, a estymaty nimi uzyskane zostają porównane z klasycznymi metodami nieadaptacyjnymi. Opisowi algorytmów ponownie towarzyszy szereg testów, z których część została wykonana w oparciu o rzeczywiste dane radarowe. Czwarty z rozdziałów poświęcono estymacji azymutu, w szczególności w sytuacji obracanej anteny oraz sytuacji, w której nie jest znana liczba obserwowanych źródeł sygnału. Zaproponowano algorytmy pozwalające w sposób efektywny szacować zarówno współrzędne jak i liczbę celów, co zostało potwierdzone szeregiem testów - zarówno symulacyjnych, jak i opartych o rzeczywiste dane. Przedostatni, piąty rozdział stanowi uzupełnienie treści o zagadnienia takie jak estymacja prędkości radialnej, niejednoznaczny pomiar odległości, czy złożoność obliczeniowa prezentowanych algorytmów. Ostatni, szósty rozdział poświęcono podsumowaniu całej pracy.



# Abstract

The thesis deals with the problem of coordinate estimation in radars, in particular elevation under multipath propagation conditions and azimuth under rotating antenna. The first two chapters serve as an introduction. In the first one, the history of radiolocation is introduced. It discusses the first devices of this type and the features that were added to newer designs over time. The history concludes with a description of recent, popular topics discussed at radiolocation conferences. The next part of the chapter focuses on how radar signals are processed before the estimation stage. Classical algorithms for echo detection in the recorded signal are presented. Topics related to radar data processing such as tracking and ballistic converter are also covered. The second chapter focuses exclusively on coordinate estimation algorithms. It presents different (parametric and non-parametric) approaches to this problem - from the classical monoimpulse estimator to maximum likelihood estimators. Each description includes the mathematical basis and a number of tests showing the performance of the algorithms under different conditions. Simulation results are compared with the Cramér-Rao lower bound, the derivation of which is given in the Appendix.

Chapters 3-6 form the bulk of the thesis. The third chapter focuses on elevation estimation. Models are presented to simulate multipath phenomena in the form of specular as well as diffuse reflections. Modifications of maximum-likelihood estimators are proposed to improve the quality of estimation, and the estimates obtained by them are compared with classical non-adaptive methods. The description of algorithms is again accompanied by a number of tests, some of which were performed on the basis of real radar data. The fourth chapter is devoted to azimuth estimation, especially in the situation of a rotating antenna and the situation when the number of observed signal sources is unknown. Algorithms have been proposed to efficiently estimate both the coordinates and the number of targets, which has been confirmed by a number of tests - both simulation and based on real data. The fifth chapter extends the content with issues such as radial velocity estimation, ambiguous distance measurement, and computational complexity of the presented algorithms. The last, sixth chapter is devoted to the summary of the whole work.

# Wykaz ważniejszych oznaczeń i skrótów

$\theta$	kąt azymutu
$\boldsymbol{\theta}$	wektor kątów
$\boldsymbol{\Theta}$	wektor parametrów modelu
$\lambda$	długość fali nośnej emitowanej przez radar
$\lambda_i$	$i$ -ta największa wartość własna
$\boldsymbol{\Lambda}$	macierz wartości własnych
$\sigma_v^2$	wariancja szumu
$\sigma_s^2$	wariancja wektora amplitud sygnału
$\boldsymbol{\Sigma}$	macierz kowariancji wektora amplitud sygnału
$\boldsymbol{v}_n$	wektor szumu w $n$ -tym sondowaniu
$\phi$	kąt elewacji
$\mathbf{a}(\theta)$	nominalna odpowiedź anteny na obiekt na kącie $\theta$
$\mathbf{A}(\theta)$	macierz nominalnych odpowiedzi antenowych na obiekty na kątach $\theta$
$c$	prędkość fali elektromagnetycznej w środowisku propagacji radaru
$d$	odległość między elementami antenowymi w szyku liniowym
$E[\cdot]$	wartość oczekiwana
$\mathcal{F}(\boldsymbol{\Theta})$	macierz informacyjna Fishera
$H$	wysokość obiektu nad powierzchnią ziemi
$H_a$	wysokość anteny
$k$	numer obserwowanego obiektu
$K$	całkowita liczba obserwowanych obiektów
$M$	liczba elementów odbiorczych w antenie
$n$	numer sondowania
$N$	liczba sondowań w segmencie
$R$	odległość obiektu od radaru
$\mathbf{R}$	macierz kowariancji sygnału
$s$	zespolona amplituda pojedynczego echa



---

$s$	wektor zespolonych amplitud pojedynczego echa
$T_p$	okres powtarzania sondowań
$tr(\cdot)$	śląd macierzy
$\mathbf{v}_i$	$i$ -ty wektor własny
$\mathbf{V}$	macierz wektorów własnych
$var(\cdot)$	wariancja
$w$	wektor rozkładu amplitudowego, taper
$\mathbf{w}(\theta)$	wektor wag układu formowania wiązek
$\mathbf{y}$	wektor pomiarów pochodzących z pojedynczego sondowania
$\mathbf{Y}$	macierz pomiarów z całego segmentu
$(\cdot)^H$	sprzężenie hermitowskie
$\hat{(\cdot)}$	estymata
$ \cdot $	moduł liczby, wyznacznik macierzy

# Spis treści

Wykaz oznaczeń	7
<b>1 Wstęp</b>	<b>13</b>
1.1 Zarys radiolokacji	13
1.1.1 Historia radarów	13
1.1.2 Zasada działania radaru	17
1.2 Przetwarzanie sygnałów przed etapem estymacji	20
1.2.1 Filtracja dopasowana	20
1.2.2 Cyfrowe formowanie wiązek	23
1.2.3 Filtracja MTD	24
1.2.4 Filtracja MTI	26
1.2.5 Układ stabilizacji poziomu fałszywego alarmu	27
1.2.6 Wybór maksimum i detekcja	28
1.2.7 Dodatkowe algorytmy poprawiające parametry radaru	29
1.2.8 Proces estymacji	29
1.2.9 Moduł śledzenia	30
1.2.10 Moduł przelicznika balistycznego	30
<b>2 Przegląd metod estymacji współrzędnych</b>	<b>31</b>
2.1 Model danych	31
2.2 Metody nieparametryczne	35
2.2.1 Metoda monoimpulsowa	35
2.2.2 Metody wykorzystujące formowanie wiązek	37
2.2.3 Klasyczne formowanie wiązek	37
2.2.4 Metoda MVDR (estymator Capona)	40
2.2.5 Metody wykorzystujące własności podprzestrzeni	44
2.2.6 Metoda MUSIC	44
2.2.7 Metoda ESPRIT	47
2.3 Estymatory parametryczne	50
2.3.1 Deterministyczny estymator największej wiarygodności	50
2.3.2 Stochastyczny estymator największej wiarygodności	57



2.4	Podsumowanie . . . . .	59
2.5	Tezy pracy . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Estymacja elewacji</b>	<b>61</b>
3.1	Przedstawienie problemu estymacji elewacji . . . . .	61
3.2	Modele odbicia od ziemi . . . . .	63
3.2.1	Model płaskiej, gładkiej Ziemi . . . . .	63
3.2.2	Model odbicia rozproszonego . . . . .	65
3.3	Estymacja kąta elewacji w warunkach propagacji wielodrogowej . . . . .	67
3.4	Uodporniony wariant estymatora największej wiarygodności . . . . .	80
3.4.1	Sformułowanie estymatora uodpornionego . . . . .	81
3.4.2	Wyprowadzenia równań użytych w sekcji 3.4.1 . . . . .	85
3.4.3	Testy uodpornionych wersji estymatora . . . . .	87
3.5	Badanie podejścia opartego o statystykę miękkoodecyzyjną . . . . .	97
3.6	Podsumowanie . . . . .	110
<b>4</b>	<b>Estymacja azymutu</b>	<b>111</b>
4.1	Przedstawienie problemu . . . . .	111
4.2	Modelowanie sygnałów w przypadku obracanej anteny . . . . .	112
4.3	Estymacja azymutu dla przypadku jednego obiektu . . . . .	112
4.4	Estymacja azymutu dla przypadku wielu obiektów - estymator iteracyjny . . . . .	120
4.5	Ocena liczby źródeł . . . . .	125
4.6	Wpływ korelacji źródeł sygnału na jakość estymaty kąta . . . . .	128
4.6.1	Analiza wrażliwości . . . . .	130
4.6.2	Zastosowanie analizy wrażliwości do zagadnienia korelacji źródeł . . . . .	131
4.7	Nieparametryczne podejście do estymacji azymutu przy obracającej się antenie . . . . .	137
4.7.1	Estymacja kąta za pomocą klastycznego formowania wiązek . . . . .	137
4.7.2	Odmiana adaptacyjna - MVDR dla obracanej anteny . . . . .	137
4.7.3	Porównanie nieparametrycznych metod estymacji azymutu w sytuacji obracającej się anteny . . . . .	141
4.8	Podsumowanie . . . . .	144
<b>5</b>	<b>Dodatkowe zagadnienia związane z estymacją współrzędnych w radarach</b>	<b>147</b>
5.1	Estymacja prędkości radialnej . . . . .	147
5.2	Niejednoznaczny pomiar odległości . . . . .	148
5.3	Wspólna estymacja azymutu i elewacji . . . . .	149
5.4	Złożoność obliczeniowa wykorzystanych algorytmów . . . . .	150
5.5	Podsumowanie . . . . .	152
<b>6</b>	<b>Podsumowanie rozprawy</b>	<b>153</b>

<b>7 Dodatek</b>	<b>157</b>
7.1 Dodatek 1: Wyprowadzenie ograniczenia Craméra-Rao dla standardowego zagadnienia estymacji kąta . . . . .	157
Model stochastyczny, 1 cel . . . . .	158
Model stochastyczny, 2 cele . . . . .	158
Model deterministyczny, 1 cel . . . . .	159
Model deterministyczny, 2 cele . . . . .	161
7.2 Dodatek 2: Testy estymatorów klasycznych . . . . .	165
7.2.1 Testy estymatora monoimpulsowego . . . . .	167
7.2.2 Testy klasycznego formowania wiązek . . . . .	170
7.2.3 Testy estymatora MVDR . . . . .	175
7.2.4 Testy estymatora MUSIC . . . . .	181
7.2.5 Testy estymatora ESPRIT . . . . .	187
7.2.6 Testy deterministycznego estymatora największej wiarygodności z założeniem stałej amplitudy sygnału . . . . .	192
7.2.7 Testy deterministycznego estymatora największej wiarygodności z założeniem zmiennej amplitudy sygnału . . . . .	197
7.2.8 Testy stochastycznego estymatora największej wiarygodności . . . . .	202
<b>Wykaz literatury</b>	<b>207</b>
<b>Wykaz rysunków</b>	<b>213</b>
<b>Wykaz tabel</b>	<b>222</b>





# Rozdział 1

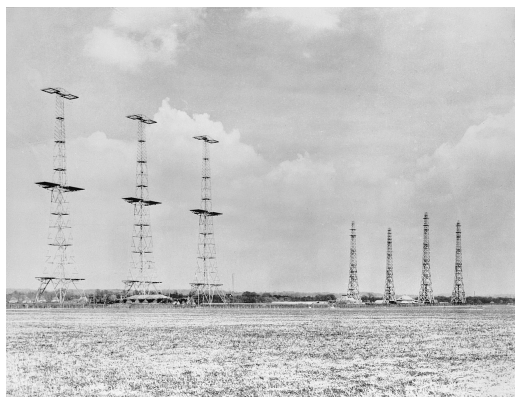
## Wstęp

Poniższy rozdział ma na celu zapoznanie czytelnika z historią radiolokacji oraz sposobem w jaki na przestrzeni lat zmieniały się zastosowania radarów. Przedstawiono zwięzły opis obejmujący okres od przełomu XIX i XX wieku po czasy obecne. W dalszej części rozdziału zostanie przedstawiony sposób obróbki sygnałów oraz danych radarowych wykorzystywany we współczesnych urządzeniach. Opisana zostanie cyfrowa część obróbki wraz z algorytmami poprawiającymi stosunek sygnału do szumu, metodami detekcji, estymacji oraz dodatkowymi aspektami rozszerzającymi zakres pracy radaru.

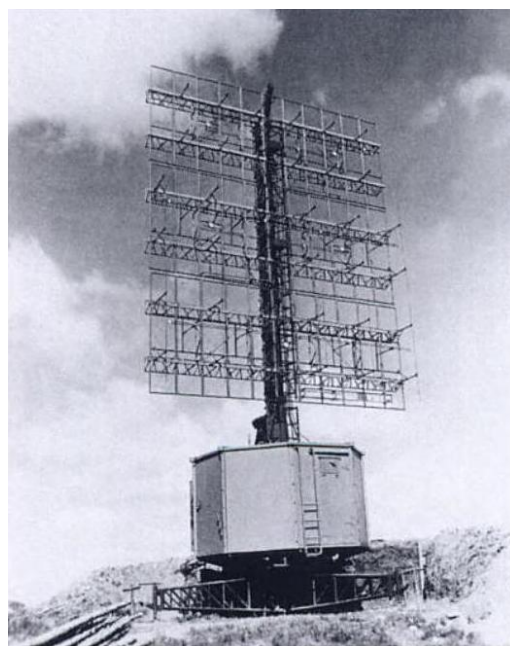
### 1.1 Zarys radiolokacji

#### 1.1.1 Historia radarów

Historia radarów (ang. **RA**dio **D**etection **A**nd **R**anging) rozpoczyna się w momencie przeprowadzenia przez Heinricha Hertza badań wykazujących, że fale radiowe mają własność odbijania się od metalowych przedmiotów. Trudno wskazać dokładną datę tego zdarzenia, jednak przyjmuje się iż miało to miejsce pod koniec XIX wieku [1]. Pierwsze urządzenie wykorzystujące to zjawisko skonstruował w 1904 roku niemiecki wynalazca Christian Hülsmeier. Służyło ono do detekcji okrętów w gęstej mgłę przy użyciu fal elektromagnetycznych [2, 3]. Prace nad radarami w formie zbliżonej do obecnej rozpoczęto w latach 30 XX wieku. Prowadzone były przez wiele krajów (Wielka Brytania, Niemcy, USA, ZRR, Japonię, Niderlandy, Francja, Włochy), niejednokrotnie w tajemnicy, w obrębie placówek wojskowych [4]. Prace nad radarami uległy intensyfikacji w trakcie II Wojny Światowej. Poszczególne państwa miały różne koncepcje wykorzystania nowej technologii. W przypadku Wielkiej Brytanii najbardziej znana jest sieć radarów Chain Home (rys. 1.1a), stworzona przez Roberta Watsona-Watta. Stanowiła ona zespół urządzeń umieszczonych w pobliżu wybrzeża, których zadaniem było ostrzeganie o zbliżających się samolotach. Radary były stosunkowo prymitywne (nawet jak na swoje czasy), jednak dzięki szybkiemu wdrożeniu odegrały ważną rolę w trakcie bitwy o Anglię [5].



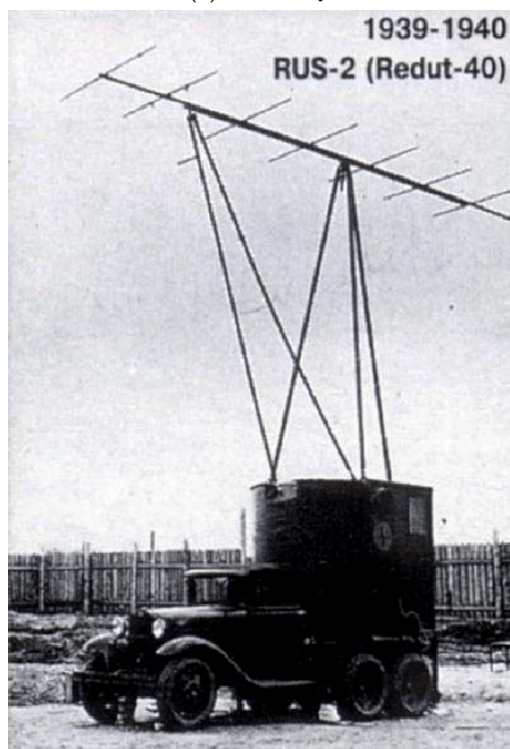
(a) Anteny części systemu Chain Home



(b) Radar Freya



(c) Radar Wurzburg



(d) Radar RUS-2

Rys. 1.1: Przykładowe radary wykorzystywane w czasie II Wojny Światowej.

---

Niemieckim odpowiednikiem systemu Chain Home były radary Freya (rys. 1.1b). Stanowiły one bardziej zaawansowane rozwiązanie od brytyjskiego Chain Home. Pracowały z wyższą częstotliwością, dzięki czemu można było zastosować mniejsze, możliwe do relokacji anteny. Zasadniczą rolą radarów Freya było wczesne ostrzeżenie przed nadlatującymi siłami wroga. Dodatkowo Niemcy opracowali i wdrożyli radar kierowania ogniem artylerii przeciwlotniczej Wurzburg, (rys. 1.1c). Pozwalał on na zgrubne określenie położenia obiektu w celu dalszego jego oświetlenia z wykorzystaniem reflektorów (w trakcie nocnych nalotów) i skutecznego prowadzenia ognia. Pierwsze radary tego typu były montowane na przyczepach. Wraz opracowywaniem kolejnych wersji ulegały poprawie parametry, ale również rosły gabaryty urządzeń. Ostatecznie stanowiły one stacjonarne stacje naziemne [6].

Związek Radziecki również opracowywał własne urządzenia radiolokacyjne. Pierwszym urządzeniem wprowadzonym do użytku w Armii Czerwonej był radar RUS-1. Stanowił on zestaw złożony z stacji nadawczej i odbiorczej umieszczonych w odległości około 35 km od siebie. Jego następcą - RUS-2 (rys. 1.1d [7]) został wprowadzony do służby w roku 1940. Wysoką mobilność stacji zapewniało umieszczenie anteny na podwoziu samochodowym. System ten odegrał istotną rolę w trakcie wojny, wykrywając około 200 niemieckich bombowców 100 km na zachód od Moskwy, co pozwoliło skutecznie odeprzeć zagrożenie [8].

W Stanach Zjednoczonych możliwość detekcji celu przy użyciu fal radiowych zaobserwowano w 1922 roku, jednak temat nie został rozwinięty. Dopiero pod koniec 1934 roku został wydany patent opisujący koncepcję tego typu detektora [9]. Tego samego roku przeprowadzono testy, w trakcie których udało się zaobserwować samolot w odległości 1,6 km od nadajnika [10].

Era powojenna przyniosła znaczący postęp w technice radarowej. Znaczna część przeprowadzonych wówczas badań miała na celu poprawę jakości oszacowania współrzędnych obserwowanego celu. Pracowano również nad ówczesnym odpowiednikiem dzisiejszej walki elektronicznej - już w trakcie wojny okazało się bowiem, że praca radaru może zostać zakłócona przez drugą stronę konfliktu. Aby temu zapobiec stosowano nadajniki dużej mocy, co podnosiło poziom sygnału i utrudniało jego zagłuszenie. Wykorzystywano również technikę znaną dzisiaj jako Frequency Hopping ("skakanie" po częstotliwościach). Polegała ona na szybkim zmienianiu częstotliwości pracy, co utrudniało dopasowanie do częstotliwości pracy nadajnika. Urządzenia z wczesnych lat powojennych miały ponadto trudności z detekcją nisko lecących obiektów. Efektem badań w tej gałęzi było opracowanie radarów nadających się do umieszczenia na balonach lub samolotach (aby obserwować cele sponad poziomu horyzontu). Próby te uważa się za praprzodka obecnych systemów AWACS. Postęp techniczny doprowadził również do pojawienia się radarów śledzących.

W celu poprawy jakości detekcji w przypadku wystąpienia niekorzystnych zjawisko meteorologicznych zaczęto wykorzystywać efekt Dopplera. Zjawisko to pozwalało na rozróżnienie obiektów poruszających się z różnymi prędkościami radialnymi. Jego wykorzystanie usprawniło ponadto wykrywanie celów na niskich wysokościach (do odbiornika docierał nie tylko sygnał odbity od celu, ale i również od nieruchomej powierzchni ziemi, który można było skutecznie tłumić). Milowy krok w rozwoju stanowiło wynalezienie tranzystora w 1948 roku. Umożliwiał on miniaturyzację elektroniki i umieszczanie komponentów

na płytkach drukowanych. Efektem tych zmian była możliwość ekstrakcji większej ilości informacji z sygnałów. Z czasem zaczęły pojawiać się stacje z obracaną anteną, umożliwiając dookólną obserwację przestrzeni. Znaczne zmiany zostały poczynione również w dziedzinie zobrazowania. Początkowo wykorzystywano zmodyfikowane lampy oscyloskopowe, które z biegiem czasu zostały wyparte przez kolorowe wyświetlacze umożliwiające przekazanie bogatszej treści [11].

Na drodze rozwoju pojawiło się wiele odmian radarów cechujących się różnymi własnościami. Należy tu wymienić dla przykładu radary MIMO [12] - posiadają one kilka (minimum dwie) anteny nadawcze i kilka anten odbiorczych. W efekcie umożliwia to równoczesne nadawanie i odbieranie sygnału, co nie jest możliwe w przypadku radarów impulsowych z pojedynczą anteną nadawczo-odbiorczą. Efektem takiej konfiguracji jest możliwość znaczącego skrócenia minimalnego zasięgu obserwacji obiektu. Inną wartą opisaną technologią jest radar z syntetyczną aperturą [13] (ang. SAR - Synthetic Aperture Radar). Stanowi on rozwiązanie, w którym do obserwacji (na ogół nieruchomych obiektów) wykorzystuje się poruszającą się antenę. Jej ruch w pewnym stopniu pozwala poprawić rozróżnialność poprzez złożenie obserwacji pochodzących z różnych położeń w jedno, w którym skany traktowane są jakby pochodziły z fragmentów większej, nieruchomej anteny. Technika ta z powodzeniem może być wykorzystywana np. do prowadzenia obserwacji z pokładu samolotu.

Walka radioelektroniczna doprowadziła również do konieczności skonstruowania radarów, których wykrycie jest znacząco utrudnione. W klasycznych radarach duża moc promieniowania anteny może zostać w stosunkowo prosty sposób zaobserwowana za pomocą odpowiednich przyrządów. Istnieje jednak odmiana radarów wyposażonych wyłącznie w antenę odbiorczą. Radary pasywne [14] nie wypromieniowują energii, lecz bazują na innych źródłach, takich jak: stacje nadawcze telefonii, maszty radiowe czy telewizyjne. Oszacowanie współrzędnych odbywa się poprzez określenie różnicy w czasie odbioru sygnału zarejestrowanego bezpośrednio od nadajnika oraz tego samego sygnału opóźnionego w wyniku odbicia od obiektu [15].

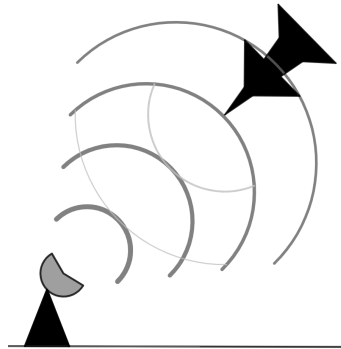
Obecnie technika radarowa rozdziela się na wiele gałęzi, których wyszczególnienie samo w sobie jest trudnym zadaniem. Można dokonać klasyfikacji typów radarów na wielu płaszczyznach, takich jak sposób pracy, częstotliwość, zastosowanie, czy docelowe umiejscowienie. Analizując referaty wygłaszane w trakcie konferencji naukowych o tematyce związanej z radiolokacją można jednak dostrzec pewne powtarzające się trendy. Jednym z takich tematów jest sztuczna inteligencja oraz uczenie maszynowe. Znajdują one zastosowanie między innymi w klasyfikacji celów [16, 17, 18], detekcji [19, 20], czy redukcji wpływu zakłóceń [21]. Ostatnimi czasy coraz więcej można spotkać artykułów o radarze kognitywnym (ang. cognitive radar) [22, 23]. Główną cechą takiego radaru jest zdolność obserwowania i interakcji z otoczeniem, a następnie (z wykorzystaniem sztucznej inteligencji) uczenia się. W efekcie taki radar może odpowiednio adaptować odbiornik i nadajnik aby uzyskać pożądane efekty obserwacji. Zastosowanie tych mechanizmów pozwala w czasie rzeczywistym reagować na zmiany środowiska pracy. Dużym zainteresowaniem cieszą się również radary z syntetyczną aperturą [24, 25].

W aktualnie użytkowanych radarach wojskowych wykorzystywane są najnowsze osiągnięcia wiedzy, co znacząco podnosi ich użyteczność bojową. Przykładowo, obecnie wykorzystywane radary artyleryjskie

posiadają zdolność detekcji oraz śledzenia niewielkich obiektów (pocisków moździerzowych, rakiet). Ponadto zaimplementowany przelicznik umożliwia określenie typu działa/wyrzutni, punktu wystrzału oraz punktu upadku pocisku z precyzją na poziomie 100 m [26, 27]. Istnieją ponadto algorytmy umożliwiające klasyfikację celu na podstawie jego echa radarowego, takich jak model obserwowanego śmigłowca [28], czy rozpoznanie silnika odrzutowego na podstawie specyfiki sygnału odbitego od łopat turbiny [29]. Na podstawie przedstawionych przykładów można zauważyć, że zadania radarów zostały znacząco rozszerzone, a sama detekcja celu stanowi jedynie jego podstawową funkcję.

### 1.1.2 Zasada działania radaru

Radary pierwotne (tylko takie będą omawiane w niniejszej pracy) wykorzystują zjawisko odbicia fal elektromagnetycznych w celu detekcji obiektów, co przedstawiono na rys. 1.2. Pierwsze radary były urządzeniami bistatycznymi: jedno urządzenie nadawało sygnał radiowy, drugie natomiast pracowało w trybie nasłuchu, oczekując na odbiór sygnału nadanego oraz odbitego od obiektu. Obecnie wykorzystuje się głównie urządzenia pełniące obie te funkcje jednocześnie (radary monostatyczne). W przypadku tzw. radarów impulsowych stosuje się anteny pełniące funkcje zarówno nadajnika jak i odbiornika, a sekwencja nadawania i odbioru następują kolejno po sobie. W takim przypadku ta sama antena jest wykorzystywana jako część toru nadawczego jak i odbiorczego [30].

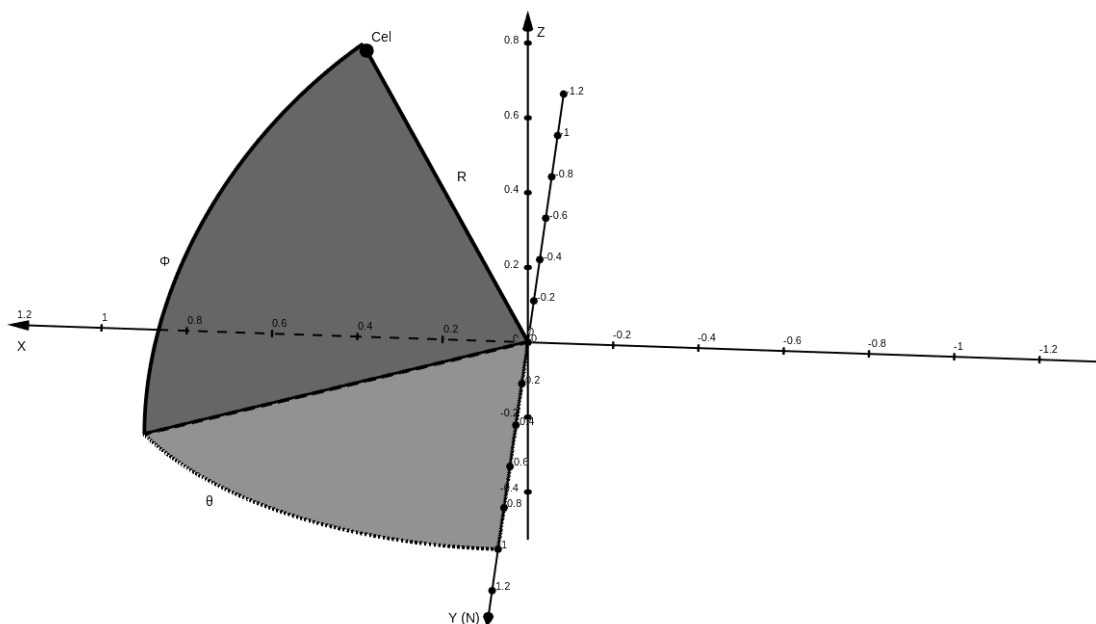


Rys. 1.2: Zasada działania radaru. Ciemniejsze półokręgi - sygnał nadany, jaśniejsze - odbity i wracający do radaru.

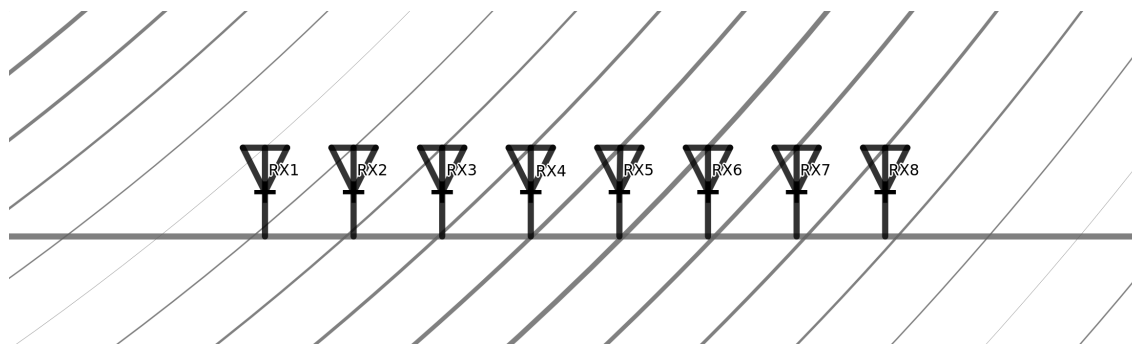
W trakcie nadawania emitowany jest krótki impuls, a następnie nasłuchuje się jego echa. W pewnym uproszczeniu, sygnał sondujący można interpretować jako przebieg prostokątny o niewielkim współczynniku wypełnienia. Pojedynczy impuls wraz z okresem odbioru można nazwać sondowaniem. Wyemitowana w jego trakcie fala elektromagnetyczna rozprzestrzenia się w przestrzeni ulegając odbiciu od napotkanych obiektów. Moc sygnału echa ( $P_R$ ) odebranego przez antenę jest równa:

$$P_R = \frac{P_T G_T}{4\pi R^2} \frac{\sigma}{4\pi R^2} A_e, \quad (1.1)$$

gdzie  $P_T$  stanowi moc wypromieniowaną,  $G_T$  zysk anteny nadawczej,  $R$  odległość celu od radaru,  $A_e$  oznacza efektywną powierzchnię anteny (aperturę), a  $\sigma$  stanowi skuteczną powierzchnię odbicia celu (ang. RCS - Radar cross-section). Równanie (1.1) znane jest również jako równanie radarowe



Rys. 1.3: Schemat przedstawiający reprezentację położenia obiektu za pomocą współrzędnych odległość (R), azymut ( $\Theta$ ), elewacja ( $\Phi$ ). Radar umieszczony został w punkcie o współrzędnych (0,0,0).



Rys. 1.4: Schemat 8 elementów odbiorczych, do każdego dociera fala elektromagnetyczna w różnej fazie (którą symbolizuje grubość linii).

[31]. Istnieją różne odmiany powyższego wzoru różniące się poziomem zagłębienia w szczegóły, jednak powyższy przykład jest tym najbardziej fundamentalnym.

Podstawowym parametrem szacowanym przez radar jest odległość do obserwowanego obiektu, którą określa się na podstawie wzoru:

$$R_{targ} = \frac{c \Delta t}{2}, \quad (1.2)$$

gdzie  $\Delta t$  stanowi różnicę między czasem nadania, a czasem odbioru sygnału.

Dwie pozostałymi współrzędnymi określanymi przez radar są azymut i elewacja (rys. 1.3). Stanowią one współrzędne kątowe obiektu względem umiejscowienia radaru. Azymut jest kątem w płaszczyźnie poziomej, liczonym od północy do celu zgodnie z ruchem wskazówek zegara i należy do  $0^\circ$  do  $360^\circ$ . Elewacja to natomiast kąt między poziomem horyzontu, a celem w osi pionowej i zawiera się w przedziale  $-90^\circ$  do  $90^\circ$ .



---

Dawniej wykorzystywane były głównie dwuwspółrzędne (2D) stacje radiolokacyjne. Pozwalały one na szacowanie odległości i azymutu bądź elewacji. Uzyskanie pełnych współrzędnych wymagało zastosowania 2 urządzeń (jak miało to miejsce np. w przypadku radarów NUR-31 i NUR-41 [32]). Obecnie urządzenia tego typu nie są szczególnie popularne i wyparty je radary trójwspółrzędne (3D).

Dla uzyskania współrzędnej kątowej można wykorzystać ruch mechaniczny anteny i analizować przebieg obwiedni sygnału echa. Współczesne rozwiązania nie polegają jednak na ruchu mechanicznym lecz wykorzystują układy (szyki) wielu elementów odbiorczych rozłożonych w płaszczyźnie poziomej (określanie azymutu), bądź pionowej (dla uzyskania elewacji). W przypadku dużych odległości (przy jakich na ogół pracuje radar) można przyjąć, że fala powracająca do radaru ma charakter fali płaskiej. W takim wypadku jeżeli cel znajduje się na wprost anteny sygnał odebrany przez poszczególne elementy posiada jednakową fazę. Dla celu obserwowanego pod kątem - każdy kolejny element odbiorczy zarejestruje sygnał z niewielkim opóźnieniem (wynikającym z czasu propagacji fali), co przełoży się na przesunięcie w fazie (rys. 1.4). Większa liczba elementów szyki antenowej pozwala na zgromadzenie większej ilości danych, co z kolei poprawia jakość oszacowania kąta, z którego odbierana jest fala (DOA, ang. Direction of arrival). Na samą precyzję określania kąta wpływ ma również wiele innych czynników, jak na przykład stosunek sygnału do szumu, liczba sondowań, odległość między elementami antenowymi, częstotliwość pracy czy obecność zakłóceń.

W przypadku szacowania elewacji nie ma na ogół potrzeby odbierania sygnałów z ujemnych kątów (w szczególności spod poziomu horyzontu). Z tego powodu aby poprawić zdolność prowadzenia obserwacji na wysokich kątach stosuje się odchyloną antenę. Powoduje to dodatkowe komplikacje w trakcie przeliczania współrzędnych (przy odchyleniu w azymucie jak i elewacji wiązka ulega dodatkowym deformacjom), jednak istnieją sposoby pozwalające rozwiązać tego typu problemy [33]. Sama odchylna antena pozwala na obserwacje celów na wysokich kątach elewacyjnych bez nadmiernego odchylenia wiązki.

Możliwe jest również połączenie technik obrotu mechanicznego i szyków antenowych. W takim wypadku istnieje możliwość estymacji azymutu w pełnym zakresie  $360^\circ$ . Połączenie tych rozwiązań pozwala na stosowanie technik takich jak np. skanowania wstecz (ang. backscan) [34], bądź elektroniczne podtrzymanie wiązki na stałym azymucie. Pozwala to na stosunkowo długotrwałe obserwowanie wybranego kierunku azymutalnego w momencie gdy płaszczyzna anteny zwrócona jest do niego pod pewnym kątem. Tego typu technika może być pożądana ponieważ pozwala na zwiększenie liczby obserwacji pochodzących od jednego celu (poprzez obserwację "cofającą się" wiązką) umożliwiając jednocześnie dookólne skanowanie przestrzeni (co z kolei nie jest możliwe przy pojedynczej, nieruchomej antenie).

Istnieje ponadto możliwość wykorzystania zjawiska Dopplera do określenia niejednoznacznej prędkości radialnej obiektu [35, 36]. Pełną prędkość radialną można uzyskać m.in. obserwując zmiany odległości obiektu w czasie, a efekt Dopplera wykorzystać do poprawy jakości oszacowania. Dzięki temu istnieje możliwość usprawnienia pracy układu śledzenia [37]. Ponadto radary dopplerowskie posiadają zdolność rozróżniania obiektów w zależności od ich prędkości radialnej. Cecha ta pozwala na skuteczną detekcję celów znajdujących się na tle rozległego echa nieruchomego (np. odbić od ziemi,

lasów, zabudowań). Własność ta jest szczególnie pożądana podczas detekcji obiektów znajdujących się nieznacznie ponad horyzontem.

## 1.2 Przetwarzanie sygnałów przed etapem estymacji

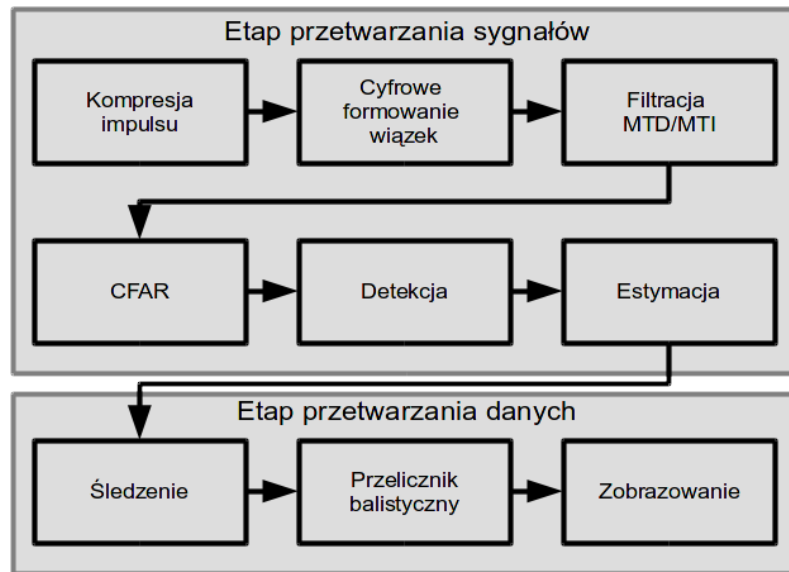
Strumień sygnałów pozyskanych z anteny radaru niesie wiele nieistotnych (z punktu widzenia obserwacji konkretnego celu) informacji. Z tego powodu, zanim dojdzie do etapu określania współrzędnych, należy wyekstrahować wyłącznie niezbędne do tego celu sygnały. Procedura ta polega na rozdzieleniu sygnałów pochodzących z różnych odległości (kompresja impulsu), różnych położen kątowych (formowanie wiązek w płaszczyźnie azymutu i elewacji), czy posiadających różne prędkości (filtracja Dopplerowska). Każdy fragment przestrzeni/zakres prędkości poddawany jest następnie procesowi detekcji pozwalającemu określić (z pewnym prawdopodobieństwem) obecność celu. Wcześniejsze przetwarzanie (przed etapem detekcji) ma nie tylko na celu rozdzielenie sygnałów na oddzielne obszary przestrzeni/prędkości, ale również zwiększenie stosunku sygnału do szumu, co z kolei przełoży się na zwiększenie prawdopodobieństwa wykrycia przy utrzymaniu niskiego poziomu fałszywego alarmu. Do informacji o wykryciu dołączane są początkowe sygnały, na podstawie których wykonywana jest estymacja. Celem tego etapu jest możliwie najprecyzyjniejsze określenie współrzędnych obiektu w przestrzeni, ale niekiedy również dodatkowych cech takich jak powierzchnia skuteczna odbicia, prędkość radialna, czy wstępna kategoryzacja celu (np. rozpoznanie w sygnale cech specyficznych dla śmigłowców) [28]. Wykrycia z dołączonymi dodatkowymi informacjami o obiektach przekazywane są dalej do modułu śledzenia. Jego zadaniem jest kojarzenie wykryć, łączenie ich w trasy oraz predykcja przyszłych położen celu, co umożliwi odpowiednie nakierowanie wiązki. Jednym z etapów przetwarzania w radarze może być ponadto przelicznik balistyczny. Jest to wyspecjalizowany moduł pozwalający na określenie punktu wystrzału oraz predykcję punktu upadku pocisku w czasie gdy ten znajduje się jeszcze w powietrzu. Dzięki zaimplementowanej bazie pocisków możliwe jest również określenie rodzaju obserwowanej amunicji, czy typu wyrzutni (bazując na trajektorii). Schemat blokowy algorytmów przetwarzania w radarze przedstawiono na rysunku 1.5.

### 1.2.1 Filtracja dopasowana

W wielu nowoczesnych radarach sygnał wyemitowany przez antenę posiada względnie długi czas trwania. Wynika to z ograniczenia maksymalnej mocy z jaką może pracować nadajnik. Sposobem na przesłanie większej energii jest wydłużenie czasu nadawania, co przekłada się z kolei na większe prawdopodobieństwo detekcji, lepszą jakość oszacowania współrzędnych, czy dokładniejsze określenie przesunięcia dopplerowskiego.

Celem kompresji impulsu jest skrócenie czasu trwania podwyższonego poziomu sygnału do długości pojedynczych okresów próbkowania przy jednoczesnym znacznym wzroście stosunku sygnału do szumu. Przetwarzanie to w radarach oparte jest o tzw. filtr dopasowany. Filtr dopasowany jest to filtr liniowy, który dla znanego sygnału wzorca (nadawanego impulsu) obserwowanego na tle zakłóceń





Rys. 1.5: Schemat przetwarzania sygnałów i danych w typowym radarze.

stochastycznych o charakterze białego szumu, maksymalizuje stosunek sygnału do szumu w sygnale echa.

Odpowiedź filtru dopasowanego dana jest wzorem [38]:

$$\hat{s}(\tau) = \sum_{g=0}^G x^*(g - \tau)y(g), \quad (1.3)$$

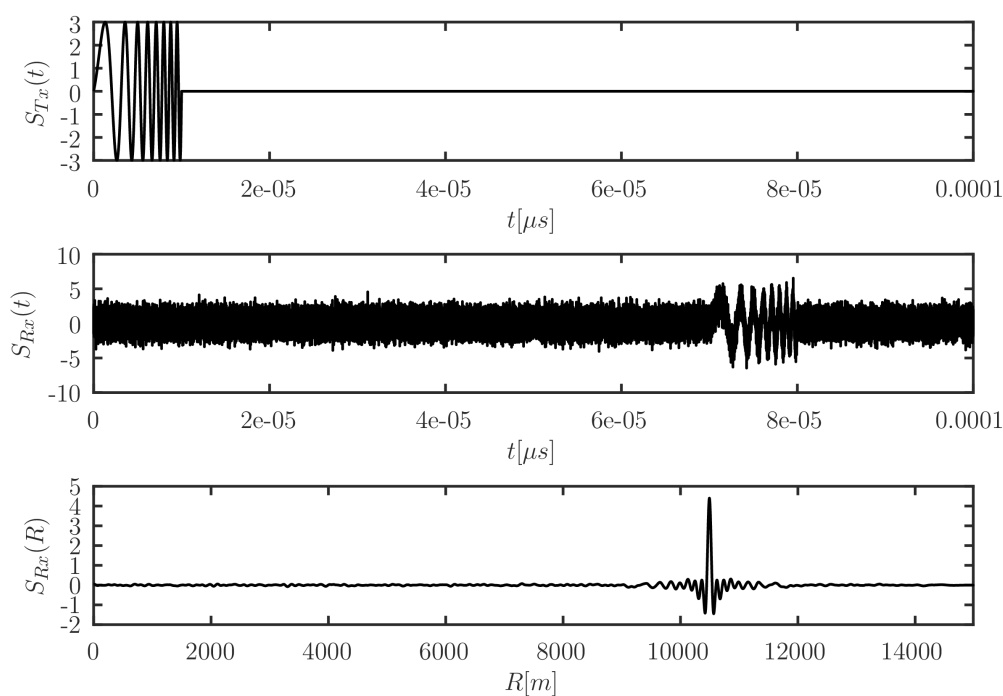
gdzie  $g$  stanowi numer próbki ( $G$  jest całkowitą liczbą próbek sygnału nadawanego),  $x$  jest sygnałem wzorca, wypromieniowanym przez antenę, a  $y$  sygnałem odebrany. Można bez trudu zauważyć, że odpowiedź filtru dopasowanego na pobudzenie sygnałem wzorcowym jest (opóźnioną w czasie) funkcją autokorelacji wzorca:

$$\hat{s}(\tau) = \sum_{g=0}^G x^*(g - \tau)x(g). \quad (1.4)$$

Stosunek sygnału do szumu na wyjściu filtru dopasowanego jest równy ilorazowi energii echa przez gęstość widmową szumów w sygnale echa [39]. Wynika stąd, że korzystne jest zwiększanie energii wypromieniowanej w kierunku celu, co można osiągnąć, m.in., wydłużając czas trwania impulsu. W takim wypadku jednak niezbędne jest rozwiązanie problemu pogorszenia rozdzielności (rozdzielczości) odległościowej radaru. Jeżeli nadawany impuls jest fragmentem sinusoidy o stałej częstotliwości i czasie trwania  $T$ , to podwyższony poziom sygnału na wyjściu filtru dopasowanego obserwuje się, w przybliżeniu, przez czas  $T$ . Jest tak, ponieważ pasmo częstotliwości zajmowane przez tego typu sygnał jest proporcjonalne do  $1/T$ , co z kolei prowadzi do poszerzenia listka głównego funkcji autokorelacji tego sygnału. Rozwiązaniem tego problemu jest technika kompresji impulsu, w której generuje się impulsy modulowane w taki sposób, aby odpowiednio poszerzyć ich pasmo – w ogólności, jeżeli szerokość pasma sygnału nadawanego jest równa  $B$ , to rozdzielczość odległościowa radaru jest równa  $c/(2B)$  [39]. Typowe sposoby modulacji to np. liniowa modulacja częstotliwości (ang. Linear Frequency Modulation - LFM), nieliniowa modulacja częstotliwości (ang. Nonlinear Frequency Modulation - NLFM) czy kodowanie fazowe (ang. Phase-coded Modulation - PCM). Efektem wykonania operacji kompresji

impulsu jest ciąg próbek sygnału, z których każda reprezentuje inną komórkę odległościową - fragment przestrzeni odpowiadający konkretnemu, niewielkiemu zakresowi zasięgu obserwacji.

W przypadku obecności obiektu zbyt blisko radaru - w strefie martwej - początek nadawanej sekwencji dotrze do radaru zanim samo nadawanie się ukończy. Zakładając system, w którym antena w sposób naprzemienny pełni funkcję nadajnika i odbiornika - nie istnieje możliwość zarejestrowania początku nadanej sekwencji, co z kolei uniemożliwia w pełni efektywne wykorzystanie kompresji impulsu. W efekcie detekcja obiektów znajdujących się blisko radaru (dokładniej w strefie martwej) jest utrudniona, a w skrajnych przypadkach niemożliwa.



Rys. 1.6: Przykład działania kompresji impulsu.

Na rysunku 1.6 przedstawiono przykład działania kompresji impulsu.  $S_{Tx}(t)$  jest sygnałem wyemitowanym przez radar - zastosowano tu przebieg z liniową modulacją częstotliwości. W sygnale odebranym ( $S_{Rx}(t)$ ), oprócz szumów pomiarowych, można zauważyć odbite i zarejestrowane echo. Efektem wykonania kompresji jest przebieg  $S_{Rx}(R)$ , w którym czas odbioru został przeliczony na odległość potencjalnego celu. Widoczny jest listek główny odebranego sygnału, jednak pojawiają się również tzw. czasowe listki boczne. Stanowią one naturalne następstwo stosowania kompresji impulsu i mogą być źródłem fałszywych alarmów. W celu ich zredukowania stosuje się dodatkowe funkcje wagowe (okna czasowe) nakładane na odpowiedź impulsową filtra dopasowanego [40]. Na szerokość listka głównego (rozdzielność w odległości) jak i poziom listków bocznych (możliwość wystąpienia fałszywego alarmu) wpływ ma dewiacja częstotliwości sygnału LFM - wraz z jej wzrostem poprawia się rozdzielność. Z kolei długość impulsu sondującego ma wpływ na liczbę próbek biorących udział w określaniu korelacji, co z kolei pozwala w lepszym stopniu uśrednić wartości szumowe, efektywnie wpływając na wzrost

stosunku sygnału do szumu [41].

## 1.2.2 Cyfrowe formowanie wiązek

Cyfrowe formowanie wiązek jest zabiegiem pozwalającym na wzmocnieniu poziomu sygnału pochodzącego z jednego kierunku - azymutu bądź elewacji, poprzez zastosowanie odpowiedniego przetwarzania sygnałów odebranych przez antenę. Ze względu na duże odległości występujące w obserwacjach radarowych przyjmuje się, że docierająca do anteny fala jest falą płaską. W momencie dotarcia czoła fali z kierunku prostopadłego do płaszczyzny anteny (opis odnosi się do anteny planarnej) wszystkie elementy odbiorcze rejestrują sygnał w tym samym czasie i z jednakową fazą. Jeżeli natomiast fala dotrze pod pewnym kątem - kolejne elementy odbiorcze zarejestrują sygnał z pewnym opóźnieniem czasowym zależnym od kąta padania. Przesunięcie to ma pomijalnie mały wpływ na proces kompresji impulsu - jest na ogół znacząco mniejsze od okresu próbkowania sygnału. Towarzyszy mu jednak przesunięcie fazy odebranego sygnału, które jest już obserwowalne i na jego podstawie istnieje możliwość określenia kąta padania fali płaskiej na antenę planarną.

Cyfrowe formowanie wiązek, wykonywane w sygnale odebranym, wykorzystuje opisany wyżej efekt przesunięcia fazy. Elementy antenowe zbierają sygnały z kierunków zgodnych z ich charakterystyką promieniowania. Jeżeli sygnał echa pada na antenę pod kątem  $\theta_0$ , to obserwacje zbierane z anteny w trakcie jednego sondowania mają postać:

$$\mathbf{y} = s\mathbf{a}(\theta_0) + \mathbf{v}_n, \quad (1.5)$$

gdzie  $s$  jest zespoloną amplitudą,  $\mathbf{a}(\theta_0)$  wektorem sterującym, a  $\mathbf{v}_n$  stanowi wektor szumu - najczęściej zakłada się że posiada on zespolony rozkład normalny o zerowej wartości oczekiwanej i macierzy kowariancji  $\sigma_v^2 \mathbf{I}$  [ $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma_v^2 \mathbf{I})$ ]. Poprzez wektor sterujący należy rozumieć odpowiedź anteny na falę padającą pod kątem  $\theta$  [wzór (1.6)]. Wektor sterujący nie uwzględnia zespolonej amplitudy odebranego sygnału. Dla szyku liniowego podobnego do przedstawionego na rys. 1.4 wektor ten przyjmuje postać:

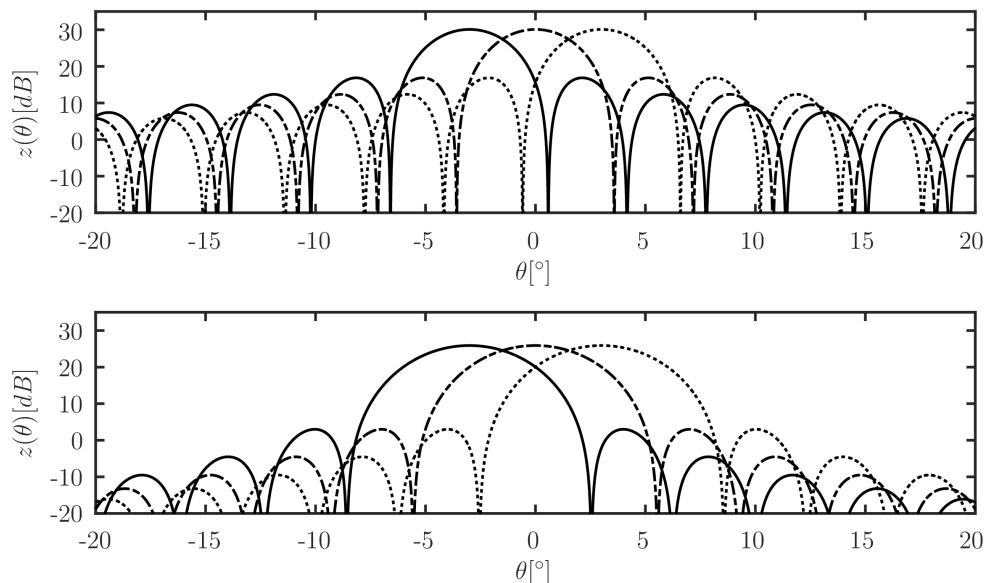
$$\mathbf{a}(\theta) = \left[ 1 \quad e^{-j2\pi d \sin \theta / \lambda} \quad \dots \quad e^{-j2(M-1)\pi d \sin \theta / \lambda} \right]^T. \quad (1.6)$$

Prosty układ formowania wiązek można zinterpretować jako odbiornik dopasowany do sygnału użytecznego:  $z(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{y}$ , gdzie  $z(\theta)$  jest wartością sygnału na wyjściu układu formowania wiązek. Częściej w radarach stosuje się formowanie wiązek nakładające na wektor sterujący dodatkowy rozkład amplitudowo-fazowy (tzw. taper). Zabiega ten pozwala kontrolować charakterystyką promieniowania (szerokość listka głównego/wysokość listków bocznych) [42]. Polega on na pomnożeniu danych z elementów odbiorczych przez odpowiednie wektory wagowe ( $\mathbf{w}(\theta)$ ), według wzorów:

$$z(\theta) = \mathbf{w}^H(\theta)\mathbf{y}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{w}(\theta) = w_m \odot \mathbf{a}(\theta), \quad (1.8)$$

gdzie  $\odot$  oznacza iloczyn Hadamarda  $w_m$  jest rozkładem amplitudowym, określającym kształt wiązki. Liczba uformowanych wiązek, oraz ich rozłożenie w przestrzeni zależą od konfiguracji konkretnego radaru i mogą być zmieniane w trakcie pracy w celu dostosowania się do panujących warunków.



Rys. 1.7: Przykładowe charakterystyki wiązki odbiorczej: bez zastosowania taperu (górny wykres) oraz z zastosowaniem taperu w kształcie cosinusa (dolny wykres).

Na rysunku 1.7 przedstawiono przykładowe charakterystyki amplitudowe wiązek wygenerowane dla  $M = 32$  elementów antenowych ułożonych w szyku liniowym. Na górnym z wykresów przedstawiono 3 charakterystyki kierunkowe dla wiązek skierowanych na kąty  $-3^\circ$ ,  $0^\circ$  i  $3^\circ$ . Wektor rozkładu amplitudowego wynosi  $w_m = 1$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ , co przełożyło się na 3 dB szerokość wiązki  $\theta_{3\text{dB}} = 4.33^\circ$ . Na dolnym z wykresów również przedstawiono charakterystyki analogicznych wiązek, dla których zastosowano jednak rozkład amplitudowy w kształcie cosinusa:  $w_m = \cos(\frac{\pi}{2}(m - 0.5M))$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . Efektem nałożenia tego rozkładu amplitudowego jest obniżenie się poziomu listków bocznych w stosunku do jednostkowego rozkładu amplitudowego oraz poszerzenie listka głównego ( $\theta_{3\text{dB}} = 6.08^\circ$ ).

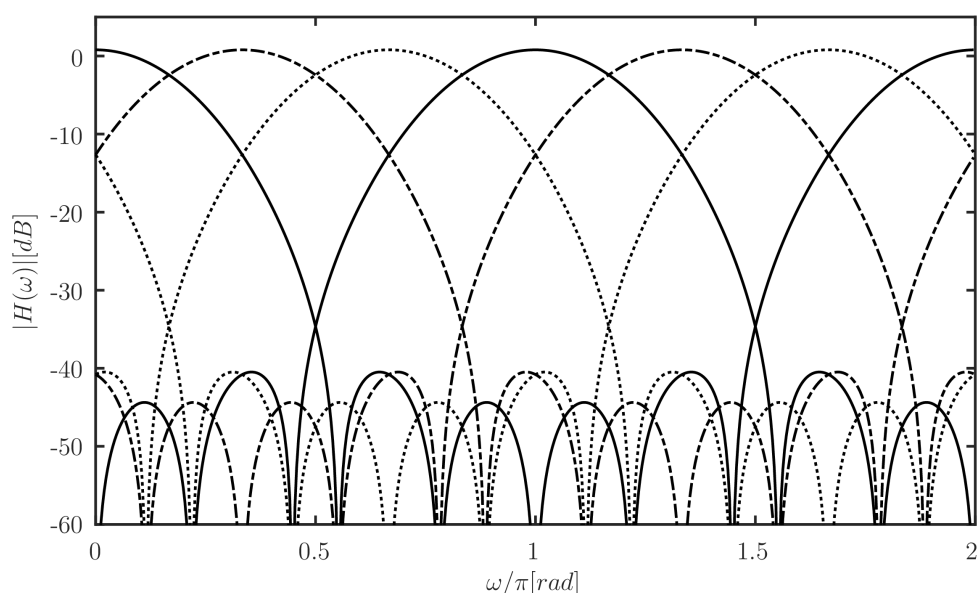
### 1.2.3 Filtracja MTD

W celu lepszego wyjaśnienia zasady działania przetwarzania MTD warto wprowadzić określenia czasu szybkiego oraz czasu wolnego. Jako czas szybki należy rozumieć krótki okres między kolejnymi próbkami odebranego sygnału. Jest to czas, w jakim promieniowanie pokonuje odległość pojedynczej komórki odległościowej. Ma on związek z częstotliwością próbkowania sygnału odebranego ( $1/F_s$ ). Czasem wolnym natomiast określa się okres powtarzania impulsów. Jest to zatem sumaryczna długość czasu nadawania i odbioru pojedynczego sondowania.

Przed etapem MTD, dane z  $N$  (kilku-kilkunastu, a w niektórych trybach pracy nawet kilku tysięcy) sondowań gromadzone są w segment. Stanowi on bazowy zestaw danych, na podstawie których wykonana zostanie detekcja celu oraz estymacja jego współrzędnych. W przypadku kiedy obiekt pozostaje w stałej odległości od radaru odebrane sygnały w poszczególnych sondowaniach mają jednakową

amplitudę i fazę. Dla obiektu w ruchu występuje natomiast liniowa zmienność fazy echa.

W ogólności filtracja MTD zakłada użycie banków filtrów FIR (ang. finite impulse response filter - filtr o skończonej odpowiedzi impulsowej), które pozwolą odseparować sygnały, w których faza zmienia się w czasie wolnym (z sondowania na sondowanie). Zakłada się przy tym, że czas szybki jest zbyt krótki aby móc efektywnie obserwować zmiany fazy, przez co przyjmuje się że jest ona stała. Można zatem przyjąć, że próbkowanie zespolonej amplitudy sygnału ma miejsce z częstotliwością równą odwrotności okresu powtarzania sondowań. Filtry MTD mają na celu agregowanie sygnałów o jednakowych częstotliwościach (jednakowych zmianach fazy między sondowaniami) poprawiając tym samym stosunek sygnału do szumu [43]. Charakterystyki przykładowego zestawu 6 filtrów dostosowanych do pracy z 10 sondowaniami przedstawiono na wykresie 1.8.

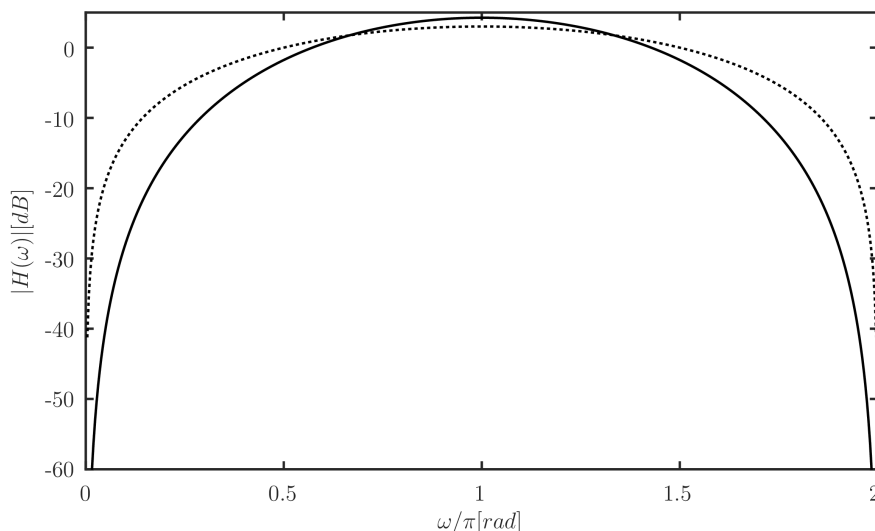


Rys. 1.8: Charakterystyki amplitudowe przykładowych filtrów w banku MTD.

Ze względu na ograniczoną częstotliwość próbkowania (okres powtarzania impulsów), może dochodzić do zjawiska aliasingu częstotliwości dopplerowskiej. Możliwe jest wówczas, że obiekt poruszający się z określoną prędkością znajdzie się w tym samym banku filtrów MTD co np. sygnały pochodzące od ech nieruchomych. Wykrycie takiego obiektu jest znacznie utrudnione z powodu podwyższonego poziomu sygnałów niepożądanych. Aby móc skutecznie zlokalizować cel poruszający się z taką "prędkością ślepą" można np. zmodyfikować częstotliwość pracy w taki sposób, aby odpowiadająca jej częstotliwość dopplerowska uległa zmianie. Innym rozwiązaniem problemu ślepych prędkości jest zmiana okresu powtarzania sondowań między segmentami. Problemy z aliasingiem częstotliwości dopplerowskiej można rozwiązać wykorzystując specjalnie w tym celu opracowane algorytmy [36].

### 1.2.4 Filtracja MTI

Filtracja MTI (ang. Moving Target Indication) opiera swoje działanie o górnoprzepustowy filtr FIR pracujący na próbkach sygnału pochodzących z kolejnych sondowań. W przypadku obserwacji echa nieruchomego (faza pozostaje stała w kolejnych sondowaniach) poziom sygnału na wyjściu filtra MTI zostanie stłumiony. Najprostsze charakterystyki amplitudowe filtrów przedstawiono na rysunku 1.9. Linia ciągłą oznaczono charakterystykę częstotliwościową filtra o 3 współczynnikach:  $[1 \ -2 \ 1]$ , natomiast kropkowaną 2-współczynnikowy filtr  $[1 \ -1]$ . Zaletą takiego rozwiązania jest niższa złożo-



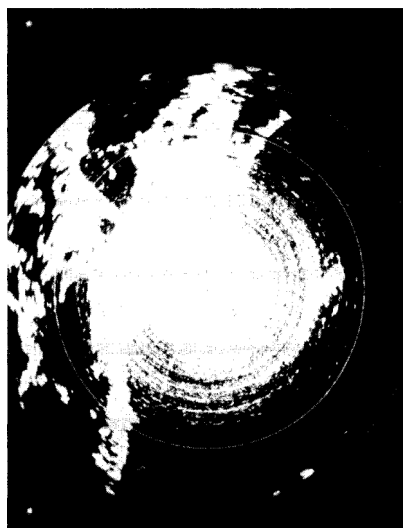
Rys. 1.9: Charakterystyki amplitudowe przykładowych filtrów wykorzystywanych w pracy MTI.

ność obliczeniowa niż w przypadku przetwarzania MTD. Echa celów nieruchomych zostają stłumione, co często jest pożądanym zjawiskiem. Wadą natomiast jest występowanie prędkości ślepych. Poprzez prędkość ślepą należy rozumieć taką prędkość, której odpowiadająca częstotliwość dopplerowska znajduje się w paśmie zaporowym filtra MTI. Na ogół częstotliwość dopplerowska szybko poruszającego się celu jest wyższa niż częstotliwość próbkowania (równa odwrotności okresu powtarzania impulsów), przez co podlega aliasingowi. W efekcie prędkości ślepe powtarzają się okresowo i mogą zostać wyrażone równaniem:

$$v_s = \frac{n \lambda}{2 T_p}, \quad (1.9)$$

gdzie  $\lambda$  jest długością fali,  $T_p$  stanowi okres powtarzania impulsów, a  $n = 0, 1, 2, \dots$  jest numerem prędkości ślepej. Prędkość ślepa zatem to taka prędkość radialna, dla której, po uwzględnieniu efektów związanych z próbkowaniem, dyskretnoczasowa częstotliwość dopplerowska staje się zerowa - a zatem echo celu zostanie stłumione w taki sam sposób jak echo stałe. W odróżnieniu od MTD obiekty poruszające się z prędkością ślepą (w tym prędkością zerową) są tłumione. W MTD obiekty o prędkości ślepej obserwowane są na tle zakłóceń biernych, co utrudnia ich wykrycie. Przetwarzanie MTI stosuje się w momencie, kiedy dostępnych jest zbyt mało sondowań aby móc efektywnie zastosować przetwarzanie MTD.

Porównanie zobrazowań przed i po filtracji MTI pokazują rysunku 1.10a i 1.10b. Po zastosowaniu



(a)



(b)

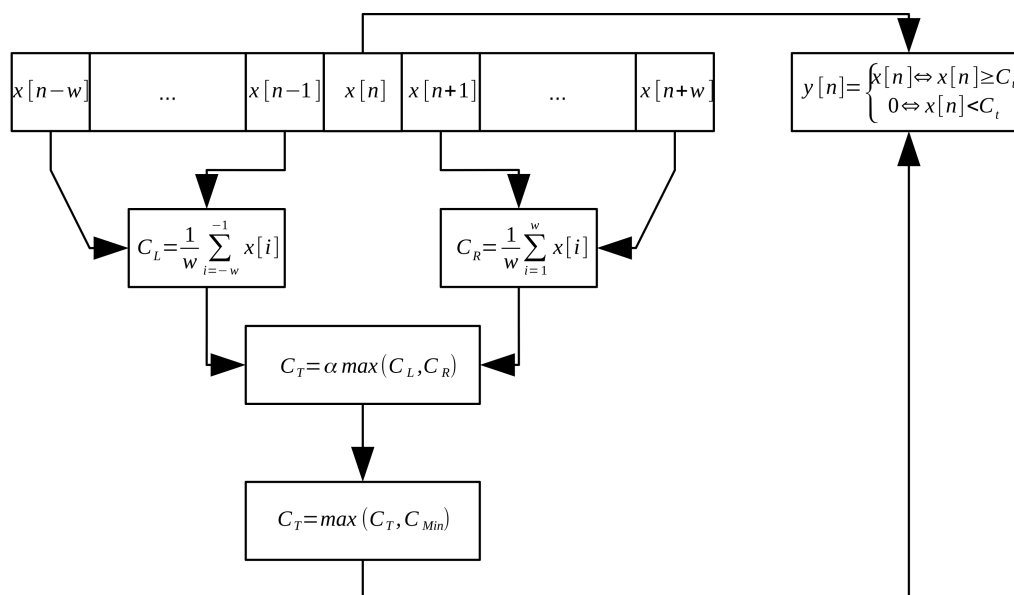
Rys. 1.10: Surowe zobrazowanie radarowe przed (rys. 1.10a) oraz po wykonaniu przetwarzania MTI (rys. 1.10b) [44].

przetwarzania MTI widoczny jest znaczący spadek poziomu sygnału, który podchodził od echa wolno zmiennych. Pozostałe, jasne punkty, pochodzą od obiektów poruszających się. Zakładając, że echa stałe nie mają znaczenia z punktu widzenia obserwacji radarowych - nastąpiła znacząca poprawa czytelności zobrazowania.

### 1.2.5 Układ stabilizacji poziomu fałszywego alarmu

Po filtracji MTD, sygnały pochodzące z poszczególnych banków filtrów są przetwarzane niezależnie od siebie. W pierwszej kolejności liczony jest kwadrat modułu każdej z przetwarzanych komórek odległościowych. Jest to wymagane do poprawnej pracy kolejnego z algorytmów - CFAR (ang. Constant False Alarm Rate), którego celem jest utrzymanie stałego poziomu prawdopodobieństwa fałszywej detekcji. Opiera on swoją zasadę działania na oszacowaniu średniego poziomu zakłóceń w otoczeniu lewo i prawostronnym względem analizowanej komórki odległościowej. Spośród obu średnich wartości (określonych na podstawie  $W$  próbek sprzed i zza badanej komórki) wybierana jest większa z obu wartości oszacowania poziomu zakłóceń (wariant CFAR-GO). Czasami spotyka się dodatkowy współczynnik skalujący oszacowanie poziomu zakłóceń. Często wprowadza się również arbitralnie przyjmowany próg pozwalający ustalić minimalną wartość sygnału jaką musi osiągnąć potencjalne echo aby zostało rozpoznane jako prawidłowa detekcja. Wartość tego progu ustala operator na podstawie aktualnej sytuacji radiolokacyjnej. Kiedy wartość analizowanej próbki wykracza ponad większą z średnich oraz wspomniany próg - zostaje ona przepuszczona bez modyfikacji i świadczy o wstępnym wykryciu celu. Procedurę CFAR przedstawiono na rysunku 1.11.

Istnieje wiele odmian algorytmu CFAR różniących się własnościami oraz złożonością obliczeniową. W przedstawionym przykładzie wykorzystano algorytm CFAR GO (greatest of), w którym wybierana



Rys. 1.11: Schemat algorytmu GO-CFAR.

jest większa z uśrednionych próbek otoczenia lewo- i prawostronnego. Istnieją jednak też inne odmiany np. CFAR CA (cell-averaging - otoczenie lewo i prawostronne są uśredniane) czy CFAR SO (smallest of - wybierana jest mniejsza z obu wartości). Spotyka się również algorytmy w których w trakcie szacowania poziomu zakłóceń wykluczane są największe spośród dostępnych wartości (tzw. censored CFAR) [45]. Celem takiego wykluczenia jest próba ominięcia sytuacji, w której silny cel znajduje się w oknie uśredniania podnosząc przez to oszacowanie poziomu szumu, co z kolei może doprowadzić do niewykrycia pobliskiego obiektu o słabszym echu. Spotykane są również algorytmy CFAR oparte o statystyki porządkowe (tzw. OS-CFAR) [46].

### 1.2.6 Wybór maksimum i detekcja

Kolejnym krokiem jest wybranie danych pochodzących z filtra MTD, dla którego sygnał posiada największą wartość. Indeks filtra określany jest dla każdej komórki odległościowej. Numer banku, w którym wystąpiło maksimum zostaje przepisany do oddzielnego obszaru - może zostać użyty w dalszym etapie obróbki do zgrubej estymacji prędkości radialnej. Dane po filtracji danym filtrem przekazywane są do dalszej obróbki.

Wybór maksimum nie jest zawsze wykonywany, np. w przypadku filtracji MTI, bądź przy przetwarzaniu niekoherentnym. Istnieją ponadto radary, w których mimo zastosowania filtracji MTD nie zostaje wybrane maksimum sygnału w dziedzinie częstotliwości przesunięcia dopplerowskiego, a dalsza detekcja prowadzona jest w sposób równoległy dla sygnału będącego efektem filtracji każdym filtrow.

Każda z uzyskanych próbek sygnału jest ostatecznie porównywana z wartością progu detekcji ( $K_{Det}$ ). Poziom progu jest ustawiany w trakcie pracy przez operatora radaru. Jego zmiana pozwala na określenie poziomu fałszywego alarmu, ale również prawdopodobieństwo detekcji. Wszystkie sygnały posiadające wartość mniejsze od progu zostają wyzerowane. Pozostałe (niezerowe) próbki można trak-



---

tować jako wykrycia elementarne. W zależności od sposobu realizacji estymacji współrzędnych zostają z nimi skojarzone sygnały pierwotne (z poszczególnych elementów antenowych), bądź dane w postaci uformowanych wiązek.

### 1.2.7 Dodatkowe algorytmy poprawiające parametry radaru

Przedstawiony opis jest ogólnym zarysem schematu wstępnej obróbki sygnału oraz procesu detekcji. W bardziej zaawansowanych systemach można dołączyć do tego takie operacje jak chociażby mapa zakłóceń [47]. Stanowi ona obszar pamięci, w którym zostają wpisane średnie wartości sygnału dla każdej komórki w 4-wymiarowej przestrzeni (odległość, azymut, elewacja, prędkość radialna). Jest ona na bieżąco aktualizowana i w przypadku kiedy pojedyncze wykrycie znajduje się stale w tym samym miejscu w przestrzeni - zostaje ono stłumione. Jest to dodatkowy mechanizm umożliwiający odfiltrowanie celów nieruchomych, które jednak posiadają przesunięcie dopplerowskie jak np. wiatraki, czy wahające się na wietrze maszty nadawcze.

Innym stosowanym zabiegiem jest eliminacja zakłóceń impulsowych, który ma miejsce jeszcze przed filtracją dopplerowską (w przypadku przetwarzania MTD/MTI). Jej celem jest odrzucenie silnych impulsów w jednym z sondowań. Źródłem takich sygnałów mogą być np. działania wroga mające na celu zakłócanie pracy radaru, bądź w skrajnych sytuacjach pozorowanie lokalizacji obiektu.

### 1.2.8 Proces estymacji

Proces detekcji nie posiada żadnych mechanizmów umożliwiających kojarzenie wykryć mogących pochodzić od jednego obiektu. Z tego powodu pierwszym krokiem w procesie estymacji jest grupowanie wykryć pierwotnych. W najprostszym przypadku zakłada się, że wykrycia znajdują się odpowiednio blisko siebie pochodzą od jednego obiektu. Bardziej zaawansowane rozwiązania mogą brać pod uwagę również prędkość radialną. Na tak wyselekcjonowanych sygnałach wykonywany jest proces estymacji. W zależności od dostępnych sygnałów może on obejmować estymację elewacji, azymutu, odległości i prędkości radialnej. Proces ten polega na możliwie precyzyjnym określeniu współrzędnych celu, przy czym opierać się może o różnego typu algorytmy, które omówione zostaną w kolejnym rozdziale. W zależności od zastosowanych rozwiązań, może to być jedna z bardziej złożonych operacji przetwarzania w radarze, wymagająca poszukiwania globalnego minimum funkcji kosztu. Zaawansowane metody estymacji wymagają często poszukiwania ekstremów funkcji kilku zmiennych, co może być kosztowne obliczeniowo. Efektem estymacji jest oszacowanie położenia celu, do którego dołączone mogą zostać dodatkowe informacje takie jak wstępna klasyfikacja celu, estymata powierzchni skutecznej odbicia, czy szacowanie niepewności estymat współrzędnych. Zbiór uzyskanych informacji przekazywany jest dalej do modułu śledzenia.

### 1.2.9 Moduł śledzenia

Na etapie śledzenia nie występują już surowe sygnały radarowe, a jedynie współrzędne oraz dodatkowe dane przekazane przez proces estymacji. Oznacza to, że od tego momentu można mówić o przetwarzaniu danych radarowych. W uproszczeniu, moduł śledzenia dokonuje kojarzenia wykryć z wielu oświetleń, łącząc je w tzw. trasy. Do kojarzenia wykorzystywane mogą być różnego typu algorytmy takie jak MHT [48, 49]. Moduł śledzenia może również dokonywać filtracji pomiarów położenia wypracowywanych przez moduł estymacji za pomocą algorytmów takich jak np. filtr Kalmana, bądź IMM [48, 49], co przekłada się na dalszą poprawę dokładności określania współrzędnych. Analiza zachowania obiektu może pozwolić na określenie typu obserwowanego celu (np. odróżnienie myśliwca od awionetki). Istnieje ponadto możliwość predykcji przyszłego położenia w oparciu o modele ruchu. Pozwala to na kierowanie wiązki radaru w taki sposób, aby móc promieniować więcej energii w obszar, do którego przemiesza się śledzony obiekt. Historia położenia obiektu wraz z predykcją mogą być przesyłane do operatora radaru w celu przedstawienia aktualnej sytuacji radiolokacyjnej. W specyficznych typach radarów trasy są również przesyłane do kolejnego modułu - przelicznika balistycznego.

### 1.2.10 Moduł przelicznika balistycznego

Przelicznik balistyczny jest wysoce wyspecjalizowany modułem, stosunkowo nowym z punktu widzenia historii radiolokacji. Jego zadaniem jest określanie współrzędnych wystrzału i upadku obiektów poruszających się po trajektoriach balistycznych. Odbiera on trasy od modułu śledzenia, a następnie dopasowuje je do posiadanej bazy danych, podejmując jednocześnie decyzję czy obserwowany obiekt porusza się w sposób specyficzny dla pocisków. Wbudowana baza danych modeli balistycznych pozwala ponadto na określanie typu obserwowanego pocisku, a czasem również rodzaju działa bądź wyrzutni. Zastosowanie przelicznika balistycznego pozwala zarówno na obserwację strzelań wojsk własnych, jak i obserwację działań wroga. W przypadku strzelań na duże odległości czas między wystrzałem a upadkiem może wynosić nawet kilka minut, co umożliwia ostrzeżenie własnych oddziałów o zagrożeniu. Lokalizacja punktu wystrzału pozwala jednocześnie na szybkie odpowiedzenie ogniem. Dane określone przez moduł przelicznika mogą być przekazywane operatorowi, lub przesyłane do stanowisk dowodzenia usprawniając szybkie podejmowanie decyzji [50, 51].

## Rozdział 2

# Przegląd metod estymacji współrzędnych

Poniższy rozdział zawiera przegląd metod estymacji kąta odbioru sygnału echa. Otwiera go opis sposobu modelowania sygnałów radarowych, w którym przedstawiono podejście deterministyczne oraz stochastyczne. Opisano szereg algorytmów wykorzystujące różne własności sygnałów. Każdy z nich został przetestowany w jednakowych warunkach, a efektywność porównano z ograniczeniem Craméra-Rao. Prezentację metod estymacji poprzedza opis wykonanych testów oraz użytych w nich parametrów pracy. Rozdział kończy podsumowanie porównujące przedstawione algorytmy.

### 2.1 Model danych

W trakcie określania modelu danych, na podstawie których będzie prowadzona estymacja, kluczowe jest zdefiniowanie podstawowych parametrów odzwierciedlających fizyczną strukturę radaru oraz realizowany przez niego tryb pracy. Jedną z istotniejszych kwestii jest rodzaj anteny - przedstawiony wcześniej szyk liniowy (rys. 1.4) jest często spotykanym przypadkiem, jednak możliwe są również inne sposoby ułożenia elementów odbiorczych. Jako przykład można podać szyk antenowy, w którym elementy nadawczo-odbiorcze są pogrupowane w płaskie subapertury o nieregularnym kształcie (dla anten radarów umieszczonych w dziobie samolotu) bądź z elementami ułożonymi na powierzchni bocznej walca [52]. W przypadku szyku liniowego podstawową cechą jest liczba elementów odbiorczych wchodzących w skład apertury ( $M$ ) - przekłada się ona na wymiary macierzy użytych na etapie formowania wiązek, kierunkowość anteny, jak i ostateczny poziom stosunku sygnału do szumu. Istotną kwestią jest również liczba dostępnych sygnałów wynikająca z liczby sondowań ( $N$ ) wykonanych przez radar. Wraz ze wzrostem liczby obserwacji wchodzących w skład segmentu rośnie ilość danych do przetworzenia, umożliwiając na ogół poprawę jakości oszacowania estymowanych współrzędnych. Dużą rolę mogą odgrywać również pomiary charakterystyk antenowych - te w związku z niedokładnościami procesu produkcyjnego mogą odbiegać od wartości teoretycznych. W takiej sytuacji pomiar umożliwia

kompensację niedoskonałości, poprawiając precyzję estymat kątów. Przedstawione przykłady pokazują, że model jest nierozzerwalnie związany z budową radaru i znaczna część postawionych założeń wynika z fizycznej konstrukcji anteny.

Przyjmijmy dalej, że antena składa się z  $M$  elementów odbiorczych umieszczonych w szyku liniowym (jak w rys. 1.4), o odstępach między elementami równym  $d = \lambda/2$ , przy czym  $\lambda$  stanowi długość fali odbieranego sygnału. Tego typu liniowy szyk antenowy (ang. ULA - Uniform Linear Array) pozwala na estymację jednego z kątów (azymutu bądź elewacji - w zależności od sposobu ułożenia). Zakładając że sygnał odbity od celu pada na elementy szyku pod kątem  $\theta$ , sygnały rejestrowane przez poszczególne elementy odbiorcze można zapisać w postaci wektora:

$$\mathbf{a}(\theta) = [1 \quad e^{j2\pi d \sin \theta / \lambda} \quad \dots \quad e^{j(M-1)2\pi d \sin \theta / \lambda}]^T. \quad (2.1)$$

Równanie (2.1) wynika z różnic w fazie sygnału docierającego do poszczególnych elementów odbiorczych (rys. 2.1). Sama różnica w fazie wynika z różnego czasu dotarcia czoła fali płaskiej do poszczególnych elementów anteny. Przyjęcie płaskiego charakteru fali ma w większości przypadków pomijalny wpływ na pracę radaru<sup>1</sup>. Dla  $\theta = 0^\circ$  opóźnienie nie występuje, co prowadzi do sytuacji, w której sygnały odbierane przez poszczególne elementy szyku posiadają jednakową fazę. Wraz z zmianą kąta padania fali różnica w fazach pogłębia się.

Zarejestrowany sygnał, pochodzący od echa znajdującego się na kącie  $\theta_0$  będzie miał zatem postać:

$$\mathbf{y} = s\mathbf{a}(\theta_0) + \mathbf{v}_n, \quad (2.2)$$

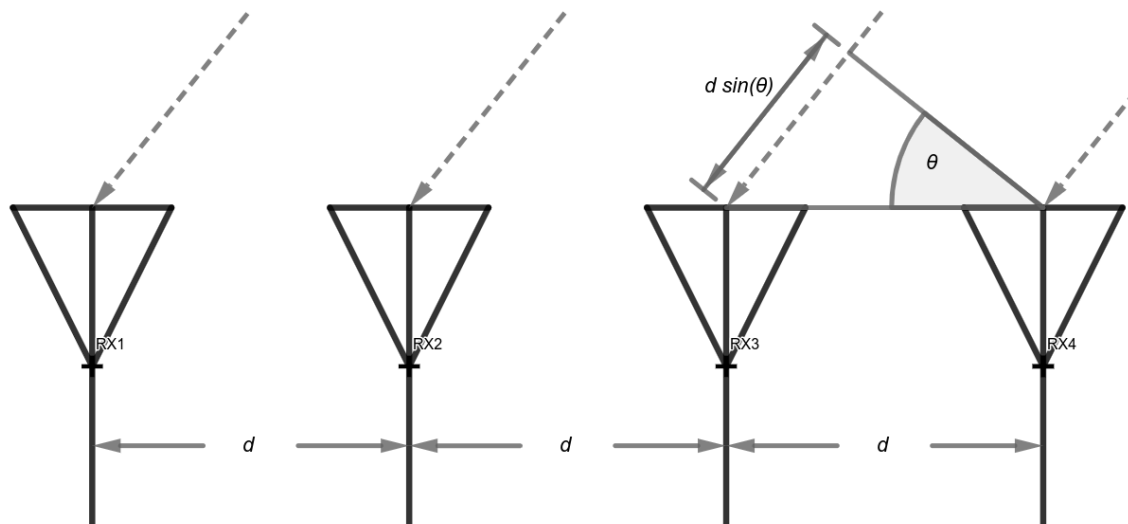
gdzie  $\mathbf{y}$  jest zarejestrowanym sygnałem,  $s$  jest zespoloną amplitudą echa,  $\mathbf{a}(\theta_0)$  stanowi odpowiedź anteny na echo zarejestrowane pod kątem  $\theta_0$ , a  $\mathbf{v}_n \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma_v^2 \mathbf{I})$  jest wektorową zmienną losową o rozkładzie Gaussa z zerową wartością oczekiwaną i macierzą kowariancji  $\sigma_v^2 \mathbf{I}$ , która odzwierciedla szum pomiarowy. Jest to dokładnie taki sam model jak przedstawiony w podrozdziale 1.2.2.

Należy zwrócić uwagę, że przy przyjętej definicji odpowiedzi antenowej, sumaryczna moc zarejestrowanego sygnału rośnie wraz z liczbą elementów. Oznacza to, że choć przedstawiony w symulacjach parametr  $SNR$  będzie odnosił się do pojedynczego elementu odbiorczego anteny, wraz ze wzrostem liczby elementów antenowych ( $M$ ) rośnie również stosunek całkowitego sygnału do szumu, co można przedstawić za pomocą wzoru:

$$SNR = \frac{E[s]^2 \|\mathbf{a}(\theta)\|^2}{\sigma_v^2} \quad (2.3)$$

Rozważono dwie klasy modeli sygnału echa: deterministyczny i stochastyczny. W modelu deterministycznym zmiany zespolonej amplitudy sygnału obserwowane w kolejnych sondowaniach da się opisać za pomocą funkcji, której argumenty są parametrami modelu. Najprostszym przykładem jest model, w którym nieznaną deterministyczną amplitudą pozostaje stała w trakcie trwania segmentu złożonego z  $N$  sondowań. W takim wypadku sygnał docierający do odbiorników jest koherentny, a jego opis matematyczny przedstawia wzór:

<sup>1</sup>Istnieją opracowania podejmujące w sposób szeroki błędy wynikające z nieidealnie płaskiego charakteru fali [53].



Rys. 2.1: Schemat 4 elementów odbiorczych z ukazaniem różnicy w fazie odbieranego sygnału.

$$\mathbf{y}_n = \sum_{k=1}^K s_k \mathbf{a}(\theta_k) + \mathbf{v}_n \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (2.4)$$

w którym:  $K \geq 1$  oznacza liczbę obserwowanych obiektów,  $s_k$  stanowi zespoloną amplitudę  $k$ -tego obiektu, a  $\theta_k$  kąt, na którym znajduje się  $k$ -ty cel. W takim przypadku istotne jest założenie, że wartość amplitudy  $s_k$  nie jest zależna od numeru obserwacji  $n$ . Model ten odzwierciedla przypadek, w którym obserwowany cel jest nieruchomy i nie występuje przesunięcie dopplerowskie (zerowa prędkość radialna). Na ogół założenie takie jest zbyt silne i nie zawsze spełniane, przez co model ten nie jest często wykorzystywany. Zaletą tego rozwiązania jest dosyć niska złożoność. Cały model posiada jedynie 4 parametry - kąt odbioru  $\theta$ , moduł i fazę zespolonej amplitudy  $s_k$ , oraz wariancję szumu  $\sigma_v^2$ .

Istnieją też inne, bardziej skomplikowane modele deterministyczne. Można tu przytoczyć przykład, w którym zakłada się stały moduł amplitudy i liniowo zmienną fazę (model uwzględniający przesunięcie dopplerowskie) [54]. Opisuje on sytuację, w której obiekt porusza się z stałą prędkością radialną. Mając na uwadze stosunkowo krótki czas trwania segmentu (rzędu milisekund), założenie niezmiennej prędkości można w przybliżeniu uznać za spełnione. W efekcie odbierany sygnał będzie posiadał stałą różnicę fazy między kolejnymi sondowaniami i będzie stanowiła ona dodatkowy parametr modelu. Założenie stałego modułu amplitudy również wynika z krótkiego okresu obserwacji. Model ten stanowi uogólnienie przypadku ze stałą amplitudą [wzór (2.4)], dodając do niego możliwość szacowania zmian fazy między kolejnymi sondowaniami, co z kolei umożliwi estymację prędkości radialnej. W takim przypadku model posiada 5 parametrów: kąt odbioru  $\theta$ , moduł amplitudy, fazę sygnału w trakcie pierwszego skanu, przyrost fazy między sondowaniami, oraz wariancję szumu.

Najbardziej rozbudowanym, ale jednocześnie najbardziej ogólnym modelem jest taki, w którym parametrami są amplituda i faza każdego z sondowań. Złożoność takiego modelu rośnie wraz z liczbą sondowań oraz liczbą obserwowanych celów, a liczba parametrów opisujących samą amplitudę sygnału równa jest  $2NK$ . Taki sposób modelowania sygnału przedstawia równanie (2.5), w którym  $s_{k,n}$  oznacza

zespoloną amplitudę  $k$ -tego obiektu w  $n$ -tym sondowaniu:

$$\mathbf{y}_n = \sum_{k=1}^K s_{k,n} \mathbf{a}(\theta_k) + \mathbf{v}_n. \quad (2.5)$$

Drugim ze sposobów modelowania sygnałów jest podejście stochastyczne, w którym zakłada się, że amplitudy są pojedynczymi realizacjami zespolonej zmiennej losowej, różnymi dla każdego skanu przestrzeni. Zapis taki jest zbliżony do ogólnego modelu deterministycznego [równanie (2.5)], jednak w przypadku modelu stochastycznego parametrami nie są poszczególne wartości amplitud, a jedynie własności statystyczne z nimi związane, takie jak wariancja. Przyjmując oznaczenia:

$$\mathbf{S} = [s_{1,n} \ s_{2,n} \ \cdots \ s_{K,n}]^T,$$

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \ \cdots \ \mathbf{a}(\theta_K)],$$

model (2.5) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S} + \mathbf{N}. \quad (2.6)$$

W takim wypadku macierz kowariancji sygnału opisuje równanie (przy założeniu  $E[\mathbf{S}] = 0$ )

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H] = E[\mathbf{A}(\theta)\mathbf{S}\mathbf{S}^H\mathbf{A}^H(\theta)] + \sigma_v^2\mathbf{I} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}^H(\theta) + \sigma_v^2\mathbf{I},$$

gdzie

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_K^2 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

jest macierzą kowariancji amplitud,  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową, natomiast  $(\cdot)^H$  oznacza sprzężenie hermitowskie macierzy. W macierzy  $\mathbf{\Sigma}$  założono brak skorelowania źródeł sygnału. W takim wypadku macierz kowariancji jest macierzą diagonalną, a symbole  $\sigma_1^2 \cdots \sigma_K^2$  oznaczają wariancję amplitud dla kolejnych źródeł.

Najczęściej przyjmuje się, że  $\mathbf{N}$  jest macierzą szumu, której kolumny są niezależnymi wektorami o zespolonym rozkładzie gaussowskim:  $\mathbf{N} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma_v^2\mathbf{I})$ . Takie samo założenie stawiane jest również w stosunku do amplitud:  $\mathbf{S} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ , co powoduje że zarejestrowany sygnał  $\mathbf{Y}$  także posiada zespolony rozkład gaussowski:  $\mathbf{Y} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma} + \sigma_v^2\mathbf{I})$ . W modelu opisanym równaniem (2.6) stosunek sygnału do szumu ( $SNR$ ) jest definiowany dla każdego z celów i wynosi  $\|\mathbf{a}(\theta)\|^2\sigma_k^2/\sigma_v^2$ .

Powyższy model jest wykorzystywany w przypadku kiedy nie można założyć sposobu w jaki zmienia się amplituda sygnału, jest to trudne, lub prowadzi do zbyt skomplikowanego opisu. Przy podejściu stochastycznym amplitudy sygnału w poszczególnych obserwacjach nie są szacowane, a parametrem modelu jest jedynie ich macierz kowariancji.

## 2.2 Metody nieparametryczne

### 2.2.1 Metoda monoimpulsowa

Metoda monoimpulsowa jest jednym z prostszych sposobów estymacji kąta odbioru sygnału. Wyodróżniane są dwie odmiany tej metody: monoimpuls amplitudowy i fazowy [55]. W przypadku wersji amplitudowej w antenie formowane są (w najprostszej wersji) dwie, rozsunięte wiązki odbiorcze, z których wartości sygnałów są wykorzystywane do estymacji. Analizując stosunek koherentnej różnicy obu amplitud do koherentnej sumy można oszacować kierunek odbioru sygnału echa. Algorytm w wersji fazowej działa w oparciu o sygnały odebrane z dwóch sąsiednich elementów odbiorczych lub subapertur, a do określenia kąta odbioru wykorzystuje się różnicę fazy.

Oba warianty metody można zunifikować wprowadzając pojęcia wiązki sumacyjnej ( $\Sigma(\theta)$ ) i różnicowej ( $\Delta(\theta)$ ). Do ich wygenerowania można skorzystać z dowolnej funkcji okna wagowego, jednak utworzenie wiązki różnicowej wymaga zastosowania dodatkowego wektora wagowego (wzór 2.8):

$$\mathbf{w}_\Delta = w_\Delta(i) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i \leq \frac{M}{2} \\ -1 & \text{dla } i > \frac{M}{2}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Taper rozkładu wiązki różnicowej (2.8) mnożony jest na zasadzie iloczynu Hadamarda z istniejącym taperem, formującym kształt wiązki sumacyjnej:  $\Delta(\theta) = (\mathbf{w}_\Delta \odot \mathbf{w}_\Sigma)^H \mathbf{Y}$ . Cechą charakterystyczną wiązki różnicowej jest fakt, że posiada zerową wartość dla kąta, przy którym wiązka sumacyjna osiąga maksimum.

Na podstawie sygnałów z obu wiązek oblicza się tzw. iloraz monoimpulsowy:

$$d_{MP} = \text{Im} \left( \frac{\Delta}{\Sigma} \right). \quad (2.9)$$

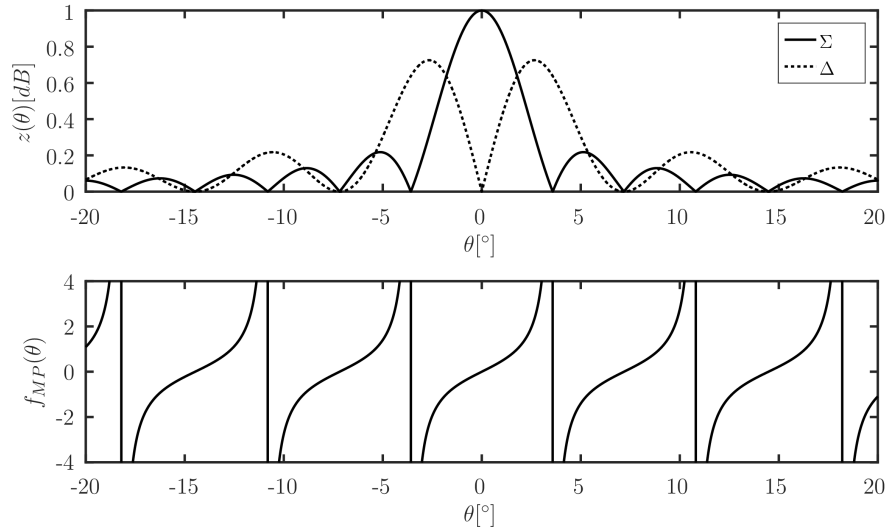
Uzyskana wartość  $d_{MP}$  na dalszym etapie porównywana jest z charakterystyką pelengacyjną. Jest ona funkcją opisującą wartości ilorazu monoimpulsowego w zależności od kąta odbioru sygnału przy założeniu nieskończonego SNR:

$$f_{MP}(\theta) = d_{MP}(\theta) = \text{Im} \left( \frac{\Delta(\theta)}{\Sigma(\theta)} \right) \Big|_{\text{SNR} \rightarrow \infty}. \quad (2.10)$$

Kształt wiązek oraz charakterystyki pelengacyjnej przedstawiono na wykresie 2.2. Funkcja  $f_{MP}(\theta)$  może przyjmować nieco inną postać w zależności od charakterystyk wiązek, ale ogólna zasada pozostaje niezmienną. Funkcja ta jest na ogół nieliniowa.

Estymacja kąta odbioru echa polega na obliczeniu wartości ilorazu monoimpulsowego (2.9) dla posiadanych sygnałów, a następnie podstawieniu jej wartości do funkcji odwrotnej (uzyskanej na drodze symulacji bądź przy pomocy pomiarów anteny). Wynikiem będzie oszacowanie kąta padania fali względem maksimum wiązki sumacyjnej. W przypadku dostępności wielu obserwacji estymowany kąt można uśrednić po realizacjach np. według wzoru:

$$\hat{\theta}_{MP} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_{MP}^{-1} \left( \frac{\Delta_n}{\Sigma_n} \right) + \theta_0. \quad (2.11)$$



Rys. 2.2: Charakterystyka napięciowa wiązek sumacyjnej ( $\Sigma$ ) i różnicowej ( $\Delta$ ) oraz odpowiadający im kształt funkcji poprawki monoimpulsowej (do uformowania wiązki sumacyjnej zastosowano rozkład równomierny).

Jak pokazano na wykresie 2.2, funkcja  $f_{MP}(\theta)$  nie jest różnowartościowa. Z tego powodu ogranicza się dziedzinę funkcji  $f_{MP}(\theta)$  do kątów listka głównego wiązki sumacyjnej. Pomiarzy spoza tego zakresu są odrzucane.

W praktyce, funkcję odwrotną do funkcji poprawki monoimpulsowej oblicza się na podstawie pomiarów charakterystyk anteny. Funkcja taka może być przybliżona za pomocą wielomianu, bądź przechowywana w postaci tabelarycznej (w obu przypadkach obliczenia wiązane z odwracaniem funkcji poprawki monoimpulsowej mogą być wykonane offline). Zabieg taki znacząco obniża złożoność obliczeniową algorytmu - estymacja kąta ogranicza się do obliczenia wartości wielomianu (poprawki względem środka wiązki) dla zadanego parametru (ilorazu monoimpulsowego), bądź odczytaniu odpowiedniej wartości z tablicy. Dzięki prostej implementacji i niskiej złożoności obliczeniowej metoda ta cieszy się dużą popularnością, szczególnie w przypadku urządzeń działających w czasie rzeczywistym. Wynika ona z możliwości określenia kąta na podstawie pomiarów ( $\hat{\theta}_{MP} = f(\mathbf{Y})$ ), bez poszukiwania ekstremum - liczba obliczeń wymaganych do określenia kąta odbioru jest stała. Wadą metody monoimpulsowej jest brak możliwości estymowania parametrów celu znajdującego się poza listkiem głównym wiązki sumacyjnej. Wynika to z faktu, że poza tym przedziałem funkcja  $f_{MP}(\theta)$  nie jest, w ogólności, odwracalna. W praktyce problem obchodzi się wykluczając z uśredniania sondowania, w których nie jest spełniony warunek  $|\Sigma_n| \geq |\Delta_n|$ . Efektem takiego postępowania jest zmniejszenie dostępnej liczby obserwacji, co w sposób negatywny wpływa na jakość oszacowań. Sam warunek przewyższenia poziomu sygnału w wiązce sumacyjnej nad różnicową może zostać również spełniony przy niskim poziomie sygnału i znacznym zaszumieniu powodując powstanie znacznych błędów (w rzeczywistości jest to jednak mało prawdopodobne).

Algorytm nie zapewnia ponadto rozróżnialności kątowej dla więcej niż 1 echa, czy możliwości określenia liczby celów. W przypadku obserwacji co najmniej dwóch źródeł echa wartość oszacowania zostanie



zakłamana.

Metoda monoimpulsowa pomimo poważnych wad (przede wszystkim problem w przypadku danych zgodnych z modelem stochastycznym) jest dosyć często spotykana ze względu na niską złożoność obliczeniową oraz prostotę implementacji. W optymalnych warunkach (odpowiedni  $SNR$ , stała amplituda sygnału) może dawać oszacowanie o jakości zbliżonej do znacznie bardziej złożonych estymatorów.

## 2.2.2 Metody wykorzystujące formowanie wiązek

Metody wykorzystujące formowanie wiązek należą do grupy algorytmów nieparametrycznych. Zasada ich działania opiera się na szacowaniu energii echa dochodzącej z różnych kierunków, a następnie wyborze tego, dla którego oszacowanie to osiąga maksimum. Nie wymagają one do prawidłowego działania wiedzy na temat rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych (rozkładu amplitudy bądź szumu).

Metoda formowania wiązek opiera się na zastosowaniu filtra  $\mathbf{w}(\theta)$ , którego celem jest określenie energii sygnału odebranej na kącie  $\theta$ . W najprostszym przypadku jest to wektor o podobnej konstrukcji do wektora sterującego, różniący się jedynie odwróceniem w fazie. Dodatkowo elementy tego wektora mogą zostać pomnożone przez okno wagowe  $w_m$  (w najprostszej postaci jest to unormowany wektor  $M$  jedynek), które pozwala w pewnym stopniu kształtować szerokość wiązki oraz poziom listków bocznych. Wektor wag przyjmuje wtedy postać:

$$\mathbf{w}_m(\theta) = w_m e^{-j 2 \pi d (m-1) \sin \theta / \lambda}. \quad (2.12)$$

Proces formowania wiązek polega na zsumowaniu sygnału odebranego przez poszczególne elementy z uprzednim przemnożeniem przez współczynniki filtra:

$$x_n = \sum_{m=1}^M \mathbf{w}_m^*(\theta) y_{n,m} = \mathbf{w}^H(\theta) \mathbf{y}_n. \quad (2.13)$$

W takim wypadku oszacowanie mocy odbieranej na kierunku  $\theta$  można przedstawić za pomocą wzoru:

$$\hat{\sigma}^2(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\mathbf{w}^H(\theta) \mathbf{y}_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{w}^H(\theta) \mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^H \mathbf{w}(\theta) = \mathbf{w}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}} \mathbf{w}(\theta), \quad (2.14)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^H$  jest oszacowaniem macierzy kowariancji uzyskanym na podstawie dostępnych sygnałów. Działanie prostego estymatora opierającego się na formowaniu wiązek przedstawiono w sekcji 2.2.3.

## 2.2.3 Klasyczne formowanie wiązek

Klasyczne formowanie wiązek opiera się na zasadzie koherentnego sumowania sygnałów odebranych przez poszczególne elementy antenowe, które uprzednio zostały przesunięte w fazie w taki sposób, aby zniwelować różnice spowodowane odbieraniem czoła fali pod pewnym kątem. Odbywa się to poprzez dodanie opóźnienia  $\tau_m$  do czasu odbioru z poszczególnych czujników:

$$x_{conv}(t) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M y_m(t + \tau_m), \quad (2.15)$$

gdzie  $y_m, m = 1, 2, \dots, M$  jest sygnałem zarejestrowanym przez  $m$ -ty czujnik (spośród  $M$ ) dostępnych, a  $\tau_m$  oznacza przesunięcie w czasie odbioru czoła fali. Względnie niska częstotliwość próbkowania ( $F_s$ ) powoduje, że opóźnienie ( $\tau$ ) w docieraniu fali do kolejnych czujników jest znacznie mniejsze od okresu próbkowania, co oznacza, że dominującym efektem jest przesunięcie fazy. W związku z tym wzór (2.15) można przedstawić w postaci:

$$x_{conv,n} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M e^{j\omega\tau_m} y_{m,n} = \frac{1}{M} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}_n, \quad (2.16)$$

gdzie  $y_{m,n}$  stanowi odczyt z  $m$ -tej subapertury w  $n$ -tej obserwacji. W przypadku kiedy  $\tau_m$  jest znacząco różne od faktycznie występującego opóźnienia dochodzi do destruktywnej interferencji sygnału, a suma z  $M$  elementów antenowych osiąga niewielkie wartości. Równanie (2.16) przypomina ogólny wzór opisujący sposób formowania wiązek (2.13) przy założeniu, że  $\mathbf{w}(\theta) = \frac{1}{M} \mathbf{a}^H(\theta)$ . Aby uzyskać jednostkową normę wektora  $\mathbf{w}(\theta)$  stosuje się normowanie wektora sterującego  $\mathbf{a}(\theta)$ . Prowadzi to do równania opisującego filtr wykorzystywany w konwencjonalnym formowaniu wiązek:

$$\mathbf{w}_{conv}(\theta) = \frac{\mathbf{a}(\theta)}{\sqrt{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta)}} = \frac{\mathbf{a}(\theta)}{\|\mathbf{a}(\theta)\|}. \quad (2.17)$$

Oszacowana moc może w takim przypadku zostać opisana w funkcji kąta odbioru za pomocą równania:

$$\hat{\sigma}_{conv}^2(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{w}_{conv}^H(\theta) \mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^H \mathbf{w}_{conv}(\theta) = \frac{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^H \mathbf{a}(\theta)}{\sqrt{\mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{a}(\theta)}} = \frac{\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}} \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{a}(\theta)}, \quad (2.18)$$

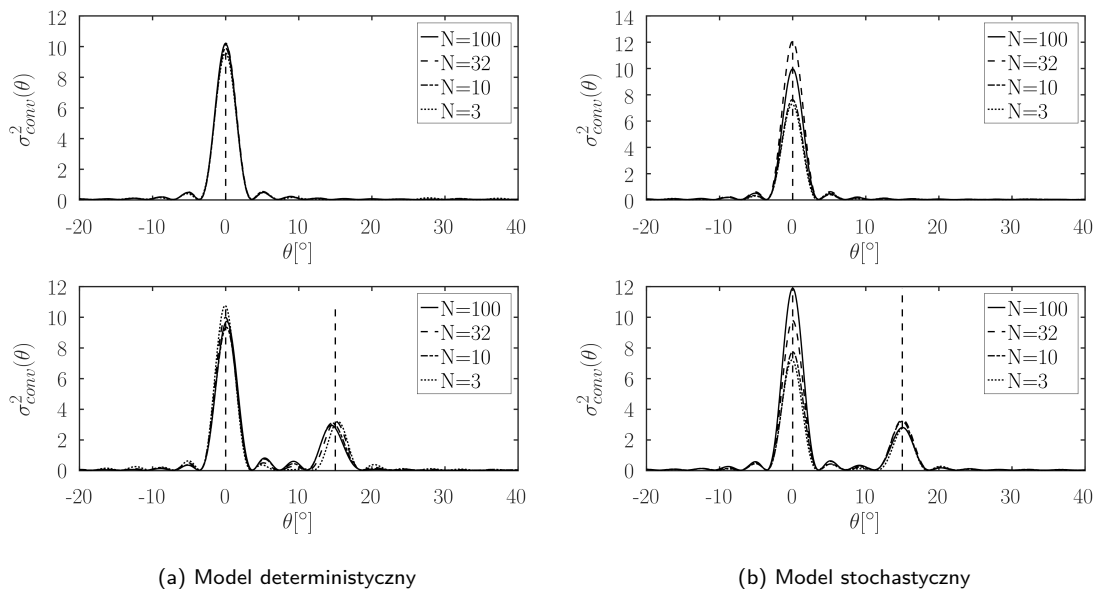
gdzie  $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^H$  oznacza estymatę macierzy kowariancji sygnału. Określenie kąta odbioru echa odbywa się poprzez znalezienie globalnego maksimum funkcji oszacowania mocy:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \hat{\sigma}_{conv}^2(\theta). \quad (2.19)$$

Algorytm w zaprezentowanej postaci posiada pewną potencjalną zdolność do estymacji położenia więcej niż jednego celu, co pokazano na rys. 2.3.

Na górnym z wykresów przedstawiono obserwację jednego celu na kącie  $\theta_1 = 0^\circ$  z  $SNR = 10$  dB. Wyraźnie widoczne jest globalne ekstremum oszacowania mocy, którego lokalizacja odpowiada kątowi odbioru echa. Dolny z wykresów powstał w oparciu o scenariusz zawierający 2 obserwowane cele na kątach równych  $\theta_1 = 0^\circ$  i  $\theta_2 = 15^\circ$ .  $SNR$  wynosił odpowiednio 10 dB i 5 dB. W obu przypadkach zastosowano wektor sterujący złożony z  $M = 32$  elementów oraz 4 różne wartości liczby sondowań przedstawione za pomocą legendy. Do generowania danych wykorzystano model stochastyczny o Gaussowskim rozkładzie amplitud z zerową wartością oczekiwaną i wariancją określoną na podstawie  $SNR$  odnoszącego się do stosunku sygnału do szumu na 1 elemencie odbiorczym. Prawidłowe lokalizacje celu zostały oznaczone na wykresie przerywanymi liniami pionowymi. W przypadku obserwacji dwóch celów na zbliżonych kątach bądź za pomocą szerokiej wiązki, oszacowanie mocy może posiadać nie dwa, a jedno wyróżniające się ekstremum, co uniemożliwi poprawne oszacowanie kąta odbioru obu sygnałów. Algorytm posiada stosunkowo niską złożoność obliczeniową - w najprostszym przypadku nie wymaga on liczenia odwrotności macierzy.

Na wykresie 2.3a przedstawiono wyniki konwencjonalnego formowania wiązek do estymacji kąta odbioru sygnału przy założeniu modelu deterministycznego z niezmienną fazą sygnału w kolejnych



Rys. 2.3: Oszacowanie mocy w przypadku klasycznego formowania wiązek dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (2.3a) i stochastycznego (2.3b).

skanach przestrzeni [wzór (2.4)]. Jakość oszacowania kąta odbioru echa jest zbliżona do przypadku modelu stochastycznego (wykres 2.3b). Wynika to z faktu, że dla klasycznego formowania wiązek nie zakłada się żadnego modelu zmian amplitudy (podejście nieparametryczne), a jedynie określa ilość energii docierającą z poszczególnych kątów. W efekcie zmienność fazy nie ma znaczenia pod warunkiem, że obserwowany jest podwyższony poziom sygnału.

Na kształt funkcji oszacowania mocy (rys. 2.3) ma również użyte okno wagowe (współczynniki  $w_m$ ). Ich modyfikacja wpływa na zarówno szerokość listka głównego jak i poziom listków bocznych.

Klasyczna metoda formowania wiązek jest bardzo dobrym sposobem estymacji kąta odbioru sygnału pod warunkiem, że obserwowany obszar zawiera wyłącznie 1 echo. W przypadku więcej niż jednego celu algorytm zachowuje się w sposób bardzo nieprzewidywalny - istnieją takie kąty, dla których oszacowania będą poprawne, jednak w przeważającej większości przypadków należy liczyć się zarówno z znacznymi błędami systematycznymi jak i dużym rozrzutem estymowanych wartości.

## 2.2.4 Metoda MVDR (estymator Capona)

Metoda MVDR (ang. Minimum Variance Distortionless Response beamformer), występująca również pod nazwą estymatora Capona [56], opiera swoje działanie na doborze współczynników filtra formującego w taki sposób, aby zminimalizować energię [wzór (2.20)] odbieraną z kierunków innych niż obserwowany kąt  $\theta$ , przy założeniu że dla kąta  $\theta$  nie zostaną wprowadzone zniekształcenia:

$$\min_w \mathbf{w}^H(\theta) \mathbf{R} \mathbf{w}(\theta) \quad (2.20)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) = 1. \quad (2.21)$$

Wykorzystując metodę mnożników Lagrange'a można uzyskać postać filtra:

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}^H(\theta)) = \mathbf{w}^H(\theta) \mathbf{R} \mathbf{w}(\theta) + \delta(\mathbf{w}^H(\theta) \mathbf{a}(\theta) - 1), \quad (2.22)$$

$$\mathcal{L}'(\mathbf{w}^H(\theta)) = 2\mathbf{R} \mathbf{w}(\theta) + \delta \mathbf{a}(\theta) = 0 \rightarrow 2\mathbf{R} \mathbf{w}(\theta) = -\delta \mathbf{a}(\theta), \quad (2.23)$$

$$\mathbf{w}(\theta) = -\frac{1}{2} \delta \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta), \quad (2.24)$$

$$\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{w}(\theta) = -\frac{1}{2} \delta \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta) = 1 \rightarrow \delta = -2 \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{w}_{MVDR}^H(\theta) = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}, \quad (2.26)$$

co przekłada się na funkcję oszacowania mocy o postaci:

$$P_{MVDR}(\theta) = (\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta))^{-1}. \quad (2.27)$$

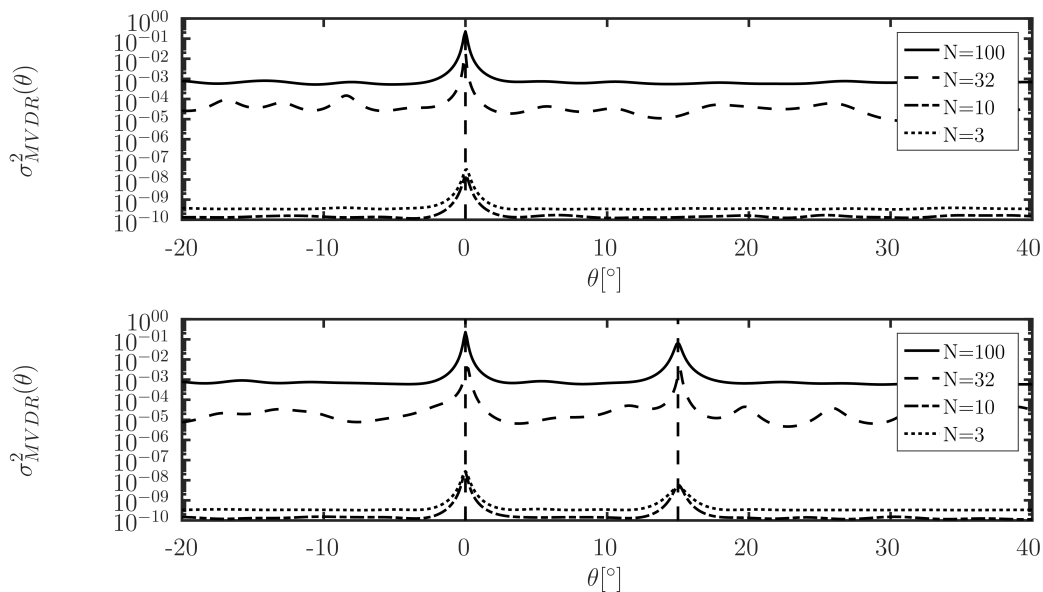
Ostatecznie określenie kąta odbioru odbywa się poprzez znalezienie maksimum mocy według wzoru:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} P_{MVDR}(\theta) |_{\mathbf{R}=\hat{\mathbf{R}}}. \quad (2.28)$$

Estymator Capona wymaga, aby macierz kowariancji  $\hat{\mathbf{R}}$  była nieosobliwa. Warunek ten jest spełniony w momencie kiedy liczba obserwacji ( $N$ ) jest większa od wymiaru wektora obserwacji ( $M$ ).

Testy estymatora MVDR przy wykorzystywanych wcześniej parametrach pracy algorytmów (w szczególności  $N = 10$ ,  $M = 32$ ) uniemożliwiają uzyskanie odwrotności macierzy kowariancji, która jest wymagana przy metodzie Capona. Ze względu na zasadność pozostania przy założonych parametrach i aby w możliwie obiektywny sposób porównać prezentowane algorytmy, w testach, w których macierz  $\hat{\mathbf{R}}$  była osobliwa, zastosowano diagonalne dociążanie macierzą  $10^{-6} \mathbf{I}$ . Dzięki temu istnieje możliwość uzyskania odwrotności macierzy kowariancji. Będzie ona obciążona pewnym błędem regularyzacji, jednak stanowi to znacznie lepsze rozwiązanie niż zupełny "paraliż" pracy algorytmu.

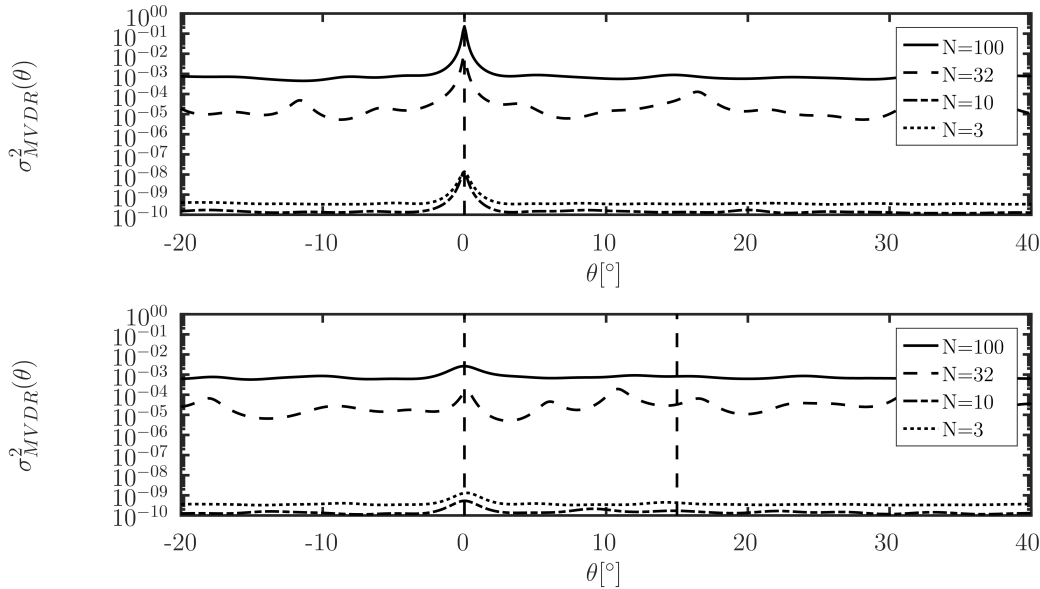
W pierwszej symulacji skorzystano z stochastycznego modelu generowania danych. Na górnym z wykresów (rys. 2.4) przedstawiono oszacowanie mocy dla sytuacji z pojedynczym celem, umieszczonym na kącie  $\theta_1 = 0^\circ$  przy  $SNR = 10$  dB. Liczba elementów antenowych wynosiła  $M = 32$ , a liczba obserwacji była zgodna z wartościami przedstawionymi w legendzie. Algorytm MVDR w odróżnieniu od klasycznego formowania wiązek cechuje się potencjalnie lepszą rozdzielnością kątową. Sugeruje to wykres 2.4, w którym obserwowane jest większe skupienie energii w okolicy kąta położenia celu niż miało to miejsce w klasycznym formowaniu wiązek. Dzięki temu istnieje możliwość rozróżnienia celów posiadających mniejszą niż w przypadku klasycznego formowania wiązek separację kątową. W sytuacji obserwowania dwóch celów pojawia się drugi, równie wyraźny szczyt na kącie  $\theta_2$ . W tej symulacji zastosowano źródła sygnału:  $\theta_1 = 0^\circ$  i  $\theta_2 = 15^\circ$  z  $SNR$  wynoszącymi odpowiednio 10 dB i 5 dB. Algorytm posiada zdolność lokalizacji celu o wyższym poziomie sygnału, przy czym oszacowania mocy jest mniejsze niż w przypadku obecności jednego celu. Drugie z ech (z niższym  $SNR$ ) również jest dobrze widoczne na wykresie jako lokalne podwyższenie poziomu mocy.



Rys. 2.4: Oszacowanie mocy w przypadku algorytmu MVDR dla danych wygenerowanych na podstawie modelu stochastycznego.

Drugi z wykresów (rys. 2.5), został wygenerowany w oparciu o takie same parametry sygnałów jak 2.4, jednak wykorzystano deterministyczny model generowanych danych. W przypadku obserwacji jednego celu nie wpłynęło to znacząco na kształt funkcji oszacowania mocy. Tu również widoczne są dodatkowe lokalne minima występujące przy zbyt małej liczbie realizacji. Znaczne różnice pojawiły się natomiast przy obserwacji 2 obiektów. W żadnym z przedstawionych przypadków (dla różnych  $N$ ) nie ma wyraźnie widocznych śladów obu źródeł sygnału. O ile silniejsze z ech jest widoczne jako podwyższenie poziomu oszacowania mocy, tak drugie echo ( $SNR = 5$  dB) jest ledwie widoczne bądź w ogóle nieobserwowane. Dla  $N = 32$  ponownie widoczna jest wrażliwość algorytmu na realizację szumu. Samo maksimum silniejszego z ech nie jest tak wyraźne jak w przypadku obecności jednego

źródła sygnału bądź stochastycznego sposobu generowania danych. W przypadku estymatora MVDR stała wartość zespolonej amplitudy sygnału w obrębie paczki sondowań przy więcej niż jednym źródle echa może być czynnikiem negatywnie wpływającym na jakość uzyskanego oszacowania kąta odbioru sygnału. Wynika to z występowania w takich warunkach silnej korelacji źródeł.



Rys. 2.5: Oszacowanie mocy w przypadku algorytmu MVDR dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego.

W zależności od zastosowanej liczby sondowań  $N$  kolejne widma posiadają różną charakterystykę. Przy  $N = 100$  spełniony jest wymóg nieosobliwości macierzy kowariancji przez co algorytm pracuje w optymalnych warunkach bez konieczności dociążania. Wykresy te najlepiej reprezentują zachowanie algorytmu MVDR. W rzeczywistości nie zawsze dostępna jest taka liczba obserwacji. Przy  $N = 32$  i założonym wcześniej stałym  $M = 32$  macierz  $\hat{\mathbf{R}}$  jest źle uwarunkowana, jednak nie jest osobliwa. W związku z tym nie jest stosowane diagonalne dociążenie. Dla  $N = 3$  oraz  $N = 10$  macierz kowariancji  $\hat{\mathbf{R}}$  jest osobliwa, wobec czego zastosowano opisane dociążenie.

Aby lepiej zrozumieć zachowanie metody MVDR dla małych  $N$  oraz skąd biorą się zafalowania dla  $N = 32$  można przedstawić wartość oszacowania mocy wykorzystując dekompozycję macierzy kowariancji do postaci z wartościami i wektorami własnymi:

$$\mathbf{R} = \sum_{m=1}^M \lambda_m \mathbf{v}_m \mathbf{v}_m^H = \sum_{m=1}^M (\lambda_m - \lambda_{min} + \lambda_{min}) \mathbf{v}_m \mathbf{v}_m^H = \sum_{m=1}^M \left( \frac{\lambda_m - \lambda_{min}}{\lambda_{min}} + 1 \right) \mathbf{v}_m \mathbf{v}_m^H \lambda_{min}, \quad (2.29)$$

stąd

$$\mathbf{R}^{-1} = \lambda_{min}^{-1} \sum_{m=1}^M \frac{1}{1 + \frac{\lambda_m - \lambda_{min}}{\lambda_{min}}} \mathbf{v}_m \mathbf{v}_m^H, \quad (2.30)$$

oraz

$$\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta) = \lambda_{min}^{-1} \sum_{m=1}^M \frac{1}{1 + \frac{\lambda_m - \lambda_{min}}{\lambda_{min}}} |\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{v}_m|^2 \quad (2.31)$$

co prowadzi do

$$\sigma^2(\theta) = \frac{\lambda_{min}}{\sum_{m=1}^M \frac{1}{1 + \frac{\lambda_m - \lambda_{min}}{\lambda_{min}}} |\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{v}_m|^2}. \quad (2.32)$$

W równaniu (2.32), fragment  $\frac{1}{1 + \frac{\lambda_m - \lambda_{min}}{\lambda_{min}}}$  stanowi wzmocnienie sygnału dla kierunków związanych z  $m$ -tą wartością własną. Dla prawdziwej macierzy  $\mathbf{R}$  wartości własne podprzestrzeni szumowej są sobie równe, zatem odpowiednie składowe wektora  $\mathbf{a}(\theta)$  nie są w ogóle tłumione. Sytuacja zmienia się jednak, kiedy posługujemy się estymatą  $\hat{\mathbf{R}}$ . Przy odpowiednio wysokiej liczbie obserwacji ( $N \gg M$ ), wartości własne pochodzące od składowej szumowej posiadają dosyć zbliżone do siebie wartości, co skutkuje dosyć dobrym zachowaniem estymatora. Dla niedużej liczby obserwacji ( $N \sim M$ ) wartości własne mające źródło w komponencie szumowym będą posiadały zróżnicowane wartości. Efektem tego jest wzmocnienie kierunków którym odpowiadają największe z szumowych wartości własnych, co będzie obserwowane jako lokalne ekstrema funkcji oszacowania mocy. Efekt ten można zniwelować np. poprzez dociążanie macierzy kowariancji, co pozwoli wyrównać poziom szumowych wartości własnych. Jednak w przypadku  $N = 32$  macierz  $\hat{\mathbf{R}}$  nie była już dociążana choć nadal wartości własne posiadają znaczny rozrzut. Efektem jest specyficzne zachowanie oszacowania mocy, obserwowane w rysunkach 2.4 i 2.5. Sytuacja wygląda inaczej dla przypadku  $N = 10$  i  $N = 3$  - macierz kowariancji przy takich parametrach jest osobiwa, więc aby umożliwić poprawną pracę algorytmu zastosowano opisywane wcześniej diagonalne dociążenie macierzą  $10^{-6}\mathbf{I}$ . Dociążenie to wyrównuje poziom wartości własnych, co skutkuje znaczącym obniżeniem poziomu oszacowania mocy, jednak maksima świadczące o potencjalnej obecności celu na wskazanym kącie nadal pozostają wyraźne. Nie są również widoczne specyficzne zafalowania widoczne przy  $N = 32$  obserwacjach. Świadczy to o stabilniejszej pracy algorytmu oraz mniejszej podatności na wpływ szumu. Przedstawione zależności między kształtem oszacowania mocy, a liczbą obserwacji dotyczą zarówno danych generowanych na podstawie modelu stochastycznego (wykresy 2.4) jak i deterministycznego (wykresy 2.5).

Metoda Capona może stanowić efektywny sposób rozwiązania problemu estymacji kąta odbioru przy obecności więcej niż jednego źródła sygnału pod warunkiem braku korelacji amplitud sygnałów oraz odpowiednio wysokiego stosunku sygnału do szumu. Kluczowym warunkiem jest również konieczność zgromadzenia odpowiedniej liczby sondowań, aby możliwe było uzyskanie odwrotności macierzy kowariancji  $\hat{\mathbf{R}}$  i aby charakteryzowała się ona odpowiednią jakością. Uzyskane estymaty przy szacowaniu położenia jednego źródła sygnału mają charakter nieobciążony. Przy większej liczbie obiektów może pojawić się obciążenie, w szczególności przy niewielkiej separacji kątowej między źródłami.

### 2.2.5 Metody wykorzystujące własności podprzestrzeni

Metody wykorzystujące własności podprzestrzeni opierają zasady swojego działania na specyficznych cechach macierzy kowariancji. Można zauważyć, że macierz kowariancji obserwacji  $\mathbf{R}$  jest macierzą Hermitowską. Oznacza to, że jej wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są wzajemnie ortogonalne, a same wartości własne są liczbami rzeczywistymi. Wykorzystując pojęcia wektorów i wartości własnych, macierz kowariancji  $\mathbf{R}$  można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^K \sigma_{s,k}^2 \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k) + \sigma_v^2 \mathbf{I} = \sum_{m=1}^M \mathbf{v}_m \lambda_m \mathbf{v}_m^H = \mathbf{V}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{V}_s^H + \mathbf{V}_v \mathbf{\Lambda}_v \mathbf{V}_v^H, \quad (2.33)$$

$$\lambda_\sigma = \sigma_{s,m}^2 + \sigma_v^2,$$

$$\lambda_v = \sigma_v^2,$$

gdzie  $\lambda_m$  jest wartością własną, a  $\mathbf{v}_m$  odpowiadającym jej wektorem własnym.  $\mathbf{V}_s$ ,  $\mathbf{\Lambda}_s$ ,  $\mathbf{V}_v$  i  $\mathbf{\Lambda}_v$  stanowią macierze z wektorami i wartościami własnymi wprowadzonymi do macierzy kowariancji przez odpowiednio sygnał (indeks dolny  $s$ ) oraz szum (indeks dolny  $v$ ).

W dalszych rozważaniach przyjęto, że wartości własne w macierzach  $\mathbf{\Lambda}_s = \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_K)$  oraz  $\mathbf{\Lambda}_v = \text{diag}(\lambda_{K+1} \cdots \lambda_M)$  ułożone są w kolejności nierosnącej, tj.  $\lambda_m \geq \lambda_{m+1}$ .

### 2.2.6 Metoda MUSIC

Algorytm MUSIC (ang. MULTiple Signal Classification) opiera swoją zasadę na fakcie, że wektory własne sygnału sygnału rozpinają tę samą podprzestrzeń co wektory sterujące  $\mathbf{a}(\theta_1) \dots \mathbf{a}(\theta_K)$  dla  $\theta$  równego kątom faktycznego występowania echa. Oznacza to jednocześnie, że podprzestrzeń rozpinana przez wektory  $\mathbf{a}(\theta)$  są ortogonalne względem podprzestrzeni wektorów własnych szumu. Można to przedstawić w postaci równania:

$$\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{V}_v = 0. \quad (2.34)$$

Oszacowanie "pseudowidma" algorytmu MUSIC może zostać przedstawione za pomocą równania:

$$P_{MU}(\theta) = (\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{V}_v \mathbf{V}_v^H \mathbf{a}(\theta))^{-1}. \quad (2.35)$$

W odróżnieniu od estymatorów opartych o formowanie wiązek, w metodzie MUSIC nie można wprost mówić o funkcji  $P_{MU}$  jako o widmie. Wynika to z faktu, że w opisywanym algorytmie energia sygnału nie ma bezpośredniego przełożenia na wartość funkcji  $P_{MU}(\theta)$ . Wartość maksymalna pseudowidma wiąże się nie z podwyższonym poziomem sygnału, a brakiem korelacji między odpowiedzią antenową, a wektorami własnymi pochodzącymi od szumowego komponentu macierzy kowariancji. W praktycznej realizacji algorytmu korzysta się z oszacowań wektorów własnych  $\hat{\mathbf{V}}_v$ . Macierz  $\hat{\mathbf{V}}_v$  z wektorami własnymi można uzyskać wybierając wektory własne odpowiadające  $(M - K)$  najmniejszym wektorom własnym, gdzie  $K$  oznacza liczbę obserwowanych obiektów<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Jeżeli istnieje korelacja między echemi (jak ma to miejsce w przypadku modelu deterministycznego o stałej amplitudzie) może się okazać, że liczba wartości własnych mających źródło w sygnałowym komponente macierzy kowariancji jest mniejsza od liczby obserwowanych źródeł echa.



Macierz kowariancji zostaje wtedy zdekomponowana do postaci:

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{m=1}^K \hat{\mathbf{v}}_{s,m} \hat{\lambda}_{s,m} \hat{\mathbf{v}}_{s,m}^H + \sum_{m=K+1}^M \hat{\mathbf{v}}_{v,m} \hat{\lambda}_{v,m} \hat{\mathbf{v}}_{v,m}^H. \quad (2.36)$$

We wzorze (2.36) istnieje założenie niemalejącej kolejności wartości własnych:

$$\hat{\lambda}_{s,1} \geq \dots \geq \hat{\lambda}_{s,K} \geq \hat{\lambda}_{n,K+1} \geq \dots \geq \hat{\lambda}_{n,M}.$$

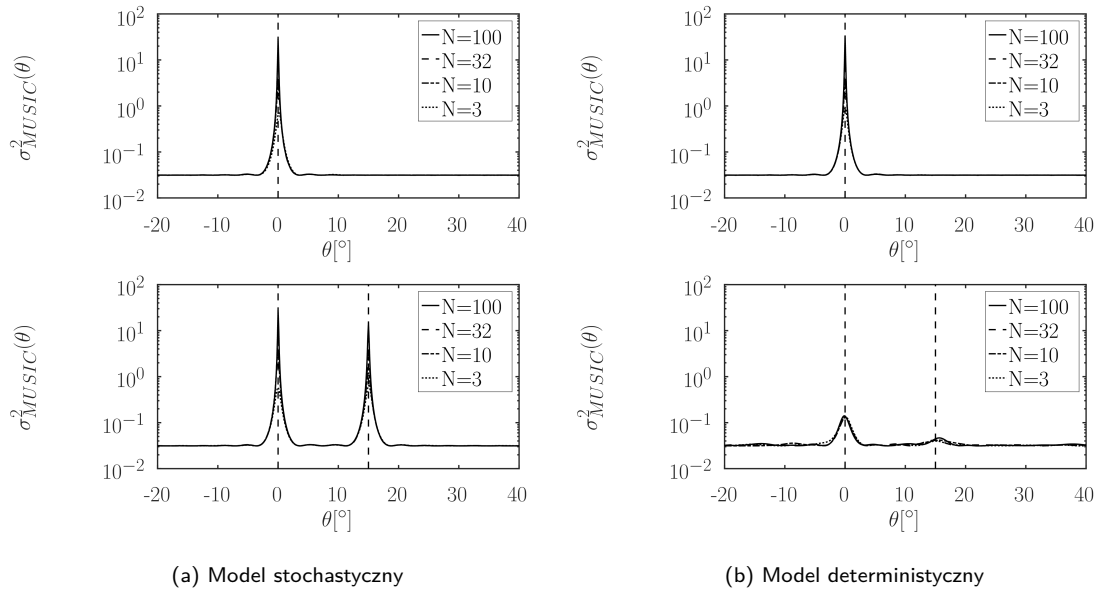
Samo równanie widma przedstawione w równaniu (2.35) przypomina nieco równanie na oszacowanie mocy w estymatorze MVDR (2.27). Zamiast odwrotności macierzy kowariancji podawana jest podprze-strzeń składająca się wyłącznie z szumowej składowej macierzy  $\mathbf{R}$ , co powinno skutkować działaniem podobnym do estymatora MVDR przy nieskończonym SNR.

W algorytmie MUSIC, podobnie jak w estymatorze MVDR kąt określa się poprzez znalezienie maksimum funkcji widma (w przypadku MUSIC - pseudowidma):

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} P_{MU}(\theta). \quad (2.37)$$

Algorytm MUSIC cechuje się "ostrzejszym" maksimum funkcji pseudowidma, niż w przypadku klasycznej metody formowania wiązek, przypominając nieco pod tym kątem oszacowania mocy z algorytmu MVDR. W przypadku danych wygenerowanych na podstawie modelu stochastycznego (wykres 2.6a) widoczne są wyraźne ekstrema pseudowidma w okolicy prawidłowego kąta, na którym znajduje się cel. Przy obserwacji 2 celów ( $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = 15^\circ$ ,  $SNR$  równy odpowiednio 10 dB i 5 dB) nastąpiło nieznaczne poszerzenie funkcji pseudowidma, a lokalizacja wartości maksymalnej nie jest tak wyraźna jak w przypadku obserwacji jednego celu. Liczba obserwacji nie ma dużego wpływu na kształt funkcji  $P_{MU}(\theta)$ , jednak w obecności dwóch ech, przy mniejszej liczbie obserwacji pojawiają się zafalowania mogące być źródłem nieprawidłowej lokalizacji ekstremum odzwierciedlającego kąt odbioru jednego z źródeł sygnału.

Zastosowanie algorytmu MUSIC dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego z założoną stałą amplitudą (wykres 2.6b) w przypadku 1 celu nie spowodowało znaczących różnic w kształcie widma względem modelu stochastycznego (wykres 2.6a). Zmiany pojawiły się dopiero przy obecności dwóch celów (parametry pozostają jednakowe dla obu wykresów pseudowidma). Wartości funkcji pseudowidma posiadają wyraźne, "zaostrome" maksima dla kątów odbioru sygnałów echa jedynie w przypadku estymacji opartych o dane wygenerowane na podstawie modelu stochastycznego. Przy modelu deterministycznym, obecność drugiego echa powoduje że funkcja pseudowidma przybiera bardziej zaokrąglony kształt w rejonach występowania źródeł sygnału. Może to skutkować obciążeniem wyników estymacji kątów obu celów w sytuacji umieszczenia ich w niewielkiej odległości względem siebie (niskiej separacji kątowej).

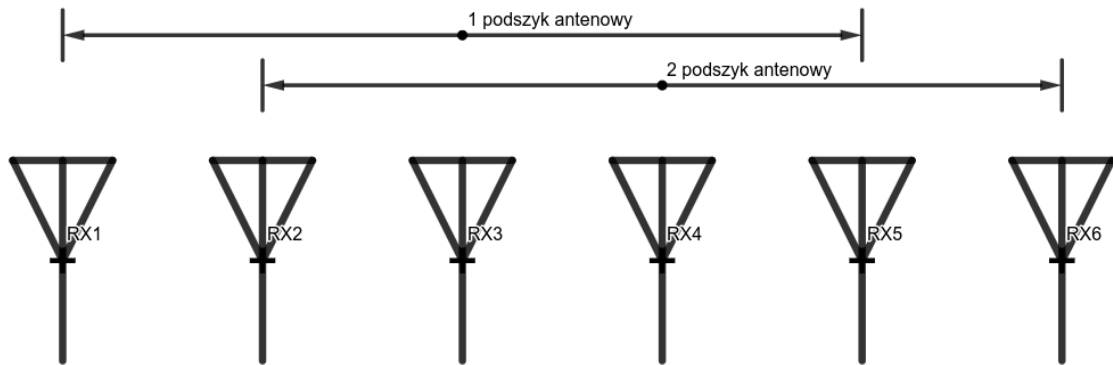


Rys. 2.6: Widmo oszacowania mocy w przypadku algorytmu MUSIC dla danych wygenerowanych na podstawie modelu stochastycznego (2.6a) i deterministycznego (2.6b)

Estymator MUSIC działa w sposób zbliżony do metody MVDR jednak, w zależności od sposobu implementacji dekompozycji macierzy kowariancji do postaci z wartościami własnymi, może posiadać inną złożoność obliczeniową. Sam algorytm operuje na pseudowidmie, w którym wartość maksymalna odpowiada możliwie najmniejszej korelacji z macierzą utworzoną z wektorów własnych odpowiadających wartościom własnym wprowadzonym do macierzy kowariancji przez składową szumową. Algorytm zakłada brak korelacji między sygnałami, co wyjaśnia znaczne błędy estymat w przypadku symulacji opartych o dwa źródła sygnału wygenerowanego na podstawie modelu deterministycznego. Na podstawie dodatku 7.2.4 można również stwierdzić, że wzrost obciążenia oraz wariancji oszacowań jest obserwowany przy niskiej separacji kątowej. W przypadku obserwacji pojedynczego źródła sygnału należy mieć na uwadze możliwość powstania grubych błędów przy zbyt niskim poziomie  $SNR$ .

## 2.2.7 Metoda ESPRIT

Metoda ESPRIT (ang. Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) opiera się na własności szczyków liniowych, w których występują stałe różnice fazy odebranego sygnału między kolejnymi elementami. W związku z tym, sygnały zebrane z dwóch podszyków antenowych zawierają odpowiedź różniącą się przesunięciem w fazie. W najprostszy sposób podszyki takie mogą zostać uzyskane poprzez wyselekcjonowanie danych z pierwszych  $(M - 1)$ , oraz ostatnich  $(M - 1)$  elementów. Taka metoda podziału przedstawiona została na rysunku 2.7. Do uzyskania danych najwygodniej jest



Rys. 2.7: Sposób podziału anteny na podszyki w celu implementacji algorytmu ESPRIT.

użyć macierzy selekcyjujących. Ich działanie można przedstawić za pomocą równań:

$$\mathbf{Y}_1 = [\mathbf{I}_{M-1} \ \mathbf{0}] \mathbf{Y},$$

$$\mathbf{Y}_2 = [\mathbf{0} \ \mathbf{I}_{M-1}] \mathbf{Y},$$

gdzie  $\mathbf{I}_{M-1}$  jest macierzą jednostkową o wymiarach  $(M - 1) \times (M - 1)$ , a  $\mathbf{Y}_1$  i  $\mathbf{Y}_2$  oznaczają sygnały zarejestrowane przez pierwszy i drugi podszyk antenowy ( $\mathbf{Y}$  jest macierzą pomiarów, w której kolejne pomiary są ułożone w kolumnach), uzyskane za pomocą macierzy selekcyjujących. Korzystając z równania (2.1), można przedstawić zależność między sygnałami z obu podzbiorów za pomocą równania:

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_1 \mathbf{H}, \quad (2.38)$$

gdzie macierz  $\mathbf{H} = \text{diag}(e^{j\omega_1}, \dots, e^{j\omega_P})$  jest macierzą diagonalną o elementach oznaczających wartości przesunięć fazy, w którym  $\omega_k = 2\pi d \sin \theta_k / \lambda$ .

Wektory własne podprzestrzeni sygnału macierzy kowariancji ( $\mathbf{V}_s$ ) i macierz  $\mathbf{Y}$  rozpinają te same podprzestrzenie, co można zapisać w postaci transformacji liniowej:

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{Y} \mathbf{T}, \quad (2.39)$$

gdzie  $\mathbf{T}$  jest nieosobliwą macierzą transformacji. Działając tą samą transformacją na pomniejszone macierze  $\mathbf{Y}_1$  i  $\mathbf{Y}_2$  można uzyskać wektory własne rozpinające te same podprzestrzenie:

$$\mathbf{V}_{s1} = \mathbf{Y}_1 \mathbf{T}, \quad \mathbf{V}_{s2} = \mathbf{Y}_2 \mathbf{T}. \quad (2.40)$$

Modyfikując równanie (2.38) z wykorzystaniem wektorów własnych  $\mathbf{V}_{s1}$  i  $\mathbf{V}_{s2}$  można uzyskać postać:

$$\mathbf{V}_{s2} = \mathbf{V}_{s1}\Psi. \quad (2.41)$$

Powyższe równanie można również przedstawić jako:

$$\mathbf{Y}_1\mathbf{H}\mathbf{T} = \mathbf{Y}_1\mathbf{T}\Psi, \quad (2.42)$$

zatem jeżeli tylko  $\mathbf{Y}_1$  ma pełen rząd wierszowy, uzyskuje się

$$\Psi = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{T}, \quad (2.43)$$

co pokazuje, że do obliczenia przesunięć fazy między subaperturami (elementy na diagonalu macierzy  $\mathbf{H}$ ) należy skorzystać z wartości własnych macierzy  $\Psi$ , które z kolei umożliwią oszacowanie kąta odbioru sygnału echa:

$$\theta_i = \sin^{-1} \left( \frac{2\text{arg}(\lambda_{\Psi,i})}{\pi} \right). \quad (2.44)$$

Realizację algorytmu ESPRIT należy zacząć od estymacji macierzy kowariancji  $\hat{\mathbf{R}}$ , która pozwoli na oszacowanie wektorów własnych rozpinających podprzestrzeń sygnału  $\hat{\mathbf{V}}_s$ . Wybrać należy te wektory własne, które odpowiadają  $K$  największym wartościom własnym, gdzie  $K$  oznacza liczbę obserwowanych celów. Rozwiązując równanie (2.39) przy pomocy metody najmniejszych kwadratów można uzyskać estymatę macierzy transformacji  $\hat{\mathbf{T}}$ :

$$\hat{\mathbf{T}} = (\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H)^{-1} \mathbf{Y}^H \hat{\mathbf{V}}_s. \quad (2.45)$$

W równaniu (2.45) pojawia się odwrotność macierzy  $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H$ , która w przypadku liczby obserwacji ( $N$ ) mniejszej niż liczba elementów antenowych ( $M$ ) jest macierzą osobliwą. W trakcie symulacji działania algorytmu zamieszczonych w dodatku 7.2.5, w przypadku niedostatecznej liczby sondowań stosowano diagonalne dociążenie, które umożliwiło odwrócenie macierzy bez wystąpienia błędów numerycznych.

Korzystając z sygnałów wyselekcjonowanych z 2 podszyków antenowych (macierze  $\mathbf{Y}_1$  i  $\mathbf{Y}_2$ ) i macierzy przekształcenia ( $\hat{\mathbf{T}}$ ) można uzyskać wektory własne odpowiadające ich podprzestrzeniom [zgodnie z równaniem (2.40)]:

$$\hat{\mathbf{V}}_{s1} = \mathbf{Y}_1\hat{\mathbf{T}}, \quad \hat{\mathbf{V}}_{s2} = \mathbf{Y}_2\hat{\mathbf{T}}. \quad (2.46)$$

Rozwiązując równanie (2.41) przy pomocy metody najmniejszych kwadratów można uzyskać oszacowanie  $\hat{\Psi}$ , którego wartości własne w sposób bezpośredni [równanie (2.44)] prowadzą do oszacowania kąta odbioru sygnału  $\hat{\theta}_k$ , gdzie  $k$  oznacza  $k$ -ty cel (zaczynając od największej wartości własnej).

$$\hat{\Psi} = \left( \hat{\mathbf{V}}_{s1}^H \hat{\mathbf{V}}_{s1} \right)^{-1} \hat{\mathbf{V}}_{s1}^H \hat{\mathbf{V}}_{s2} \quad (2.47)$$

Dużą zaletą algorytmu ESPRIT jest brak konieczności poszukiwania maksimum oszacowania mocy (jak to miało miejsce w przypadkach poprzednich estymatorów), co może znacząco obniżyć złożoność obliczeniową. Z tego powodu, podobnie jak w estymatorze monoimpulsowym, nie ma możliwości wykreślenia funkcji kosztu. Brak widma mocy uniemożliwia również określenie liczby obserwowanych

---

ech na podstawie analizy jej ekstremów. Do tego celu mogą zostać wykorzystane wartości własne macierzy kowariancji.

Estymator ESPRIT jest popularną metodą estymacji ze względu na brak wymogów co do poszukiwania ekstremów w funkcji kosztu. Wyniki przedstawiono w dodatku 7.2.5. Nie wykazuje on jednak zbieżności z ograniczeniem Craméra-Rao. Algorytm jest w stanie poprawnie oszacować położenia dwóch źródeł sygnału pod warunkiem, że są one w odpowiedniej odległości kątowej oraz pochodzące od nich sygnały nie są wzajemnie skorelowane. Dodatkowo należy zwrócić uwagę, że dla poprawnej pracy algorytmu wymagane jest posiadanie większej liczby obserwacji ( $N$ ) niż liczba elementów w 1 linii szyku antenowego ( $M$ ), bądź odpowiednie dociążenie macierzy  $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H$ , które z kolei może doprowadzić do powstania stałych błędów. Wadą algorytmu jest wymóg specyficznej struktury szyku antenowego, co może ograniczać zakres jego zastosowań.

## 2.3 Estymatory parametryczne

Estymatory parametryczne opierają swoją zasadę działania na założeniu, że obserwacje mają pewien rozkład prawdopodobieństwa, którego parametry są następnie estymowane z wykorzystaniem odpowiedniej funkcji stanowiącej kryterium jakości [57]. W odróżnieniu do metod nieparametrycznych wspomniana funkcja bazuje na rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa uzyskania danych, zamiast mocy odebranego sygnału (jak to miało miejsce w przypadku estymatorów nieparametrycznych). Przykładem może być algorytmy największej wiarygodności (ang. MLE - Maximum Likelihood Estimation), opierający swoją zasadę działania na określaniu kąta odbioru, który dla zaobserwowanych danych maksymalizuje wartość funkcji wiarygodności, zdefiniowanej jako  $L(\theta, \mathbf{Y}) = p(\mathbf{Y}|\theta)$ , gdzie  $p$  jest gęstością prawdopodobieństwa:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} L(\theta, \mathbf{Y}). \quad (2.48)$$

Poszczególne przypadki użycia zależą od rodzaju rozkładu oraz zastosowanego modelu danych. Najczęściej przyjmuje się rozkład Gaussa. Wyjątki od tej reguły spotyka się w wyspecjalizowanych zastosowaniach np. w trakcie symulowania zakłóceń pochodzących od ziemi używa się rozkładu Weibulla [58].

### 2.3.1 Deterministyczny estymator największej wiarygodności

W przypadku deterministycznego estymatora największej wiarygodności zakładamy deterministyczny model danych (2.4). Oznacza to, że amplitudę sygnału traktujemy jako parametr modelu. W najprostszych przypadkach zakładamy, że amplituda ( $s$ ) sygnału jest nieznaną liczbą zespoloną, która nie ulega zmianom w obrębie paczki  $N$  sondowań. Szum traktuje się jako zespolony biały szum gaussowski o zerowej wartości oczekiwanej i wariancji  $\sigma_v^2$  ( $\mathcal{CN}(0, \sigma_v^2)$ ). Dla powyższych założeń uzyskuje się następującą postać funkcji wiarygodności:

$$L(\theta, s, \sigma_v^2, \mathbf{Y}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{(\pi\sigma_v^2)^M} e^{\left(-\frac{\|s\mathbf{a}(\theta) - \mathbf{y}_i\|^2}{\sigma_v^2}\right)}. \quad (2.49)$$

Powyzsze równanie wynika bezpośrednio z formuły zespolonego rozkładu normalnego. Przyjmuje się, że  $\mathbf{y}_i$  jest pojedynczą realizacją zespolonej zmiennej losowej o wariancji  $\sigma_v^2$  i wartości oczekiwanej  $s\mathbf{a}(\theta)$ . W równaniu (2.49) nieznanymi są 3 parametry  $\Theta = \{\theta, s, \sigma_v^2\}$ . Znalezienie oszacowania  $\hat{\Theta}$  polega zatem na lokalizacji minimum funkcji kosztu:

$$\hat{\Theta} = \underset{\Theta}{\operatorname{argmax}} L(\Theta, \mathbf{Y}) = \underset{\theta, s, \sigma_v^2}{\operatorname{argmin}} -L(\theta, s, \sigma_v^2, \mathbf{Y}). \quad (2.50)$$

Bezpośrednio z równania (2.50) można określić wartość wszystkich 3 nieznanymi parametrów. Jest to jednak kosztowne obliczeniowo (ze względu na wymóg poszukiwania minimum globalnego funkcji trzech zmiennych).

Istnieją sposoby pozwalające ograniczyć złożoność obliczeniową poszukiwania minimum funkcji (2.50). Mając na uwadze, że docelowo istotne jest znalezienie wartości maksymalnej funkcji wiarygodności (oraz fakt, że funkcja logarytmu jest ściśle monotoniczna) wzór (2.49) można przekształcić

do postaci logarytmicznej funkcji wiarygodności:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y}) &= \ln(L(\Theta, \mathbf{Y})) = \sum_{i=1}^N \left( -M \ln(\pi\sigma_v^2) - \frac{\|\mathbf{sa}(\theta) - \mathbf{y}_i\|^2}{\sigma_v^2} \right) \\ &= -MN \ln(\pi\sigma_v^2) - \frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N (\mathbf{sa}(\theta) - \mathbf{y}_i)^H (\mathbf{sa}(\theta) - \mathbf{y}_i).\end{aligned}\quad (2.51)$$

Istnieje możliwość wstępnego oszacowania amplitudy  $s$  poprzez obliczenie pochodnej z logarytmicznej funkcji wiarygodności  $\mathcal{L}(\Theta)$  względem  $s$  i przyrównaniu jej do 0:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s} &= -\frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{a}^H(\theta) (\mathbf{sa}(\theta) - \mathbf{y}_i) + (\mathbf{sa}(\theta) - \mathbf{y}_i)^H \mathbf{a}(\theta) \right) \\ &= -\frac{2}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N \mathbf{a}^H(\theta) (\mathbf{sa}(\theta) - \mathbf{y}_i) = 0 \rightarrow \mathbf{sa}(\theta) [1 \ 1 \ \dots \ 1]_N - \mathbf{Y} = 0, \\ \hat{s}(\theta) &= (\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{y}_i.\end{aligned}\quad (2.52)$$

Podobny zabieg można wykonać w celu estymacji wariancji szumu ( $\sigma_v^2$ ):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2} &= -\frac{MN}{\sigma_v^2} + \frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N \frac{\|\mathbf{sa}(\theta) - \mathbf{y}_i\|^2}{\sigma_v^2} = 0, \\ \hat{\sigma}_v^2 &= \frac{\sum_{i=1}^N \|\mathbf{sa}(\theta) - \mathbf{y}_i\|^2}{MN}.\end{aligned}\quad (2.53)$$

Przy czym oszacowanie wariancji szumu wymaga znajomości wartości amplitud sygnału.

Podstawienie estymowanej wartości amplitudy sygnału  $\hat{s}$  [wzór (2.52)] do równania (2.51) pozwala na zlokalizowanie globalnego minimum przy poszukiwaniu wyłącznie w wymiarze kąta odbioru  $\theta$ . Ostateczne równanie przyjmuje postać:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^N \|\hat{s}(\theta)\mathbf{a}(\theta) - \mathbf{y}_i\|^2.\quad (2.54)$$

Równanie (2.54) stanowiące kryterium jakości wskazuje kąt, przy którym błąd średniokwadratowy dopasowania wektora sterującego do dostępnych danych jest najmniejszy. Rozwiązanie to jest tożsame z metodą najmniejszych kwadratów, co wynika z założenia gaussowskiego rozkładu obserwacji.

W sytuacji kiedy model zakłada, że amplituda nie jest stała w kolejnych obserwacjach, stosuje się bogatszą parametryzację modelu:  $\Theta = \{\theta, s_1, s_2, \dots, s_N, \sigma_v^2\}$ . Logarytmiczna funkcja wiarygodności przyjmie w takim wypadku postać:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y}) &= -MN \ln(\pi\sigma_v^2) - \frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N (s_i \mathbf{a}(\theta) - \mathbf{y}_i)^H (s_i \mathbf{a}(\theta) - \mathbf{y}_i) \\ &= -MN \ln(\pi\sigma_v^2) - \frac{1}{\sigma_v^2} \operatorname{tr}((\mathbf{a}(\theta)\mathbf{s} - \mathbf{Y})^H (\mathbf{a}(\theta)\mathbf{s} - \mathbf{Y})).\end{aligned}\quad (2.55)$$

Tak jak poprzednio można wyeliminować konieczność poszukiwania ekstremum funkcji wielu zmiennych korzystając z metody najmniejszych kwadratów:

$$\hat{\mathbf{s}}(\theta) = (\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{Y},\quad (2.56)$$

$$\hat{\sigma}_v^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \|\hat{\mathbf{s}}\mathbf{a}(\theta) - \mathbf{y}_i\|^2}{MN}, \quad (2.57)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{s}}(\theta) = [\hat{s}_1(\theta), \hat{s}_2(\theta), \dots, \hat{s}_N(\theta)]$  oznacza wektor estymowanych amplitud sygnału w kolejnych sondowaniach. Korzystając z równania (2.56) można określić maksimum logarytmicznej funkcji wiarygodności w oparciu o poszukiwanie w jednym wymiarze:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^N \|\hat{s}_i(\theta)\mathbf{a}(\theta) - \mathbf{y}_i\|^2. \quad (2.58)$$

Tego typu podejście jest dosyć uniwersalne - algorytm sprawdzi się zarówno w przypadku stałej amplitudy, przy pojawieniu się przesunięcia dopplerowskiego (liniowe zmiany fazy między skanami [59]), czy przy zupełnie losowych amplitudach. Problem może wystąpić w przypadku niewielkiej długości wektora sterującego (liczby elementów antenowych  $M$ ), kiedy liczba parametrów będzie zbliżona do "efektywnej" liczby pomiarów ( $N \cdot$  wymiar  $y_i$ ). Może to doprowadzić do uwrażliwienia estymatora na szum, co z kolei może przełożyć się na nieprawidłowe oszacowanie kąta odbioru.

W literaturze [60] spotyka się również postać wykorzystującą macierz kowariancji w celu uproszczenia postaci końcowej funkcji logarytmicznej wiarygodności:

$$\mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y}) = -MN \ln(\pi\sigma_n^2) - \frac{1}{\sigma_v^2} \operatorname{tr}((\mathbf{a}(\theta)\mathbf{s} - \mathbf{Y})^H (\mathbf{a}(\theta)\mathbf{s} - \mathbf{Y})).$$

Przyjmując sposób szacowania wartości wektora amplitud ( $\hat{\mathbf{s}}(\theta)$ ) zgodny z równaniem (2.56), funkcję można przedstawić jako:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y}) &= -MN \ln(\pi\sigma_v^2) \\ &- \frac{1}{\sigma_v^2} \operatorname{tr} \left( \frac{\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta)} \mathbf{Y}\mathbf{Y}^H \frac{\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta)} - \frac{\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta)} \mathbf{Y}\mathbf{Y}^H - \mathbf{Y}\mathbf{Y}^H \frac{\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta)} + \mathbf{Y}\mathbf{Y}^H \right). \end{aligned}$$

Zakładając  $\mathbf{P}(\theta) = \frac{\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta)}$ ,  $\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{I} - \mathbf{P}(\theta)$  i  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{Y}\mathbf{Y}^H/N$  można przejść do postaci:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta, \sigma_v^2, \mathbf{Y}) &= -MN \ln(\pi\sigma_v^2) - \frac{N}{\sigma_v^2} \operatorname{tr} \left( \mathbf{P}(\theta)\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}(\theta) - \mathbf{P}(\theta)\hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}(\theta) + \hat{\mathbf{R}} \right) \\ &= -MN \ln(\pi\sigma_v^2) - \frac{N}{\sigma_v^2} \operatorname{tr} \left( -(\mathbf{I} - \mathbf{P}(\theta))\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}(\theta) + \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{I} - \mathbf{P}(\theta)) \right) \\ &= -MN \ln(\pi\sigma_v^2) - \frac{N}{\sigma_v^2} \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{R}}\mathbf{Q}(\theta) \right). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Pochodna logarytmicznej funkcji wiarygodności względem wariancji szumu wynosi odpowiednio:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, \sigma_v^2, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2} = -\frac{MN}{\sigma_v^2} + \frac{N}{\sigma_v^2} \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{R}}\mathbf{Q}(\theta) \right). \quad (2.60)$$

Przyrównując równanie (2.60) do zera można wyprowadzić oszacowanie wariancji szumu:

$$\hat{\sigma}_v^2(\theta) = \frac{1}{M} \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{R}}\mathbf{Q}(\theta) \right) \quad (2.61)$$

Wykorzystując równania (2.59) i (2.61) można dojść do końcowej postaci tzw. skompresowanej funkcji logarytmicznej wiarygodności z jednym argumentem wejściowym

$$\mathcal{L}(\theta, \mathbf{Y}) = -\ln \left( \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{R}}\mathbf{Q}(\theta) \right) \right) \quad (2.62)$$



Estymacja kąta odbioru informacji  $\hat{\theta}$  polega na znalezieniu maksimum tej funkcji:

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} - \ln \left( \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{R}} \mathbf{Q}(\theta) \right) \right). \quad (2.63)$$

W sytuacji, kiedy sygnał źródłowy zawiera  $K$  źródeł echa umieszczonych na różnych kątach istnieje możliwość rozszerzenia prezentowanego estymatora. W takim wypadku logarytmiczna funkcja wiarygodności przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y}) &= \ln(L(\Theta, \mathbf{Y})) = \sum_{i=1}^N \left( -M \ln(\pi \sigma_v^2) - \frac{\| \sum_{k=1}^K s_{i,k} \mathbf{a}(\theta_k) - \mathbf{y}_i \|^2}{\sigma_v^2} \right) \\ &= -MN \ln(\pi \sigma_v^2) - \frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N \left( \sum_{k=1}^K s_{i,k} \mathbf{a}(\theta_k) - \mathbf{y}_i \right)^H \left( \sum_{k=1}^K s_{i,k} \mathbf{a}(\theta_k) - \mathbf{y}_i \right). \end{aligned}$$

Zakładając że:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) &= [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \ \cdots \ \mathbf{a}(\theta_K)], \\ \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{2,1} & \cdots & s_{N,1} \\ s_{1,2} & \ddots & \ddots & s_{N,2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s_{1,K} & s_{2,K} & \cdots & s_{N,K} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_K(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})}, \\ \mathbf{Q}_K(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{I} - \mathbf{P}_K(\boldsymbol{\theta}), \end{aligned}$$

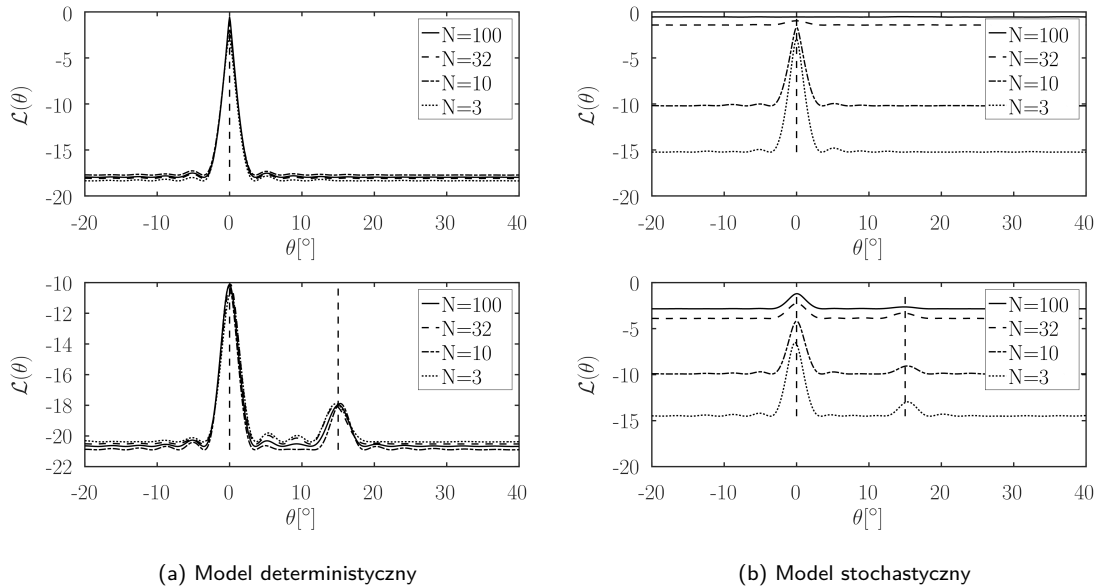
wykonując przekształcenia zgodne z przedstawionymi dla przypadku z jednym źródłem sygnału, ostateczna postać skompresowanej logarytmicznej funkcji wiarygodności przy założeniu obserwacji  $K$  obiektów ma postać:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}) = - \ln \left( \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{R}} \mathbf{Q}_K(\boldsymbol{\theta}) \right) \right). \quad (2.64)$$

### Badanie estymatora zakładającego stałą amplitudę sygnału

Na wykresach 2.8a i 2.8b przedstawiono rezultaty symulacji wykorzystującej metodę największej wiarygodności zakładającą jeden cel [równania (2.52) i (2.63)], w której założono, że amplituda jest wartością stałą, a dane zostały wygenerowane przy pomocy modelu deterministycznego (stała amplituda, wykres 2.8a) i stochastycznego (wykres 2.8b). W każdym z wykresów rozpatrzono 2 przypadki, w których występował 1 cel (górny z wykresów,  $\theta = 0^\circ$ ,  $SNR = 10$  dB) lub 2 cele (wykres dolny,  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = 15^\circ$ ,  $SNR$  równy odpowiednio 10 dB i 5 dB). W obu przypadkach zastosowano antenę o  $M = 32$  elementach w szyku liniowym.

W wykresie 2.8a (przy obserwacji 1 celu) wyraźnie widać zaostrzony kształt logarytmicznej funkcji wiarygodności oraz niski poziom listków bocznych. Wynika to z faktu dokładnego dopasowania modelu do wygenerowanych danych, potencjalnie umożliwiając dokładniejsze zlokalizowanie kąta odbioru sygnału. W przypadku 2 celów mogą pojawić się niedokładności przy estymacji współrzędnych, szczególnie przy celu o niższym poziomie sygnału, co widać jako wystąpienie ekstremów funkcji logarytmicznej wiarygodności w na różnych kątach w zależności od liczby realizacji. Należy tu jeszcze raz podkreślić,



Rys. 2.8: Przykładowa logarytmiczna funkcja wiarygodności w przypadku deterministycznego algorytmu największej wiarygodności z modelem zakładającym stałą amplitudę dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego z stałą amplitudą (2.8a) i modelu stochastycznego (2.8b).

że do uzyskania wykresu 2.8a wykorzystano estymator zakładający obecność jednego źródła sygnału. W sytuacji, w której istnieje pewność co do obecności  $K$  źródeł sygnału (w tym przypadku  $K = 2$ ), występujące maksima faktycznie mogą odpowiadać prawdziwym wartościom kątów, jednak precyzyjniejsze estymaty można uzyskać korzystając z lokalizacji ekstremum funkcji kosztu opisanej równaniem (2.64). Wiąże się to jednak z większą złożonością obliczeniową algorytmu (więcej wymiarów przeszukania logarytmicznej funkcji wiarygodności), a podobny do omawianego wykres przyjąłby postać trójwymiarowej powierzchni.

Na wykresie 2.8b przedstawiono działanie modelu deterministycznego z stałą amplitudą przy dostarczeniu obserwacji, w których amplituda jest zmienną losową, różną w każdym sondowaniu. Takie niedopasowanie modelu do danych powoduje degradację jakości szacowanych parametrów. Widać to poprzez znaczący rozrzut w kształtach logarytmicznych funkcji wiarygodności dla różnej liczby obserwacji  $N$ . Wynika to z faktu, że zgodnie z wzorem (2.52) amplituda jest liczona na podstawie uśrednionych pomiarów. Model stochastyczny, na podstawie którego wygenerowano dane, zakłada że amplituda jest zmienną losową o zerowej wartości oczekiwanej ( $E[s] = 0$ ), z tego powodu uśrednienie pomiarów [równanie (2.54)] skutkuje spadkiem poziomu obserwowanego sygnału. W takim samym stopniu uśrednianiu podlega również szum pomiarowy - on także posiada rozkład gaussowski o zerowej wartości oczekiwanej. Z tego powodu wartość SNR pozostaje niezmienną. W efekcie liczba obserwacji  $N$  nie ma znaczenia, a wykres 2.8b stanowi jedynie przedstawienie przykładowych kształtów - przebiegi te mogą zmieniać się w zależności od realizacji szumu i amplitud. Nie można założyć, że dla  $N = 100$  estymator wskaże oszacowanie obciążone mniejszym błędem niż przy mniejszej liczbie sondowań. Rozwiązaniem poprawiającym jakość estymacji może być rozbięcie pomiarów na  $N$  zestawów, oszacowanie kątów odbioru

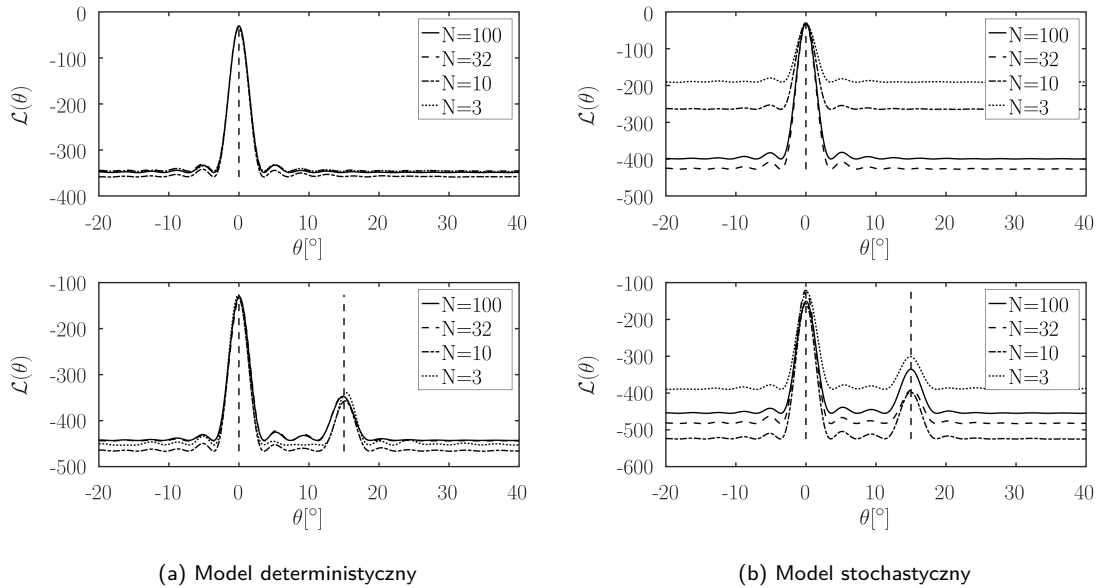
---

$\theta_1 \cdots \theta_N$  a następnie ich uśrednienie. Dla większych wartości  $N$  może to wpłynąć na spadek wariancji oszacowania kąta odbioru informacji, jednak wykracza to poza podstawową wersję estymatora. Różne poziomy wartości logarytmicznej funkcji wiarygodności wynikają z coraz mniejszej wartości komponentu  $\frac{1}{N} \sum_i^N y_i$  [wzór (2.52)], która w efekcie powoduje większe wartości ujemnej sumy [równanie (2.54)]. Wyniki te znacząco zmieniają się dla różnych realizacji.

### **Badanie modelu zakładającego zmienną amplitudę sygnału**

Na wykresach 2.9a i 2.9b przedstawiono działanie estymatora deterministycznego zakładającego, że wartości amplitud w kolejnych sondowaniach mają postać zmiennych losowych, a każdy z nich stanowi parametr modelu [równanie (2.55)]. W takim wypadku, w trakcie działania algorytmu wszystkie z tych wartości są szacowane (podejście deterministyczne). Położenie celów,  $SNR$  i liczba elementów antenowych pozostała niezmienną względem testów przedstawionych na wykresach 2.8a i 2.8b. Symulacja, w której skorzystano z danych pochodzących z modelu deterministycznego o stałej amplitudzie jest przedstawiona na wykresie 2.9a. W przypadku pojedynczego celu wyraźnie widać zgodność lokalizacji maksimów przebiegów dla różnej liczby skanów  $N$ . Przy modelu z obecnymi 2 echami pojawiają się widoczne niejednoznaczności, jednak nadal istnieje możliwość uzyskania położenia obu celów (zachowana rozróżnialność). W tym przypadku do pokazania kształtu funkcji kosztu zastosowano estymator posiadający 1 stopień swobody (założenie 1 obiektu,  $K = 1$ ), podczas gdy w trakcie estymacji kątów (w dalszych testach, przedstawionych w załączniku 7.2.7) na podstawie sygnału z dwoma źródłami wykorzystywany był pełen, dwuwymiarowy estymator ( $K = 2$ ). Porównując działanie estymatora opierającego się model zakładający zmienną amplitudę (2.9a) z tym wykorzystującym model o stałej amplitudzie (2.8a) widać, że dokładnie dopasowanie modelu do dostępnych danych skutkuje wyraźniejszym szczytem logarytmicznej funkcji wiarygodności, co potencjalnie może pozwalać na uzyskanie precyzyjniejszych estymat.

W przypadku zastosowania danych wygenerowanych na podstawie modelu stochastycznego uzyskano rezultaty jak na wykresach 2.9b. Widoczne jest podobieństwo z wykresem uzyskanym w przypadku danych pochodzących z modelu deterministycznego (2.9a). Wynika ono z faktu, że model wykorzystany podczas estymacji zakłada dowolne wartości wektora amplitud. W takim wypadku, z punktu widzenia algorytmu nie ma znaczenia, czy są to wartości stałe czy losowe. Szczególne podobieństwo widoczne jest w przypadku obserwacji 1 celu. Przy 2 celach funkcje zaczynają się różnić, jednak wynika to z konkretnych realizacji sygnału/szumu.



Rys. 2.9: Logarytmiczna funkcja wiarygodności w przypadku deterministycznego algorytmu największej wiarygodności z modelem zakładającym zmienną amplitudę dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (2.9a) i stochastycznego (2.9b).

Deterministyczny estymator największej wiarygodności z parametrami w postaci wektora amplitud posiada bardzo dobrą zbieżność z ograniczeniem Craméra-Rao w niemalże każdej sytuacji przetestowanej w dodatkach 7.2.6 i 7.2.7. Sprawdza się on w przypadku sygnałów w dowolną postać zmian amplitudy w obrębie paczki sondowań. Teoretycznie lepsze efekty może dać wykonanie estymacji w oparciu o dane wygenerowane na podstawie modelu z stałą wartością amplitudy na przestrzeni paczki sondowań przy jednoczesnym uwzględnieniu tego w równaniach estymatora. Testy pokazały, że korzyść wynikająca z przyjęcia modelu estymatora opartego o stałą wartość amplitudy nie jest zauważalna, natomiast tak skonstruowany estymator nie sprawdza się w przypadku sygnału z amplitudą zmienną w trakcie kolejnych sondowań.

### 2.3.2 Stochastyczny estymator największej wiarygodności

W odróżnieniu od estymatora deterministycznego, w przypadku stochastycznego estymatora największej wiarygodności zakłada się stochastyczny model generacji danych. Oznacza to, że amplituda generowanego sygnału z założenia jest losowa, przy czym nie są szacowane wartości amplitud dla poszczególnych realizacji, a jedynie parametry rozkładu, z którego pochodzą. Amplituda odebranego sygnału posiada różne (niezależne) wartości w kolejnych obserwacjach, będąc realizacjami zmiennej losowej o wariancji  $\sigma_s^2$  ( $s \sim \mathcal{CN}(0, \Sigma)$ ), gdzie  $\Sigma$  jest macierzą kowariancji amplitud). Parametry rozkładu szumu nie ulegają zmianie względem estymatora deterministycznego ( $v_n \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_v^2 \mathbf{I})$ ). Dla tych założeń funkcja wiarygodności ma postać:

$$\mathbf{L}(\Theta, \mathbf{Y}) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{|\mathbf{R}(\Theta)| \pi^M} e^{(-\mathbf{Y}_n^H \mathbf{R}^{-1}(\Theta) \mathbf{Y}_n)}. \quad (2.65)$$

W równaniu (2.65)  $\mathbf{R}(\Theta)$  stanowi hipotetyczną macierz kowariancji obserwacji i może zostać przedstawione jako

$$\mathbf{R}(\Theta) = \mathbf{A}(\theta) \Sigma \mathbf{A}^H(\theta) + \sigma_v^2 \mathbf{I}, \quad (2.66)$$

$\mathbf{A}(\theta)$  jest macierzą utworzoną z wektorów  $\mathbf{a}(\theta)$  dla echa pochodzących z kolejnych kątów:

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \ \cdots \ \mathbf{a}(\theta_K)]. \quad (2.67)$$

Logarymiczna funkcja wiarygodności przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y}) &= -MN \ln(\pi) - N \ln(|\mathbf{R}(\Theta)|) - \sum_{i=1}^N \mathbf{Y}_i^H \mathbf{R}^{-1}(\Theta) \mathbf{Y}_i \\ &= -MN \ln(\pi) - N \ln(|\mathbf{R}(\Theta)|) - N \text{tr} \left( \mathbf{R}^{-1}(\Theta) \hat{\mathbf{R}} \right), \end{aligned} \quad (2.68)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H / N$  jest empiryczną macierzą kowariancji obserwacji.

Korzystając z macierzy rzutowania na podprzestrzeń sygnału oraz podprzestrzeń szumu [odpowiednio  $\mathbf{P}(\theta) = \mathbf{A}(\theta) (\mathbf{A}^H(\theta) \mathbf{A}(\theta))^{-1} \mathbf{A}^H(\theta)$  i  $\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{I} - \mathbf{P}(\theta)$ ] można uzyskać oszacowania wariancji szumu (2.69) i oszacowania macierzy kowariancji sygnału [równanie (2.70)]:

$$\hat{\sigma}_v^2(\theta) = \frac{1}{M - K} \text{tr} \left( \mathbf{Q}(\theta) \hat{\mathbf{R}} \right), \quad (2.69)$$

gdzie  $K \times K$  jest wymiarem macierzy  $\Sigma$ , a samo  $K$  oznacza liczbę zarejestrowanych źródeł echa.

$$\hat{\Sigma}(\theta) = [\mathbf{A}^H(\theta) \mathbf{A}(\theta)]^{-1} \mathbf{A}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}} \mathbf{A}(\theta) [\mathbf{A}^H(\theta) \mathbf{A}(\theta)]^{-1} - \hat{\sigma}_v^2(\theta) [\mathbf{A}^H(\theta) \mathbf{A}(\theta)]^{-1} \quad (2.70)$$

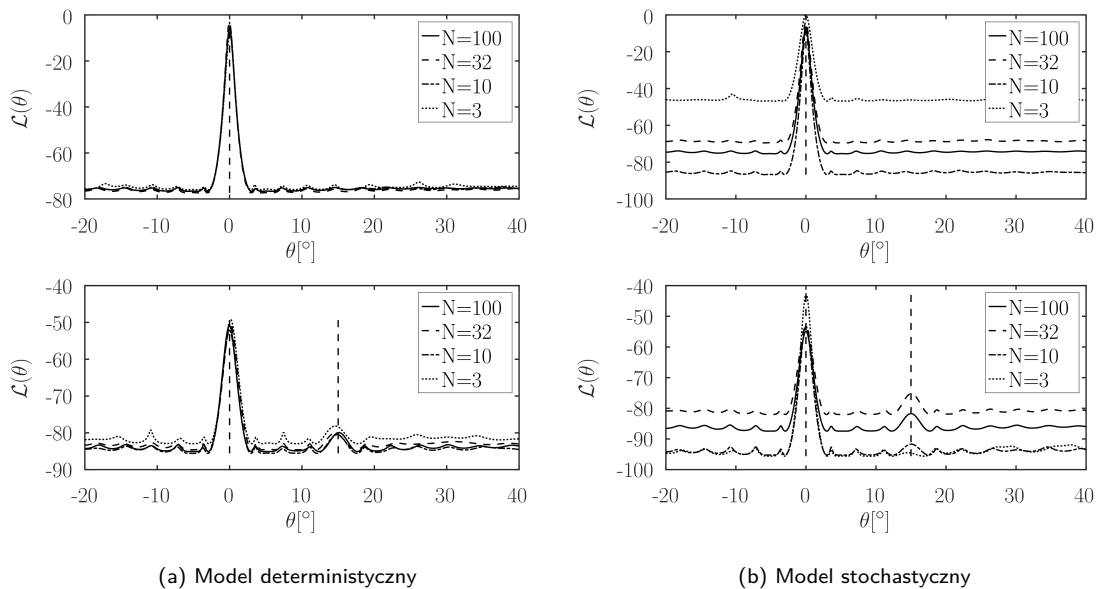
Korzystając z równań (2.69) i (2.70) można dojść do skompresowanej postaci logarymicznej funkcji wiarygodności, zależnej jedynie od wektora kątów odbioru sygnału:

$$\mathcal{L}(\theta, \mathbf{Y}) = -\ln \left( |\mathbf{A}(\theta) \hat{\Sigma}(\theta) \mathbf{A}^H(\theta) + \hat{\sigma}_v^2(\theta) \mathbf{I}| \right). \quad (2.71)$$

W szczególnym przypadku, kiedy obserwowany jest wyłącznie jeden obiekt, macierz  $\mathbf{A}(\theta)$  zostaje zastąpiona przez wektor  $\mathbf{a}(\theta)$ , a zamiast  $\hat{\Sigma}(\theta)$  w równaniu pojawia się wariancja  $\hat{\sigma}_{s1}^2$ .

Na wykresach 2.10a i 2.10b przedstawiono zachowanie stochastycznej postaci metody największej wiarygodności w przypadku estymacji kąta odbioru dla danych pochodzących z odpowiednio modelu deterministycznego i stochastycznego. Parametry symulacji pozostały niezmienione względem przedstawionych przy deterministycznym estymatorze największej wiarygodności (sekcja 2.3.1). Dla obserwacji 1 celu szczyt funkcji wiarygodności jest bardzo wyraźny, jednak nie tak wyostrzony jak w przypadku sygnałów o stałej wartości amplitudy i dostosowanego do nich estymatora. Może to wynikać z faktu, że założenie co do stałości amplitudy na przestrzeni kolejnych obserwacji jest bardzo silnym założeniem i w znaczący sposób ułatwia poprawną lokalizację celu. Model stochastyczny jest bardziej ogólny, nie stawia żadnych założeń co do wartości amplitudy. Przy obserwacji 2 celów można oczekiwać trudności w lokalizacji echa o niższym poziomie sygnału, jednak pojawienie się wzniesienia w okolicy kąta odbioru tego celu zależy od specyfiki konkretnej realizacji. Tu również przedstawiony kształt został uzyskany poprzez liczenie wartości logarytmicznej funkcji wiarygodności dla kolejnych wartości kątów przy założeniu obecności jednego źródła echa. Znacznie efektywniejszym sposobem estymacji jest wykorzystanie odpowiedniej do tego celu metody zakładającej  $K = 2$  obiekty (co zastosowano w testach zamieszczonych w dodatku).

Estymacja kątów na podstawie danych z modelu deterministycznego (wykresy 2.10a) daje niemalże takie same rezultaty jak w przypadku wygenerowania ich w oparciu o model stochastyczny. Wynika to z faktu braku ścisłych założeń co do postaci modelu danych i świadczy o elastyczności podejście stochastycznego.



Rys. 2.10: Przykładowa logarytmiczna funkcja wiarygodności w przypadku stochastycznego algorytmu największej wiarygodności dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (2.8a) i modelu stochastycznego (2.8b).

Stochastyczny estymator największej wiarygodności cechuje się parametrami zbliżonymi do estymatora deterministycznego, w którym nie ma założeń co do amplitudy, ustępując mu w kilku skrajnych

---

przypadkach (jak niewielka separacja kąta celów czy niski poziom SNR). Stanowi on jednocześnie dość niezawodne i uniwersalne podejście, co zostało pokazane w wynikach testów, umieszczonych się w dodatku 7.2.8.

## 2.4 Podsumowanie

Przedstawione estymatory pokazują różne podejścia do sposobu estymowania kąta odbioru. Wśród omówionych metod znajdują się zarówno proste, niewymagające dużego nakładu obliczeń, jak i bardziej skomplikowane podejścia. Na ogół, bardziej złożone algorytmy umożliwiają wypracowanie estymaty kąta odbioru cechującej się mniejszą wariancją oraz niższym poziomem obciążenia.

Najprostsza z omawianych metod - monoimpuls - dzięki bardzo niskiej złożoności obliczeniowej dobrze nadaje się do prostych radarów, w których nie można poświęcić znacznej ilości zasobów na proces estymacji. W odpowiednich warunkach (obserwacja pojedynczego obiektu, odpowiednio wysoki poziom sygnału) uzyskane rezultaty mogą być dość dobrej jakości. Podejście to jednak nie sprawdzi się z niekorzystnych warunkach, jakimi może być np. obserwacja więcej niż jednego obiektu. Sytuacja taka wymaga zastosowania metod bardziej złożonych. Wśród przeanalizowanych sposobów estymacji najlepsze wyniki pozwoliło uzyskać podejście parametryczne, a dokładniej estymatory największej wiarygodności, zarówno w wariancie deterministycznym (z założoną losową amplitudą) jak i stochastycznym. O ile przy obserwacji pojedynczego obiektu nie odstają one znacząco na tle metod nieparametrycznych, tak przy dwóch źródłach sygnału rozbieżności w jakości oszacowania potrafią być znaczące. Zauważyć należy, że w przeprowadzonych testach założono gaussowski rozkład szumu - estymatory największej wiarygodności (dopasowane do takiego rozkładu) stanowią wtedy optymalne rozwiązanie problemu estymacji. W rzeczywistych warunkach szum pomiarowy niekoniecznie musi posiadać rozkład gaussowski. Z tego powodu w specyficznych zastosowaniach estymatora nieparametryczne - które nie stawiają założeń co do rozkładu rejestrowanych sygnałów - mogą okazać się lepszym rozwiązaniem. Warto dodatkowo podkreślić, że istnieją warunki, w których każdy z badanych estymatorów nie był w stanie uzyskać zbieżności z ograniczeniem Craméra-Rao. Chodzi przede wszystkim o sytuację, w której obserwowane jest więcej niż jedno źródło sygnału, a obiekty są umieszczone na zbliżonych kątach. Warunki te są wyjątkowo trudne ze względu na wysokie podobieństwo odpowiedzi anteny na oba obserwowane obiekty. Efektem jest utrudniona rozróżnialność kąta degradująca jakość oszacowania kąta.

## 2.5 Tezy pracy

Próbując wskazać słabości istniejących metod w odniesieniu do specyfiki zaawansowanych systemów radarowych można wskazać na:

- w przypadku metody monoimpulsowej - słabą rozróżnialność i utratę dokładności przy obserwacji więcej niż jednego obiektu w wiązce;

- w przypadku nieparametrycznych metod superrozdzielczych - na wymóg zebrania dużej liczby stacjonarnych obserwacji, co jest sprzeczne z:
  1. organizacją łańcucha przetwarzania w radarze (w szczególności obróbką MTD), która prowadzi do redukcji liczby obserwacji;
  2. dążeniem do optymalizacji wykorzystania zasobów czasowych;
  3. możliwością pracy w trybach ze zmienną częstotliwością (od paczki do paczki lub od impulsu do impulsu).

Ponadto, metody te zakładają brak korelacji źródeł, a ich zachowanie ulega istotnej degradacji, gdy założenie to nie jest spełnione. W systemach radarowych, w sytuacji wystąpienia propagacji wielodrogowej, obserwuje się na ogół korelację sygnałów pochodzących z różnych dróg propagacji.

- metody parametryczne, w swojej ogólnej (podstawowej) postaci nie są dostosowane do ważnych zjawisk fizycznych, takich jak błędy modelowania (istotne przy estymacji elewacji w obecności odbić wielodrogowych od ziemi), obrót anteny, czy zmiana częstotliwości pracy.

W związku z w.w. słabościami istniejących metod, w dalszej części rozprawy zostanie podjęta próba opracowania estymatorów kątów lepiej dostosowanych do specyfiki sensorów radarowych. Tezy pracy są następujące:

1. Zastosowanie estymatorów największej wiarygodności pozwala poprawić dokładność estymacji współrzędnych kątowych w stosunku do metody monoimpulsowej;
2. (Teza pomocnicza) Możliwa jest modyfikacja estymatora największej wiarygodności w taki sposób, aby zwiększyć jego odporność na występowanie odbicia rozproszonego;
3. (Teza pomocnicza) Możliwe jest skonstruowanie parametrycznych i nieparametrycznych estymatorów azymutu o rozdzielczości większej niż wykazywana przez klasyczną metodę monoimpulsową;
4. (Teza pomocnicza) Złożoność obliczeniowa estymatorów największej wiarygodności pozwala na ich implementację w systemie czasu rzeczywistego.



## Rozdział 3

# Estymacja elewacji

W rozdziale rozważono zagadnienie estymacji kąta elewacji, w szczególności na niskich wysokościach, gdzie może dochodzić do zjawiska odbicia od powierzchni Ziemi. Przedstawione zostaną sposoby modelowania sygnału bezpośredniego i odbitego. Uwzględniona zostanie możliwość wystąpienia odbicia zarówno o charakterze lustrzanym, jak i rozproszonym. Rozważone zostaną dwa sposoby pozwalające w pewnym stopniu przeciwdziałać negatywnym efektom tego zjawiska: uodporniony wariant estymatora największej wiarygodności oraz metoda doboru modelu z wykorzystaniem kryteriów informacyjnych. Oba sposoby zostaną przetestowane na podstawie zarówno danych symulowanych jak i rzeczywistych rejestracji radarowych, w których zaobserwowano zjawisko wielodrogowości.

### 3.1 Przedstawienie problemu estymacji elewacji

Kąt elewacji obserwowanego obiektu jest, obok odległości i azymutu, jedną z trzech współrzędnych kątowych określanych przed nowoczesny, trójwspółrzędny radar. Zgodnie z rysunkiem 1.3 stanowi on kąt między celem, a płaszczyzną odniesienia - którą najczęściej (zakładając uproszczony model płaskiej Ziemi) wyznacza horyzont. Aby radar był zdolny do określania współrzędnej elewacyjnej wymagane jest umieszczenie co najmniej 2 elementów odbiorczych w osi pionowej<sup>1</sup>, które umożliwią uzyskanie rozróżnialności kątowej. Współcześnie wykorzystuje się znacznie większą liczbę elementów odbiorczych. Estymowanie elewacji jest zadaniem trudnym ze względu na możliwość wystąpienia towarzyszącego mu zjawiska wielodrogowości. Po oświetleniu obiektu wiązką nadawczą promieniowanie ulega rozproszeniu, z którego część wraca do radaru umożliwiając wykrycie. Część promieniowania natomiast obija się od obiektu w stronę ziemi, od której następuje drugie odbicie w stronę anteny. Pojawiają się zatem dwie (w przypadku odbicia lustrzanego) ścieżki propagacji. Taki sygnał niebezpośredni jest w stanie interferować z sygnałem odbitym od obiektu powodując przekłamania na etapie estymacji. Dla celów lecących nisko nad horyzontem może dojść do sytuacji, w której zarówno echo główne jak i pochodzące od odbicia od ziemi znajdują się w obrębie jednej wiązki odbiorczej. Ze względu na niedużą różnicę w przebytych

<sup>1</sup>Dawniej korzystano z jednej wiązki umieszczonej w osi anteny, a określanie kąta elewacji odbywało się za pośrednictwem mechanicznego odchylenia anteny.



Rys. 3.1: Radar Arthur WRL z anteną wyraźnie dłuższą w osi pionowej.

dystansie przez oba promienie w większości przypadków oba sygnały znajdą się w tej samej komórce odległościowej. W takiej sytuacji proste algorytmy, w których nie ma możliwości rozróżnienia liczby celów (np. metoda monoimpulsowa) nie będą w stanie poprawnie określić kąta elewacji. Estymację dodatkowo utrudnia fakt, że na ogół na niskich kątach elewacji spodziewać się można podwyższonego poziomu zakłóceń pochodzących od obiektów biernych (drzewa, budynki). Powszechnie stosowanym zabiegiem jest wykonywanie filtracji dopplerowskiej, jednak nie rozwiązuje to problemu dla obiektów nieruchomych, czy poruszających się z prędkością ślepą. Z tego powodu, aby usprawnić omawiany proces, często zwiększa się liczbę elementów odbiorczych w osi pionowej. Powoduje to zawężenie wiązki w płaszczyźnie elewacji, poprawiając selektywność kątową, co z kolei pozwala na skuteczniejsze odrzucanie sygnału niebezpośredniego. Przykładem takiego zabiegu może być radar artyleryjski Arthur (rys. 3.1), w którym antena posiada wyraźnie większą długość w osi pionowej.

Znajomość elewacji ( $\phi$ ) obserwowanego obiektu, oraz jego odległości ( $R$ ) do radaru pozwala na określenie współrzędnej  $Z$  (zgodnie z notacją z rysunku 1.3). Przekształcenie to odbywa się za pomocą równania:

$$Z = H_a + R \sin(\phi), \quad (3.1)$$

gdzie  $H_a$  stanowi wysokość umiejscowienia anteny ponad poziomem horyzontu. Należy zauważyć, że wartość  $Z$  jest jedynie w przybliżeniu równa wysokości na jakiej znajduje się obiekt. Niedokładność ta wynika z założenia płaskiego modelu Ziemi. Wraz z zwiększaniem odległości obserwacji kształt Ziemi coraz bardziej różni się od przyjętej postaci płaszczyzny, co z kolei powoduje powiększanie się różnic między współrzędną  $Z$  a wysokością względem powierzchni ( $H$ ). Do obliczenia wysokości można

skorzystać z równania w przybliżeniu uwzględniającego krzywiznę Ziemi:

$$H \approx H_a + R \sin(\phi) + \frac{R^2}{2 R_Z}, \quad (3.2)$$

gdzie  $R_Z$  stanowi tzw. efektywny promień Ziemi ( $R_Z = \frac{4}{3}R_E$ ,  $R_E$  jest promieniem Ziemi) [61]. Równanie (3.2) przybliża kształt Ziemi za pomocą paraboli. Jest to model dokładniejszy od płaskiego jednak na znacznych odległościach również odbiega od wartości prawdziwej. Dalszą poprawę dokładności można uzyskać przyjmując kształt Ziemi jako kulisty, co przekłada się na równanie postaci:

$$H = \sqrt{(R_Z + H_a)^2 + R^2} + 2(R_Z + H_a) R \sin(\phi). \quad (3.3)$$

W celu jeszcze dokładniejszego szacowania wysokości należałoby skorzystać z równań przyjmujących geoidę jako faktyczny kształt powierzchni Ziemi lub wręcz map wysokościowych zawierających dokładną reprezentację terenu, oraz uwzględnić wpływ refrakcji w dokładniejszy sposób niż przez wprowadzenie efektywnego promienia Ziemi.

## 3.2 Modele odbicia od ziemi

### 3.2.1 Model płaskiej, gładkiej Ziemi

Najprostszym i najpopularniejszym sposobem modelowania wielodrogowości jest założenie, że Ziemia jest powierzchnią płaską, od której promieniowanie może odbijać się w swobodny sposób, zgodnie z zasadami optyki geometrycznej. W praktyce, kryteria te są w przybliżeniu spełnione podczas prowadzenia obserwacji w warunkach łagodnego ukształtowania terenu, na względnie niedużych odległościach radaru od celu. Zakłada się również, że promienie fali radarowej biegną po linii prostej, a ośrodek jest jednorodny. Część promieniowania odbitego dociera do anteny w sposób bezpośredni pod kątem  $\phi_d$  (echo bezpośrednie). Pozostała część promieniowania zostaje rozproszona w różnych kierunkach, jednak część odbija się od powierzchni ziemi i dociera do anteny radaru pod kątem  $\phi_m$  (odbicie lustrzane). Sytuację tą przedstawiono na rysunku 3.2.

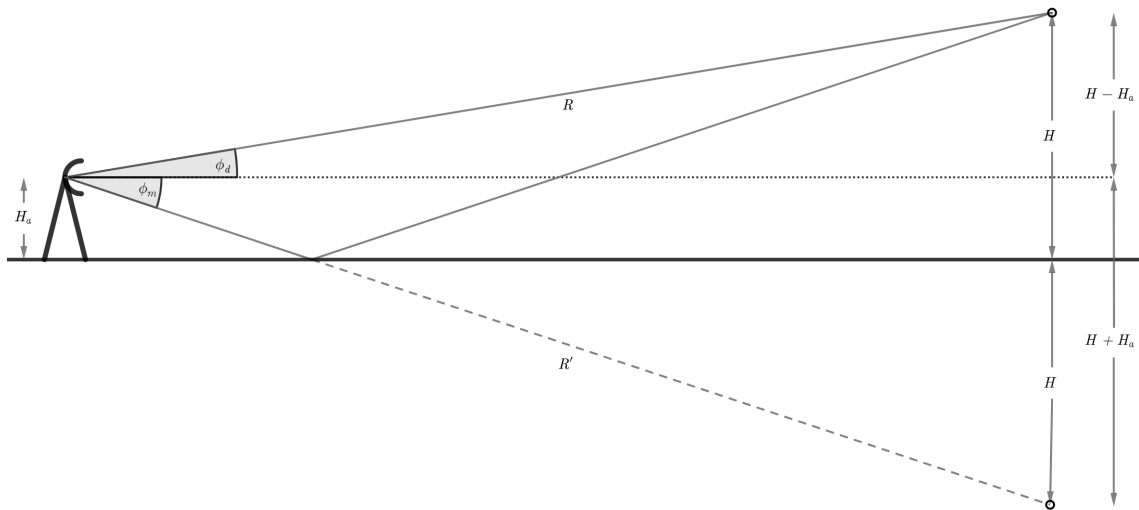
Przedstawione kąty odbioru echa są równe odpowiednio:

$$\begin{aligned} \phi_d &= \sin^{-1} \left( \frac{H - H_a}{R} \right), \\ \phi_m &= \sin^{-1} \left( -\frac{H + H_a}{R'} \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

gdzie  $H$  jest wysokością obiektu nad powierzchnią Ziemi,  $H_a$  wysokością anteny,  $R$  odległością celu od radaru, a  $R'$  odległością jaką pokonuje fala radiowa między celem a anteną z uwzględnieniem odbicia od ziemi. Może ona zostać obliczona za pomocą równania [62]:

$$R' \approx \sqrt{R^2 + 4 H_a H}. \quad (3.5)$$

W większości przypadków zjawisko wielodrogowości występuje przy celach obserwowanych na niskich elewacjach. Przyjmuje się wtedy, że odległość celu od radaru jest znacznie większa niż jego wysokość



Rys. 3.2: Schemat powstawania zjawiska wielodrogowości oparty o model płaskiej Ziemi.

nad powierzchnią Ziemi ( $R \gg H$ ), a sama antena jest umieszczona na niewielkiej wysokości ( $H_a \ll H$ ). W takim wypadku równania (3.4) i (3.5) można uprościć do postaci:

$$\begin{aligned} R' &\approx R, \\ \phi_m &\approx -\phi_d. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Model zakładający lustrzane odbicia można uznać za wiarygodny w przypadku odpowiednio płaskiej powierzchni terenu. Jako miarę płaskości można przyjąć różnice w wysokości terenu w otoczeniu wystąpienia odbicia od ziemi  $\Delta h$ , która powinna spełniać kryterium [63]:

$$\Delta h \leq \frac{\lambda}{8 \sin \phi_d}, \quad (3.7)$$

aby móc uznać powierzchnię za płaską. Można wówczas przyjąć, że odbicie lustrzane dominuje. Z kolei faza odbitego sygnału różni się od fazy sygnału bezpośredniego o

$$\Delta\varphi \approx \frac{4\pi H_a H}{R\lambda} + \pi. \quad (3.8)$$

Różnica ta wynika z wydłużenia drogi propagacji sygnału, oraz samego odbicia od ziemi, w trakcie którego faza ulega odwróceniu (wartość  $\pi$  dotyczy polaryzacji pionowej i niewielkich kątów elewacji, dokładniejsze wyrażenie, w tym dla polaryzacji poziomej można znaleźć np. w książce [39]). W praktyce, na fazę odbitego echa wpływ ma nie tylko długość drogi propagacji sygnału, ale również lokalne ukształtowanie terenu mające wpływ na kąt odbicia, w związku z czym wartości te mogą w znaczącym stopniu różnić się od przedstawionych w równaniu (3.8). Podobna sytuacja może mieć miejsce z amplitudą sygnału echa odbitego ( $s_m$ ). Na ogół wartość ta zawiera się w przedziale  $0 \leq |s_m| \leq |s_d|$  ( $s_d$  oznacza amplitudę echa bezpośredniego), jednak w skrajnie niekorzystnych warunkach może dojść do sytuacji, w której echo odbite od ziemi będzie posiadało wyższą energię od echa odebranego bezpośrednio. Z drugiej strony, gęsta, niska roślinność (niskie lasy, krzewy) może znacząco zredukować energię echa odbitego.

Zgodnie z schematem przedstawionym na rysunku 3.2, sygnał odebrany można przedstawić jako sumę dwóch echa na elewacjach równych odpowiednio  $\phi_d$  i  $\phi_m$ . Sygnał zarejestrowany przez antenę

będzie miał wówczas postać:

$$\mathbf{y}_n = s_d \mathbf{a}(\phi_d) + s_m \mathbf{a}(\phi_m) + \mathbf{v}_n, \quad (3.9)$$

gdzie  $s_d$  i  $s_m$  są zespolonymi amplitudami echa bezpośredniego i odbitego od ziemi,  $\mathbf{a}(\phi)$  jest wektorem odpowiedzi anteny, a  $\mathbf{v}_n$  zespolonym gaussowskim szumem o macierzy kowariancji  $\mathbf{R}_{\mathbf{v}} = \sigma_v^2 \mathbf{I}$ . Przy założeniu idealnie lustrzanego odbicia między amplitudami zachodzi zależność:

$$s_m \approx s_d e^{j\Delta\varphi}. \quad (3.10)$$

W równaniu (3.10) zakłada się brak strat energii w trakcie odbicia, w efekcie czego, amplitudy są sobie w przybliżeniu równe co do modułu.

### 3.2.2 Model odbicia rozproszonego

Istnieje również model zakładający odbicie rozproszone, opisany w artykule [63]. Cechą specyficzną dla takiej postaci wielodrogowości jest ciągłość występowania energii na przestrzeni szerokiego zakresu kątów elewacji, gdzie przy odbiciu lustrzanym zakładało się dwa, punktowe, źródła promieniowania. Zjawisko odbicia rozproszonego wynika z nierówności powierzchni Ziemi, a formuły umożliwiające określenie gęstości energii uwzględniają współczynnik rozproszenia, reprezentujący nierówności podłoża - dokładniej wariację nachylenia powierzchni, od której odbija się sygnał. Efekt odbicia rozproszonego może być obserwowany naocznie - np. w trakcie zachodu Słońca nad morzem (zdjęcie 3.3).



Rys. 3.3: Zachód Słońca nad morzem z dobrze widocznym odbiciem rozproszonym.

Bazując na publikacji [63], współczynnik mocy odbitej od powierzchni Ziemi ( $p_d^2$ ) może zostać określona za pomocą:

$$p_d^2 \approx \int_{x_a}^{x_b} \frac{R^2 y}{(R-x)^2 x^2} dx, \quad (3.11)$$

gdzie:

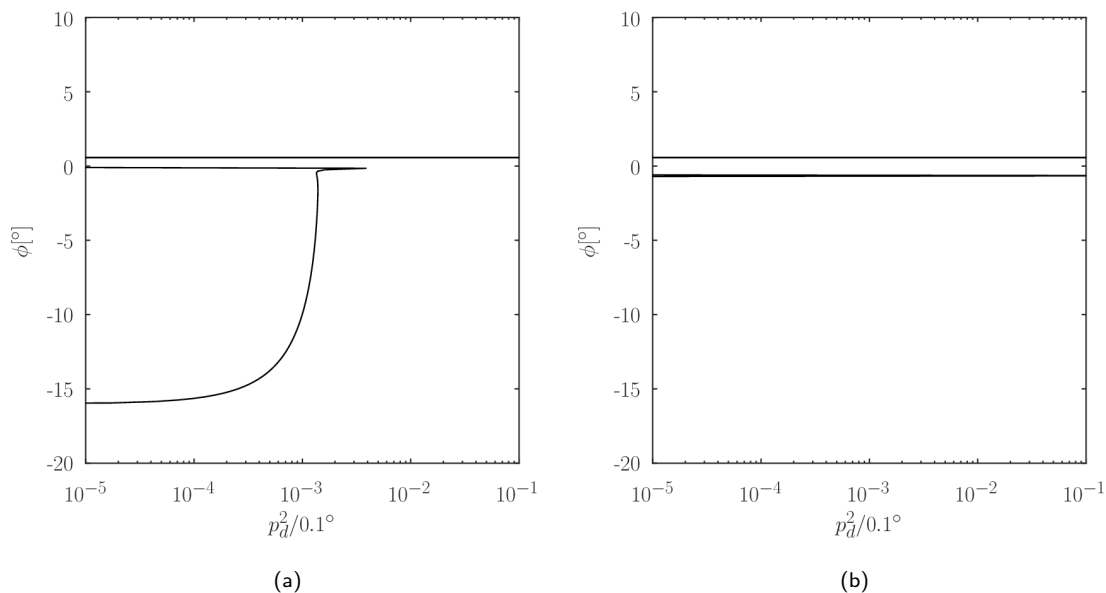
$$y = \pm \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \left( \frac{H_a}{x_1} + \frac{H}{x_2} \right) \sqrt{\beta_0^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{H_a}{x_1} - \frac{H}{x_2} \right)^2}, \quad (3.12)$$

natomiast  $x_1$  i  $x_2$  stanowią odpowiednio mierzoną po ziemi odległość między anteną a punktem odbicia lustrzanego i odległość między punktem odbicia lustrzanego a celem.  $H_a$  i  $H$  są wysokością anteny

oraz wysokością obiektu nad powierzchnią Ziemi, a  $\beta_0$  jest parametrem opisującym nierówność podłoża (maksymalne nachylenie lub jego RMS). Całkowitą moc odbitą od ziemi uzyskuje się mnożąc kwadrat amplitudy sygnału echa bezpośredniego przez  $p_d^2$ . W równaniu (3.11), wartości  $x_a = H_a/2\beta_0$  i  $x_b = R - x_a$ , stanowiące granice całkowania, oznaczają odległość początku i końca obszaru rozproszonego odbicia (mierząc od radaru, po powierzchni Ziemi). Modyfikując granice całkowania można określić ilość energii docierającą z poszczególnych zakresów odległości. Z punktu widzenia estymacji elewacji istotniejsza jest kwestia kątowej gęstości energii - tą można uzyskać wykonując przekształcenie układu współrzędnych:

$$\phi = -tg\left(\frac{x}{H_a}\right). \quad (3.13)$$

Wykorzystując powyższe równania można przedstawić wykres porównujący gęstość energii w przypadku odbicia rozproszonego (rys. 3.4a) i lustrzanego (rys. 3.4b). Obie charakterystyki pochodzą z symulacji



Rys. 3.4: Porównanie ilości energii zarejestrowanej na poszczególnych kątach elewacji przy założeniu odbicia rozproszonego (rys. 3.4a) i lustrzanego (rys. 3.4b)

zakładającej obecność punkowego celu na odległości  $R = 10$  km, wysokości  $H = 105$  m, wysokości maszty antenowego  $H_a = 5$  m i przy współczynniku nierówności podłoża  $\beta_0 = 0.2$ . Wartość  $\beta_0$  odzwierciedla umiarkowanie pofalowany teren. Przyjęto jednostkę gęstości energii przeskalowaną w odniesieniu do  $0.1^\circ$  - ma to związek z wykorzystaniem powyższych zależności w późniejszych symulacjach badających zachowanie estymatorów. W ich trakcie ciągły rozkład odbicia zostanie przybliżony przy pomocy punktowych źródeł sygnału, rozmieszczonych równomiernie co  $0.1^\circ$  z energią zgodną z równaniem (3.12). W przypadku profilu energii przy odbiciu rozproszonym widać wyraźnie, że na poziomie horyzontu ( $\phi \approx 0^\circ$ ) pojawia się punktowy wzrost gęstości rejestrowanej mocy, który może być przyczyną powstawania grubych błędów w procesie estymacji.

Faza sygnału odbitego jest trudna do określenia ze względu na niewielką długość fali w stosunku do możliwych nierówności podłoża, a do samych odbić dochodzi pod różnymi kątami. Ostatecznie, w



trakcie symulacji założono fazę echa odbitego jako losową w funkcji kąta odbioru:

$$\mathbf{y}_n = \sum_{i=1}^N \left( s\mathbf{a}(\phi_d) + \sum_{\phi=\phi_{min}}^{\phi_{max}} sp_d(\phi)e^{j\alpha(\phi)}\mathbf{a}(\phi) \right), \quad (3.14)$$

gdzie  $s$  oznacza stałą amplitudę, niezależną od kąta ani numeru sondowania, a  $\phi_d$  oznacza kąt echa bezpośredniego. Wewnętrzna suma przybliża ciągłe, rozproszone echo przy pomocy zbioru impulsowych źródeł, a  $p_d^2$  stanowi współczynnik opisany w równaniu (3.11), jednak zmieniono granice całkowania z odległości między punktami odbicia na rozpiętość kątową w elewacji. Należy ponadto zwrócić uwagę na sposób realizacji fazy sygnału obitego:  $\alpha(\phi)$ . Jest ona pseudolosową funkcją kąta  $\phi$ , przyjmującą różne wartości w ciągu kolejnych sondowań.

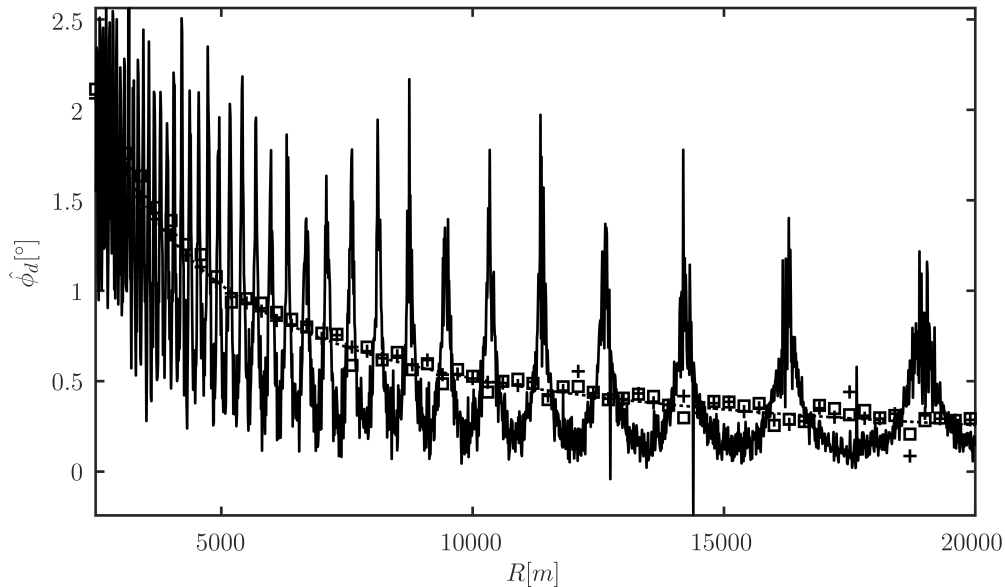
### 3.3 Estymacja kąta elewacji w warunkach propagacji wielodrogowej

#### Test 1

Wykorzystując model opisany równaniem (3.9) wykonana została symulacja pokazująca zachowanie 3 estymatorów w sytuacji wystąpienia odbić od ziemi: monoimpulsowego, stochastycznego największej wiarygodności z założeniem idealnie lustrzanego odbicia ( $\phi_m = -\phi_d$ ) i stochastycznego największej wiarygodności z założeniem obecności dwóch niezależnych źródeł. Model idealnie lustrzanego odbicia zakłada obecność dwóch źródeł echa na powiązanych z sobą kątach, co skutkuje zmniejszeniem liczby parametrów o 1, w efekcie pozwalając na poszukiwanie ekstremum funkcji wiarygodności w wyłącznie jednym wymiarze. Pozwala to znacząco zredukować złożoność obliczeniową w stosunku do pełnego, dwuwymiarowego przeszukania funkcji kosztu, jak ma to miejsce w estymatorze zakładającym dwa, niepowiązane z sobą źródła. W symulacji założono wysokość anteny  $H_a = 10$  m, oraz obiekt unoszący się  $H = 100$  m nad ziemią, oddalający się od radaru w linii prostej. Wraz ze wzrostem odległości od radaru malał kąt elewacji pod jakim cel był obserwowany, modyfikując tym samym warunki symulacji. Zastosowana antena składała się z  $M = 32$  elementów odbiorczych, a estymacja kąta opierała się o sygnały z  $N = 3$  sondowań.  $SNR$  wynosił 30 dB w odniesieniu do jednego elementu antenowego. Kąty elewacji, na których obserwowany był cel ( $\phi_d$  - echo bezpośrednie i  $\phi_m$  - lustrzane odbicie od ziemi) estymowane były na podstawie modelu płaskiej Ziemi (równanie (3.6) przy założeniu  $R' = R$ ). Amplituda echa bezpośredniego miała charakter losowy o gaussowskim, zespolonym rozkładzie:  $s_d \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_d^2)$ , z kolei dla echa odbitego dana była wzorem (3.15):

$$s_{m,n} = |s_{d,n}| \cdot \mathcal{U}(0.1, 0.9) \cdot e^{j(\arg(s_{d,n}) + \frac{4\pi H_a H}{R\lambda} + \pi + \mathcal{N}(0, 0.1))}. \quad (3.15)$$

Fragment równania z rozkładem równomiernym gwarantuje, że amplituda sygnału odbitego będzie wynosiła od 0.1 do 0.9 wartości  $|s_{d,n}|$ . Faza echa odbitego jest fazą echa bezpośredniego zmodyfikowaną o różnicę pokazaną we wzorze (3.8) z dodanym nieznacznym składnikiem losowym. Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 3.5.



Rys. 3.5: Wyniki estymacji kąta elewacji dla 3 estymatorów: monoimpulsowego (linia ciągła), stochastycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 1 wymiarze (symbol kwadratu), oraz stochastycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 2 wymiarach (symbol "+"). Linia przerywana pokazuje wartość prawdziwą.

Wyraźnie jest widoczne, że estymator monoimpulsowy (linia ciągła) w warunkach symulowanej wielodrogowości jest nieskuteczny. Występujące grube błędy w oszacowaniu kąta elewacji nie wynikają z realizacji szumu, a jednoczesnego obserwowania dwóch sygnałów pochodzących z różnych kątów. Wzajemna interferencja obu źródeł sprawia, że próba odtworzenia prawidłowego kąta przy pomocy odwrotnej charakterystyki pelengacyjnej jest niemożliwa.

Testom poddane zostały również dwie odmiany stochastycznego estymatora największej wiarygodności, obie przewidujące obecność dwóch ech. W pierwszym estymatorze (symbol kwadratu na wykresie) założono idealnie lustrzane odbicie ( $\phi_m = -\phi_d$ ), drugi natomiast (symbol "+" na wykresie) nie posiadał żadnych uproszczeń i wykonywane było dwuwymiarowe poszukiwanie maksimum logarytmicznej funkcji wiarygodności (niezależnie dla  $\phi_d$  i  $\phi_m$ ). Oba estymatory największej wiarygodności były w stanie dosyć precyzyjnie określić położenie echa bezpośredniego. Wartości obciążenia i błędu średniokwadratowego obliczone na podstawie całego badanego zakresu pokazano w tabeli 3.1.

Jak pokazuje tabela 3.1, estymator wykonujący przeszukiwanie w dwóch wymiarach uzyskał najniższy poziom błędów średniokwadratowych oraz obciążenia. Wynika to z niezależnego dostrajania kąta odbioru każdego z ech, co z kolei dla wysokiego SNR umożliwiło skuteczniejszą minimalizację funkcji kosztu niż w przypadku założenia idealnie lustrzanego odbicia. Wadą tego rozwiązania jest znacznie wyższa złożoność obliczeniowa w porównaniu do dwóch pozostałych algorytmów. Pod kątem szybkości działania najmniej złożony obliczeniowo jest estymator monoimpulsowy, jednak jego estymaty obciążone są dużymi, powtarzalnymi błędami. Estymator zakładający lustrzane odbicie stanowi kompromis między czasem obliczeń, a jakością uzyskanego oszacowania. W praktyce na jego osiągi znaczący wpływ ma wysokość umiejscowienia anteny. Im antena umiejscowiona jest niżej, tym bliższe prawdzie będzie



Sposób estymacji	$E(\phi_d - \hat{\phi}_d)^2 [^\circ^2]$	$ E(\phi_d - \hat{\phi}_d)  [^\circ]$
Estymator monoimpulsowy	2.0578	0.01051
Stochastyczny MLE założenie $\phi_m = -\phi_d$	0.0037221	0.0043095
Stochastyczny MLE założenie 2 obiektów	<b>0.0024752</b>	<b>0.0010272</b>

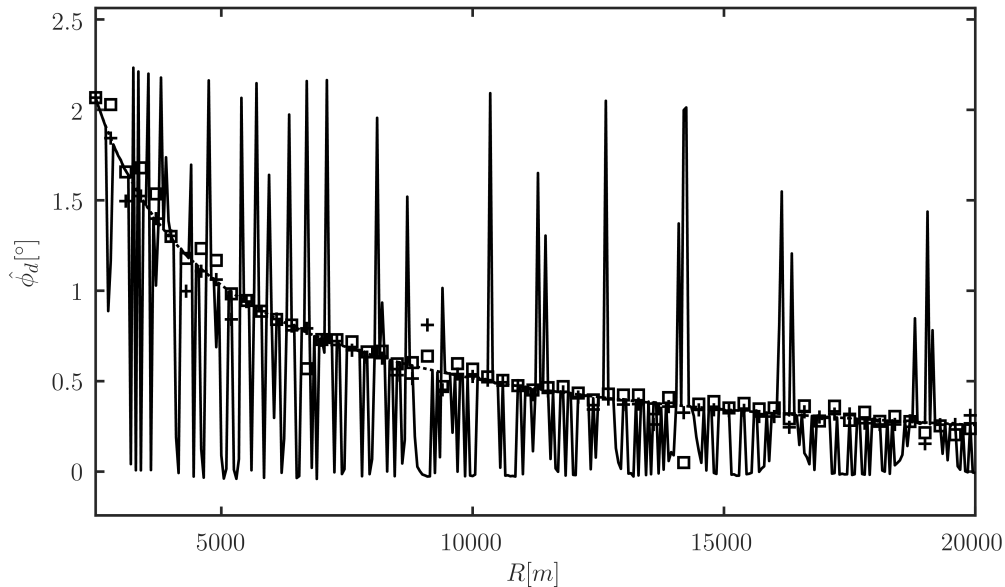
Tab. 3.1: Wartości obciążenia i błędu średniokwadratowego uzyskane dla 3 estymatorów przy obecności wielodrogowości w każdej z prób.

przybliżenie  $\phi_m = -\phi_d$  [równanie (3.4)].

## Test 2

W pierwszym z testów estymatorów w warunkach odbić od ziemi, zjawisko wielodrogowości występowało zawsze, jednak mogło przy tym posiadać znacznie ograniczoną (w stosunku do echa prostego) amplitudę. Sprawiało to, że estymator z przeszukaniem zakładający uproszczony model odbicia ( $\phi_m = -\phi_d$ ) w każdej realizacji bazował na podwójnym źródle sygnału, co mogło poprawić jakość oszacowania. Celem drugiego z testów jest sprawdzenie zachowania estymatorów w sytuacji, kiedy amplituda echa odbitego od ziemi spada do zera. Parametry symulacji w większości pozostały takie same jak w przypadku pierwszego testu (tj. wartości  $N$ ,  $M$ , wysokość anteny, sposób poruszania się celu, charakter echa bezpośredniego), jednak różnice dotyczą realizacji echa odbitego. Występuje ono w 50% losowo wybranych realizacji (jest obecne w każdym sondowaniu z danej grupy segmentów stanowiących jedną realizację, bądź nie ma go w żadnym z nich). Moduł amplitudy echa odbitego (o ile takowe wystąpiło) wynosił 0.9 wartości amplitudy echa bezpośredniego. Realizacja fazy echa odbitego wykonana została identycznie jak teście pierwszym. Zmianie uległ natomiast zestaw estymatorów. Algorytm monoimpulsowy nie jest badany, a jego miejsce zastąpił stochastyczny estymator największej wiarygodności zakładający obecność jednego echa. Drugi i trzeci z estymatorów to dwa wykorzystywane w teście pierwszym - stochastyczne estymatory największej wiarygodności z odpowiednio uproszczonym, lustrzanym modelem odbicia oraz pełny, dwuwymiarowy wariant. Ostatni, dodatkowy z sposobów szacowania kąta stanowi nierealizowalny w praktyce estymator, w którym a priori znana jest liczba ech w obserwowanym sygnale. W zależności od występowania wielodrogowości w segmencie, wykorzystuje on do szacowania kąta stochastyczny estymator największej wiarygodności określający położenie jednego celu lub wersję rozbudowaną, wykonującą poszukiwanie minimum funkcji kosztu dla dwóch niezależnych kątów. Tego typu estymator "wyroczniowy" stanowi punkt odniesienia i pozwala pokazać jaki zysk niesie z sobą odpowiedni dobór estymatora w zależności od liczby występujących ech. Wynik testu przedstawiono na rysunku 3.6.

W wykresie 3.6 najbardziej widoczny jest przebieg oszacowania wartości kąta wykonany przy pomocy estymatora zakładającego pojedyncze źródło sygnału. Kształtem przypomina nieco wyniki uzyskane w



Rys. 3.6: Wyniki estymacji kąta elewacji dla 3 estymatorów: stochastycznego największej wiarygodności z założeniem 1 celu (linia ciągła), stochastycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 1 wymiarze (symbol kwadratu), oraz stochastycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 2 wymiarach (symbol "+"). Linia przerywana pokazuje wartość prawdziwą. Wielodrogowość występująca w 50% prób.

pierwszym z testów przy wykorzystaniu metody monoimpulsowej, jednak ma charakter bardziej "poszarpany", co wynika z częstych zmian wartości oszacowania kąta w zależności od występowania zjawiska wielodrogowości. Przy faktycznej obecności jednego źródła sygnału oszacowanie jest bliskie wartości prawdziwej, natomiast odbiór ech z dwóch źródeł skutkuje zachowaniem zbliżonym do estymatora monoimpulsowego. Brak odbić od ziemi ma z kolei negatywny wpływ na estymator zakładający  $\phi_m = -\phi_d$  (oznaczony na wykresie kwadratem), co wynika z faktu że na kącie  $\phi_m$  nie istnieje żaden użyteczny sygnał mogący poprawić jakość estymaty. Na ujemnym kącie mogą ponadto znaleźć się listki boczne echa głównego, które wpłyną na lokalizację ekstremum funkcji kosztu. Problemu tego pozbawiony jest estymator zakładający obecność dwóch niezależnych ech (oznaczenie "+" na wykresie). W przypadku wystąpienia wielodrogowości będzie on w stanie poprawnie przyporządkować kąty dla obu ech. Przy jednym źródle sygnału, kąt odbioru zostanie poprawnie zlokalizowany, drugi z kątów dopasuje się z kolei do szumu, wskazując losową wartość. Do określenia, który z kątów odpowiada faktycznemu, użytecznemu sygnałowi można wykorzystać amplitudę - w większości przypadków wyższa jej wartość powinna być związana z obecnością echa. Problemu tego pozbawiony jest estymator znający liczbę celów, który jednak nie jest w praktyce realizowalny. Dzięki wiedzy a priori na temat liczby ech, posiada on możliwość optymalnego dobrania modelu estymatora do występującej warunków propagacji, co w efekcie powinno poprawić jakość oszacowań. Dołączenie go do testu ma na celu pokazanie potencjalnego zysku, jaki może wynikać z manipulacji modelem sygnału. Ze względu na czytelność, wartości uzyskane przez estymator nie zostały umieszczone na wykresie, jednak ich obciążenie i błąd średniokwadratowy przedstawiono w tabeli 3.2

Sposób estymacji	$E(\phi_d - \hat{\phi}_d)^2 [^\circ^2]$	$ E(\phi_d - \hat{\phi}_d)  [^\circ]$
Stochastyczny MLE założenie 1 obiektu	0.25818	0.078722
Stochastyczny MLE założenie $\phi_m = -\phi_d$	0.0050574	0.017605
Stochastyczny MLE założenie 2 obiektów	0.0031748	0.0066209
Stochastyczny MLE założenie znajomości liczby obiektów	<b>0.0020839</b>	<b>0.00057975</b>

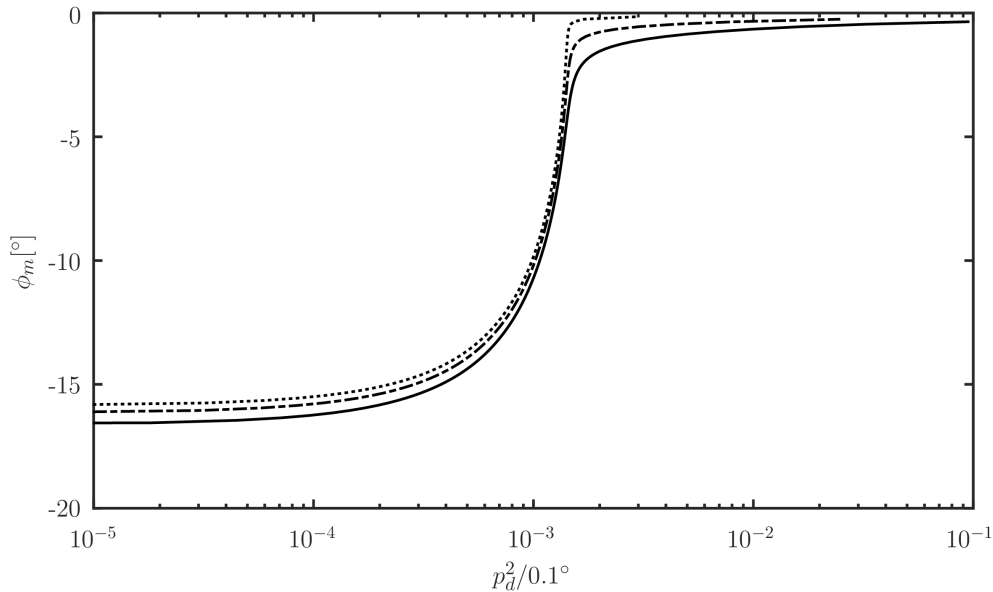
Tab. 3.2: Wartości obciążenia i błędu średniokwadratowego uzyskane dla 4 estymatorów przy wielodrogowości występującej w 50% realizacji.

Estymator zakładający obecność pojedynczego źródła sygnału znacząco odstaje od pozostałych, posiadając kilka rzędów wielkości większy błąd średniokwadratowy. Należy oczekiwać, że w warunkach sprzyjających występowaniu wielodrogowości szacowanie kąta odbioru przy jego pomocy może być obciążone znacznymi błędami. Lepiej wypada estymator z założonym idealnym lustrzanym modelem odbicia - posiada on stosunkowo niski poziom błędu średniokwadratowego oraz obciążenia w stosunku do estymatora zakładającego jedno źródło sygnału, przy zachowaniu porównywalnej złożoności obliczeniowej. Najlepszą jakością oszacowania cechuje się estymator z pełnym, dwuwymiarowym przeszukaniem funkcji kosztu. Należy jednak zaznaczyć, że znajomość liczby źródeł sygnału nadal pozwala zmniejszyć wartość błędu średniokwadratowego niemal o połowę (w tych konkretnych warunkach symulacji), co pokazują wartości uzyskane przez hipotetyczny estymator "wyczołniony".

### Test 3

Trzeci z testów zakładał wykorzystanie modelu rozproszonego odbicia, przedstawionego w sekcji 3.2.2. Przyjęto, że obiekt posiada takie same parametry, oraz porusza się w sposób identyczny jak w poprzednim teście. Jediną różnicą było zastąpienie lustrzanego odbicia wariantem rozproszonym (opisanym w sekcji 3.2.2). Przyjęto, że ciągłe widmo energii zostanie przybliżone zbiorem impulsowych źródeł rozmieszczonych w sposób równomierny, co  $0.1^\circ$ . Założono, że każde z odbić posiada zespoloną amplitudę zgodną z równaniem (3.14) z fazą różną dla każdego sondowania. Założono dodatkowo tłumienie (10 dB) mające odzwierciedlić występujące w rzeczywistości tłumienie spowodowane obecnością roślin (przyjmuje się tłumienie w zakresie 8 dB do 12 dB [64]). Przykładowe profile współczynnika odbicia rozproszonego uzyskane przy różnych odległościach obiektu od radaru przedstawiono na rysunku 3.7.

Wyniki testu przedstawiono na wykresie 3.8 oraz w tabeli 3.3. Z wykresu można zauważyć, że dla wyższej grupy kątów ( $\phi_d > \sim 1^\circ$ ), estymacja oparta o stochastyczny estymator zakładający obecność pojedynczego źródła sygnału działa w sposób bardzo niestabilny, uzyskane oszacowania posiadają znaczny rozrzut. Najlepiej w tym zakresie sprawdza się estymator z założeniem obecności dwóch źródeł sygnału i niezależnym poszukiwaniem każdego z nich. Dla niskich kątów elewacji ( $\phi_d < \sim 0.5^\circ$ )

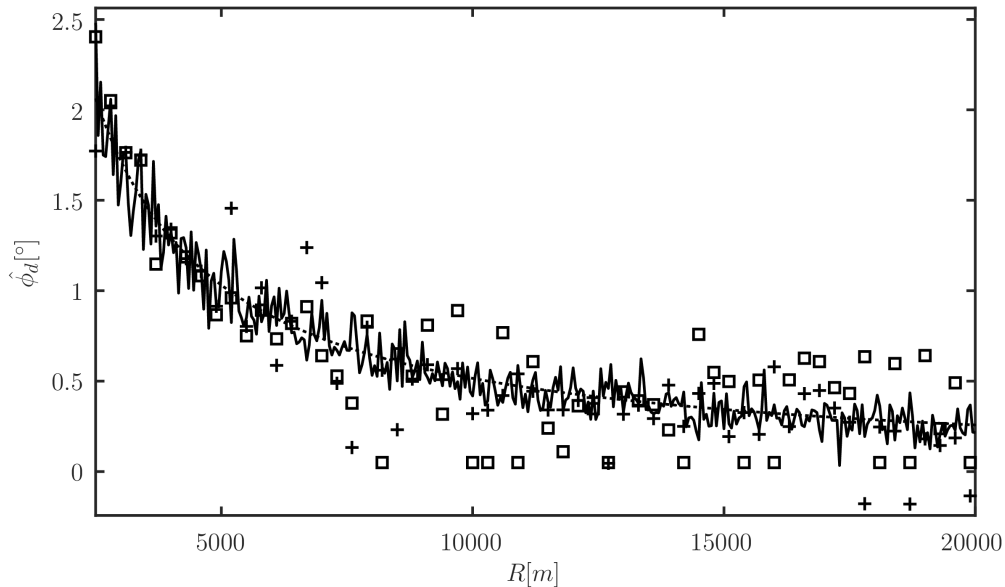


Rys. 3.7: Profil współczynnika odbicia rozproszonego echa odbitego od ziemi uzyskany dla 3 odległości obiektu od radaru: linia ciągła 2.5 km, linia kropka-kreska 5 km, linia kropkowana 20 km.

sytuacja wygląda zupełnie inaczej - estymatory zakładające obecność dwóch źródeł sygnału (zarówno zakładający  $\phi_m = -\phi_d$ , jak i wykonujący przeszukiwanie  $\phi_d$  i  $\phi_m$  w sposób niezależny) charakteryzują się dużym rozrzutem estymat oraz tendencją do szacowania kątów tuż nad poziomem horyzontu. Wariant z założeniem pojedynczego źródła sygnału w takich warunkach działa bardziej stabilnie. W ostatecznym rozrachunku, najniższym błędem średniokwadratowym cechuje się estymator z założeniem pojedynczego źródła sygnału, jednak wykonanie symulacji w innych warunkach (np. symulacja, w której obiekt zawsze znajduje się nieco wyżej nad horyzontem, tj.  $\phi_d > \sim 1^\circ$ , mogłoby skutkować innymi wynikami. Test pokazuje, że przedstawione do tej pory sposoby estymacji elewacji nie stanowią uniwersalnego rozwiązania w przypadku szacowania kąta w warunkach rozproszonego odbicia od ziemi.

Sposób estymacji	$E(\phi_d - \hat{\phi}_d)^2 [^\circ^2]$	$ E(\phi_d - \hat{\phi}_d)  [^\circ]$
Stochastyczny MLE założenie 1 obiektu	<b>0.011517</b>	<b>0.0026845</b>
Stochastyczny MLE założenie $\phi_m = -\phi_d$	0.055528	0.020006
Stochastyczny MLE założenie 2 obiektów	0.031471	0.03836

Tab. 3.3: Wartości obciążenia i błędu średniokwadratowego uzyskane dla 3 estymatorów przy rozproszonym modelu odbić opisanym w sekcji 3.2.2.



Rys. 3.8: Wyniki estymacji kąta elewacji dla 3 estymatorów: stochastycznego największej wiarygodności z założeniem 1 źródła (linia ciągła), stochastycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 1 wymiarze (symbol kwadratu), oraz stochastycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 2 wymiarach (symbol "+"). Linia przerywana pokazuje wartość prawdziwą. Wielodrogowość w postaci rozproszonego odbicia od doskonale szorstkiej ziemi.

#### Test 4

W rzeczywistym systemie radarowym nie zawsze można pozwolić sobie na estymację z wykorzystaniem sygnałów pochodzących bezpośrednio z elementów antenowych. Ze względu na wysoką częstotliwość próbkowania oraz na ogół dużą liczbą elementów odbiorczych, przesyłanie takich ilości danych stanowi znaczny problem. Z tego powodu często stosuje się formowanie wiązek za pomocą układów analogowych, bądź w sposób cyfrowy, przy użyciu dostosowanych do tego celu płyt obliczeniowych, np. FPGA. W efekcie na etapie estymacji nie są dostępne sygnały z elementów odbiorczych, a jedynie wartości z uformowanych już wiązek, co w znacznym stopniu redukuje liczbę dostępnych sygnałów.

W praktyce, estymacja kąta odbioru sygnału z wykorzystaniem estymatorów parametrycznych (równania 3.17 i 3.19) na podstawie uformowanych wcześniej wiązek wymaga odpowiedniego przygotowania sygnału. Wynika to z faktu, że estymatory te zakładają, że szum pomiarowy ma charakter gaussowski z wariancją  $\sigma_v^2$  i zerową wartością oczekiwaną, co oznacza macierz kowariancji szumu postaci  $\mathbf{R}_v = \sigma_v^2 \mathbf{I}$ . Po nałożeniu charakterystyk kierunkowych wiązek, macierz ta przyjmuje postać:

$$\tilde{\mathbf{R}}_v = \mathbf{W} \mathbf{R}_v \mathbf{W}^H = \sigma_v^2 \mathbf{W} \mathbf{W}^H, \quad (3.16)$$

gdzie  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}(\phi_1) \quad \mathbf{w}(\phi_2) \quad \dots \quad \mathbf{w}(\phi_B)]$  oznacza macierz utworzoną z wag użytych do formowania wiązek, a  $B$  stanowi liczbę uformowanych wiązek. Macierz kowariancji szumu w ogólnym przypadku nie jest diagonalna. Aby przywrócić zakłóceniom postać szumu białego należy zastosować tzw. wybie-

lanie (ang. whitening) polegające na pomnożeniu obserwacji przez pierwiastek odwrotności macierzy kowariancji szumu po uformowaniu wiązek ( $\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{R}}_v^{-\frac{1}{2}}$ , przy czym  $\mathbf{C}\mathbf{C}^H = \tilde{\mathbf{R}}_v^{-1}$ ). W przypadku stochastycznego estymatora największej wiarygodności funkcja wiarygodności przyjmie postać:

$$L(\phi, \Sigma, \sigma_v^2, \mathbf{Y}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{|\mathbf{R}(\phi)|\pi^B} e^{(-\mathbf{Y}_i^H \mathbf{R}^{-1}(\phi) \mathbf{Y}_i)}, \quad (3.17)$$

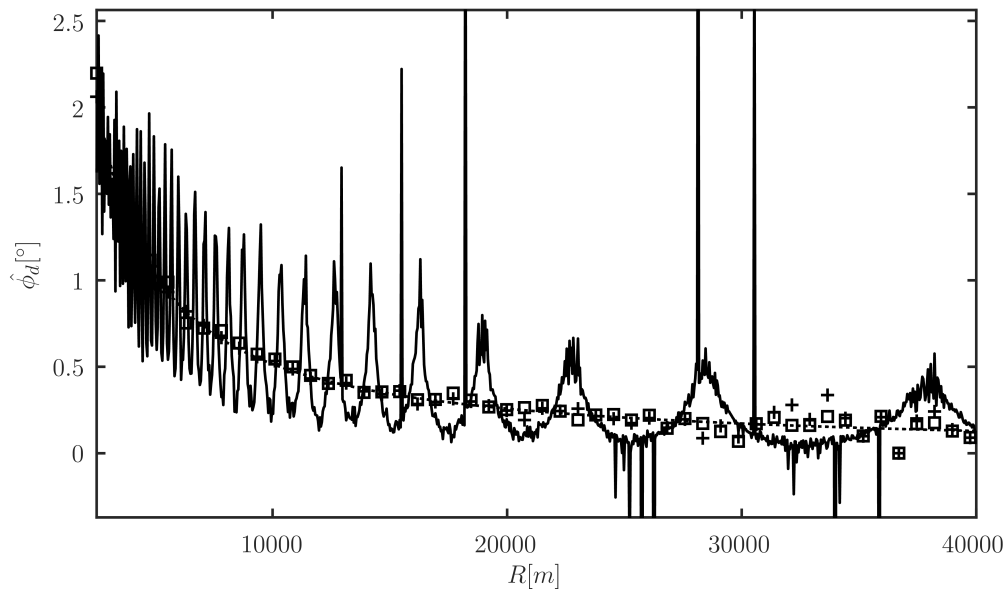
$$\mathbf{R}(\phi) = \mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{A}(\phi)\Sigma\mathbf{A}^H(\phi)\mathbf{W}^H\mathbf{C}^H + \sigma_v^2\mathbf{I}, \quad (3.18)$$

gdzie  $\mathbf{Y}_i$  oznacza wektor sygnałów w postaci wiązek z  $i$ -tego sondowania,  $\Sigma$  jest macierzą kowariancji amplitud sygnałów, a  $\mathbf{A}(\phi) = [\mathbf{a}(\phi_1) \quad \mathbf{a}(\phi_2) \quad \cdots \quad \mathbf{a}(\phi_K)]$  jest macierzą utworzoną z odpowiedzi antenowej na każdy z  $K$  obserwowanych obiektów.

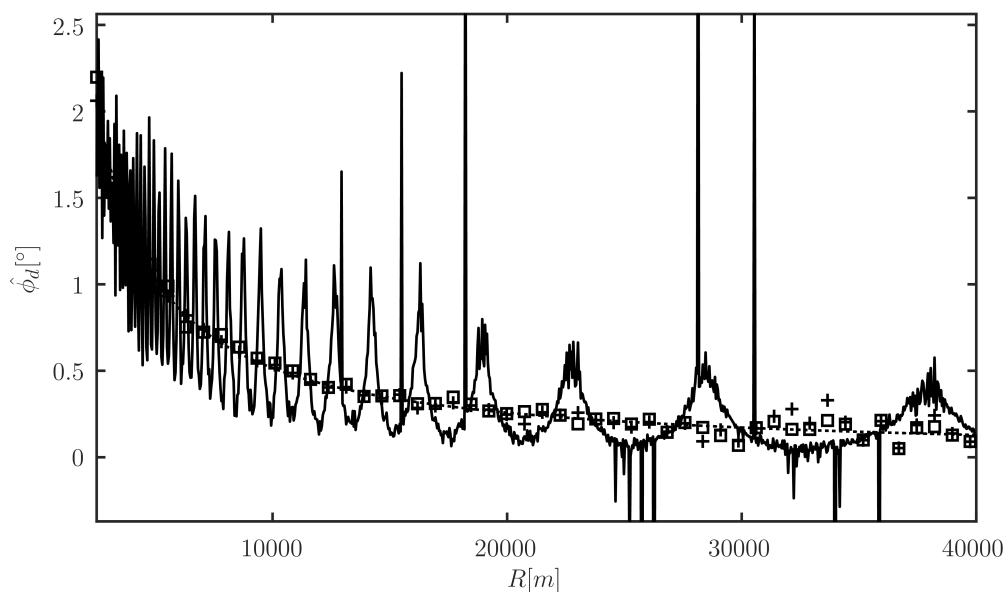
Dla estymatora deterministycznego funkcja największej wiarygodności ma z kolei postać:

$$L(\phi, s, \sigma_v^2, \mathbf{Y}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{(\pi\sigma_v^2)^B} e^{\left(-\frac{\|\sum_{k=1}^K s_k \mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{a}(\phi_k) - \mathbf{C}\mathbf{Y}_i\|^2}{\sigma_v^2}\right)}. \quad (3.19)$$

Zachowanie estymatorów w przypadku operowania na wiązkach pokazuje trzeci z testów. Wykorzystano w nim sygnał o parametrach takich samych jak w teście pierwszym, jednak uzyskane sygnały poddano formowaniu wiązek. Łącznie uformowane zostało  $B = 6$  wiązek: 3 sumacyjne i 3 odpowiadające im wiązki różnicowe. Maksima wiązek sumacyjnych wypadły na kątach odpowiednio  $0^\circ$ ,  $1.5^\circ$  i  $3^\circ$ . Do kształtowania charakterystyki zastosowano rozkład równomierny. W efekcie rozmiar danych spadł z  $NM = 320$  ( $N = 10$ ,  $M = 32$ ) do  $BN = 60$  ( $B = 6$ ,  $N = 10$ ) liczb zespolonych. Przetestowane zostały 2 estymator zakładające idealnie lustrzane odbicie (deterministyczny i stochastyczny), 2 estymatory poszukujące ekstremum dwóch obiektów o niezależnych kątach (deterministyczny i stochastyczny) oraz estymator monoimpulsowy. Wyniki ich działania przedstawiono na wykresach 3.9 i 3.10.



Rys. 3.9: Wyniki estymacji kąta elewacji dla 3 estymatorów: monoimpulsowego (linia ciągła), deterministycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 1 wymiarze (symbol kwadratu), oraz deterministycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 2 wymiarach (symbol "+"). Linia przerywana pokazuje wartość prawdziwą. Sygnały użyte do estymacji w postaci wiązek.



Rys. 3.10: Wyniki estymacji kąta elewacji dla 3 estymatorów: monoimpulsowego (linia ciągła), stochastycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 1 wymiarze (symbol kwadratu), oraz stochastycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 2 wymiarach (symbol "+"). Linia przerywana pokazuje wartość prawdziwą. Sygnały użyte do estymacji w postaci wiązek.

Ponownie, estymator monoimpulsowy wykazuje znaczącą podatność na echo wielodrogowe, co objawia się specyficznymi, powtarzalnymi błędami w estymacji kąta odbioru. Różnice w jego zachowaniu

w porównaniu do testu pierwszego wynikają z różnej liczby uformowanych wiązek - w teście pierwszym, do wykonania estymacji metodą monoimpulsową uzyskiwano wartości jednej pary wiązek (sumacyjna i różnicowa) z maksimum wiązki sumacyjnej wypadającej na  $0^\circ$ . Pozostałe cztery estymatory charakteryzują się jakością oszacowania zbliżoną do sytuacji, w której estymacja prowadzona jest w oparciu o sygnały z anteny. Wartości błędów średniokwadratowych i obciążenia pokazuje tabela 3.4. Widoczne jest, że estymatory stochastyczne i deterministyczne pozwalają na uzyskanie bardzo zbliżonych wyników, przy czym estymaty te są obciążone dużo mniejszymi błędami niż pochodzące z estymatora monoimpulsowego. Podejście zakładające obecność dwóch obiektów o niezależnych kątach pozwala uzyskać estymaty z niższym błędem średniokwadratowym niż przy założeniu idealnie lustrzanego odbicia. Poprawa również jest zauważalna pod postacią mniejszego obciążenia. Oznacza to, że założenie  $\phi_m = -\phi_d$  pozwala w znaczący sposób zredukować złożoność obliczeniową (poprzez redukcję jednego wymiaru poszukiwania ekstremum) jednak kosztem jakości oszacowania.

Sposób estymacji	$E(\phi_d - \hat{\phi}_d)^2 [^\circ^2]$	$ E(\phi_d - \hat{\phi}_d)  [^\circ]$
Estymator monoimpulsowy	0.22016	0.00411
Stochastyczny MLE założenie $\phi_m = -\phi_d$	0.0019117	0.0028959
Stochastyczny MLE założenie 2 obiektów	<b>0.0015265</b>	<b>0.00032368</b>
Deterministyczny MLE założenie $\phi_m = -\phi_d$	0.002241	0.0015546
Deterministyczny MLE założenie 2 obiektów	0.0018708	0.0012859

Tab. 3.4: Wartości obciążenia i błędu średniokwadratowego uzyskane dla 5 estymatorów przy obecności wielodrogowości w każdym z segmentów, sygnały użyte do estymacji w postaci wiązek.

## Test 5

W piątym z testów posłużono się danymi rzeczywistymi zebranymi za pomocą radaru. Ze względu na brak możliwości ujawnienia parametrów pracy użytego radaru wartości uzyskanych oszacowań zostały unormowane poprzez podzielenie estymat przez 3 dB szerokość wiązki ( $\phi_{3dB}$ ). Obserwacje prowadzone były w północnej Polsce, na terenie lotniska. W trakcie badań obserwowany był niewielki samolot oddalający się od punktu obserwacji. Początkowa odległość wynosiła 7500 m, a ostatnią porcję danych zebrano na odległości 13500 m. Samolot unosił się na stałej, niedużej wysokości, co wraz z płaskim ukształtowaniem terenu sprzyjało występowaniu zjawiska wielodrogowości. W trakcie przelotu, załoga została poproszona przez kontrolę lotów o zmianę kursu, co skutkowało lekkim zaburzeniem w położeniu elewacyjnym obiektu (widoczne jest ono na wykresach między 100 a 120 realizacjami). Dane z radaru zarejestrowane zostały w postaci wiązek (2 sumacyjne i 2 różnicowe), po  $N = 3$  obserwacji,



na podstawie której wykonano estymację współrzędnych w oparciu o estymator monoimpulsowy i 4 warianty estymatorów największej wiarygodności. Na danych sprzed etapu estymacji wykonano filtrację dopplerowską oraz detekcję przy użyciu algorytmu CFAR z mapą zakłóceń, co umożliwiło odseparowanie echa obserwowanego obiektu od zakłóceń biernych. Wyniki estymacji przedstawiono na wykresach 3.11, 3.12 i 3.13.

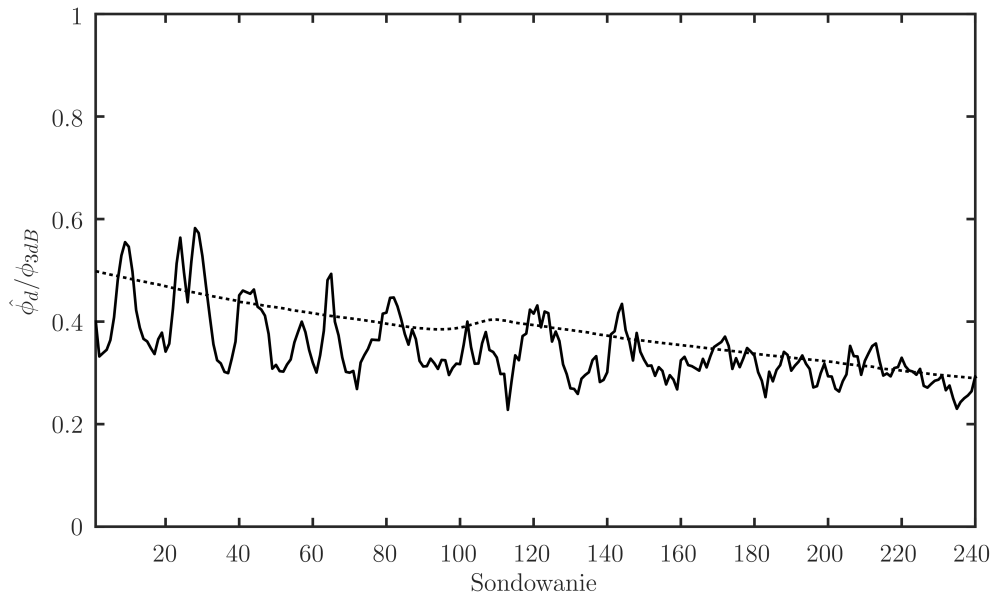
W wynikach uzyskanych przy pomocy metody monoimpulsowej (wykres 3.11) widoczne są specyficzne, obserwowane wcześniej zafalowania kąta odbioru sygnału, co może świadczyć o faktycznej obecności odbić od ziemi. Oszacowania posiadają widoczne obciążenie oraz znaczną wariancję.

Estymacja z wykorzystaniem deterministycznych estymatorów największej wiarygodności pozwoliła na uzyskanie wyników przedstawionych na wykresach 3.12 (wersja szybka, z założeniem lustrzanego odbicia) i 3.13 (wersja pełna, zakładająca obecność 2 źródeł). Ze względu na podobieństwo zachowania estymatora deterministycznego i stochastycznego przedstawione zostały wyłącznie wykresy efektów działania deterministycznej wersji algorytmu największej wiarygodności. Zestawiając uzyskane przebiegi z wykresem uzyskanym na podstawie algorytmu monoimpulsowego (wykres 3.11) można zauważyć znacząco odmienne wyniki. Przede wszystkim zniknęły specyficzne, powtarzające się wahania wartości oszacowania. Jest to efektem specyfiki algorytmu, a dokładniej faktu, że metody największej wiarygodności w odróżnieniu od monoimpulsu mogą zostać przystosowane do pracy w warunkach wielodrogowości i ogólnie estymacji w przypadku obecności więcej niż jednego źródła sygnału. Porównując same efekty estymacji przy pomocy modelu zakładającego lustrzane odbicia i modelu przyjmującego dwa niezależne źródła echa widać wyraźną przewagę pierwszego z modeli. Potwierdza to tabela 3.5 przedstawiająca liczbowe wartości błędu średniokwadratowego oraz obciążenia dla przebadanych estymatorów. Do ich obliczenia zostały wykorzystane unormowane (poprzez podzielenie przez 3 dB szerokość wiązki sumacyjnej) wartości oszacowań kątów.

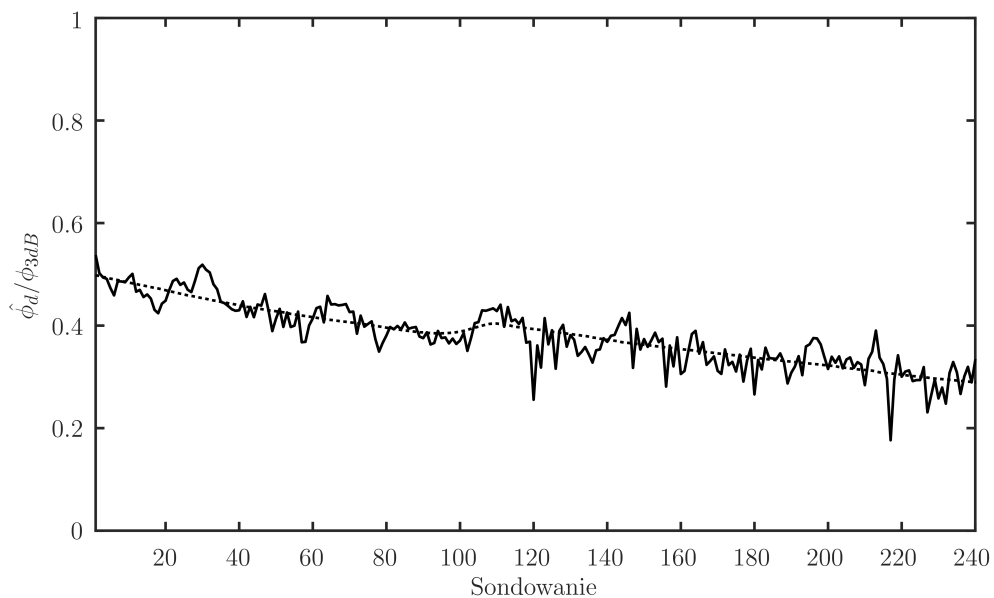
Sposób estymacji	$E(\phi_d - \hat{\phi}_d)^2 [^\circ^2]$	$ E(\phi_d - \hat{\phi}_d)  [^\circ]$
Estymator monoimpulsowy	0.0041888	0.035714
Stochastyczny MLE założenie $\phi_m = -\phi_d$	0.00090766	0.0043211
Stochastyczny MLE założenie 2 obiektów	0.0079195	0.017608
Deterministyczny MLE założenie $\phi_m = -\phi_d$	<b>0.00087277</b>	<b>0.0011381</b>
Deterministyczny MLE założenie 2 obiektów	0.0073013	0.0011696

Tab. 3.5: Wartości obciążenia i błędu średniokwadratowego uzyskane dla 5 estymatorów na podstawie danych zarejestrowanych przy pomocy radaru.

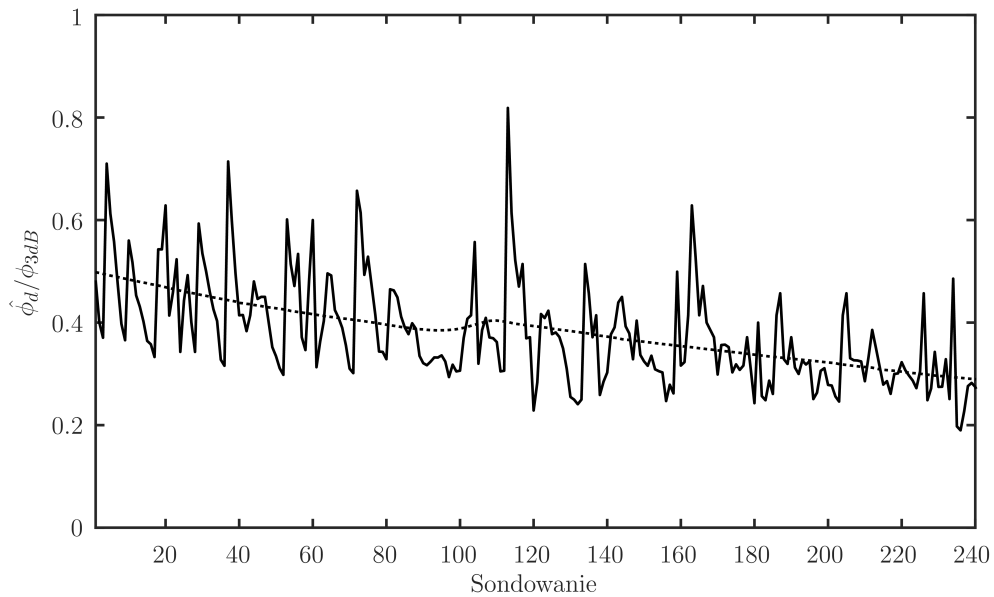
W przedstawionym (rys. 3.13) przykładzie estymator największej wiarygodności zakładający obec-



Rys. 3.11: Wyniki estymacji elewacji sygnału przy pomocy estymatora monoimpulsowego (linia ciągła). Wartość prawdziwa oznaczona linią przerywaną.



Rys. 3.12: Wyniki estymacji kąta elewacji przy pomocy deterministycznego estymatora największej wiarygodności z założeniem lustrzanego odbicia (linia ciągła). Wartość prawdziwa oznaczona linią przerywaną.



Rys. 3.13: Wyniki estymacji kąta elewacji przy pomocy deterministycznego estymatora największej wiarygodności z założeniem obecności 2 niezależnych źródeł (linia ciągła). Wartość prawdziwa oznaczona linią przerywaną.

ność dwóch obiektów zachowywał się w sposób bardzo chaotyczny, wydając oszacowanie kąta obarczone znacznymi błędami. Wyjaśnienia tego problemu można doszukiwać się w stosunku liczby estymowanych parametrów do liczby dostępnych pomiarów. Minimalizacja funkcji kosztu [wzór (2.63)] wymaga znalezienia minimum funkcji tylko 2 zmiennych ( $\hat{\phi}_1$  i  $\hat{\phi}_2$ ), jednak w równaniu w sposób niejawnie estymowane jest  $2N$  zespolonych amplitud oraz wariancja szumu ( $\sigma_v^2$ ), czyli  $4N + 3$  rzeczywistych wartości liczbowych. W przypadku omawianej symulacji dostępne było  $N = 3$  obserwacji, po  $B = 4$  wiązki w każdej (dwie sumacyjne i dwie różnicowe), razem 24 rzeczywiste wartości, na podstawie których estymowane było 15 parametrów. W takich warunkach estymacja jest możliwa, jednak zbyt mała ilość danych źródłowych powoduje, że dochodzi do nadmiernego dopasowania szumu, co przekłada się na znaczne przekłamanie estymowanych kątów - mimo osiągnięcia niższej wartości funkcji kosztu niż miałyby to miejsce w mniej złożonym modelu. W przypadku stochastycznego estymatora największej wiarygodności estymowana jest znacznie mniejsza liczba parametrów rzeczywistych (dwa kąty, dwie wariancje sygnału, jedna wariancja szumu), jednak problemem jest uwarunkowanie macierzy kowariancji. Budowa statystyki w oparciu o małą liczbę pomiarów obarczona jest znacznym błędem. Dla modelu zakładającego idealnie lustrzane odbicie (wykres 3.12) zmniejsza się liczba parametrów, co powoduje, że w trakcie działania algorytmu w mniejszym stopniu dochodzi do dopasowania do szumu. Dodatkowo założenie skorelowania kątów odbioru sygnału [wzór (3.6)] jest dosyć silnym założeniem, w znacznym stopniu uodparniającym algorytm, w szczególności na grube, odstające estymaty, jakie pojawiały się w wyniku estymacji nie narzucającej założeń na możliwe kąty odbioru sygnału. Jeżeli natomiast do odbicia dojdzie pod znacznie różnym kątem, lub model wielodrogowości będzie nieadekwatny - założenie lustrzanego odbicia może być wręcz przyczyną wystąpienia grubych przekłamań. Tego typu błędy pojawiają się w realizacjach nr 120, 213, 217. Problemy te nie wynikają z zbyt małej ilości danych i dopasowania

estymatora do zakłóceń, a konkretnej realizacji szumu i amplitud. Pozostaje jeszcze kwestia, która jest zupełnie pomijana w symulacjach z syntetycznym sygnałem radarowym. W rzeczywistych warunkach odpowiedź anteny nie jest idealnie zgodna z wartością teoretyczną [równanie (2.1)]. W praktyce nie jest fizycznie możliwe idealne rozmieszczenie elementów, jak i ich pełna powtarzalność parametrów takich jak wzmocnienie, charakterystyka kierunkowa pojedynczego odbiornika czy wprowadzane opóźnienie. Uwzględnienie tego typu niezgodności wymaga zastosowania odpowiednio zmodyfikowanych estymatorów bądź wykonanie dokładnej kalibracji anteny. Ponadto trudno jest określić czy w rzeczywistości doszło do odbicia lustrzanego, czy rozproszonego. Należy również rozpatrzyć możliwość wystąpienia obu typów odbicia jednocześnie, co dodatkowo utrudnia zadanie estymacji elewacji.

### 3.4 Uodporniony wariant estymatora największej wiarygodności

Celem uodpornienia estymatora jest wdrożenie w nim pewnej tolerancji na skrajnie niekorzystne realizacje sygnałów, czy niedokładności modelowania, zmniejszając tym samym prawdopodobieństwo wystąpienia grubych błędów. W tym celu można dopuścić pewne, niewielkie, odstępstwa od nominalnej odpowiedzi antenowej, co wpłynie na wartość funkcji kosztu, a za jej pośrednictwem na wartości estymowanego kąta. Umożliwi to w pewnym stopniu uwzględnienie niepełnej zgodności modelu z rzeczywistą charakterystyką anteny, jak również zmniejszy wpływ przyjętych uproszczeń. Nałożenie zakresu tolerancji na odpowiedź antenową pozwoli na zredukowanie wpływu takich czynników jak:

- nieidealna fizyczna realizacja anteny - wynikająca z skończonej precyzji procesu produkcji, czy możliwej do uzyskania powtarzalności wykorzystanych elementów.
- założenie idealnie lustrzanego charakteru odbić od ziemi - im antena jest wyżej umieszczona, tym bardziej koncepcja ta mija się z stanem faktycznym. Duży wpływ na poprawność uproszczenia  $\phi_m = -\phi_d$  ma również ukształtowanie terenu. W przypadku radaru umieszczonego na wzniesieniu (często radary dalekiego zasięgu montowane są na specjalnie wybudowanych ziemnych nasypach) można przyjąć, że antena jest umieszczona jeszcze wyżej nad powierzchnią Ziemi. Sama krzywizna jak i ukształtowanie terenu (np. jednorodne nachylenie) może w znacznym stopniu wpłynąć na wartość kąta odbioru echa odbitego.
- wystąpienie odbicia rozproszonego - oznacza ono, że echo odbite nie jest pojedynczym źródłem sygnału, lecz stanowi źródło szerokie, rozciągnięte na znaczną szerokość kątową. Energia docierająca do anteny radaru w takim przypadku rozłożona jest w pewnym zakresie elewacji, jak przedstawiono w sekcji 3.2.2.

Połączenie któregoś z wymienionych czynników z niekorzystną realizacją szumu bądź wartości amplitud może skutkować pojawieniem się grubych, odstających błędów. To głównie one są "celem" uodporniania estymatora, co powinno zmniejszyć częstość ich występowania.

### 3.4.1 Sformułowanie estymatora uodpornionego

Można przyjąć, że określenie kąta elewacji polega na zlokalizowaniu minimum funkcji kosztu  $J_n^2$ :

$$\hat{\phi}_d = \underset{\phi_d}{\operatorname{argmin}} \sum_{n=1}^N J_n^2(-\phi_d, \phi_d). \quad (3.20)$$

W standardowej wersji algorytmu największej wiarygodności jest ona tożsama z logarytmiczną funkcją wiarygodności [równanie (2.51)], a  $n$  stanowi numer sondowania (spośród  $N$  dostępnych). W uodpornionej wersji algorytmu można przyjąć funkcję kosztu dla pojedynczej obserwacji przestrzeni w postaci [65]:

$$J_n(\phi_m, \phi_d) = \min_{s_m, s_d} \max_{\tilde{\mathbf{a}}(\phi_m), \tilde{\mathbf{a}}(\phi_d)} \|\mathbf{y}_n - \tilde{\mathbf{a}}(\phi_m)s_{m,n} - \tilde{\mathbf{a}}(\phi_d)s_{d,n}\|, \quad (3.21)$$

przy czym część “max” musi spełniać nierówności:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{a}}(\phi_m) - \mathbf{a}(\phi_m)\|^2 &\leq \epsilon_m^2, \\ \|\tilde{\mathbf{a}}(\phi_d) - \mathbf{a}(\phi_d)\|^2 &\leq \epsilon_d^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Wprowadzona funkcja “minmax” stanowi rdzeń proponowanego rozwiązania. Jest one odmianą odpornej metody najmniejszych kwadratów opisanej w [66, 67]. W powyższych równaniach zakłada się, że  $\mathbf{a}(\phi)$  stanowi nominalną (założoną) odpowiedź anteny, a  $\tilde{\mathbf{a}}(\phi)$  jest nieznaną odpowiedzią rzeczywistą - z możliwymi odstępstwami od idealnego modelu. Wprowadzenie dopuszczalnych zaburzeń w odpowiedzi anteny pozwala nie tylko ograniczyć negatywny wpływ niedokładnego procesu produkcyjnego, ale również umożliwia uwzględnienie niedokładności dopasowania, takich jak np. założenie idealnie lustrzanego kąta odbicia, czy uproszczenie kształtu Ziemi jako płaskiej powierzchni. Wartości  $\epsilon_d^2$  oraz  $\epsilon_m^2$  oznaczają dopuszczalne odstępstwa rzeczywistych odpowiedzi anteny od nominalnych ( $\epsilon_m \geq 0$  i  $\epsilon_d \geq 0$ ). Przyjmuje się na ogół, że sygnał odebrany bezpośrednio od celu jest bardziej wiarygodny niż odbity od ziemi, z tego powodu dopuszcza się mniejszą niepewność dopasowania w składowej pochodzącej od echa bezpośredniego:

$$\epsilon_m^2 > \epsilon_d^2. \quad (3.23)$$

Przy takim założeniu, algorytm dopuści popełnienie większego błędu przy komponencie mającym źródło w wielodrogowości, nie pozwalając jednocześnie na znaczne odstępstwa między teoretyczną a idealną odpowiedzią antenową na źródło bezpośrednie.

Równanie (3.21) posiada części “min” i “max”, w związku z czym rozwiązanie problemu w przedstawionej postaci jest kosztowne obliczeniowo. Możliwe jest na szczęście uproszczenie składowej “max” równania (3.21) [66, 67]. Korzystając z nierówności trójkąta można wykonać następujące przekształcenia:

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{y}_n - \tilde{\mathbf{a}}(\phi_m)s_{m,n} - \tilde{\mathbf{a}}(\phi_d)s_{d,n}\| \\ &\leq v(\phi_m, \phi_d, s_{m,n}, s_{d,n}) + \|\Delta\tilde{\mathbf{a}}(\phi_m)s_{m,n}\| + \|\Delta\tilde{\mathbf{a}}(\phi_d)s_{d,n}\| \\ &= v(\phi_m, \phi_d, s_{m,n}, s_{d,n}) + \|\Delta\tilde{\mathbf{a}}(\phi_m)\| |s_{m,n}| + \|\Delta\tilde{\mathbf{a}}(\phi_d)\| |s_{d,n}|, \end{aligned} \quad (3.24)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} v(\phi_m, \phi_d, s_{m,n}, s_{d,n}) &= \|\mathbf{y}_n - \mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n} - \mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n}\|, \\ \Delta\tilde{\mathbf{a}}(\phi_m) &= \tilde{\mathbf{a}}(\phi_m) - \mathbf{a}(\phi_m), \\ \Delta\tilde{\mathbf{a}}(\phi_d) &= \tilde{\mathbf{a}}(\phi_d) - \mathbf{a}(\phi_d). \end{aligned} \quad (3.25)$$

W równaniach (3.24) i (3.25),  $\Delta\tilde{\mathbf{a}}(\phi_m)$  i  $\Delta\tilde{\mathbf{a}}(\phi_d)$  oznaczają różnice między rzeczywistą a teoretyczną odpowiedzią antenową. Zgodnie z (3.22), wartości te muszą spełniać warunek:

$$\begin{aligned} \|\Delta\tilde{\mathbf{a}}(\phi_m)\| &\leq \epsilon_m, \\ \|\Delta\tilde{\mathbf{a}}(\phi_d)\| &\leq \epsilon_d. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Nierówność (3.24) można uprościć do równania zakładając jego skrajne możliwe rozwiązanie (zgodnie z częścią "max"). Odpowiadają tej sytuacji perturbacje wektorów odpowiedzi antenowych wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\mathbf{a}}(\phi_m) &= -c_m s_{m,n}^* [\mathbf{y}_n - \mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n} - \mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n}], \\ \Delta\tilde{\mathbf{a}}(\phi_d) &= -c_d s_{d,n}^* [\mathbf{y}_n - \mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n} - \mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n}], \end{aligned} \quad (3.27)$$

gdzie  $c_m \geq 0$  i  $c_d \geq 0$  stanowią pewne nieujemne współczynniki, a operator  $[\cdot]^*$  oznacza zespolone sprzężenie. Dobór współczynników  $c_m$  i  $c_d$  w taki sposób aby spełnione były ograniczenia (3.22) prowadzi do równania w postaci:

$$\|\mathbf{y}_n - \tilde{\mathbf{a}}(\phi_m)s_{m,n} - \tilde{\mathbf{a}}(\phi_d)s_{d,n}\| = v(\phi_m, \phi_d, s_{m,n}, s_{d,n}) + \epsilon_m |s_{m,n}| + \epsilon_d |s_{d,n}|, \quad (3.28)$$

co z kolei, po wstawieniu do funkcji kosztu (3.21), prowadzi do jej uproszczenia:

$$J_n(\phi_m, \phi_d) = \min_{s_m, s_d} v(\phi_m, \phi_d, s_{m,n}, s_{d,n}) + \epsilon_m |s_{m,n}| + \epsilon_d |s_{d,n}|. \quad (3.29)$$

Rozwiązanie równania (3.29) wymaga znalezienia minimum dla dwóch liczb zespolonych ( $s_m$  i  $s_d$ ), co wymaga poszukiwania w 4 wymiarach rzeczywistych. Sama funkcja jest ściśle wypukła, nie jest natomiast różniczkowalna dla  $v(\phi_m, \phi_d, s_{m,n}, s_{d,n}) = 0$ ,  $s_{m,n} = 0$  i  $s_{d,n} = 0$ . Korzystając z technik programowania stożkowego (SOCP - ang. Second-order cone programming) [68] zagadnienie (3.29) można przeformułować w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \min \quad & v + \epsilon_m g_m + \epsilon_d g_d, \\ \text{s.t.} \quad & \|\mathbf{y}_n - \mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n} - \mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n}\| \leq v, \quad |s_{m,n}| \leq g_m, \quad |s_{d,n}| \leq g_d. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Stosując teorię dualizmu [69] do powyższych równań, uzyskuje się następujący problem dualny:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{y}^H \mathbf{u}_1, \\ \text{s.t.} \quad & \|\mathbf{u}_1\| \leq 1, \quad \|u_2\| \leq \epsilon_m, \quad \|u_3\| \leq \epsilon_d, \\ & \mathbf{a}^H(\phi_m)\mathbf{u}_1 = u_2, \quad \mathbf{a}^H(\phi_d)\mathbf{u}_1 = u_3. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Oznaczając rozwiązanie problemu pierwotnego [równanie (3.30)] symbolami  $v_o$ ,  $s_{m,n,o}$ ,  $g_{m,o}$ ,  $s_{d,n,o}$  i  $g_{d,o}$ , a rozwiązanie problemu dualnego [równanie (3.31)] symbolami:  $\mathbf{u}_{1,o}$ ,  $u_{2,o}$  i  $u_{3,o}$ , można wykazać,

że:

$$\begin{aligned}
v_o &= \|\mathbf{y}_n - \mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n,o} - \mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n,o}\|, \\
g_{m,o} &= |s_{m,n,o}|, \quad g_{d,o} = |s_{d,n,o}|, \\
\mathbf{u}_{1,o} &= \frac{\mathbf{y}_n - \mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n,o} - \mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n,o}}{v_o}, \\
u_{2,o} &= \epsilon_m \frac{s_{m,n,o}}{|s_{m,n,o}|} = \epsilon_m \frac{s_{m,n,o}}{g_{m,o}}, \quad u_{3,o} = \epsilon_d \frac{s_{d,n,o}}{|s_{d,n,o}|} = \epsilon_d \frac{s_{d,n,o}}{g_{d,o}}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Dowód równania (3.32) przedstawiono w sekcji 3.4.2.

Pierwotną funkcję kosztu [równanie (3.21)] można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{aligned}
J_n(\phi_m, \phi_d) &= \min_{s_m, s_d} \max_{\tilde{\mathbf{a}}(\phi_m), \tilde{\mathbf{a}}(\phi_d)} \|\mathbf{y}_n - \mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n} - \mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n}\| \\
&= \min_{s_m, s_d} \max_{\tilde{\mathbf{a}}(\phi_m), \tilde{\mathbf{a}}(\phi_d)} \|\mathbf{y}_n - \tilde{\Psi}(\phi_m, \phi_d)\mathbf{S}_n\|, \\
\tilde{\Psi}(\phi_m, \phi_d) &= [\tilde{\mathbf{a}}(\phi_m) \quad \tilde{\mathbf{a}}(\phi_d)], \\
\mathbf{S}_n &= [s_{m,n} \quad s_{d,n}]^T.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Wartości optymalne zespolonych amplitud sygnału [ $s_{m,n,o}$  i  $s_{d,n,o}$  z równania (3.31)] spełniają równanie zmodyfikowanej metody najmniejszych kwadratów, uwzględniającej adaptacyjne dociążenie diagonalne:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{n,o} &= [s_{m,n,o} \quad s_{d,n,o}]^T = [\Psi^H(\phi_m, \phi_d)\Psi(\phi_m, \phi_d) + \Lambda]^{-1} \Psi^H(\phi_m, \phi_d)\mathbf{y}_n, \\
\Psi(\phi_m, \phi_d) &= [\mathbf{a}(\phi_m) \quad \mathbf{a}(\phi_d)], \\
\Lambda &= v_o \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_m}{|s_{m,n,o}|} & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon_d}{|s_{d,n,o}|} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Dowód równania (3.34) przedstawiono w sekcji 3.4.2.

Kwadrat problemu pierwotnego [równanie (3.30)] może zostać obliczony poprzez znalezienie minimum wypukłej funkcji celu dwóch rzeczywistych argumentów:

$$\begin{aligned}
f(x_m, x_d, \phi_m, \phi_d) &= \\
&= \frac{\|\mathbf{y}_n\|^2 - \mathbf{y}_n^H \Psi(\phi_m, \phi_d) [\Psi^H(\phi_m, \phi_d)\Psi(\phi_m, \phi_d) + \Gamma(x_m, x_d)]^{-1} \Psi^H(\phi_m, \phi_d)\mathbf{y}_n}{1 - x_m - x_d}, \\
\Gamma(x_m, x_d) &= (1 - x_m - x_d) \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_m^2}{x_m} & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon_d^2}{x_d} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.35}$$

przy czym  $x_m > 0$ ,  $x_d > 0$  i  $x_m + x_d < 1$ . Dowód równania (3.35) przedstawiono w sekcji 3.4.2.

Wykorzystując powyższe metody, wynik zadania uodpornionej estymacji można uzyskać rozwiązując

równanie:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_d &= \underset{\phi_d}{\operatorname{argmin}} \sum_{n=1}^N J_n^2(-\phi_d, \phi_d), \\ J_n^2(\phi_m, \phi_d) &= \min_{x_m, x_d} f(x_m, x_d, \phi_m, \phi_d), \\ f(x_m, x_d, \phi_m, \phi_d) &= \\ &= \frac{\|\mathbf{y}_n\|^2 - \mathbf{y}_n^H \boldsymbol{\Psi}(\phi_m, \phi_d) [\boldsymbol{\Psi}^H(\phi_m, \phi_d) \boldsymbol{\Psi}(\phi_m, \phi_d) + \boldsymbol{\Gamma}(x_m, x_d)]^{-1} \boldsymbol{\Psi}^H(\phi_m, \phi_d) \mathbf{y}_n}{1 - x_m - x_d}, \\ \boldsymbol{\Gamma}(x_m, x_d) &= (1 - x_m - x_d) \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_m^2}{x_m} & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon_d^2}{x_d} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Zastosowanie dodatkowych współczynników tj.  $\epsilon_m$  i  $\epsilon_d$  umożliwia wprowadzenie niedopasowania wektora sterującego do faktycznej odpowiedzi anteny. Dzięki przekształceniom opartym o metody optymalizacji wypukłej (ang. Convex optimization) udało się nie tylko uprościć fragment "min-max", ale również pozbyć problemu braku różniczkowości w pełnej dziedzinie. Ostatecznym efektem jest funkcja wymagająca minimalizacji w 3 wymiarach ( $\phi_d$ ,  $x_m$  i  $x_d$ ). Całość, mimo zastosowania uproszczonego modelu (założenie idealnie lustrzanego odbicia), posiada wyższą złożoność obliczeniową niż pełen, dwuwymiarowy estymator największej wiarygodności. W praktyce jednak wiele składowych równania (3.36) może zostać obliczona przed poszukiwaniem optymalnych wartości  $x_m$  i  $x_d$  np.  $\|\mathbf{y}_n\|^2$ ,  $\boldsymbol{\Psi}^H(\phi_m, \phi_d) \boldsymbol{\Psi}(\phi_m, \phi_d)$ , czy  $\mathbf{y}_n^H \boldsymbol{\Psi}(\phi_m, \phi_d)$ .

Istnieją dodatkowo dwie możliwości uproszczenia algorytmu.

**A.** Zakładając, że zaburzenia wektora sterującego przy rzeczywistym kącie odbioru są pomijalnie małe, tj.  $\Delta \tilde{\alpha}(\phi_d) \approx 0$ , można przyjąć  $\epsilon_d = 0$ . W takim wypadku nie ma przeszkód aby zupełnie pominąć minimalizację względem  $x_d$ , co zredukuje jeden z wymiarów przeszukania, znacząco przyspieszając pracę algorytmu. Funkcję kosztu takiego estymatora można zatem zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}J_n^2(\phi_m, \phi_d) &= \min_{x_m} f(x_m, \phi_m, \phi_d), \\ f(x_m, \phi_m, \phi_d) &= \frac{\|\mathbf{y}_n\|^2 - \mathbf{y}_n^H \boldsymbol{\Psi}(\phi_m, \phi_d) [\boldsymbol{\Psi}^H(\phi_m, \phi_d) \boldsymbol{\Psi}(\phi_m, \phi_d) + \boldsymbol{\Gamma}(x_m)]^{-1} \boldsymbol{\Psi}^H(\phi_m, \phi_d) \mathbf{y}_n}{1 - x_m}, \\ \boldsymbol{\Gamma}(x_m) &= \begin{bmatrix} \epsilon_m^2 \frac{1-x_m}{x_m} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (3.37)$$

przy czym musi pozostać spełniony warunek  $0 < x_m < 1$ .

**B.** Równania (3.36) sugerują, że istnieje możliwość przedstawienia algorytmu w postaci iteracyjnej. W takim wypadku funkcja kosztu wynosi odpowiednio:

$$\begin{aligned}J_n^2(\phi_m, \phi_d) &= [v_I(\phi_m, \phi_d) + \epsilon_m |s_{m,n,I}| + \epsilon_d |s_{d,n,I}|]^2 \\ &\text{dla } i = 0, 1, \dots, I - 1,\end{aligned}\quad (3.38)$$



gdzie do określenia  $v_I$  należy użyć poniższej rekurencji:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n,i+1} &= [\Psi^H(\phi_m, \phi_d)\Psi(\phi_m, \phi_d) + \Lambda_i]^{-1} \Psi^H(\phi_m, \phi_d)\mathbf{y}_n, \\ v_{i+1}(\phi_m, \phi_d) &= \|\mathbf{y}_n - \Psi(\phi_m, \phi_d)\mathbf{S}_{n,i+1}\|, \\ \Lambda_{i+1} &= v_{i+1}(\phi_m, \phi_d) \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_m^2}{|s_{m,n,i+1}|} & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon_d^2}{|s_{d,n,i+1}|} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

przy warunku początkowym:

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Iteracyjna postać algorytmu nie wymaga poszukiwania minimum funkcji kosztu dla każdej dostępnej obserwacji (jak to miało miejsce w estymatorach [3.36] i [3.37]), co potencjalnie pozwala ograniczyć złożoność obliczeniową, pod warunkiem zbieżności schematu dla niedużej liczby iteracji.

### 3.4.2 Wyprowadzenia równań użytych w sekcji 3.4.1

#### Dowód 1

W równaniu (3.32) pierwsze trzy równości nie wymagają dodatkowych wyprowadzeń, jednak do pozostałych trzech potrzebne są dodatkowe przekształcenia. Z teorii dualizmu wynika, że rozwiązania problemu podstawowego oraz dualnego są sobie równe [70]:

$$v_o + \epsilon_m g_{m,o} + \epsilon_d g_{d,o} = \mathbf{y}^H \mathbf{u}_{1,o}. \quad (3.40)$$

Prawą stronę powyższego równania można przepisać do postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^H \mathbf{u}_{1,o} &= \\ [\mathbf{y}_n - \mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n,o} - \mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n,o}]^H \mathbf{u}_{1,o} + s_{m,n,o}^* \mathbf{a}^H(\phi_m)\mathbf{u}_{1,o} + s_{d,n,o}^* \mathbf{a}^H(\phi_d)\mathbf{u}_{1,o}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Przyjmując  $\mathbf{a}^H(\phi_m)\mathbf{u}_{1,o} = u_{2,o}$  i  $\mathbf{a}^H(\phi_d)\mathbf{u}_{1,o} = u_{3,o}$  [z wzoru (3.31)] otrzymuje się:

$$v_o + \epsilon_m g_{m,o} + \epsilon_d g_{d,o} = [\mathbf{y}_n - \mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n,o} - \mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n,o}]^H \mathbf{u}_{1,o} + s_{m,n,o}^* u_{2,o} + s_{d,n,o}^* u_{3,o}. \quad (3.42)$$

Mając na uwadze ograniczenia wynikające z części "max", wprowadzane przez wzory (3.31) ostatecznie równania upraszczają się do postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{1,o} &= \frac{\mathbf{y}_n - \mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n,o} - \mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n,o}}{\|\mathbf{y}_n - \mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n,o} - \mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n,o}\|} = \frac{\mathbf{y}_n - \mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n,o} - \mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n,o}}{v_o}, \\ u_{2,o} &= \epsilon_m \frac{s_{m,n,o}}{|s_{m,n,o}|} = \epsilon_m \frac{s_{m,n,o}}{g_{m,o}}, \quad u_{3,o} = \epsilon_d \frac{s_{d,n,o}}{|s_{d,n,o}|} = \epsilon_d \frac{s_{d,n,o}}{g_{d,o}}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

■

#### Dowód 2

Mnożąc równanie opisujące  $\mathbf{u}_{1,o}$  z wzorów (3.32) przez  $v_o \mathbf{a}^H(\phi_d)$  można (wykorzystując tożsamość  $\mathbf{a}^H(\phi_d)\mathbf{u}_1 = u_3$ ) uzyskać:

$$u_{3,o} v_o = \mathbf{a}^H(\phi_d)\mathbf{y}_n - \mathbf{a}^H(\phi_d)\mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n,o} - \mathbf{a}^H(\phi_d)\mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n,o}. \quad (3.44)$$

Podstawiając następnie wartość  $u_{3,o}$  z (3.32) dochodzi się do postaci:

$$\mathbf{a}^H(\phi_d)\mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n,o} + \epsilon_d \frac{s_{d,n,o}}{g_{d,o}} + \mathbf{a}^H(\phi_d)\mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n,o} = \mathbf{a}^H(\phi_d)\mathbf{y}_n. \quad (3.45)$$

W analogiczny sposób można uzyskać odpowiednik dla echa odbitego:

$$\mathbf{a}^H(\phi_m)\mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n,o} + \mathbf{a}^H(\phi_m)\mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n,o} + \epsilon_m \frac{s_{m,n,o}}{g_{m,o}} = \mathbf{a}^H(\phi_m)\mathbf{y}_n. \quad (3.46)$$

Oba powyższe równania [(3.45) i (3.46)] można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^H(\phi_m)\mathbf{a}(\phi_m) + \frac{\epsilon_m}{g_{m,o}} & \mathbf{a}^H(\phi_m)\mathbf{a}(\phi_d) \\ \mathbf{a}^H(\phi_d)\mathbf{a}(\phi_m) & \mathbf{a}^H(\phi_d)\mathbf{a}(\phi_d) + \frac{\epsilon_d}{g_{d,o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{m,n,o} \\ s_{d,n,o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^H(\phi_m)\mathbf{y}_n \\ \mathbf{a}^H(\phi_d)\mathbf{y}_n \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

co z kolei w prosty sposób wyjaśnia zawartość macierzy  $\mathbf{\Lambda}$  wykorzystywanej w równaniach (3.34)

$$[\mathbf{\Psi}^H(\phi_m, \phi_d)\mathbf{\Psi}(\phi_m, \phi_d) + \mathbf{\Lambda}] [s_{m,n,o} \ s_{d,n,o}]^T = \mathbf{\Psi}^H \mathbf{y}_n. \quad (3.48)$$

■

### Dowód 3

Biorąc funkcję celu z równania (3.31), oraz postać  $\mathbf{u}_1$  przedstawioną w (3.32) można dojść do wyrażenia:

$$J_n(\phi_m, \phi_d) = \mathbf{y}_n^H \mathbf{u}_{1,o} = \mathbf{y}_n^H \frac{\mathbf{y}_n - \mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n,o} - \mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n,o}}{v_o}, \quad (3.49)$$

gdzie  $v_o$  może zostać wyrażone jako:

$$v_o = J_n(\phi_m, \phi_d) - \epsilon_m g_{m,o} - \epsilon_d g_{d,o}, \quad (3.50)$$

co z kolei pozwala przepisać funkcję celu do postaci:

$$J_n(\phi_m, \phi_d) = \mathbf{y}_n^H \frac{\mathbf{y}_n - \mathbf{a}(\phi_m)s_{m,n,o} - \mathbf{a}(\phi_d)s_{d,n,o}}{J_n(\phi_m, \phi_d) - \epsilon_m g_{m,o} - \epsilon_d g_{d,o}}. \quad (3.51)$$

Powyższe równanie można przedstawić korzystając z postaci macierzowej (3.33):

$$J_n(\phi_m, \phi_d) = \frac{\|\mathbf{y}_n\|^2 - \mathbf{y}_n^H \mathbf{\Psi}(\phi_m, \phi_d) (\mathbf{\Psi}^H(\phi_m, \phi_d)\mathbf{\Psi}(\phi_m, \phi_d) + \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{\Psi}^H(\phi_m, \phi_d)\mathbf{y}_n}{J_n(\phi_m, \phi_d) - \epsilon_m g_{m,o} - \epsilon_d g_{d,o}}. \quad (3.52)$$

Z wykorzystaniem (3.51) macierz  $\mathbf{\Lambda}$  może zostać przedstawiona jako

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \epsilon_m \frac{J_n(\phi_m, \phi_d) - \epsilon_m g_{m,o} - \epsilon_d g_{d,o}}{g_{m,o}} & 0 \\ 0 & \epsilon_d \frac{J_n(\phi_m, \phi_d) - \epsilon_m g_{m,o} - \epsilon_d g_{d,o}}{g_{d,o}} \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Przyjmijmy, że:

$$x_m = \epsilon_m \frac{g_{m,o}}{J_n(\phi_m, \phi_d)} \quad x_d = \epsilon_d \frac{g_{d,o}}{J_n(\phi_m, \phi_d)}, \quad (3.54)$$

oraz, że macierze  $\mathbf{\Lambda}$  i  $\mathbf{\Gamma}$  są sobie równe.

Mnożąc równanie (3.52) obustronnie przez  $J_n(\phi_m, \phi_d)$  można przejść do kwadratu funkcji kosztu. Lokalizacja minimum tej funkcji stanowi podstawę problemu estymacji kąta odbioru echa.

$$J_n^2(\phi_m, \phi_d) = f(x_m, x_d, \phi_m, \phi_d) = \frac{\|\mathbf{y}_n\|^2 - \mathbf{y}_n^H \Psi(\phi_m, \phi_d) [\Psi^H(\phi_m, \phi_d) \Psi(\phi_m, \phi_d) + \mathbf{\Gamma}]^{-1} \Psi^H(\phi_m, \phi_d) \mathbf{y}_n}{1 - x_m - x_d} \quad (3.55)$$

Aby pokazać, że funkcja (3.35) jest wypukła można zastosować lemat o odwrotności macierzy:

$$\mathbf{I} - \Psi(\phi_m, \phi_d) (\Psi^H(\phi_m, \phi_d) \Psi(\phi_m, \phi_d) + \mathbf{\Lambda})^{-1} \Psi^H(\phi_m, \phi_d) = (\mathbf{I} + \Psi(\phi_m, \phi_d) \mathbf{\Lambda} \Psi^H(\phi_m, \phi_d))^{-1}, \quad (3.56)$$

gdzie  $\mathbf{I}$  oznacza macierz jednostkową. Wykonując przekształcenia na funkcji kosztu (3.55) można uzyskać postać:

$$f(x_m, x_d, \phi_m, \phi_d) = \mathbf{y}_n^H [(1 - x_m - x_d)\mathbf{I} + \Psi(\phi_m, \phi_d) \mathbf{\Omega} \Psi^H(\phi_m, \phi_d)]^{-1} \mathbf{y}_n, \quad (3.57)$$

w której

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{x_m}{\epsilon_m^2} & 0 \\ 0 & \frac{x_d}{\epsilon_d^2} \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Równanie (3.57) pokazuje, że dla  $x_d \geq 0$ ,  $x_m \geq 0$ ,  $x_m + x_d \leq 1$ , funkcja kosztu  $[f(x_m, x_d, \phi_m, \phi_d)]$  jest sumą funkcji wypukłych, co czyni ją wypukłą [69]. ■

### 3.4.3 Testy uodpornionych wersji estymatora

Opisany w sekcji 3.4.1 uodporniony estymator największej wiarygodności został przetestowany pod kątem uzyskiwanego błędu średniokwadratowego oraz obciążenia dla różnych jego wariantów i przy różnych wartościach parametrów  $\epsilon_m$  i  $\epsilon_d$ . Większość z testów wykonana została w oparciu o dane zarejestrowane przy pomocy radaru, z tego powodu nie ma możliwości porównania ich z ograniczeniem Craméra-Rao. Wyniki estymacji porównane zostały z estymatorem monoimpulsowym oraz deterministycznym estymatorem największej wiarygodności zakładającym idealnie lustrzane odbicie.

#### Test 1

W pierwszym z testów sprawdzony został wpływ parametrów  $\epsilon_m$  i  $\epsilon_d$  na jakość oszacowania kąta przez estymator uodporniony, opisany równaniami (3.36). Przyjęto stałą zależność, tj.  $\epsilon_m = 10\epsilon_d$ . Znacznie mniejsza wartość  $\epsilon_d$  oznacza, że algorytm mocniej reaguje na niedopasowanie danych po stronie sygnału bezpośredniego. Na ogół ta składowa posiada więcej energii i jest w mniejszym stopniu zaburzona. Wyniki działania algorytmu zebrano w tabeli 3.6. Na jej podstawie można zauważyć, że wprowadzenie nawet nieznaczącej tolerancji na odstępstwa od idealnych warunków (na poziomie  $\epsilon_m = 0.1$ ) pozwala zredukować liczbę estymat odstających, tj. takich, w których błąd oszacowania przekracza 10% 3 dB szerokości wiązki ( $\phi_{3dB}$ ). W całym badanym zakresie parametrów  $\epsilon_m$  udało się uzyskać niższą wartość wariancji niż w przypadku oryginalnego estymatora największej wiarygodności. Estymator wprowadza jednak pewne dodatkowe obciążenie - wartość stałego błędu rośnie wraz z wzrostem wartości parametrów. Głównym celem było jednak uniknięcie błędów odstających i udało się to osiągnąć.

Sposób estymacji	$E\left(\frac{\phi_d - \hat{\phi}_d}{\phi_{3dB}}\right)^2$	$ E\left(\frac{\phi_d - \hat{\phi}_d}{\phi_{3dB}}\right) $	% pomiarów odstających $ \phi_d - \hat{\phi}_d  > 0.1 \phi_{3dB}$
Estymator monoimpulsowy	0.0041888	0.035714	14.9378
Deterministyczny MLE założenie $\phi_m = -\phi_d$	0.00087277	<b>0.0011381</b>	0.82988
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0.01, \epsilon_m = 0.1$	0.00069556	0.001777	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0.02, \epsilon_m = 0.2$	<b>0.00069214</b>	0.0025448	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0.03, \epsilon_m = 0.3$	0.00071155	0.0033106	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0.04, \epsilon_m = 0.4$	0.00072901	0.0039723	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0.05, \epsilon_m = 0.5$	0.00075253	0.0046507	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0.06, \epsilon_m = 0.6$	0.00077593	0.0052074	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0.07, \epsilon_m = 0.7$	0.00080983	0.0058083	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0.08, \epsilon_m = 0.8$	0.0008446	0.0064179	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0.09, \epsilon_m = 0.9$	0.00087529	0.0070463	<b>0</b>

Tab. 3.6: Wartości obciążenia, błędu średniokwadratowego i odsetek błędów "znaczących" dla różnych wartości parametrów  $\epsilon_d$  i  $\epsilon_m$ .

## Test 2

W drugim teście sprawdzono zachowanie estymatora opisanego równaniem (3.37). Jest on uproszczoną wersją przedstawionego estymatora odpornego. Uproszczenie polegało na założeniu, że bezpośrednio odebrany sygnał nie jest zaburzony ( $\epsilon_d = 0$ ), co pozwoliło w sposób analityczny zredukować złożoność obliczeniową. Założenie pełnej zgodności komponentów echa bezpośredniego może być zbyt idealistyczne. W przypadku danych zarejestrowanych przez radar oznacza to, że przyjmuje się idealne wykonanie anteny. Wyniki symulacji (tabela 3.7) pokazują, że estymator uodporniony ponownie jest w stanie zredukować liczbę wystąpień grubych błędów w uzyskanych oszacowaniach. Oznacza to, że faktycznie głównym ich źródłem było niedokładnie modelowanie komponentu pochodzącego od sygnału odbitego. Estymator, podobnie jak w teście pierwszym wprowadza obciążenie, które rośnie wraz ze zwiększaniem parametru  $\epsilon_m$ . Wartość błędu średniokwadratowego w przedstawionym przedziale na

ogół rośnie, jednak nie jest to ściśle monotoniczna zależność i istnieje wartość gwarantująca minimalizację wariancji dla przebadanej realizacji. W rzeczywistych warunkach pracy dostrajanie parametru  $\epsilon_m$  należałoby wykonywać po każdej zmianie otaczającego radar środowiska (przemieszczenie się, zmiana gęstości roślinności, czy pokrywy śnieżnej). Porównując uzyskane wyniki z tabelą 3.6 widać, że dla jednakowych wartości  $\epsilon_m$  niższy poziom wariancji i obciążenia udało się uzyskać przy założeniu  $\epsilon_d > 0$ . Oznacza to, że dla poprawy dokładności warto dodać również nieznaczną niepewność do komponentu związanego z bezpośrednim odbiciem echa. Fakt ten świadczyć może o niedokładności wykonania bądź skalibrowania anteny. Warto podkreślić, że o ile  $\epsilon_m$  jest zależny od otoczenia, tak wartość  $\epsilon_d$  może być ustalana dla konkretnego radaru i ma w głównej mierze związek z jego budową.

Sposób estymacji	$E(\frac{\phi_d - \hat{\phi}_d}{\phi_{3dB}})^2$	$ E(\frac{\phi_d - \hat{\phi}_d}{\phi_{3dB}}) $	% pomiarów odstających $ \phi_d - \hat{\phi}_d  > 0.1 \phi_{3dB}$
Estymator monoimpulsowy	0.0041888	0.035714	14.9378
Deterministyczny MLE założenie $\phi_m = -\phi_d$	0.00087277	<b>0.0011381</b>	0.82988
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0, \epsilon_m = 0.1$	<b>0.00072228</b>	0.0022666	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0, \epsilon_m = 0.2$	0.00073363	0.0032175	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0, \epsilon_m = 0.3$	0.00074517	0.0039921	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0, \epsilon_m = 0.4$	0.00076653	0.0047378	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0, \epsilon_m = 0.5$	0.00081102	0.0055593	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0, \epsilon_m = 0.6$	0.00084276	0.0062041	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0, \epsilon_m = 0.7$	0.00087371	0.0068149	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0, \epsilon_m = 0.8$	0.00091192	0.0074503	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0, \epsilon_m = 0.9$	0.00098335	0.0082271	0.41494

Tab. 3.7: Wartości obciążenia, błędów średniokwadratowych i odsetek błędów "znaczących" dla różnych wartości parametrów  $\epsilon_m$  i  $\epsilon_d = 0$ .

## Test 3

W trzecim teście estymatora uodpornionego zbadany został wariant iteracyjny, opisany równaniem (3.38). Zastosowano stałe wartości parametrów  $\epsilon_d = 0.025$  i  $\epsilon_m = 0.25$ . Zbadany został wpływ liczby iteracji na uzyskiwane wyniki, co przedstawiono w tabeli 3.8. Wyraźnie widać, że zwiększanie liczby iteracji ponad 3 ma marginalny wpływ na jakość estymowanych parametrów. Sam estymator uodporniony w wersji iteracyjnej był w stanie osiągnąć niższą wariancję i obciążenie niż klasyczny estymator największej wiarygodności z założeniem idealnie lustrzanego odbicia, co może być wynikiem odpowiednio dobranych parametrów  $\epsilon_d$  i  $\epsilon_m$ . Przy takich nastawach nie udało się jednak uzyskać zerowego odsetka pomiarów odstających, co pokazuje, że wariant iteracyjny nie sprawdza się tak dobrze jak pozostałe dwie odmiany algorytmu uodpornionego.

Sposób estymacji	$E\left(\frac{\phi_d - \hat{\phi}_d}{\phi_{3dB}}\right)^2$	$ E\left(\frac{\phi_d - \hat{\phi}_d}{\phi_{3dB}}\right) $	% pomiarów odstających $ \phi_d - \hat{\phi}_d  > 0.1 \phi_{3dB}$
Estymator monoimpulsowy	0.0041888	0.035714	14.9378
Deterministyczny MLE założenie $\phi_m = -\phi_d$	0.00087277	0.0011381	0.82988
Uodporniony det. MLE, 1 iteracja $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0.025, \epsilon_m = 0.25$	<b>0.00076889</b>	<b>0.0011118</b>	<b>0.41494</b>
Uodporniony det. MLE, 2 iteracje $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0.025, \epsilon_m = 0.25$	0.00077181	0.0011789	<b>0.41494</b>
Uodporniony det. MLE, 3 iteracje $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0.025, \epsilon_m = 0.25$	0.00077181	0.001181	<b>0.41494</b>
Uodporniony det. MLE, 5 iteracji $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0.025, \epsilon_m = 0.25$	0.00077183	0.0011817	<b>0.41494</b>
Uodporniony det. MLE, 10 iteracji $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0.025, \epsilon_m = 0.25$	0.00077185	0.0011823	<b>0.41494</b>
Uodporniony det. MLE, 20 iteracji $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0.025, \epsilon_m = 0.25$	0.00077184	0.0011826	<b>0.41494</b>
Uodporniony det. MLE, 50 iteracji $\phi_m = -\phi_d, \epsilon_d = 0.025, \epsilon_m = 0.25$	0.00077185	0.0011828	<b>0.41494</b>

Tab. 3.8: Wartości obciążenia, błędów średniokwadratowych i odsetek błędów "znaczących" dla parametrów  $\epsilon_m = 0.25$ ,  $\epsilon_d = 0.025$  i różnej liczby iteracji.

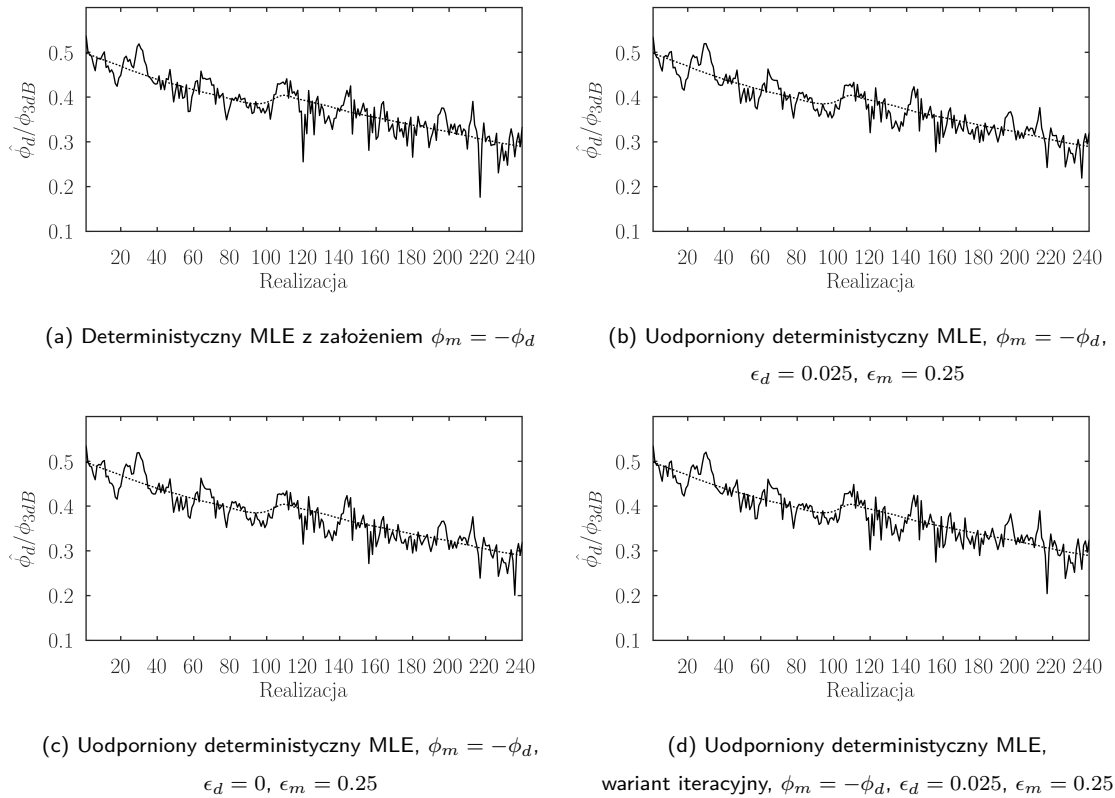
## Test 4

Przedostatni z testów jest zwięzłym podsumowaniem, w którym porównane zostały wyniki trzech odmian estymatora uodpornionego z deterministycznym estymatorem największej wiarygodności za-

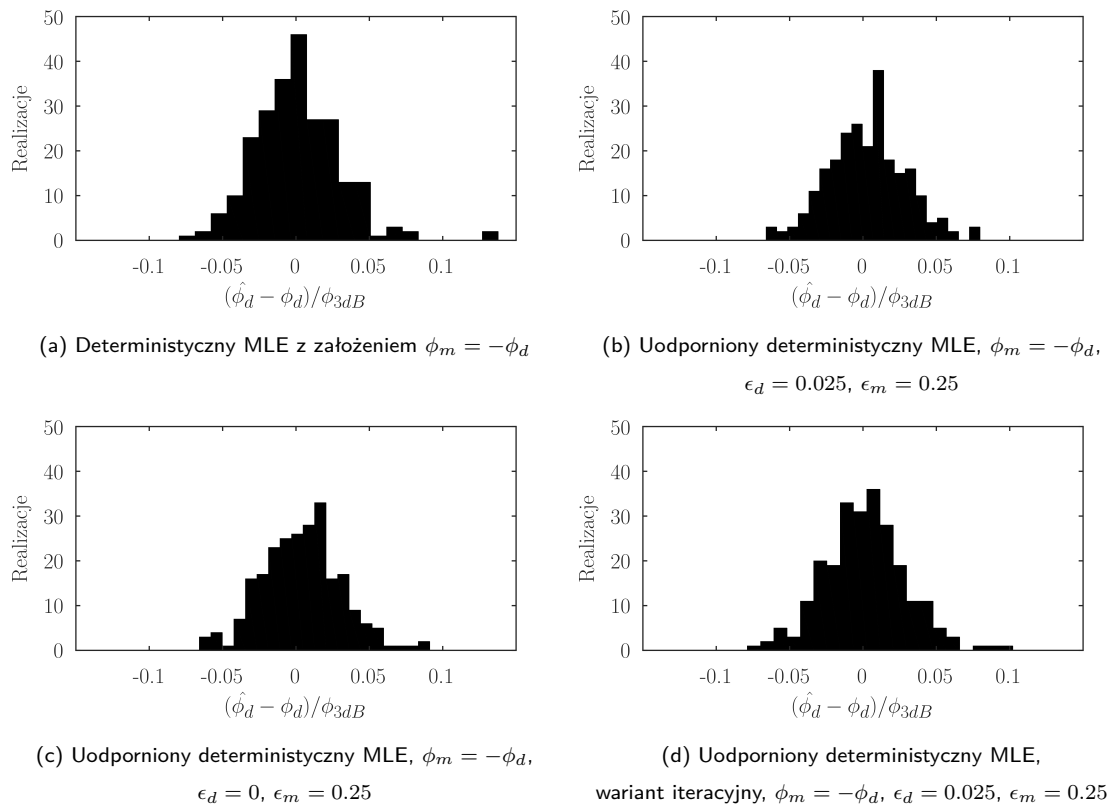
kładającym odbicia idealnie lustrzane. W przypadku estymatorów uodpornionych założono wartości  $\epsilon_m = 0.25$ ,  $\epsilon_d = 0.025$ . Wyjątkiem jest uproszczona odmiana algorytmu, dla której przyjęto  $\epsilon_d = 0$ . Wyniki przedstawiono w tabeli 3.9, na rys. 3.14, oraz na rys. 3.15. Na podstawie wyników tabelarycznych widać, że najniższą wariancję oraz odsetek znaczących błędów posiada pełna wersja estymatora uodpornionego. Jest ona jednocześnie najbardziej złożona i cechuje się wprowadzeniem dodatkowego obciążenia. Wersja iteracyjna z kolei pozwala uzyskać niską wartość zarówno wariancji jak i obciążenia, jednak nie jest tak skuteczna w eliminacji błędów odstających. Dostyc dobrze sytuację tą odzwierciedlają histogramy (rys. 3.15), w których widać, że faktycznie pełna wersja uodpornionego estymatora posiada najmniejszą liczbę wystąpień na skrajach rozkładu.

Sposób estymacji	$E\left(\frac{\phi_d - \hat{\phi}_d}{\phi_{3dB}}\right)^2$	$ E\left(\frac{\phi_d - \hat{\phi}_d}{\phi_{3dB}}\right) $	% pomiarów odstających $ \phi_d - \hat{\phi}_d  > 0.1 \phi_{3dB}$
Estymator monoimpulsowy	0.0041888	0.035714	14.9378
Deterministyczny MLE założenie $\phi_m = -\phi_d$	0.00087277	<b>0.0011381</b>	0.82988
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d$ $\epsilon_d = 0.025$ , $\epsilon_m = 0.25$	<b>0.00069948</b>	0.0029267	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d$ $\epsilon_d = 0$ , $\epsilon_m = 0.25$	0.0007382	0.0036038	<b>0</b>
Uodporniony det. MLE Iteracji: 3 $\phi_m = -\phi_d$ $\epsilon_d = 0.025$ , $\epsilon_m = 0.25$	0.00077181	0.001181	0.41494

Tab. 3.9: Wartości obciążenia, błędów średniokwadratowych i odsetek błędów odstających dla 5 przebadanych estymatorów.



Rys. 3.14: Wartości estymat kątów dla 4 przebadanych estymatorów.



Rys. 3.15: Histogramy błędów estymacji kąta elewacji uzyskanych przez 4 przebadane estymatory.



---

## Test 5

Ostatni z testów zakładał obecność rozproszonych odbić od ziemi, opisanych w sekcji 3.2.2. Założono obecność pojedynczego, punktowego źródła sygnału umieszczonego w odległości  $R = 20$  km, na wysokości  $H = 100$  m, przy wysokości anteny  $H_a = 10$  m. Przyjęto  $SNR = 30$  dB,  $N = 10$  impulsów sondujących w segmencie,  $M = 32$  elementy odbiorcze w szyku antenowym, oraz częstotliwość pracy  $f = 5.2$  GHz. Do uzyskania odpowiedniego odbicia rozproszonego założono współczynnik pochylenia podłoża równy  $\beta = 0.2$ . Ciągłą charakterystykę odbicia od ziemi zasymulowano jako zbiór punktowych źródeł rozmieszczonych co  $0.01^\circ$ , przy losowej fazie każdego z nich. Zastosowano dodatkowe tłumienia echa rozproszonego (10 dB) odzwierciedlające tłumienie wynikające z obecności roślin. Estymacja odbywała się w oparciu o 5 estymatorów:

- deterministyczny największej wiarygodności z założeniem lustrzanego modelu odbicia ( $\phi_m = -\phi_d$ );
- deterministyczny największej wiarygodności z niezależnym poszukiwaniem dwóch źródeł sygnału;
- uodporniony deterministyczny największej wiarygodności, założenie lustrzanego modelu odbicia ( $\phi_m = -\phi_d$ ), przy parametrach  $\epsilon_d = 0.025$ ,  $\epsilon_m = 0.25$ ;
- uodporniony deterministyczny największej wiarygodności, założenie lustrzanego modelu odbicia ( $\phi_m = -\phi_d$ ), przy parametrach  $\epsilon_d = 0.0$ ,  $\epsilon_m = 0.25$ ;
- uodporniony deterministyczny największej wiarygodności, założenie lustrzanego modelu odbicia ( $\phi_m = -\phi_d$ ), przy parametrach  $\epsilon_d = 0.025$ ,  $\epsilon_m = 0.25$ , wariant iteracyjny z 3 iteracjami.

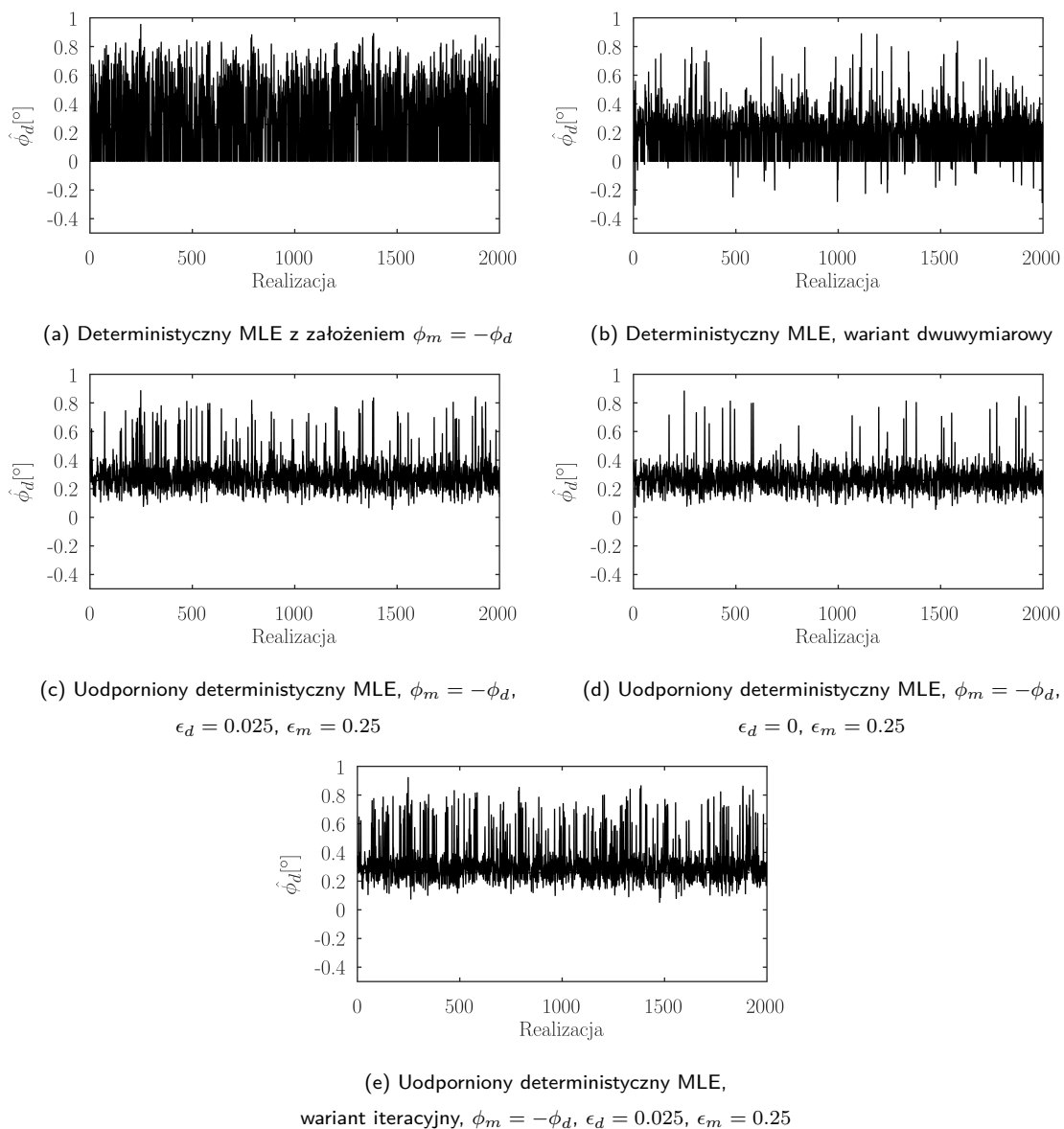
Wyniki przedstawiono w tabeli 3.10, oraz wykresy 3.16. Na ich podstawie można zaobserwować, że w symulowanych warunkach, estymator poszukujący źródeł sygnału w dwóch wymiarach charakteryzował się mniejszym błędem od odpowiednika zakładającego idealnie lustrzane odbicie od ziemi. Wszystkie trzy odmiany estymatora uodpornionego wykazywały natomiast poprawę względem metod klasycznych, przy czym najniższą wartość wariancji uzyskał wariant zakładający  $\epsilon_d = 0$ . Różnica między estymatorami uodpornionymi a klasycznymi jest dosyć dobrze widoczna na wykresach prezentujących wartość estymowanego kąta w zależności od realizacji (rys. 3.16). W klasycznych przypadkach (wykresy 3.16a i 3.16b) niewielka liczba oszacowań na ujemnych kątach wynika z faktu, że oba estymatory zwracały dwa kąty, a jako prawidłowy uznawano ten bliższy wartości prawdziwej. Dodatkowo wykreślone zostały histogramy uzyskanych wartości (rys. 3.17) - one również pokazują znaczną poprawę estymat. Bardzo dobre wyniki udało się uzyskać za pomocą uproszczenia zakładającego  $\epsilon_d = 0$ . Wynika to z faktu, że w przypadku danych syntetycznych sygnał pochodzący od echa bezpośredniego jest zupełnie niezaburzony, w związku z czym nie ma konieczności kompensacji niedokładności anteny. Dla klasycznych metod obserwowana jest znaczna liczba estymat na poziomie horyzontu, co wynika z dużej energii echa rozproszonego dla  $\phi \approx 0^\circ$ . W przypadku estymatorów uodpornionych obserwuje się widoczne na histogramach błędy estymacji w okolicy  $0.5^\circ$  - wynikają one z dużej energii echa rozproszonego obserwowanej na ujemnych kątach. W efekcie dochodzi do dopasowania do niej oszacowania  $\phi_m$  przekłamując

tym samym estymatę  $\phi_d$ . W rzeczywistości, jak pokazały testy na danych rzeczywistych, zjawisko to nie jest aż tak mocno obserwowane, jednak można zaobserwować tendencję "ściągnięcia" estymat do poziomu horyzontu.

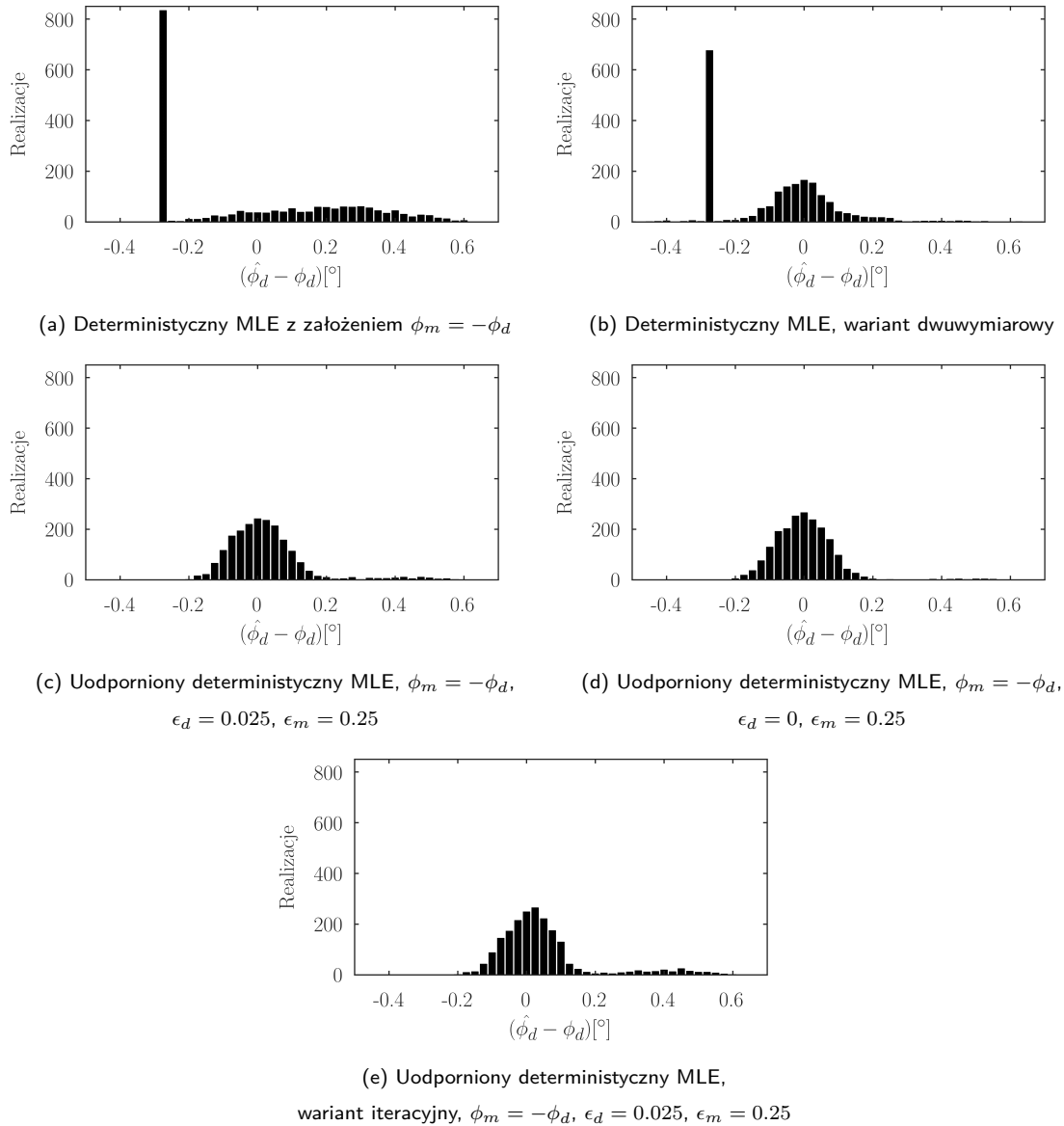
Sposób estymacji	$E(\phi_d - \hat{\phi}_d)^2 [^\circ^2]$	$ E(\phi_d - \hat{\phi}_d)  [^\circ]$
Deterministyczny MLE założenie $\phi_m = -\phi_d$	0.072908	<b>0.012217</b>
Deterministyczny MLE 2-wymiarowy	0.034047	0.076107
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d \epsilon_d = 0.025, \epsilon_m = 0.25$	0.013879	0.033364
Uodporniony det. MLE $\phi_m = -\phi_d \epsilon_d = 0, \epsilon_m = 0.25$	<b>0.0083934</b>	0.012912
Uodporniony det. MLE Iteracji: 3 $\phi_m = -\phi_d \epsilon_d = 0.025, \epsilon_m = 0.25$	0.021466	0.056601

Tab. 3.10: Wartości obciążenia i wariancji dla 5 przebadanych estymatorów przy rozproszonych odbiciach od ziemi.

Jak pokazały testy, estymator w wersji uodpornionej pozwala zredukować występowanie grubych błędów mogących wynikać z nieidealnego dopasowania modelu do rzeczywistości. Odpowiedni dobór parametrów pozwolił znacząco zredukować liczbę estymat, w których błąd wykraczał ponad 10% szerokości wiązki ( $\phi_{3dB}$ ). Efektem ubocznym uodpornienia estymatora była zwiększona wartość obciążenia względem klasycznej, deterministycznej metody największej wiarygodności. Wpływ ten można zniwelować odpowiednio modyfikując parametry algorytmów bądź stosując wariant iteracyjny, jednak w obu przypadkach może dojść do ponownego pojawiania się błędów znaczących. Przedstawiona metoda pozwala również poprawić jakość oszacowania w przypadku wystąpienia odbicia rozproszonego.



Rys. 3.16: Przykładowe wartości estymat kątów dla 5 przebadanych estymatorów przy rozproszonym odbiciu od ziemi dla 2000 eksperymentów Monte Carlo.



Rys. 3.17: Histogramy błędów estymacji uzyskanych przez 5 przebadanych estymatorów przy rozproszonym odbiciu od ziemi.

### 3.5 Badanie podejścia opartego o statystykę miękko decyzyjną

W teście drugim sekcji 3.3 zbadany został wpływ doboru modelu danych użytych w procesie estymacji na jakość oszacowania kąta odbioru sygnału przy zjawisku wielodrogowości występującym jedynie w części spośród dostępnych segmentów. W przywoływanym teście istniało 50% szans na wystąpienie odbicia od ziemi - wówczas dane generowane były z założeniem obecności dwóch źródeł sygnału. W pozostałych przypadkach obserwowane było wyłącznie echo bezpośrednie. Wyniki testu pozwoliły na pokazanie, że nieprawidłowe założenie co do liczby obserwowanych źródeł sygnału skutkuje degradacją jakości estymat - co jest oczekiwanym efektem w przypadku niezgodności modelu, przy użyciu którego prowadzona jest estymacja, z modelem na podstawie którego dane były generowane. W ogólnym przypadku model zakładający obecność dwóch źródeł sygnału pozwalał na uzyskanie estymat obarczonych mniejszymi błędami niż wariant dostosowany do sytuacji, w której występuje pojedyncze echo. W testach wykorzystano ponadto nierealizowany w rzeczywistości estymator, który posiadał informację a priori o liczbie źródeł. W zależności od tego, czy wielodrogowość występowała w danej paczce danych używany był estymator zakładający odpowiednią liczbę źródeł echa. Jak pokazały wyniki, tego typu "wyczołniony" estymator pozwolił na uzyskanie niższych niż w pozostałych przypadkach wartości błędów średniokwadratowych. Oznacza to, że wiedza a priori na temat występowania wielodrogowości pozwala użyć odpowiedniego estymatora wykorzystującego model dopasowany do warunków propagacji poprawiając tym samym jakość oszacowania.

W praktyce, kiedy dane nie są generowane, a pozyskane na podstawie obserwacji radarowych, nie ma prostej możliwości określenia z całkowitą pewnością czy sygnał posiada dodatkową składową pochodzącą od odbitego od ziemi echa. Istnieją jednak sposoby pozwalające w pewnym stopniu złagodzić ten problem stosując wskaźniki dopasowania modelu takie jak kryterium informacyjne Akaikego (AIC - ang. Akaike Information Criterion) [71] czy bayesowskie kryterium informacyjne Schwartza (BIC - ang. Bayesian Information Criterion) [72]. Uzyskane przy ich pomocy wyniki pozwalają dokonać porównania między modelami (w tym przypadku zakładającymi jedno i dwa źródła sygnału) pod kątem ich niewłaściwego dopasowania [73]. Aby uniknąć nadmiernego dopasowania do konkretnej realizacji danych - kryteria wprowadzają "kary" za zbyt dużą liczbę parametrów modelu. Prowadzi to do uzyskania kompromisu między modelem zbyt prostym (o małej liczbie parametrów, powodującym utratę informacji), a modelem nadmiernie dopasowanym (zbyt złożonym) [74].

W procesie estymacji zastosowano deterministyczny model danych przedstawiony równaniem:

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{A}_k(\boldsymbol{\phi})\mathbf{s}_{n,k} + \mathbf{v}_n, \quad (3.59)$$

gdzie  $\boldsymbol{\phi}$  oznacza wektor kątów, na których występują źródła echa:

$$\boldsymbol{\phi} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_k]. \quad (3.60)$$

Na macierz  $\mathbf{A}_k(\boldsymbol{\phi})$  składają się wektory odpowiedzi anteny na każdy z  $k$  obiektów:

$$\mathbf{A}_k(\boldsymbol{\phi}) = [\mathbf{a}(\phi_1) \ \mathbf{a}(\phi_2) \ \cdots \ \mathbf{a}(\phi_k)], \quad (3.61)$$

$\mathbf{s}_{n,k}$  stanowi wektor amplitud opowiadający  $k$ -temu obiektowi w  $n$ -tym sondowaniu:

$$\mathbf{s}_{n,k} = [s_{n,1} \ s_{n,2} \ \cdots \ s_{n,k}]^T. \quad (3.62)$$

Powyższy zapis odzwierciedla ogólny, przedstawiany wcześniej (sekcja 2.1) sposób reprezentacji odbieranych sygnałów. Liczba źródeł sygnału ( $k$ ) nie jest wartością znaną.

Wektory amplitud z  $n = 1, \dots, N$  sondowań można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\mathbf{S}_{n,k} = [\mathbf{s}_{1,k} \ \mathbf{s}_{2,k} \ \cdots \ \mathbf{s}_{n,k}]. \quad (3.63)$$

Przy takich założeniach, funkcja wiarygodności przyjmuje postać:

$$L_k(\phi, \mathbf{S}_{m,k}, \sigma_k^2) = \left( \frac{1}{\pi \sigma_k^2} \right)^{MN} \prod_{n=1}^N e \left( - \frac{\|\mathbf{y}_n - \mathbf{A}_k(\phi) \mathbf{s}_{n,k}\|^2}{\sigma_k^2} \right), \quad (3.64)$$

gdzie  $M$  oznacza liczbę elementów wektora odpowiedzi antenowej, a  $N$  całkowitą liczbę obserwacji. Korzystając z metody najmniejszych kwadratów istnieje możliwość oszacowania wektora amplitud:

$$\hat{\mathbf{s}}_{n,k}(\phi) = \mathbf{A}_k(\phi) [\mathbf{A}_k^H(\phi) \mathbf{A}_k(\phi)]^{-1} \mathbf{A}_k^H(\phi) \mathbf{y}_n. \quad (3.65)$$

Po podstawieniu oszacowania wartości amplitud do funkcji kosztu, estymacja kątów odbioru ( $\hat{\phi}$ ) może zostać wykonana w oparciu o lokalizację minimum funkcji:

$$\hat{\phi} = \underset{\phi}{\operatorname{argmin}} \sum_{n=1}^N \mathbf{y}_n^H \mathbf{Q}_{n,k}(\phi) \mathbf{y}_n, \quad (3.66)$$

gdzie:

$$\mathbf{Q}_{n,k}(\phi) = \mathbf{I} - \mathbf{A}_k(\phi) [\mathbf{A}_k^H(\phi) \mathbf{A}_k(\phi)]^{-1} \mathbf{A}_k^H(\phi). \quad (3.67)$$

Estymata wariancji szumu przyjmuje wówczas postać:

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{MN} \sum_{n=1}^N \mathbf{y}_n^H \mathbf{Q}_{n,k}(\hat{\phi}) \mathbf{y}_n, \quad (3.68)$$

przy czym  $k$  oznacza liczbę źródeł echa występujących w modelu. Oszacowanie wariancji szumu jest szczególnie ważne z punktu widzenia kryteriów informacyjnych, gdyż składają się na nie nie tylko wartości szumu pomiarowego, ale również wszelkiego typu błędy dopasowania modelu. Im niższą przyjmuje ono wartość, tym lepiej model dopasowany jest do konkretnej realizacji danych - należy jednak mieć na uwadze, że nadmierne dopasowanie jest niewskazane ze względu na możliwość wystąpienia znacznych błędów przy innej realizacji (tzw. overfitting).

Przy założeniu funkcji kosztu opisanej równaniem (3.64), wartości kryteriów decyzyjnych są określane na podstawie równań:

$$\text{AIC}_k = -2 \log L_k(\phi_k, \mathbf{S}_{N,k}, \hat{\sigma}_k^2) + 2n_p(k), \quad (3.69)$$

$$\text{BIC}_k = -2 \log L_k(\phi_k, \mathbf{S}_{N,k}, \hat{\sigma}_k^2) + \log(n_o) n_p(k), \quad (3.70)$$

$$\text{AIC}_{Ck} = -2 \log L_k(\phi_k, \mathbf{S}_{N,k}, \hat{\sigma}_k^2) + 2n_p(k) + 2 \frac{n_p(k)[n_p(k) + 1]}{n_o - n_p(k) - 1}. \quad (3.71)$$

gdzie  $k$  w dolnym indeksie świadczy o założonej w modelu danych liczbie źródeł sygnału, a  $\text{AIC}_{Ck}$  oznacza skorygowane kryterium Akaikego, które jest zalecane w przypadku pracy na niedużych zbiorach

danych [74, 75]. Wartość  $n_p(k)$  reprezentuje liczbę estymowanych rzeczywistych parametrów modelu i wynosi odpowiednio:

$$n_p(k) = \begin{cases} 1 + 1 + 2N & \text{dla } k = 1, \\ 2 + 1 + 4N & \text{dla } k = 2, \text{ przy braku założenia symetrii kątów,} \\ 1 + 1 + 4N & \text{dla } k = 2, \text{ przy założeniu symetrii kątów,} \end{cases} \quad (3.72)$$

powyższe wartości wynikają z:

- dla  $k = 1$ : 1 kąt odbioru, 1 wartość wariancji szumu i  $N$  zespolonych ( $2N$  rzeczywistych) amplitud;
- dla  $k = 2$ : 2 niezależne kąty odbioru, 1 wartość wariancji szumu i  $2N$  zespolonych ( $4N$  rzeczywistych) amplitud;
- dla  $k = 2$  i  $\phi_1 = -\phi_2$ : 1 niezależny kąt odbioru, 1 wartość wariancji szumu i  $2N$  zespolonych ( $4N$  rzeczywistych) amplitud.

Wartość  $n_o$  jest niezależna od modelu danych i oznacza liczbę rzeczywistych pomiarów. Wartość ta wynosi  $n_o = 2MN$  w przypadku pracy na sygnałach pochodzących z elementów antenowych, bądź  $n_o = 2BN$  przy danych w postaci wiązek. W równaniach (3.69), (3.70), (3.71),  $L_k(\phi, \mathbf{S}_{N,k}, \hat{\sigma}_k^2)$  oznacza logarytmiczną funkcję wiarygodności. Zakładając, że kąty odbioru sygnału oraz odpowiadające im amplitudy są estymowane na podstawie tych samych danych, funkcję tę można uprościć do postaci:

$$\log L_k(\phi, \mathbf{S}_{N,k}, \hat{\sigma}_k^2) = -MN (\log \hat{\sigma}_k^2 + 1 + \log \pi). \quad (3.73)$$

Można wyróżnić dwa podejścia wykorzystujące kryteria informacyjne w celu poprawy jakości oszacowania. Pierwsze ("rywalizujące") [74] zakłada, że jako prawdziwy ( $k_0$ ) przyjęty zostanie ten spośród  $K$  modeli, przy którym uzyskana zostanie niższa wartość danego kryterium. Pozostałe modele są odrzucane, a uzyskane za ich pomocą oszacowania nie wpływają na końcową wartość estymaty. Proces wyboru przedstawiają równania:

$$\bar{\phi} = \hat{\phi}_{k_0}, \quad (3.74)$$

gdzie  $k_0$  stanowi oznaczenie modelu optymalnego (na podstawie danego kryterium) i określone jest na podstawie:

$$k_0 = \underset{k=1,2,\dots,K}{\operatorname{argmin}} IC_k, \quad (3.75)$$

$$IC_k = \begin{cases} -2 \log L_k(\hat{\phi}_k, \mathbf{S}_{N,k}, \hat{\sigma}_k^2) + 2n_p(k) & \text{dla } AIC, \\ -2 \log L_k(\hat{\phi}_k, \mathbf{S}_{N,k}, \hat{\sigma}_k^2) + \log(n_o)n_p(k) & \text{dla } BIC, \\ -2 \log L_k(\hat{\phi}_k, \mathbf{S}_{N,k}, \hat{\sigma}_k^2) + 2n_p(k) + 2 \frac{n_p(k)[n_p(k)+1]}{n_o - n_p(k) - 1} & \text{dla } AICc. \end{cases}$$

Należy w tym momencie podkreślić, że nie dochodzi do porównywania wartości różnych kryteriów a jedynie różnych modeli między sobą pod względem tego samego kryterium. Oznacza to, że stosowanie różnych kryteriów może prowadzić do wskazania odmiennych modeli uznanych za prawidłowe.

Drugie podejście (“współpracujące”) [74, 76], zakłada, że nie zostaje wskazany jeden, dominujący model, lecz że końcowa estymata jest efektem ważonego uśrednienia każdego z kątów [wzór (3.76)] uzyskanych przy pomocy testowanych modeli, przy czym na wartości wag ( $\mu_k$ ) wpływ ma zastosowanie kryterium decyzyjne:

$$\bar{\phi} = \sum_{k=1}^K \hat{\phi}_{k_0} \mu_k, \quad (3.76)$$

gdzie  $\mu_k$  opisuje równanie:

$$\mu_k = \frac{e^{-0.5IC_k}}{\sum_{k=1}^K e^{-0.5IC_k}},$$

$$IC_k = \begin{cases} -2 \log L_k(\hat{\phi}_k, \mathbf{S}_{N,k}, \hat{\sigma}_k^2) + 2n_p(k) & \text{dla } AIC, \\ -2 \log L_k(\hat{\phi}_k, \mathbf{S}_{N,k}, \hat{\sigma}_k^2) + \log(n_o)n_p(k) & \text{dla } BIC, \\ -2 \log L_k(\hat{\phi}_k, \mathbf{S}_{N,k}, \hat{\sigma}_k^2) + 2n_p(k) + 2 \frac{n_p(k)[n_p(k)+1]}{n_o - n_p(k) - 1} & \text{dla } AICc. \end{cases} \quad (3.77)$$

Konsekwencją ważenia przedstawionego w równaniach (3.77) jest zachowanie skutkujące efektywnym wykorzystywaniem kąta odpowiadającego modelowi, dla którego uzyskano najniższą statystykę decyzyjną przy pojawieniu się większych dysproporcji między uzyskanymi oszacowaniami. W takim przypadku zachowanie pokrywa się z sposobem “rywalizującym”. Różnice pojawiają się kiedy wartości kryteriów są zbliżone dla różnych modeli - w takim wypadku faktycznie dochodzi do uśredniania estymat kątów.

## Test 1

Pierwszy z testów sprawdzających wpływ doboru modelu wykonany został w oparciu o dane wygenerowane w postaci sygnałów z elementów odbiorczych anteny. Wymiar wektora odpowiedzi antenowej ( $M$ ) oraz liczba sondowań ( $N$ ) wchodzących w skład paczki sygnałów wskazane są w dwóch pierwszych kolumnach tabeli 3.11. Zawiera ona wartości błędów średniokwadratowych określone za pomocą metody Monte Carlo przy użyciu różnych sposobów doboru modelu. Kolumny “Klasyczny MLE” oznaczają standardowy, nieadaptacyjny, deterministyczny estymator największej wiarygodności z założeniem obecności  $k = 1$  lub  $k = 2$  źródeł sygnału. W przypadku  $k = 2$  przyjęto idealnie lustrzany charakter odbić ( $\phi_m = -\phi_d$ ). Kolumny “Stat. rywalizująca” oznaczają sposób doboru modelu zgodny z równaniami (3.74) i (3.75) - wybierany jest ten spośród modeli (zakładających  $k = 1$  lub  $k = 2$  z odbiciem lustrzanym), dla którego uzyskano niższą wartość statystyki decyzyjnej dla kryteriów AIC, BIC i AICc. Kolumna “Stat. współpracująca” oznacza podejście opisane równaniami (3.76) i (3.77) - zastosowano tam odpowiednio ważne uśrednianie estymat. Ponownie w tym celu zastosowano kryteria AIC, BIC i AICc. Ostatnia kolumna, “Alg. wyroczniowy” oznacza nierealizowany w praktyce estymator, do którego została podana informacja o liczbie źródeł echa w sygnale, co pozwoliło w dobrąć odpowiedni model. Parametry symulacji były zbliżone z tymi wykorzystanymi w teście 2 z sekcji 3.3:  $SNR = 30$  dB w odniesieniu do 1 elementu odbiorczego, amplituda echa odbitego opisana równaniem (3.15), cel umieszczony w odległości  $R = 5$  km i wysokość anteny  $H_a = 10$  m. Obiekt nie zmieniał swojej odległości, ale jego elewacja była losowana w zakresie od  $\phi = 0.5^\circ$  do  $\phi = 2.5^\circ$  (wykorzystano rozkład równomierny).



N	M	Klasyczny MLE		Stat. rywalizująca			Stat. współpracująca			Alg. wyroczn.
		$k = 1$	$k = 2$	AIC	BIC	AICc	AIC	BIC	AICc	
1	4	4.7322	3.8436	3.3992	3.3313	4.3158	3.0164	<b>3.0013</b>	4.2286	2.2503
1	8	2.7784	0.5669	0.4833	0.4702	0.4721	0.4302	0.4203	<b>0.4194</b>	0.3464
1	16	1.2145	0.0641	0.0550	0.0490	0.0529	0.0517	<b>0.0488</b>	0.0505	0.0463
1	32	0.3954	0.0089	0.0086	0.0086	0.0086	0.0085	<b>0.0084</b>	0.0085	0.0082
2	4	3.7588	2.0419	1.5658	1.5183	1.6641	1.4892	<b>1.3960</b>	1.5107	1.1245
2	8	2.4064	0.2536	0.1908	0.1741	0.1762	0.1806	<b>0.1684</b>	0.1706	0.1559
2	16	1.1926	0.0243	0.0207	<b>0.0193</b>	0.0201	0.0203	<b>0.0193</b>	0.0199	0.0189
2	32	0.3963	0.0067	<b>0.0066</b>	<b>0.0066</b>	<b>0.0066</b>	<b>0.0066</b>	<b>0.0066</b>	<b>0.0066</b>	0.0065
3	4	3.2434	1.4387	1.0394	0.8775	0.8137	0.9625	0.8395	<b>0.8101</b>	0.7118
3	8	2.4092	0.1734	0.1238	0.1094	0.1125	0.1169	<b>0.1085</b>	0.1095	0.1025
3	16	1.1633	0.0164	0.0144	<b>0.0140</b>	0.0143	0.0143	<b>0.0140</b>	0.0142	0.0140
3	32	0.3956	0.0067	<b>0.0066</b>	<b>0.0066</b>	<b>0.0066</b>	<b>0.0066</b>	<b>0.0066</b>	<b>0.0066</b>	0.0066
5	4	3.1244	1.0928	0.8110	0.6531	0.7047	0.7660	<b>0.6450</b>	0.6858	0.6097
5	8	2.3970	0.1255	0.0867	0.0869	0.0812	0.0842	0.0860	<b>0.0807</b>	0.0785
5	16	1.1649	0.0138	0.0128	<b>0.0127</b>	0.0128	0.0128	<b>0.0127</b>	<b>0.0127</b>	0.0127
5	32	0.3901	<b>0.0062</b>	<b>0.0062</b>	<b>0.0062</b>	<b>0.0062</b>	<b>0.0062</b>	<b>0.0062</b>	<b>0.0062</b>	0.0062

Tab. 3.11: Wartości błędów średniokwadratowych przy zastosowaniu doboru modelu przy wykorzystaniu różnych statystyk decyzyjnych. Dane symulacyjne wygenerowane w postaci sygnałów antenowych.

Wyniki przedstawione w tabeli 3.11 pokazują, że zastosowanie kryteriów informacyjnych w celu wyboru modelu niemal zawsze wiąże się z poprawą jakości oszacowania względem sytuacji z standardową procedurą MLE (dla  $k = 1$  lub  $k = 2$ ). Można jednak zauważyć, że wraz z wzrostem ilości dostępnych danych, błąd średniokwadratowy estymatora największej wiarygodności z założeniem 2 symetrycznych źródeł echa zbliża się do estymatora wyroczniowego. W takim wypadku, dopasowywanie modelu do posiadanych sygnałów nie wiązało się z dalszym spadkiem wartości błędów. Porównując sposoby wykorzystania statystyki decyzyjnej (podejście współpracujące lub rywalizujące) można zauważyć, że metoda uśredniania [równania (3.76) i (3.77)] cechuje się mniejszymi wartościami błędów średniokwadratowych w stosunku do metody wybierającej jeden z modeli [równania (3.74) i (3.75)]. Zestawiając kryteria informacyjne użyte do wyboru modelu - różnice są nieznaczne. Biorąc je jednak pod uwagę - nie można w sposób jednoznaczny określić, które z kryteriów pozwala uzyskać możliwie najlepsze wyniki estymacji. W zależności od ilości dostępnych danych należałoby przełączać algorytm między różnymi wariantami, jednak z praktycznego punktu widzenia nie ma to dużego wpływu na wynik końcowy.

## Test 2

W drugim z testów wykorzystano takie same parametry symulacji jak w teście 1, z tą różnicą, że obserwacje mają postać wiązek. Uformowane zostało 6 wiązek (3 różnicowe i 3 sumacyjne) na kątach elewacji  $0^\circ$ ,  $1.5^\circ$  i  $3^\circ$ . Zastosowano taper o rozkładnie równomiernym (w przypadku wiązki różnicowej wykonano odpowiedni dla niej zabieg odwrócenia fazy w połowie elementów).

N	M	Klasyczny MLE		Stat. rywalizująca			Stat. współpracująca			Alg. wyroczn.
		$k = 1$	$k = 2$	AIC	BIC	AICc	AIC	BIC	AICc	
1	8	3.7103	0.5478	0.5489	0.5513	0.5413	0.5434	0.5424	<b>0.5374</b>	0.3099
1	16	1.7437	0.0643	0.0630	0.0630	0.0614	0.0626	0.0623	<b>0.0603</b>	0.0432
1	32	0.4714	0.0149	0.0149	0.0149	<b>0.0148</b>	0.0149	0.0149	<b>0.0148</b>	0.0140
2	8	3.3583	<b>0.2397</b>	<b>0.2397</b>	<b>0.2397</b>	<b>0.2397</b>	<b>0.2397</b>	<b>0.2397</b>	<b>0.2397</b>	0.1419
2	16	1.7317	0.0283	0.0283	0.0283	0.0283	0.0283	0.0283	<b>0.0282</b>	0.0236
2	32	0.4691	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	0.0111
3	8	3.6044	<b>0.1782</b>	<b>0.1782</b>	<b>0.1782</b>	<b>0.1782</b>	<b>0.1782</b>	<b>0.1782</b>	<b>0.1782</b>	0.1106
3	16	1.7408	<b>0.0284</b>	<b>0.0284</b>	<b>0.0284</b>	<b>0.0284</b>	<b>0.0284</b>	<b>0.0284</b>	<b>0.0284</b>	0.0257
3	32	0.4669	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	0.0112
5	8	3.3518	<b>0.1081</b>	<b>0.1081</b>	<b>0.1081</b>	<b>0.1081</b>	<b>0.1081</b>	<b>0.1081</b>	<b>0.1081</b>	0.0723
5	16	1.7141	<b>0.0236</b>	<b>0.0236</b>	<b>0.0236</b>	<b>0.0236</b>	<b>0.0236</b>	<b>0.0236</b>	<b>0.0236</b>	0.0224
5	32	0.4663	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	<b>0.0112</b>	0.0112

Tab. 3.12: Wartości błędów średniokwadratowych przy zastosowaniu doboru modelu przy wykorzystaniu różnych statystyk decyzyjnych. Dane symulacyjne wygenerowane w postaci wiązek.

Wyniki testu przedstawiono w tabeli 3.12. Ponownie zawiera ona wartości błędów średniokwadratowych uzyskane przy pomocy metody Monte Carlo. Wartości przedstawione powyżej mają podobną specyfikę jak wyniki z tabeli 3.11, gdzie dane miały postać sygnałów pobranych bezpośrednio z elementów antenowych, jednak wyraźnie najlepsze wyniki udało się uzyskać korzystając z skorygowanego kryterium Akaikego. Pokazuje to, że przedstawiona metoda doboru modelu sprawdza się zarówno w przypadku danych w formacie odpowiedzi anteny jak i uformowanych już wiązek.

## Test 3

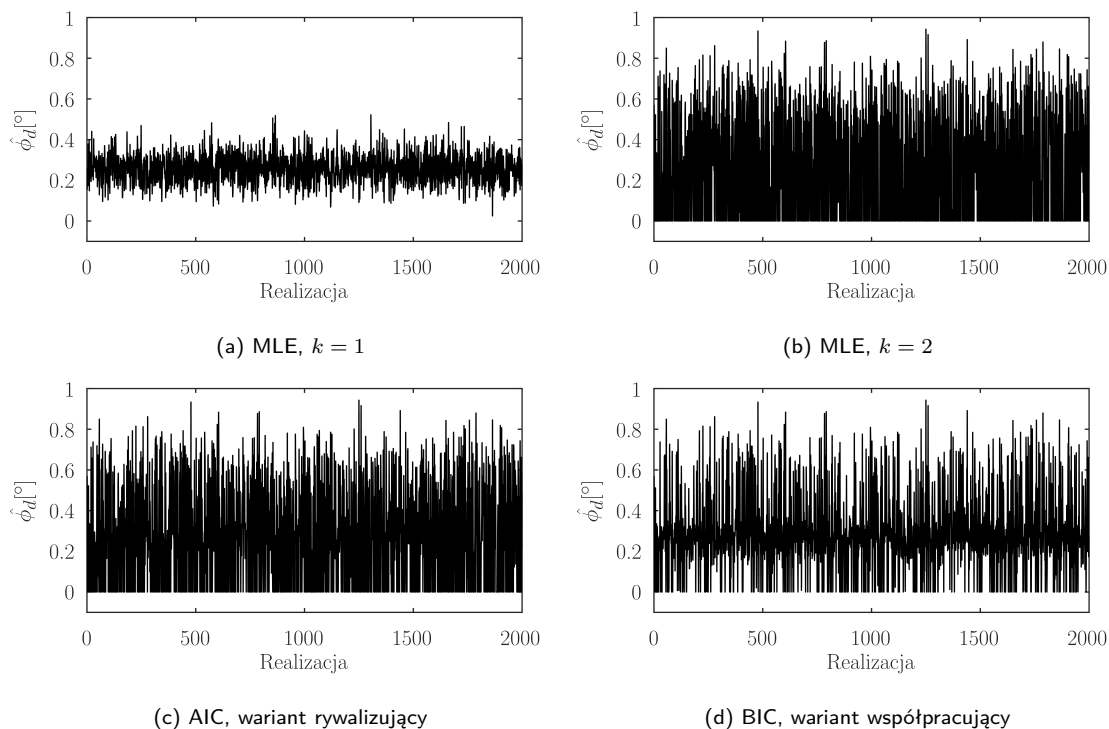
W kolejnej symulacji zastosowano rozproszony model odbicia od ziemi. Pozostałe parametry pracy to:  $SNR = 30$  dB, odległość  $R = 20$  km, liczba sondowań w segmencie  $N = 10$ , liczba elementów antenowych  $M = 32$ , wysokość masztu antenowego  $H_a = 10$  m, wysokość obiektu nad poziomem horyzontu  $H = 100$  m, co przekładało się na  $\phi_d \approx 0.258[^\circ]$ . Częstotliwość pracy wynosiła  $f_0 = 5.2$  GHz, współczynnik nierówności podłoża  $\beta = 0.2$  i tłumienie od roślinności 10 dB. Otrzymane wyniki przedstawiono w tabeli 3.13 oraz na wykresie 3.18.

Pierwszą rzeczą, która rzuca się w oczy w tabeli wyników jest bardzo niska wartość zarówno obciąże-

Sposób estymacji	$E(\phi_d - \hat{\phi}_d)^2 [^\circ^2]$	$ E(\phi_d - \hat{\phi}_d)  [^\circ]$
K=1	<b>0.0047033</b>	<b>0.00039369</b>
K=2	0.069779	0.0035996
COMP AIC	0.059376	0.021322
COMP BIC	0.035731	0.035839
COMP AICc	0.058614	0.022637
COOP AIC	0.058457	0.021352
COOP BIC	0.035009	0.035962
COOP AICc	0.057733	0.022188

Tab. 3.13: Wartości błędów średniokwadratowych i obciążenie przy estymacji opartej o sygnały z rozproszonym odbiciem od ziemi, przy zastosowaniu doboru modelu na podstawie kryteriów informacyjnych (klasyczne podejście największej wiarygodności).

nia jak i błędu średniokwadratowego dla estymatora największej wiarygodności zakładającego obecność jednego źródła sygnału. Posiada on lepszej jakości oszacowanie od pozostałych analizowanych metod. Przyczyną takiego stanu rzeczy może być fakt, że źródło echa pochodzące bezpośrednio od obiektu posiada większą energię niż echo odbite od ziemi. Należy jednak pamiętać o wynikach wcześniejszych testów (np. z sekcji 3.8), w których można było wyraźnie zauważyć, że estymator ten nie sprawdza się najlepiej przy obserwacjach obiektu z  $\phi_d \sim 2^\circ$ . Znacznie gorzej wypada estymator największej wiarygodności zakładający obecność dwóch źródeł sygnału (z założeniem odbicia idealnie lustrzanego i maksymalizacją funkcji wiarygodności w jednym wymiarze). Zastosowane metody uśredniające (w sposób ważony) wyniki tych dwóch estymatorów pozwoliły uzyskać oszacowanie o mniejszym błędzie średniokwadratowym niż wariant MLE z  $k = 2$ , nadal jednak o około rząd większym w porównaniu do wersji z  $k = 1$ . Sposób uśredniania miał duży wpływ na otrzymane rezultaty, przy czym wykorzystanie kryterium BIC pozwoliło na uzyskanie najlepszych efektów. Wyniki uzyskane na podstawie 2000 realizacji przedstawiono na rys. 3.19. Na ich podstawie można zauważyć znaczącą różnicę w wypracowanych estymatach. Potwierdza się opisana wcześniej wyższość estymatora MLE z  $k = 1$  nad wersją  $k = 2$  z założeniem  $\phi_m = -\phi_d$ . Obserwowane odcięcie kątów ujemnych dla wariantu  $k = 2$  wynika z traktowania jako prawdziwy oszacowania na kącie ponad poziomem horyzontu. Warto jednak porównać wykresy 3.18a i 3.18d, ponieważ są one w pewnym stopniu podobne. Wartości oszacowania bliskie zeru nadal są często obserwowane jednak jest ich widocznie mniej niż ma to miejsce w wariancie  $k = 2$ . Pokazuje to, że rozwiązanie zakładające miękko decyzyjny sposób uśredniania estymat pozwala w pewnym stopniu poprawić jakość oszacowania, jednak nadal znaczna część oszacowań będzie obciążona grubymi błędami.



Rys. 3.18: Przykładowe wyniki estymacji przy użyciu klasycznych estymatorów MLE ( $k = 1$  - rys. 3.18a i  $k = 2$  - rys. 3.18b) oraz po zastosowaniu doboru modelu na podstawie kryterium AIC z podejściem rywalizującym (rys. 3.18c) i współpracującym BIC (rys. 3.18d). Sygnały zawierały rozproszone odbicie od ziemi.

#### Test 4

Czwarty z testów wykonano na podstawie rzeczywistych sygnałów radarowych. Są to te same dane co w przypadku np. testu 2 z sekcji 3.3. Wyniki badania przedstawiono w tabeli 3.14 oraz wykresy 3.19. Tabela zawiera kolumny informujące o błędzie średniokwadratowym, obciążeniu i odsetku błędów odstających (większych niż 10% szerokości wiązki). Ponownie wykorzystano 2 typy deterministycznych, nieadaptacyjnych estymatorów ( $k = 1$  i  $k = 2$  z założeniem odbić lustrzanych). Sprawdzone również wpływ zastosowania kryteriów informacyjnych do wyboru modelu na wartości błędów estymacji. W tym teście ze względu na rzeczywisty charakter danych nie było możliwości użycia estymatora “wyroczniowego” (ze względu na, opisaną wcześniej, nierealizowalność).

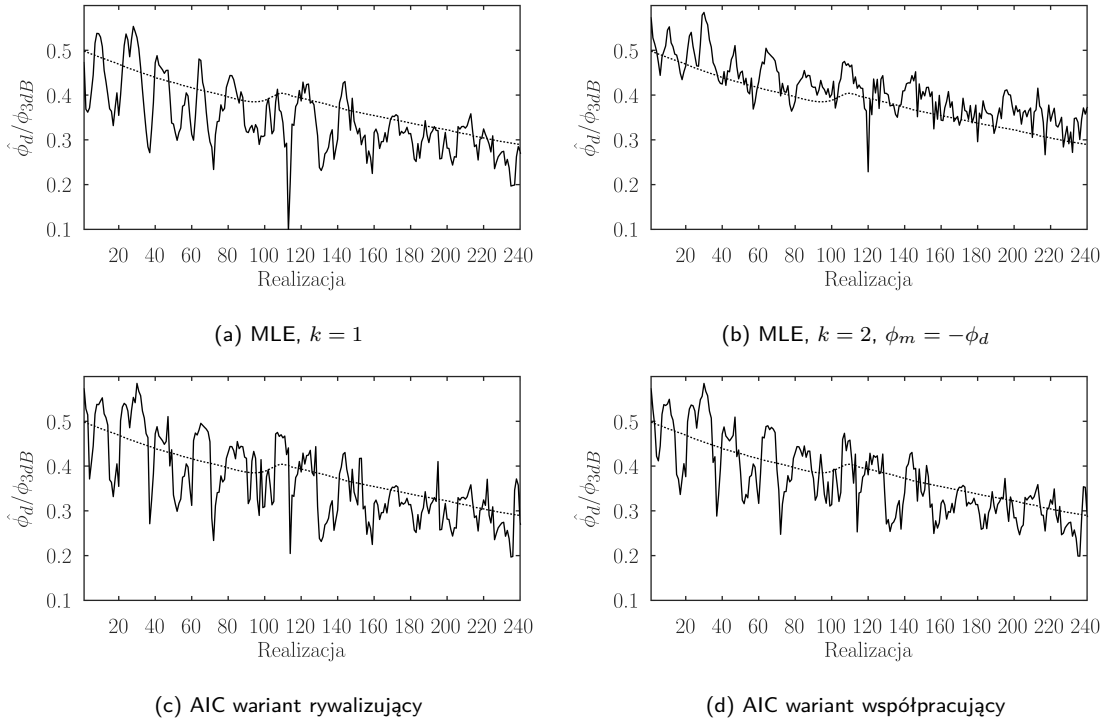
Na podstawie tabeli 3.14 można zauważyć, że zdecydowanie najlepiej (pod względem błędu średniokwadratowego oraz odsetka błędów odstających) sprawdza się estymator zakładający  $k = 2$  echa. W odróżnieniu od poprzednich testów - zastosowanie doboru modelu na podstawie kryteriów informacyjnych nie przyniosło oczekiwanych efektów. W skrajnych przypadkach (po zastosowaniu kryterium BIC) wartości błędów wzrosły ponad te obserwowane przy podstawowych wariantach estymatora MLE (z  $k = 1$  i  $k = 2$ ). Pod względem odsetka estymat odstających osiągnięto zbliżony poziom do estymatora monoimpulsowego (który zakłada obecność jednego źródła echa i nie powinien być używany w warunkach wielodrogowości). Tak znaczne odstępstwa od wartości prawdziwej mogą świadczyć o tym, że kryterium zupełnie nie sprawdziło się w roli wyznacznika jakości dopasowania modelu. Dobór

Sposób estymacji	$E\left(\frac{\phi_d - \hat{\phi}_d}{\phi_{3dB}}\right)^2$	$ E\left(\frac{\phi_d - \hat{\phi}_d}{\phi_{3dB}}\right) $	% pomiarów odstających $ \phi_d - \hat{\phi}_d  > 0.1 \phi_{3dB}$
MLE, $k = 1$	0.0045727	0.035823	13.278
MLE, $k = 2, \phi_m = -\phi_d$	<b>0.0020916</b>	0.028645	<b>2.4896</b>
Estymator monoimpulsowy	0.0041888	0.035714	14.9378
AIC rywal.	0.0040773	0.012757	10.7884
BIC rywal.	0.0046739	0.030279	14.1079
AICc rywal.	0.0045727	0.035823	13.278
AIC współpr.	0.0031965	<b>0.012234</b>	8.2988
BIC współpr.	0.0041637	0.028159	14.1079
AICc współpr.	0.00455	0.03545	13.278

Tab. 3.14: Wartości błędów średniokwadratowych, obciążenia i odsetek błędów odstających przy estymacji opartej o dane rzeczywiste dla zastosowaniu doboru modelu na podstawie kryteriów informacyjnych (klasyczne podejście największej wiarygodności).

na podstawie pozostałych kryteriów (AIC i AICc) wypada nieco lepiej, jednak nadal nie zbliża się do poziomu klasycznego estymatora największej wiarygodności ( $k = 2, \phi_m = -\phi_d$ ).

Na wykresach 3.19a i 3.19b przedstawiono przebiegi oszacowanych kątów odbioru echa dla nieadaptacyjnych estymatorów (odpowiednio z  $k = 1$  i  $k = 2$ ). Stanowią one punkt odniesienia do analizy działania dopasowania modelu na podstawie kryterium informacyjnego. W przypadku wariantu z wykorzystaniem AIC w wersji rywalizującej (wykres 3.19c) jak i współpracującej (wykres 3.19c) widać podobieństwo obu przebiegów. Zestawiając je z wcześniej przytoczonymi wykresami można dostrzec, że znacząca liczba estymat pokrywa się z wartościami uzyskanymi przez model przyjmujący obecność  $k = 1$  źródła echa, co sugeruje, że właśnie ten model był preferowany w większości przypadków. Oba estymatory (klasyczne MLE,  $k = 1$  i  $k = 2$ ) popełniły znaczny błąd o takim samym znaku w realizacji 112, z tego powodu uśrednianie nie jest w stanie niczego poprawić. Na podstawie tego testu można wywnioskować, że podejście oparte o statystykę miękkoodecyzyjną nie przyniosło oczekiwanych rezultatów, w niektórych przypadkach powodując wręcz pogorszenie jakości oszacowania względem obu bazowych estymat.



Rys. 3.19: Przykładowe wyniki estymacji przy użyciu klasycznych estymatorów MLE ( $k = 1$  - rys. 3.19a i  $k = 2$  - rys. 3.19b) oraz po zastosowaniu doboru modelu na podstawie kryterium AIC (podejście rywalizujące (rys. 3.19c) i współpracujące (rys. 3.19d). Dane zarejestrowane przy pomocy radaru.

**Test 5**

Ze względu na niezadowalające efekty uzyskane w teście 4 - wykonano dodatkowe badanie. Zastosowano ten sam zestaw danych, jednak klasyczne estymatory największej wiarygodności zastąpiono ich uodpornionymi wariantami opisanymi w sekcji 3.4. Przyjęto wartości parametrów  $\epsilon_m = 0.25$  i  $\epsilon_d = 0.025$ . Dodatkowo, dołączone zostało kolejne kryterium decyzyjne, AICR [77] dostosowane do przedstawionej w sekcji 3.4 postaci estymatora uodpornionego. Określone zostaje ono na podstawie równań:

$$AICR_k = 2V_k(\hat{\phi}) + 2tr \left( \hat{\mathbf{J}}_k^{-1}(\hat{\phi}) \hat{\mathbf{K}}_k(\hat{\phi}) \right), \tag{3.78}$$

gdzie  $V_k(\phi)$  stanowi funkcję kosztu uwzględniającą możliwość niedokładnego dopasowania modelu do danych:

$$V_k(\phi) = \sum_{n=1}^N \left( \|\mathbf{y}_n - \mathbf{A}_k(\phi) \hat{\mathbf{s}}_{n,k}\| + \sum_{k=1}^K \epsilon_k |\hat{\mathbf{s}}_{n,k}| \right)^2, \tag{3.79}$$

a  $\hat{\mathbf{J}}_k(\hat{\phi})$  i  $\hat{\mathbf{K}}_k(\hat{\phi})$  stanowią wartości pochodnych funkcji kosztu po kącie w punkcie  $\hat{\phi}$ :

$$\hat{\mathbf{J}}_k(\hat{\phi}) = - \sum_{n=1}^N \frac{\partial^2 V_k(\phi)}{\partial \phi \partial \phi^T} \Bigg|_{\phi=\hat{\phi}}, \tag{3.80}$$

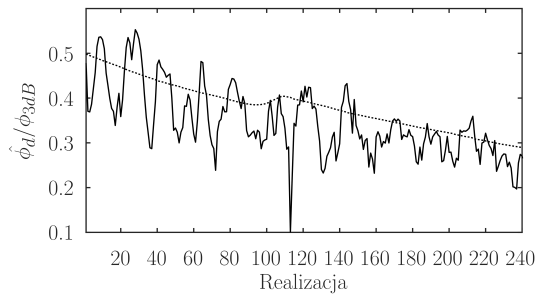
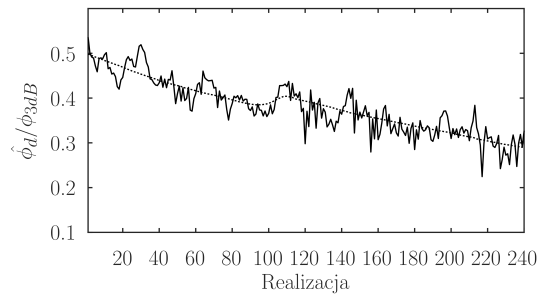
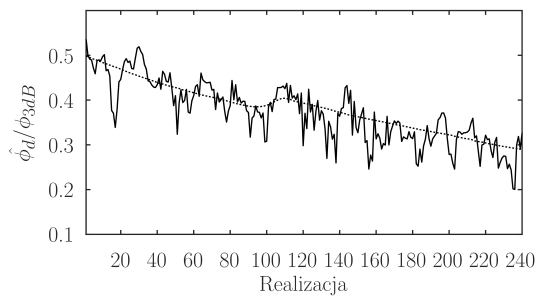
$$\hat{\mathbf{K}}_k(\hat{\phi}) = - \sum_{n=1}^N \frac{\partial V_k(\phi)}{\partial \phi} \frac{\partial V_k(\phi)}{\partial \phi^T} \Bigg|_{\phi=\hat{\phi}}. \tag{3.81}$$

Ze względu na złożoność obliczeń, wartości  $\hat{\mathbf{J}}_k(\hat{\phi})$  i  $\hat{\mathbf{K}}_k(\hat{\phi})$  były liczone w sposób numeryczny. Przedstawione podejście umożliwia zarówno zastosowanie wartości ACIR jako kryterium wyboru estymatora [zgodnie z równaniami (3.74) i (3.75)] jak i jako wagi użyte w trakcie uśredniania [podobnie jak (3.76) i (3.77)].

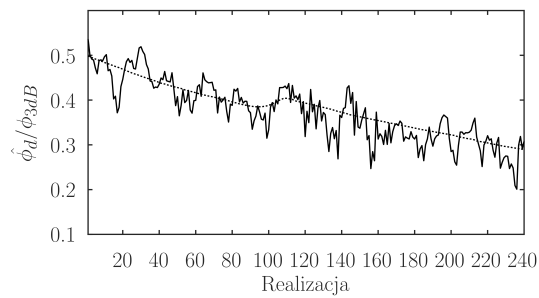
Wykorzystując powyższe równania został wykonany ostatni z testów. Zakłada on, że w przypadku oznaczonym jako  $k = 1$  estymacja wykonywana była w oparciu o uodporniony wariant estymatora największej wiarygodności zakładającym obecność 1 echa (zmodyfikowany algorytm z rozdziału 3.4, przyjęto wartość parametru  $\epsilon_d = 0.025$ ). Jako  $k = 2$  zastosowano pełną odmianę algorytmu, opisanego i przetestowanego w rozdziale 3.4. Założono wartości parametrów  $\epsilon_m = 0.25$  i  $\epsilon_d = 0.025$ . Efekty uzyskane przy tak przeprowadzonej estymacji pokazano w tabeli 3.15.

Sposób estymacji	$E\left(\frac{\phi_d - \hat{\phi}_d}{\phi_{3dB}}\right)^2$	$ E\left(\frac{\phi_d - \hat{\phi}_d}{\phi_{3dB}}\right) $	% pomiarów odstających $ \phi_d - \hat{\phi}_d  > 0.1 \phi_{3dB}$
Uodporniony MLE, $k = 1$	0.004366	0.035346	12.4481
Uodporniony MLE, $k = 2, \phi_m = -\phi_d$	0.00071726	<b>0.00071689</b>	<b>0</b>
AIC rywal.	0.0014621	0.0096214	2.4896
BIC rywal.	0.0022072	0.016087	4.9793
AICc rywal.	0.003385	0.027044	9.1286
AICR rywal.	0.0007167	0.001616	<b>0</b>
AIC współpr.	0.0011922	0.0088291	1.2448
BIC współpr.	0.0018352	0.015171	3.7344
AICc współpr.	0.0032232	0.026773	8.2988
AICR współpr.	<b>0.00071666</b>	0.001615	<b>0</b>

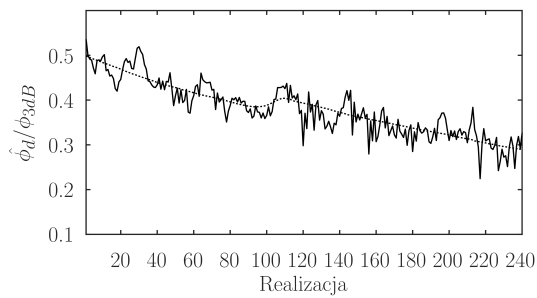
Tab. 3.15: Wartości błędów średniokwadratowych, obciążenie i odsetek błędów odstających przy estymacji opartej o dane rzeczywiste przy zastosowaniu doboru modelu na podstawie kryteriów informacyjnych (uodpornione warianty estymatorów największej wiarygodności).

(a) MLE,  $k = 1$ (b) MLE,  $k = 2, \phi_m = -\phi_d$ 

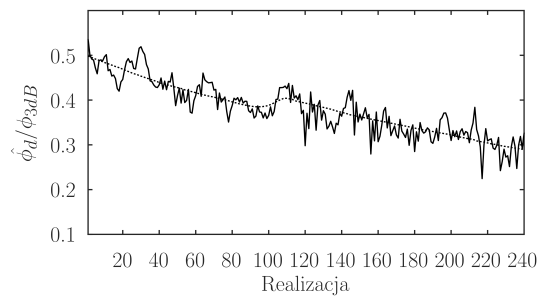
(c) AIC wariant rywalizujący



(d) AIC wariant współpracujący



(e) AICR wariant rywalizujący



(f) AICR wariant współpracujący

Rys. 3.20: Przykładowe wyniki estymacji przy użyciu uodpornionych estymatorów MLE ( $k = 1$  - rys. 3.20a i  $k = 2$  - rys. 3.20b) oraz po zastosowaniu doboru modelu na podstawie kryterium AIC (podejście rywalizujące - rys. 3.20c i współpracujące - rys. 3.20d) i AICR (podejście rywalizujące - rys. 3.20e i współpracujące - rys. 3.20f). Dane rzeczywiste.



---

Na podstawie wyników można zauważyć, że zastosowanie mechanizmów decyzyjnych w połączeniu z uodpornionym wariantem estymatora największej wiarygodności nie niesie za sobą znaczącej poprawy jakości oszacowania. Wyłącznie w przypadku kryterium ACIR udało się osiągnąć podobne efekty jak w przypadku estymatora zakładającego obecność  $k = 2$  obiektów. Efekty były bardzo zbliżone dla podejścia współpracującego jak i rywalizującego. Dla pozostałych kryteriów decyzyjnych obserwowane było znaczne pogorszenie jakości oszacowania. Uzyskane estymaty były bardziej precyzyjne niż w przypadku algorytmu przyjmującego  $k = 1$  obiekt, jednak nadal nieporównywalnie gorsze od wariantu  $k = 2$ . Przebiegi uzyskanych wartości przedstawiono na wykresach 3.20. W pierwszej kolejności widoczne są efekty działania uodpornionego wariantu estymatora największej wiarygodności (wykresy 3.20a i 3.20b) - w szczególności wariant zakładający obecność  $k = 2$  źródeł echa, który cechuje się znacznie precyzyjniejszymi oszacowaniami jak również mniejszą liczbą odstających estymat (o błędzie bezwzględny większym od 10% szerokości wiązki). Po zastosowaniu kryterium AIC (wykresy 3.20c i 3.20d) widać, że udało się uniknąć większości grubych błędów popełnionych przez estymator przyjmujący model  $k = 1$  źródła sygnału (w szczególności znacząco chybiona estymata w okolicy 110 realizacji). Przebiegi posiadają zbliżone wartości dla podejścia współpracującego i rywalizującego. Podobnie sytuacja wygląda po zastosowaniu kryterium ACIR - oba wykresy (metoda rywalizująca - 3.20e i współpracująca - 3.20f) pokrywają się niemal zupełnie. Można zauważyć duże podobieństwo między uodpornionym wariantem estymatora przyjmującym  $k = 2$  źródła sygnału, a wykresami uzyskanymi na podstawie AICR, co sugeruje, że w znaczącej większości realizacji kryterium wskazywało model z  $k = 2$  jako bardziej odpowiedni do sytuacji.

Zastosowanie mechanizmów miękko decyzyjnego doboru modelu na podstawie kryteriów informacyjnych (AIC, BIC, AICc, AICR) pozwala znacząco poprawić jakość oszacowania, jednak wyłącznie w przypadku gdy odbicie ma charakter idealnie lustrzany (brak odbicia rozproszonego) i tylko przy niedużych porcjach sygnałów (mała liczba realizacji  $N$  i długość wektora antenowego  $M$ ). Przy rzeczywistych obserwacjach mechanizm ten nie tylko nie poprawiał wyników, ale był w stanie je pogorszyć. Istnieje możliwość połączenia metody estymacji odpornej z mechanizmem doboru modelu jednak ponownie nie wnosi to znaczącej poprawy podnosząc jednocześnie złożoność obliczeniową. W większości przypadków zbliżone (bądź lepsze) efekty można uzyskać przyjmując model zakładający  $k = 2$  źródła echa.

### 3.6 Podsumowanie

Estymacja elewacji może stanowić problem ze względu na możliwość wystąpienia wielodrogowości spowodowanej odbiciem sygnału od powierzchni Ziemi. W efekcie, klasyczne radarowe metody estymacji (np. monoimpulsowa) oraz takie, wykorzystujące modele z założonym pojedynczym źródłem sygnału mogą dawać błędne oszacowania. Jednym z prostszych rozwiązań tego problemu jest przyjęcie obecności dwóch źródeł na niezależnych od siebie kątach. Założenie to jednak znacząco podnosi złożoność obliczeniową algorytmu oraz może skutkować powstawaniem znaczących błędów w sytuacji obecności pojedynczego źródła. Samo modelowanie zjawiska odbicia od ziemi jest dosyć problematyczne - trudno określić dokładny kąt, pod którym zostaje odbite promieniowanie (jest on zależny od wysokości zamocowania anteny, elewacji obiektu czy krzywizny Ziemi), jak również fazę takiego echa. Sygnały odbite i bezpośrednie często mogą być z sobą skorelowane. Sama wielodrogowość nie występuje zawsze, a natężenie zjawiska może znacząco się zmieniać nawet z segmentu na segment. Skutecznym rozwiązaniem problemu braku znajomości kąta odbioru echa niebezpośredniego było przyjęcie idealnie lustrzanego odbicia, zgodnego z zasadami optyki geometrycznej. Założenie  $\phi_m = -\phi_d$  pozwoliło w znacznym stopniu uprościć procedurę poszukiwania globalnego minimum funkcji kosztu (redukcja jednego wymiaru przeszukania), w większości warunków nie wprowadzając przy tym znaczących błędów.

Rozwiązaniem problemu błędu modelowania sygnału odbitego okazało się dodanie możliwości pojawienia się niepewności w klasycznym estymatorze największej wiarygodności. Taki uodporniony estymator pozwalał na znaczącą redukcję błędów odstających oraz zmniejszenie wartości błędów średniokwadratowych, w szczególności, w przypadku pracy na zarejestrowanych przy pomocy radaru sygnałach. Zastosowanie takiego estymatora wymaga przyjęcia wartości parametrów, które decydują o dopuszczalnych odstępstwach od nominalnego modelu danych. Założona niepewność pozwala skompensować nie tylko brak dokładniejszej wiedzy na temat charakteru odbić od ziemi, ale również niepewności kalibracji anteny, czy inne, nieuwzględnione aspekty, takie jak krzywizna Ziemi. Algorytm okazał się bardzo skuteczny przy estymacji kąta odbioru na podstawie rzeczywistych, zarejestrowanych przez radar sygnałów.

Propozycją rozwiązania problemu doboru odpowiedniego modelu do zarejestrowanego sygnału (w którym nie ma pewności co do wystąpienia odbić od ziemi) było podejście zakładające miękko-decyzyjny dobór modelu w oparciu o kryteria informacyjnej (AIC, BIC, AICc, czy AICR - dla uodpornionego wariantu estymatora największej wiarygodności). Pozytywne efekty były obserwowane wyłącznie przy spełniających określone warunki (mała ilość danych) symulowanych sygnałach. W pozostałych warunkach, stosowanie dopasowywania modelu nie dawało satysfakcjonującej poprawy, wiążąc się przy tym z wzrostem złożoności obliczeniowej. Testy przeprowadzone z oparciem o dane rzeczywiste pokazały, że wdrożenie mechanizmu doboru modelu skutkowało w większości przypadków pogorszeniem osiągnięć bazowego estymatora (zarówno w wersji klasycznej jak i uodpornionej). Z praktycznego punktu widzenia, w większości sytuacji lepszym rozwiązaniem było stosowanie estymatora zakładającego możliwość dopasowania do dwóch źródeł sygnału, oraz przyjęcie ich kątów odbioru na zasadzie przyjęcia idealnie lustrzanego odbicia od ziemi.

## Rozdział 4

# Estymacja azymutu

W rozdziale poruszono zagadnienie estymacji azymutu w radarze z obracającą się anteną. Przedstawiono wpływ zmiany kąta położenia anteny na jakość oszacowania przy zastosowaniu klasycznych metod estymacji. Zaproponowane zostało rozwiązanie umożliwiające zmniejszenie poziomu błędów w porównaniu z metodami klasycznymi. Testy oparte o dane rzeczywiste i symulowane pokazały poprawę jakości oszacowania. Rozważono również problem określania liczby obserwowanych obiektów. Zaproponowane rozwiązanie pozwala na stabilizację poziomu fałszywego alarmu, rozumianego jako wskazanie zbyt dużej liczby obiektów. Zbadano również wpływ występowania korelacji między źródłami echa dwóch obserwowanych obiektów na obciążenie i wariancję estymowanych kątów przy założeniu prowadzenia estymacji na podstawie uproszczonego modelu, w którym korelacja nie była uwzględniana. Uzyskane wyniki analityczne w dużej mierze pokryły się z rezultatami symulacji. Ostatnią poruszoną kwestią jest modyfikacja estymatora nieparametrycznego w taki sposób, aby możliwe było jego działanie przy niestacjonarnym sygnale wynikającym z obracającej się anteny.

### 4.1 Przedstawienie problemu

Kąt azymutu stanowi (obok odległości i kąta elewacji) trzecią podstawową współrzędną sferyczną definiującą położenie obserwowanego przez radar obiektu. Jest to kąt między północą geograficzną, a źródłem echa, co pokazano na rysunku 1.3. Przy określaniu kąta azymutu, wartość uzyskaną względem anteny należy skorygować o jej położenie względem północy, na które z kolei może składać się zarówno kąt obrotu, jak i ewentualna orientacja podwozia radaru (w przypadku stacji mobilnych), co przy stałej prędkości obrotowej wiąże się z koniecznością ciągłej kompensacji estymowanej wartości oszacowanego azymutu. Estymacja współrzędnych prowadzona jest względem osi anteny, z tego powodu w trakcie jej obrotu, pozostający nieruchomo cel w każdym z sondowań posiada nieznacznie zmieniony kąt odbioru echa. Prowadząc estymację w sytuacji wolno obracającej się anteny, bądź segmentów o krótkim czasie trwania można dokonać przybliżenia, że kąt, na którym znajduje się cel jest stały (względem płaszczyzny anteny). Dokładniejsze określenie położenia stanowi jeden z istotnych problemów estymacji azymutu,

gdyż zmienny w czasie kąt odbioru pociąga niestacjonarność macierzy kowariancji, co uniemożliwia użycie wielu istniejących algorytmów. Problem ten jest szczególnie istotny w sytuacji pracy z szeroką wiązką odbiorczą, powoli obracającą się anteną, bądź dużą liczbą sondowań w segmencie. Sytuacja taka ma miejsce np. w przypadku pracy w trybie wykrywanie śmigłowców w zawisie, gdzie potrzeba odpowiednio dużej liczby sondowań aby móc zaobserwować rozproszone widmo piasty, bądź specyficzne błyski łopaty wirnika [28]. W takim wypadku obiekt może być oświetlany przez nawet kilkaset sondowań, a jego azymut względem osi anteny w tym czasie może zmienić się o kilkanaście stopni.

Mimo trudności z estymacją azymutu, obrotowa antena (w szczególności w połączeniu z elektronicznie odchylaną wiązką) niesie za sobą wiele korzyści. Przede wszystkim pozwala na dookólną obserwację przestrzeni, kosztem czasu odświeżania informacji. W przypadku anten obrotowych istnieje możliwość estymacji kąta azymutu już przy 1 elemencie odbiorczym w oparciu o poszukiwanie maksimum mocy sygnału w trakcie obrotu, wykorzystując przy tym kierunkową charakterystykę odbiornika. Radary tego typu nie są obecnie popularne ze względu na niską precyzję określania współrzędnych. W praktyce częściej spotyka się obracające się anteny zbudowane w sposób umożliwiający formowanie wiązek.

## 4.2 Modelowanie sygnałów w przypadku obracanej anteny

Model sygnału wykorzystywany w trakcie estymacji azymutu ma niemalże taką samą postać jak ten używany w procesie estymacji elewacji:

$$\mathbf{y}_n = \sum_{k=1}^K s_{k,n} \mathbf{a}(\Delta\theta_{k,n}) + \mathbf{v}_n, \quad (4.1)$$

gdzie  $\mathbf{y}_n$  jest wektorem sygnałów z pojedynczej obserwacji,  $k$  oznacza numer obserwowanego obiektu,  $s_{k,n}$  stanowi zespoloną amplitudę  $k$ -tego obiektu w  $n$ -tym sondowaniu, a  $\mathbf{v}_n$  oznacza wektor szumu. W odróżnieniu od modelu opisanego równaniem (2.6), we wzorze (4.1) pojawia się symbol  $\Delta\theta_{k,n}$  oznaczający różnicę między azymutem echa, a kątem chwilowym położeniem anteny:

$$\Delta\theta_{k,n} = \theta_k - \theta_{a,n}, \quad (4.2)$$

gdzie  $\theta_k$  jest stałym położeniem azymutalnym  $k$ -tego obiektu, a  $\theta_{a,n}$  położeniem anteny w trakcie  $n$ -tego sondowania. W powyższym modelu istnieje założenie co do braku korelacji między wektorami amplitud różnych obiektów. Zasadność tego założenia zostanie przedstawiona w sekcji 4.6.

## 4.3 Estymacja azymutu dla przypadku jednego obiektu

Podstawowym problemem estymacji w sytuacji obracającej się anteny jest stała zmiana położenia obiektu względem czoła anteny w trakcie prowadzenia obserwacji. Macierz korelacji  $\mathbf{R}_n = E[\mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^H]$  jest zmienna w czasie, co wyklucza metody takie jak MVDR, ESPRIT, MUSIC, czy klasyczne postaci estymatorów największej wiarygodności. W niektórych przypadkach można założyć, że w obrębie pojedynczego skanu położenie to jest stałe. Dla radaru dozorującego z anteną wykonującą 12 obrotów/min.

i zasięgu obserwacji wynoszącym 200 km, zmiana azymutu anteny w trakcie pojedynczego sondowania synowi  $0.02^\circ$ , co jest małą wartością względem typowych wymagań na dokładność stawianych względem tej klasy radarów. Dla całego segmentu wartość ta skaluje się liniowo względem liczby obserwacji.

Uproszczeniem pozwalającym pracować z większością przedstawionych w rozdziale 2 algorytmów jest założenie, że dane z całego segmentu zostały zarejestrowane przy pomocy nieruchomej anteny, której położenie jest równe temu ze środka segmentu. Założenie takie w większości przypadków jest zbyt mocnym przybliżeniem i sprawdzi się wyłącznie przy segmentach złożonych z niewielkiej liczby sondowań, takich o krótkim czasie trwania, bądź z powoli obracającą się anteną. W takim wypadku równania wykorzystane w trakcie estymacji mają postać (przyjęto stochastyczny estymator największej wiarygodności):

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} -\mathcal{L}(\theta, \mathbf{Y}), \quad (4.3)$$

gdzie funkcja wiarygodności przyjmuje postać:

$$\mathcal{L}(\theta, \mathbf{Y}) = - \left( N \log(|\hat{\mathbf{R}}(\theta)|) + N \operatorname{tr}(\mathbf{R}\hat{\mathbf{R}}^{-1}(\theta)) \right), \quad (4.4)$$

oraz:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}(\theta) &= \hat{\sigma}_v^2 \mathbf{I} + \hat{\sigma}_s^2 \mathbf{a}(\theta - \theta_{a, \frac{1}{2}}) \mathbf{a}^H(\theta - \theta_{a, \frac{1}{2}}), \\ \hat{\sigma}_s^2 &= \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{P}\mathbf{R}) - N\hat{\sigma}_v^2}{N\mathbf{a}^H(\theta - \theta_{a, \frac{1}{2}})\mathbf{a}(\theta - \theta_{a, \frac{1}{2}})}, \\ \hat{\sigma}_v^2 &= \operatorname{tr}(\mathbf{Q}\mathbf{R}), \\ \mathbf{P} &= \frac{\mathbf{a}(\theta - \theta_{a, \frac{1}{2}})\mathbf{a}^H(\theta - \theta_{a, \frac{1}{2}})}{\mathbf{a}^H(\theta - \theta_{a, \frac{1}{2}})\mathbf{a}(\theta - \theta_{a, \frac{1}{2}})}, \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{I} - \mathbf{P}, \\ \mathbf{R} &= \frac{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H}{N}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

gdzie  $\theta_{a, \frac{1}{2}}$  oznacza kąt położenia anteny w połowie trwania segmentu,  $\mathbf{P}$  - macierz rzutowana na podprzestrzeń sygnału, a  $\mathbf{Q}$  - na podprzestrzeń szumu, a  $\mathcal{L}(\theta, \mathbf{Y})$  stanowi logarytmiczną funkcję wiarygodności. Powyższy algorytm umożliwia również estymację wariancji szumu oraz sygnału, co może być w pewnych sytuacjach zaletą.

Według aktualnego stanu wiedzy nie została wyprowadzona dokładna postać estymatora największej wiarygodności uwzględniająca ruch obrotowy anteny. Poprzez analogię do powyższych równań (4.5) można jednak przedstawić przybliżony wariant estymatora największej wiarygodności, co prowadzi do

postaci:

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} -\mathcal{L}(\theta, \mathbf{Y}), \\ \mathcal{L}(\theta, \mathbf{Y}) &= -\sum_{n=1}^N \left[ \log(|\hat{\mathbf{R}}(\theta, \theta_{a,n})|) + \mathbf{y}_n^H \hat{\mathbf{R}}^{-1}(\theta, \theta_{a,n}) \mathbf{y}_n \right], \\ \hat{\mathbf{R}}(\theta, \theta_{a,n}) &= \hat{\sigma}_v^2 \mathbf{I} + \hat{\sigma}_s^2 \mathbf{a}(\theta - \theta_{a,n}) \mathbf{a}^H(\theta - \theta_{a,n}), \\ \hat{\sigma}_v^2 &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{y}_n^H \mathbf{Q}(\theta, \theta_{a,n}) \mathbf{y}_n, \\ \hat{\sigma}_s^2 &= \frac{\sum_{n=1}^N \mathbf{y}_n^H \mathbf{P}(\theta, \theta_{a,n}) \mathbf{y}_n - N \hat{\sigma}_v^2}{\sum_{n=1}^N \mathbf{a}^H(\theta, \theta_{a,n}) \mathbf{a}(\theta, \theta_{a,n})}, \\ \mathbf{P}(\theta, \theta_{a,n}) &= \frac{\mathbf{a}(\theta - \theta_{a,n}) \mathbf{a}^H(\theta - \theta_{a,n})}{\mathbf{a}^H(\theta - \theta_{a,n}) \mathbf{a}(\theta - \theta_{a,n})}, \\ \mathbf{Q}(\theta, \theta_{a,n}) &= \mathbf{I} - \mathbf{P}(\theta, \theta_{a,n}),\end{aligned}\tag{4.6}$$

przy czym, przyjmując w równaniu (4.6)  $\theta_{a,n} = \theta_{a, \frac{1}{n}}$  uzyska się postać (4.5) [78]. W powyższym równaniu oszacowanie wariacji szumu jak i sygnału odbywa się za pomocą macierzy rzutowania ( $\mathbf{P}$  na podprzestrzeń sygnału i  $\mathbf{Q}$  na podprzestrzeń szumu). W przypadku wariacji szumu szacowana jest moc szumu ( $\hat{\sigma}_{v,n}^2 = \mathbf{y}_n^H \mathbf{Q}(\theta, \theta_{a,n}) \mathbf{y}_n$ ) dla każdego z sondowań a następnie są one uśredniane. Podobnie szacowana jest wariancja amplitudy sygnału echa, jednak tam od odejmowana jest oszacowana wcześniej wariancja szumu.

Estymator (4.6) można rozszerzyć na większą liczbę źródeł we względnie prosty sposób, tj. wprowadzając dodatkowe macierze rzutowania na podprzestrzeń sygnału odpowiadające poszczególnym echom i modyfikując wyrażenie na macierz rzutowania na podprzestrzeń szumu. Takie postępowanie ma jednak dwie wady. Po pierwsze, liczba estymowanych źródeł sygnału nie może przekroczyć liczby wiązek (wymiaru wektora obserwacji), ponieważ w tym momencie macierz rzutowania na podprzestrzeń szumu  $\mathbf{Q}_n$  staje się macierzą zerową. Po drugie, podprzestrzeń sygnałów poszczególnych źródeł nie są, w ogólności, ortogonalne, co będzie skutkowało przekłamaniami w oszacowaniach wariacji poszczególnych źródeł.

Problemom tym można zaradzić stosując dokładną wersję stochastycznego estymatora największej wiarygodności, którą z konieczności należałoby zaimplementować za pomocą numerycznego poszukiwania ekstremum funkcji wielu zmiennych. Poważną wadą tego postępowania jest jednak bardzo duża złożoność obliczeniowa. W związku z tym, w rozdziale zostanie zaproponowany alternatywny, przybliżony stochastyczny estymator największej wiarygodności, który jest pozbawiony obu wymienionych wyżej ograniczeń, charakteryzuje się umiarkowaną złożonością obliczeniową i wysoką dokładnością.

## Test 1

Przedstawiony powyżej estymatory zostały poddane testom. Pierwszy z nich opierał się o syntetycznie wygenerowane sygnały, w których występowało pojedyncze źródło echa. Obiekt ten posiadał  $SNR = 20$  dB (w odniesieniu do pojedynczego elementu odbiorczego), antena składała się z  $M = 32$  elementów odbiorczych ułożonych w szyku liniowym, rozmieszczonych co  $d = \lambda/2$ . Liczba sondowań ( $N$ ) wskazana

---

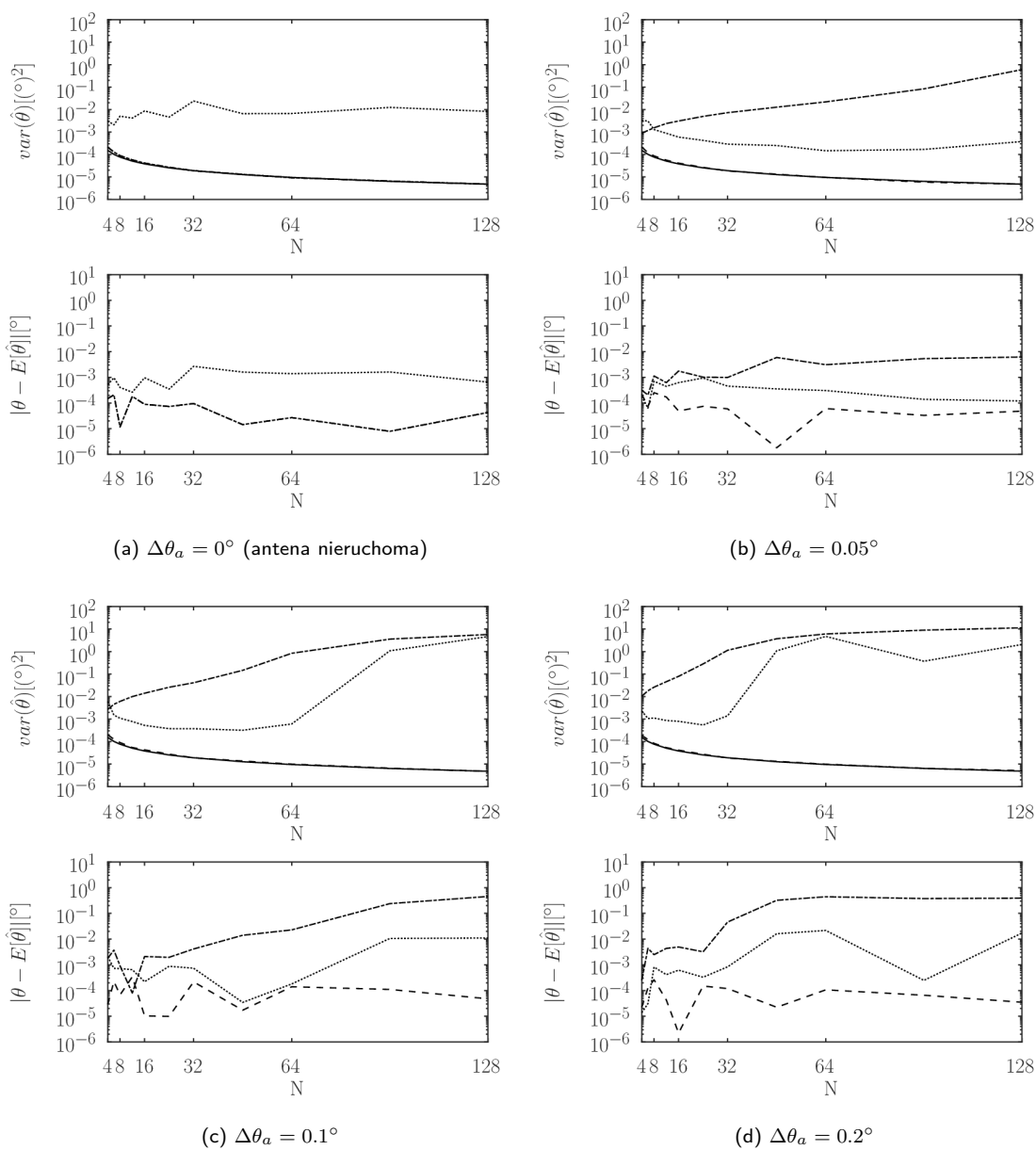
jest na osi poziomej wyników wykresów. W testach przyjęto dodatkowy parametr symulacji -  $\Delta\theta_a$  określający wartość kątową, o którą zmienia się położenia anteny między kolejnymi skanami przestrzeni. Cel generowany był na kącie  $\theta_0$  losowanym z rozkładem równomiernym z zakresu  $\theta_{a,\frac{1}{2}} \pm 1^\circ$  [ $\theta_0 \sim \theta_{a,\frac{1}{2}} + \mathcal{U}(-1, 1)$ ]. Przedstawiono zachowanie estymatora dla 4 różnych wartości  $\Delta\theta_a$ :

- $\Delta\theta_a = 0^\circ$  (antena nieruchoma) - wykres 4.1a
- $\Delta\theta_a = 0.05^\circ$  - wykres 4.1b
- $\Delta\theta_a = 0.1^\circ$  - wykres 4.1c
- $\Delta\theta_a = 0.2^\circ$  - wykres 4.1d

W wykresach 4.1 estymację wykonano przy pomocy 3 estymatorów: monoimpulsowy (linia kropkowana), stochastyczny największej wiarygodności z uproszczeniem braku obrotu anteny [wzór (4.5) - linia kropka-kreska], oraz stochastyczny największej wiarygodności z zmiennym w trakcie segmentu położeniem anteny [wzór (4.6) - linia przerywana]. Średnia wartość ograniczenia Craméra-Rao oznaczone zostało linią ciągłą. Estymator monoimpulsowy wykonywał estymację z  $N$  niezależnych sondowań, z czego każde z nich posiadało inny kąt obrotu anteny. Uzyskane kąty azymutu zostały następnie uśrednione w obrębie całego segmentu (bez użycia dodatkowych wag). Wartości, dla których nie był spełniony warunek  $|\Sigma_n| > |\Delta_n|$  były wykluczane z uśredniania. Jeżeli jednak warunek nie był spełniony dla żadnego z sondowań - estymata liczona była na podstawie wszystkich dostępnych danych. Pierwszy z wykresów (4.1a) stanowi punkt odniesienia - antena była w tym teście nieruchoma. Linie odpowiadające dwóm wariantom estymatorów największej wiarygodności pokrywają się z sobą i nie są widoczne (niewidoczna jest również obecna tam linia ciągła odpowiadająca średnim wartościom ograniczenia Craméra-Rao - jego wartość została obliczona na podstawie uśrednienia wartości ograniczeń dla kątów z zakresu od  $-1^\circ$  do  $1^\circ$ ). Wartość wariancji zgodnie z oczekiwaniami maleje wraz ze wzrostem liczby obserwacji i w obu przypadkach jest blisko ograniczenia. Estymator monoimpulsowy cechuje się około trzy rzędy wielkości większą wartością wariancji, która ma dodatkowo charakter niemalejący w funkcji liczby sondowań ( $N$ ). Pojawienie się nawet nieznacznie obrotu anteny ( $\Delta\theta_a = 0.05^\circ$ , rys. 4.1a) skutkuje gwałtowną degradacją osiągniętych estymatorów największej wiarygodności zakładającego brak ruchu anteny. Dla estymatora monoimpulsowego obserwowana jest nieznaczna poprawa jakości oszacowania względem sytuacji z nieruchomą anteną. Wynika ona z faktu, że zmniejszyło się prawdopodobieństwo, że żaden z pomiarów nie spełni kryterium  $|\Sigma_n| > |\Delta_n|$ . Obracana antena pozwala na pokrycie szerszego zakresu kątów przy pomocy listka głównego wiązki sumacyjnej. W odróżnieniu od sytuacji z nieruchomą anteną - wzrost liczby sondowań powoduje degradację jakości oszacowania. Rosną zarazem wartości wariancji jak i obciążenia. Dla  $N \leq 32$  w metodzie monoimpulsowej widoczne jest podniesienie się wartości wariancji, co ma związek z pojawieniem się (w skrajnych położeniach anteny) echa ulokowanego poza zakresem prawidłowej aproksymacji charakterystyki pelengacyjnej, co przekłada się na redukcję liczby dostępnych obserwacji. Można zauważyć, że podatność ta występuje wcześniej (dla mniejszej liczby sondowań) przy większej kątowej rozpiętości pojedynczego sondowania.

Estymator największej wiarygodności uwzględniający chwilowe położenie anteny w trakcie estymacji zachowuje się w jednakowy sposób, niezależnie od parametru  $\Delta\theta_a$  i cechuje się on zbieżnością z średnim ograniczeniem Craméra-Rao. Powyższy test pokazuje, że w przypadku obrotowej anteny zalecane jest użycie dostosowanego do tego celu algorytmu. Stosowanie metod uodpornionych, zakładających stałą pozycję anteny, nawet przy segmentach złożonych z małej liczby sondowań wiąże się z pogorszeniem jakości oszacowania.





Rys. 4.1: Wariancja i obciążenie badanych estymatorów azymutu przy różnej prędkości obrotowej anteny. Linia ciągła - średnie ograniczenie Craméra-Rao, linia przerywana - stochastyczny MLE zakładający obrót anteny [równ. (4.6)], linia kropka-kreska - stochastyczny MLE zakładający brak obrotu anteny [równ. (4.5)], linia kropkowana - estymator monoimpulsowy.

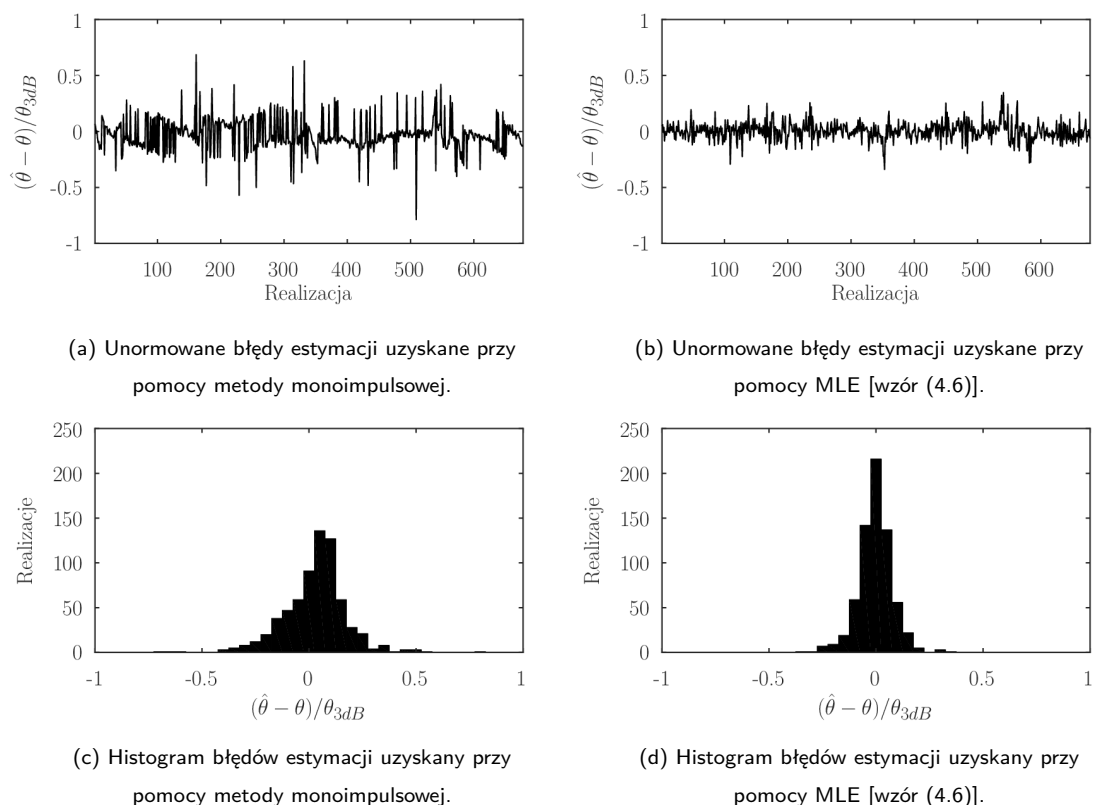
## Test 2

Drugi test wykonany został w oparciu o sygnały zarejestrowane przez stację radiolokacyjną, które miały postać uformowanych wiązek sumacyjnej i różnicowej. Część parametrów pracy radaru nie może zostać ujawniona (w tym szerokość  $\theta_{3dB}$  wiązki w płaszczyźnie azymutu), z tego powodu uzyskane wartości kątowe zostały podzielone przez 3 dB szerokość wiązki. Radar pracował w paśmie C (4 ~ 8 GHz), z dużą liczbą sondowań w segmencie ( $N = 1024$ ), co wynikało z specyficznego trybu pracy dostosowanego do obserwacji śmigłowców w zawisie. Przedział kątowy jaki omiatała antena w trakcie pojedynczego segmentu wynosiła nieco ponad 2 szerokości wiązki. Obserwowano śmigłowiec zmieniający położenie azymutalne, a jednocześnie rejestrowano jego współrzędne przy pomocy odbiornika GPS, co pozwoliło na określenie prawdziwej wartości azymutu. Łącznie zarejestrowano niecałe 700 segmentów.

Estymację wykonano na podstawie dostępnych sygnałów w oparciu o 2 algorytmy: klasyczny monoimpuls oraz zaproponowane rozwiązanie estymatora największej wiarygodności z założeniem obrotowej anteny [wzór (4.6)]. Nie był badany estymator zakładający brak ruchu anteny ze względu na szeroki zakres kątów omiatanych anteną w trakcie pojedynczego segmentu. W takich warunkach założenie braku ruchu anteny jest tak mocno przekłamane, że badanie takiego estymatora staje się bezcelowe. W metodzie monoimpulsowej przyjęto, że estymacja prowadzona jest wyłącznie na podstawie sondowań, w których spełniony jest warunek przewyższenia modułu sygnału sumacyjnego nad różnicowym ( $|\Sigma_n| > |\Delta_n|$ ). Niespełnienie tego kryterium skutkowało odrzuceniem sondowania. Celem tego zabiegu było wykluczenie sygnałów, które potencjalnie pochodzą spoza listka głównego (może dojść jednak do sytuacji, w której sygnał z listka bocznego również spełni to kryterium, np. przy niskim  $SNR$ ), co mogłoby skutkować pojawieniem się znacznych błędów. Charakterystyka pelengacyjna przybliżona została przy pomocy wielomianu 7 stopnia, w związku z czym poza zakresem interpolacji odzwierciedlenie faktycznej charakterystyki jest znacznie przekłamane. Estymator największej wiarygodności wykorzystany został w postaci przedstawionej w równaniach (4.6), przy czym wektor odpowiedzi antenowej zastąpiony został nominalną jej odpowiedzią w postaci uformowanych już wiązek. Wyniki symulacji przedstawiono w tabeli 4.1 oraz na wykresach 4.2.

Na pierwszych dwóch wykresach (4.2a i 4.2b) przedstawiono oszacowania uzyskane odpowiednio estymatorem monoimpulsowym oraz stochastycznym największej wiarygodności. W obu przypadkach przedstawiona jest różnica między wartością prawdziwą a estymowaną, która dodatkowo została unormowana względem szerokości wiązki sumacyjnej ( $\theta_{3dB}$ ). Wyraźnie widoczne jest, że estymator monoimpulsowy daje znacznie bardziej zaburzone wartości estymat - pojawiają się liczne oszacowania odstające. W przypadku estymatora największej wiarygodności przebieg posiada widocznie niższą wariancję (w porównaniu do metody monoimpulsowej), oraz cechuje się lepszą stabilnością. Histogramy uzyskanych wartości przedstawiono na rysunkach 4.2c (metoda monoimpulsowa) i 4.2d (estymator największej wiarygodności). Ponownie wyraźnie widać znacznie niższą wariancję oraz odsetek estymat odstających w przypadku metody (4.6).

Wyniki przedstawione w tabeli 4.1 pokazują, że estymator MLE pozwolił uzyskać obciążenie o wartości około rząd mniejszej w porównaniu z estymatorem monoimpulsowym. Błąd średniokwadratowy



Rys. 4.2: Wyniki estymacji azymutu dla danych rzeczywistych.

Sposób estymacji	$E\left(\frac{\theta-\hat{\theta}}{\theta_{3dB}}\right)^2$	$ E\left(\frac{\theta-\hat{\theta}}{\theta_{3dB}}\right) $
Estymator monoimpulsowy	0.021414	0.02857
Stochastyczny MLE	<b>0.0062791</b>	<b>0.0025301</b>

Tab. 4.1: Wartości obciążenia i błędu średniokwadratowego dla 2 sposobów estymacji azymutu przy obracającej się antenie. Dane rzeczywiste.

również uległ obniżeniu, jednak tu obserwowana jest poprawa o około pół rzędu wielkości.

Jak pokazały przeprowadzone testy, już nieznaczny obrót anteny w trakcie trwania segmentu jest w stanie w znacznym stopniu zdegradować jakość uzyskanego oszacowania. Klasyczne podejście zakłada wykorzystanie estymatora największej wiarygodności z uproszczeniem nieruchomej anteny, której kąt obrotu jest równy temu z połowy trwania segmentu. Efektem jest znaczący wzrost błędów estymacji (względem przypadku z nieruchomą anteną). Podczas estymacji przy pomocy metody monoimpulsowej znaczny problem stanowią obserwacje sygnału echa pochodzące z listków bocznych, w których energia sygnału w wiązce sumacyjnej jest wyższą niż w wiązce różnicowej. W efekcie, pomiary takie nie są odrzucane, a uzyskane na ich podstawie estymaty kątów mogą być obciążone znacznymi błędami, co przekłada się na nieprawidłowe oszacowanie końcowego azymutu obiektu. Estymator monoimpulsowy pozwala na uzyskanie względnie niskiej wartości oszacowania wariancji estymat pod warunkiem, że w każdym z sondowań obiekt znajduje się w obrębie listka głównego. Wraz ze wzrostem liczby obser-

wacji w listkach bocznych znacząco spada jakość oszacowania. Zaproponowanym rozwiązaniem tego problemu jest estymator opisany równaniami (4.6), który jest odmianą estymatora największej wiarygodności, uwzględniającym chwilowe położenie anteny. Pozwala on na uzyskanie zbieżności z średnim ograniczeniem Craméra-Rao, choć wymaga większego nakładu wykonanych obliczeń.

#### 4.4 Estymacja azymutu dla przypadku wielu obiektów - estymator iteracyjny

Przedstawiony w sekcji 4.3 estymator [wzory (4.6)] stanowi rozwiązanie problemu estymacji azymutu przy założeniu pojedynczego obiektu. Główną wadą proponowanego rozwiązania jest wysoka złożoność obliczeniowa. O ile w przypadku założenia pojedynczego źródła sygnału ( $K = 1$ ) nie stanowi to większego problemu, tak przy większej liczbie obserwowanych obiektów złożoność obliczeniowa rośnie wykładniczo wraz z  $K$ . Wynika to z konieczności wykonywania poszukiwania ekstremum funkcji wiarygodności w oparciu o algorytmy bezgradientowe, co wiąże się z wielokrotnym wykonywaniem obliczeń dla różnych argumentów. Dodawanie kolejnych obiektów do modelu wymaga rekurencyjnego wywoływania algorytmu optymalizacyjnego, przy czym każdy z celów stanowi pojedyncze "zagłębienie" rekurencji.

Rozwiązaniem problemu wysokiej złożoności mogą być metody przybliżone. Nie gwarantują one pełnej zgodności z bazowym wariantem estymatora, jednak w praktyce mogą okazać się dostatecznie dobre przy zauważalnie niższej złożoności obliczeniowej. Algorytmem tego typu jest przedstawiona w [79] metoda ASML (ang. approximate stochastic maximum likelihood). Stanowi on rozwiązanie iteracyjne. Liczbę iteracji można ustalić na podstawie potrzeb/możliwości i stanowi ona kompromis między niską złożonością obliczeniową (niedużą liczbą realizacji), a zbieżnością z wartościami możliwymi do uzyskania przez klasyczny estymator (duża liczba iteracji). Algorytm opiera swoją zasadę działania na założeniu, że energia odebrana przez elementy odbiorcze anteny jest sumą energii pochodzących od odbitych od obiektów ech oraz energii sygnału szumu:

$$E \left[ \sum_{n=1}^N \varpi(\Delta\theta_{k,n}) \mathbf{y}_n^H \mathbf{P}_{k,n}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{y}_n \right] = \sigma_v^2 \sum_{n=1}^N \varpi(\Delta\theta_{k,n}) + \sum_{j=1}^K \sigma_{s,j}^2 \sum_{n=1}^N \varpi(\Delta\theta_{k,n}) \mathbf{a}_n^H(\Delta\theta_{k,n}) \mathbf{P}_{k,n}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{a}_n(\Delta\theta_{j,n}), \quad (4.7)$$

gdzie  $\varpi(\Delta\theta_{k,n})$  stanowi pewną funkcję wagową, której celem jest wytłumienie sygnału na skrajach obserwowanego obszaru, co efektywnie obniża ich udział w ostatecznym oszacowaniu kryterium jakości i w konsekwencji pozwala na traktowanie ich jako "mniej wiarygodne". Zabieg ten ma pozytywny wpływ na stabilność działania algorytmu. Wartości  $\varpi(\Delta\theta_{k,n})$  powinny dążyć do zera wraz ze wzrostem odległości kątowej między aktualnym a środkowym położeniem anteny ( $|\Delta\theta|$ ). Estymacja kąta odbioru odbywa się poprzez lokalizację maksimum logarytmicznej funkcji wiarygodności  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y})$ :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} -\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}), \quad (4.8)$$

gdzie  $\boldsymbol{\theta}_\theta = [\theta_1 \theta_2 \dots \theta_K]$  oznacza wektor parametrów złożony z kątów obioru kolejnych z  $K$  źródeł sygnału. Istotą estymatora jest iteracyjne poszukiwanie wartości wariancji szumu ( $\hat{\sigma}_v^2$ ) i wariancji sygnałów echa ( $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \dots, \hat{\sigma}_K^2$ ), co można opisać za pomocą kolejnych kroków:

1. Ustalenie początkowej wartości oszacowania wariancji szumu  $\hat{\sigma}_v^2$  (w pierwszej iteracji przyjmuje się  $\hat{\sigma}_v^2 = 0$ ), lub znaną wartość mocy szumów termicznych odbiornika;
2. Rozwiązanie równania:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_\theta) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s(\boldsymbol{\theta}_\theta) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_\theta, \hat{\sigma}_v^2(\boldsymbol{\theta}_\theta)), \quad (4.9)$$

gdzie  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_\theta)$  stanowi macierz o elementach:

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_\theta)]_{i,j} &= \sum_{n=1}^N \varpi(\Delta\theta_{i,n}) \mathbf{a}^H(\Delta\theta_{j,n}) \mathbf{P}_{i,n}(\boldsymbol{\theta}_\theta) \mathbf{a}(\Delta\theta_{j,n}) = \\ &= \begin{cases} \sum_{n=1}^N \varpi(\Delta\theta_{i,n}) \mathbf{a}^H(\Delta\theta_{j,n}) \mathbf{a}(\Delta\theta_{j,n}) & \text{dla } i = j, \\ \sum_{n=1}^N \varpi(\Delta\theta_{i,n}) \frac{|\mathbf{a}^H(\Delta\theta_{j,n}) \mathbf{a}(\Delta\theta_{j,n})|}{\mathbf{a}^H(\Delta\theta_{j,n}) \mathbf{a}^H(\Delta\theta_{j,n})} & \text{dla } i \neq j, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.10)$$

a  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_\theta, \hat{\sigma}_v^2(\boldsymbol{\theta}_\theta))$  jest wektorem o elementach:

$$[\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_\theta, \hat{\sigma}_v^2(\boldsymbol{\theta}_\theta))]_i = \sum_{n=0}^N \varpi(\Delta\theta_{i,n}) [\mathbf{y}_n^H \mathbf{P}_{i,n}(\boldsymbol{\theta}_\theta) \mathbf{y}_n - \hat{\sigma}_v^2], \quad (4.11)$$

przy czym  $i, j = 1, 2, \dots, K$  oznaczają kolejne wiersze/kolumny macierzy. Jeżeli któraś z wartości wektora  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_s(\boldsymbol{\theta}_\theta)$  będzie ujemna - należy nadpisać ją zerem.

3. Aktualizacja oszacowania wariancji szumu:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_v^2(\boldsymbol{\theta}_\theta) &\leftarrow \hat{\sigma}_v^2(\boldsymbol{\theta}_\theta) + \alpha \sum_{n=1}^N \left[ \mathbf{y}_n^H \mathbf{R}_n^{-2}(\boldsymbol{\theta}_\theta, \hat{\boldsymbol{\theta}}_\sigma(\boldsymbol{\theta}_\theta)) \mathbf{y}_n - \text{tr} \mathbf{R}_n^{-1}(\boldsymbol{\theta}_\theta, \hat{\boldsymbol{\theta}}_\sigma(\boldsymbol{\theta}_\theta)) \right], \\ \alpha &= \frac{\hat{\sigma}_v^4(\boldsymbol{\theta}_\theta)}{MN}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

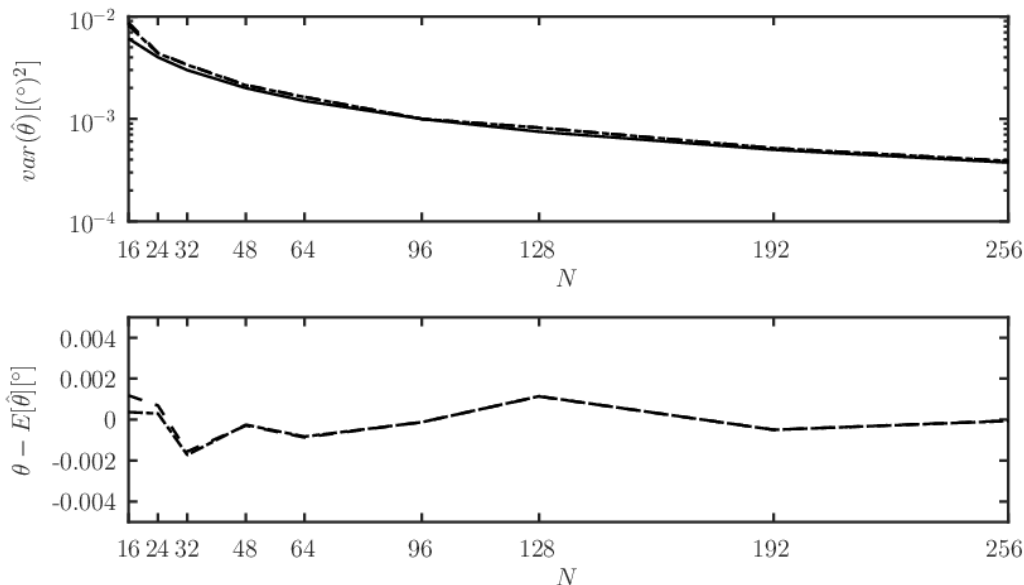
4. Kroki 2, 3, 4 należy powtarzać do momentu uzyskania maksymalnej założonej liczby iteracji lub ustabilizowania się wartości  $\hat{\sigma}_v^2(\boldsymbol{\theta}_\theta)$ . Macierz  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_\theta)$  nie jest zależna od wariancji ech, z tego powodu nie ulega zmianom w trakcie wykonywania algorytmu - może ona zostać obliczona jednokrotnie, przed etapem iteracji.
5. Ostatnim krokiem jest obliczenie logarytmicznej funkcji wiarygodności:

$$\bar{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}_\theta, \mathbf{Y}) = - \left[ \sum_{n=1}^N \log(|\mathbf{R}_n(\boldsymbol{\theta}_\theta, \hat{\boldsymbol{\theta}}_\sigma(\boldsymbol{\theta}_\theta))|) + \mathbf{y}_n^H \mathbf{R}_n^{-1}(\boldsymbol{\theta}_\theta, \hat{\boldsymbol{\theta}}_\sigma(\boldsymbol{\theta}_\theta)) \mathbf{y}_n \right]. \quad (4.13)$$

## Test 1

Pierwszy z testów ma na celu porównanie algorytmu iteracyjnego [równania (4.8) do (4.7)] z wcześniej opisywanym podejściem, zakładającym obracającą się antenę [wzór (4.6)]. Wykonany test opierał się o zbadanie zależności wariancji oraz obciążenia dla różnych wartości liczby sondowań w segmencie ( $N$ ). W

symulowanych sygnałach obecny był pojedynczy obiekt o  $SNR = 30$  dB. W trakcie segmentu antena wykonywała obrót o 10 szerokości wiązki ( $\theta_{3dB}$ ). Sama antena złożona była z  $M = 64$  elementów w szyku liniowym ( $d = \lambda/2$ ), przy czym dane dostępne były w postaci  $B = 2$  wiązek: sumacyjnej i różnicowej w płaszczyźnie azymutu. Do uformowania wiązek wykorzystano okno prostokątne, a jako funkcję wagową przyjęto kwadrat modułu odpowiedzi anteny:  $\varpi(\Delta\theta_{i,n}) = \|\mathbf{a}_n(\Delta\theta_{i,n})\|^2$ , a w celu oszacowania wartości wariancji wykonywane było 10 iteracji algorytmu [równania (4.9) do (4.12)]. Wynik testu przedstawiono na wykresie 4.3. Linia kropka-kreska oznaczono wartości uzyskane przez estymator iteracyjny, przerywaną - odmianę estymatora największej wiarygodności dostosowaną do estymacji azymutu przy obracającej się antenie. Linia ciągłą na wykresie wariancji oznaczono średnie ograniczenie Craméra-Rao. Widać, że w przedstawionych warunkach oba algorytmy zachowują się bardzo podobnie, zbiegając się z średnim ograniczeniem Craméra-Rao dla odpowiednio dużej liczby obserwacji. Obciążenie obu estymatorów jest na niskim poziomie - można przyjąć, że oba są nieobciążone, a uzyskany rezultat wynika z skończonej liczby przeprowadzonych prób Monte-Carlo (wykonano 2000 realizacji).

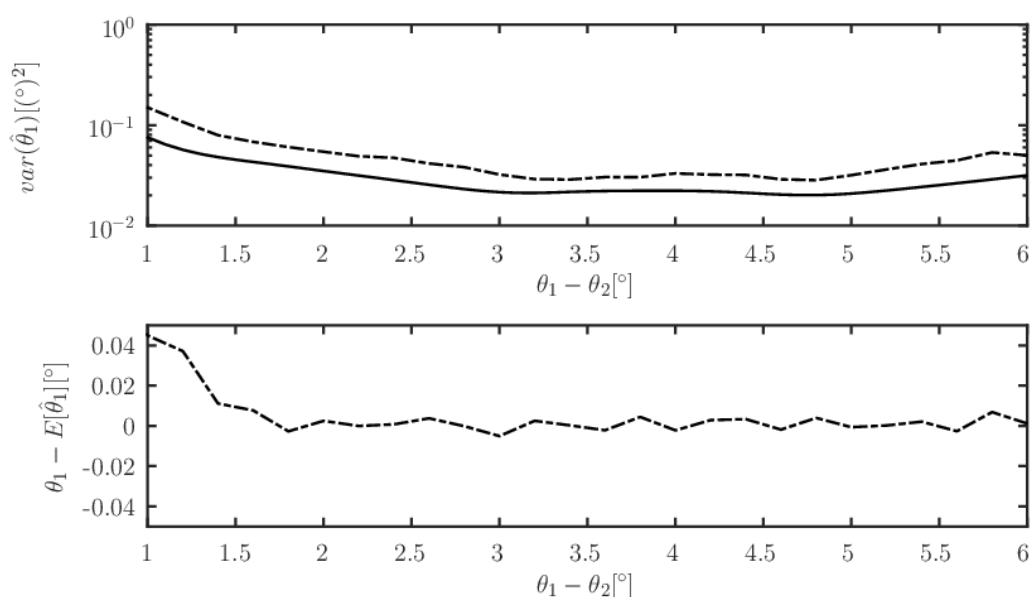


Rys. 4.3: Zależność wariancji oraz obciążenia estymowanego azymutu echa od liczby sondowań w segmencie przy obracającej się antenie w zależności od liczby obserwacji. Linia ciągła - średnie ograniczenie Craméra-Rao, linia przerywana - stochastyczny MLE zakładający obrót anteny [równ. (4.6)], linia kropka-kreska - iteracyjny wariant MLE [równ. (4.8) do (4.13)].

## Test 2

Drugi z testów ma na celu sprawdzenie zachowania się algorytmu iteracyjnego [równania (4.8) do (4.13)] w warunkach kiedy obserwowana liczba obiektów przekracza liczbę dostępnych wiązek. W tym celu wykonano symulację, w której dostępna była wyłącznie wiązka sumacyjna (antena złożona z  $M = 64$  elementów, do formowania wiązki wykorzystano okno prostokątne). Sygnał zawierał echo dwóch obiektów ułożonych na kątach  $\theta_1 = -\theta_2$ , przy czym zbadana została zależność wariancji i obciążenia w

funkcji separacji kątowej między obiektami ( $\theta_1 - \theta_2$ ). Każdy z segmentów składał się z  $N = 48$  sondowań, a  $SNR$  każdego z dwóch źródeł był równy i wynosił 20 dB. W trakcie segmentu antena wykonywała obrót o  $8^\circ$ , przy czym szerokość wiązki wynosiła  $\theta_{3dB} \approx 1.58^\circ$ . Ponownie zastosowano wektor wag  $\varpi(\Delta\theta_{k,n})$  w postaci kwadratu modułu odpowiedzi anteny. Wykonane zostało 2000 niezależnych symulacji. Wynik przedstawiono na wykresie 4.4, gdzie linia kropka-kreska oznacza wyniki (wariancja i obciążenie) uzyskane przez testowany estymator, a linii ciągłej na wykresie wariancji odpowiada średnie ograniczenie Craméra-Rao. Na podstawie wyników można zauważyć, że wariancja jest zbliżona do teoretycznego ograniczenia w szerokim zakresie separacji kątowych, jednak dla przedstawionej liczby obserwacji nie jest z nim zgodna. Na wykresie widoczne jest również stosunkowo niskie obciążenie.

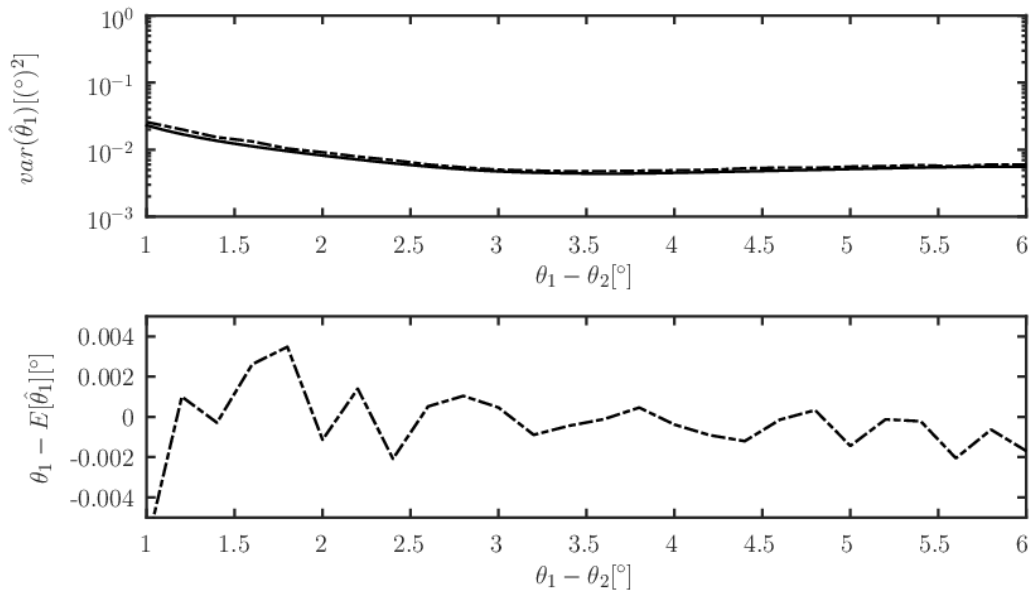


Rys. 4.4: Zależność wariancji i obciążenia pierwszego z estymowanych kątów odbioru echa ( $\theta_1$ ) od separacji kątowej między dwoma obiektami ( $\theta_2 - \theta_1$ ) przy dostępnej wyłącznie wiązce sumacyjnej. Linia ciągła - średnie ograniczenie Craméra-Rao, linia kropka-kreska - iteracyjny wariant MLE [równ. (4.8) do (4.13)]

### Test 3

Trzeci z testów jest powtórzeniem poprzedniego testu, jednak dane źródłowe zawierały wiązkę sumacyjną oraz różnicową, pozostałe parametry symulacji nie uległy zmianie. Test ten ma na celu pokazanie, czy w przypadku obracanej anteny zasadne jest wykorzystanie wiązki różnicowej w procesie estymacji. Wyniki testu przedstawiono na wykresie 4.5.

Porównując wykresy 4.4 i 4.5 można zaobserwować znaczący spadek wartości zarówno wariancji jak i obciążenia szacowanego kąta po dodaniu do obserwacji sygnałów z wiązki różnicowej. Swój poziom obniżyło średnie ograniczenie Craméra-Rao, ale widoczna jest również dużo lepsza efektywność estymatora. Dołączenie wiązki różnicowej pozwoliło dodatkowo poszerzyć efektywny obszar obserwacji. Na wykresie 4.4 można zauważyć, że dla separacji  $\theta_1 - \theta_2 > 5^\circ$  zarówno wariancja oszacowania jak i wartość średnia ograniczenia Craméra-Rao mają charakter rosnący. Wynika to z faktu obserwacji



Rys. 4.5: Zależność wariancji i obciążenia pierwszego z estymowanych kątów odbioru echa ( $\theta_1$ ) od separacji kątowej między dwoma obiektami ( $\theta_2 - \theta_1$ ) przy dostępnej wiązce sumacyjnej i różnicowej. Linia ciągła - średnie ograniczenie Craméra-Rao, linia kropka-kreska - iteracyjny wariant MLE [równ. (4.8) do (4.13)]

obiektów za pomocą skraju wiązki. Wiązka różnicowa charakteryzuje się w tym zakresie wyższym poziomem sygnału, w efekcie czego na wykresie 4.5 degradacja jakości oszacowania w zakresie  $5^\circ < \theta_1 - \theta_2 < 6^\circ$  nie jest obserwowana.



## 4.5 Ocena liczby źródeł

W większości rzeczywistych przypadków, liczba obserwowanych obiektów nie jest znana. Wartość tą można jednak w skuteczny sposób oszacować poprzez przetestowanie zbioru  $K$  hipotez, z których każda odpowiada innej liczbie potencjalnych źródeł echa, tj.  $K \in \{K_{min}, \dots, K_{max}\}$ , gdzie  $K_{min}$  i  $K_{max}$  są nieujemnymi liczbami naturalnymi, spełniającymi warunek  $K_{min} < K_{max}$ . Każdej hipotezie odpowiada wartość funkcji logarytmicznej wiarygodności  $\mathcal{L}(\hat{\theta}_{\theta|K})$  zgodnej z równaniem (4.8), przy czym indeks  $K$  oznacza hipotezę przyjmującą  $K$  źródeł sygnału. Do wyboru optymalnego modelu można zastosować poniższą regułę decyzyjną:

$$K_* = \underset{K \in \{K_{min}, \dots, K_{max}\}}{\operatorname{argmax}} 2 \left[ \mathcal{L}(\hat{\theta}_{\theta|K}) - \mathcal{L}(\hat{\theta}_{\theta|K_{min}}) \right] - p(K)T, \quad (4.14)$$

gdzie  $\mathcal{L}(\hat{\theta}_{\theta|K})$  oznacza funkcję logarytmicznej wiarygodności odpowiadającą hipotezie  $K$  źródeł sygnału,  $p(K) = 2(K - K_{min})$  stanowi różnicę w liczbie estymowanych parametrów między zerową ( $K_{min}$ ) a  $K$ -tą hipotezą [79], a  $T$  jest współczynnikiem pozwalającym na dostrojenie prawdopodobieństwa fałszywego alarmu.

Hipoteza zerowa - stanowiąca punkt wyjściowy w porównywaniu algorytmów - jest odrzucana w momencie kiedy którakolwiek z hipotez spełni warunek:

$$\frac{\mathcal{L}(\hat{\theta}_{\theta|K}) - \mathcal{L}(\hat{\theta}_{\theta|K_{min}})}{K - K_{min}} > T. \quad (4.15)$$

Statystyka doboru modelu przyjmuje postać:

$$T_{OS} = \max_{K \in \{K_{min}, \dots, K_{max}\}} \frac{\mathcal{L}(\hat{\theta}_{\theta|K}) - \mathcal{L}(\hat{\theta}_{\theta|K_{min}})}{K - K_{min}}. \quad (4.16)$$

Przy założeniu  $N \rightarrow \infty$ , powyższa statystyka jest zbieżna z rozkładem zmiennej losowej [80]:

$$\bar{T}_{OS,r} = \max_{m=2,4,\dots,2r} (Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_m^2) / m, \quad (4.17)$$

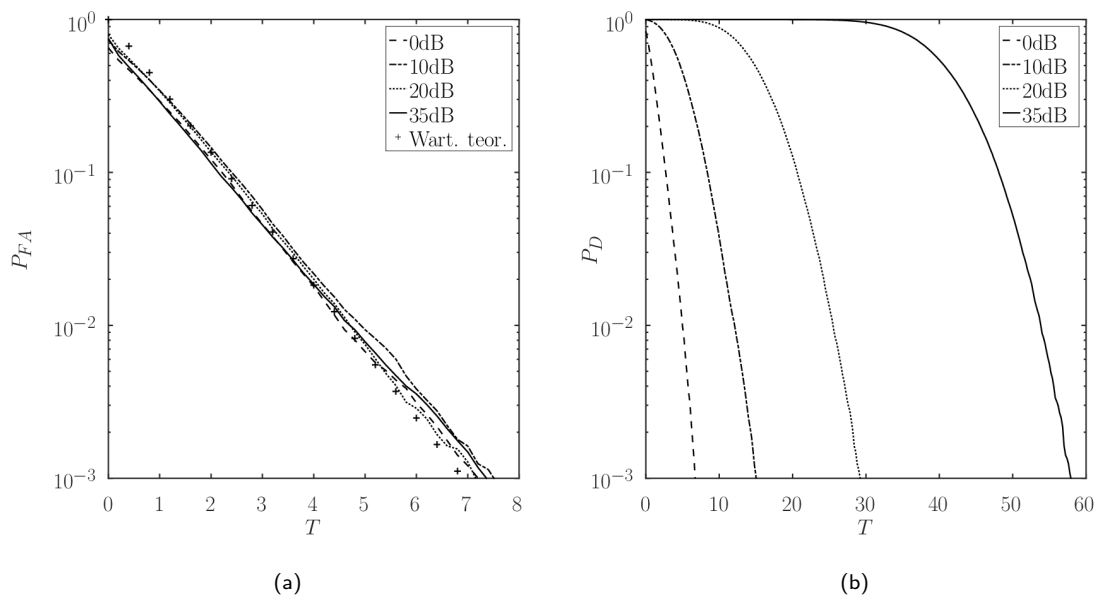
gdzie  $r = K_{max} - K_{min}$  oraz  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$  są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie normalnym.

### Test 1

Pierwszy z testów opierał się o symulację, w której każda realizacja zawierała pojedyncze źródło echa ( $\theta_1 = -0.5^\circ$ ). Przyjęto obrotową antenę, która w trakcie trwania segmentu złożonego z  $N = 32$  sondowań omiałała obszar  $8^\circ$ . Sygnały miały postać wiązek, przy czym uformowane zostały 2 wiązki: sumacyjna i różnicowa, z taperem o rozkładzie równomiernym (liczba elementów odbiorczych  $M = 64$ , szerokości wiązki  $\theta_{3dB} \approx 1.58^\circ$ ). Do estymacji kąta odbioru zastosowano algorytm iteracyjny [równania (4.8) do (4.13)] o 10 iteracjach. Zastosowano funkcję ważenia w postaci kwadratu modułu wartości wiązki ( $\varpi(\Delta\theta_{i,n}) = \|\mathbf{a}_n(\Delta\theta_{i,n})\|^2$ ).

Przy obecności jednego źródła echa wykonano 4 symulacje, których wyniki przedstawiono na wykresach 4.6. Założono, że estymacja przebiega w oparciu o 3 modele, w których liczba estymowanych kątów odbioru była równa  $K \in \{0, 1, 2\}$ . W przypadku hipotezy  $K = 0$  zakładano brak obecności

objektu, a estymowana była wyłącznie wariancja szumu (na którą w rzeczywistości składał się również użyteczny sygnał). Na pierwszym z wykresów (4.6a) przedstawiono prawdopodobieństwo fałszywego alarmu ( $P_{FA}$ ) w zależności od wartości parametru  $T$ . Fałszywy alarm oznacza sytuację, w której wybrany został model przyjmujący obecność więcej niż jednego obiektu ( $K \geq 2$  przy faktycznej obecności jednego obiektu). Na drugim z wykresów (4.6b) pokazano zależność prawdopodobieństwa detekcji ( $P_D$ ) od wartości współczynnika  $T$ . Jako wykrycie obiektu (zwiększenie  $P_D$ ) przyjmowano przypadek, z którym wybierana była któraś z hipotez zakładających obecność co najmniej 1 źródła echa. Do wygenerowania wykresów wykorzystano symulację Monte-Carlo z 20000 realizacjami.



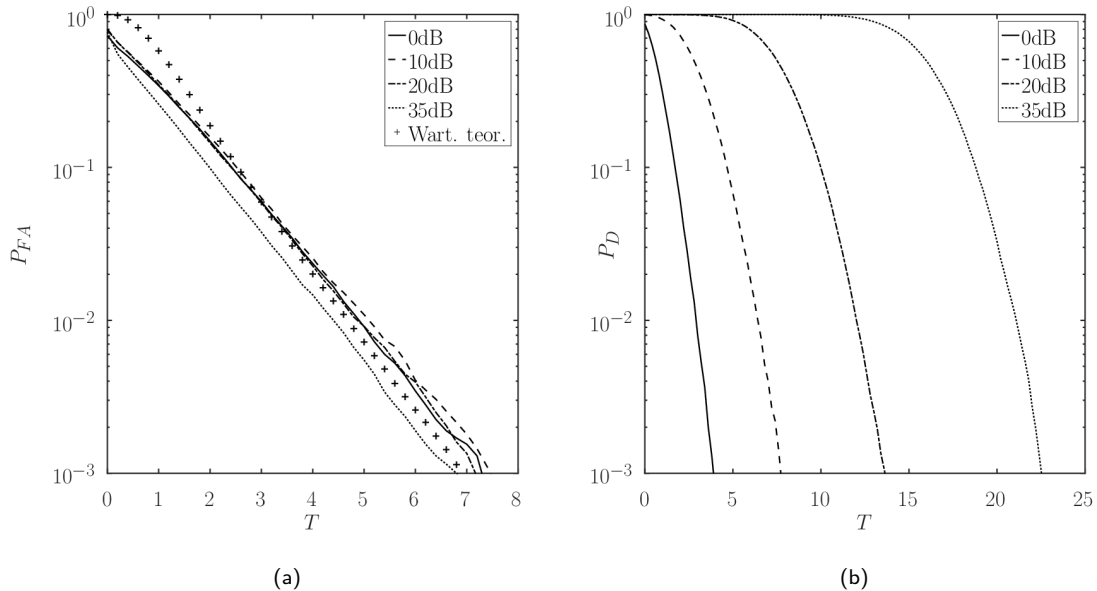
Rys. 4.6: Prawdopodobieństwo fałszywego alarmu ( $P_{FA}$ , rys. 4.6a) oraz prawdopodobieństwo detekcji ( $P_D$ , rys. 4.6b) w funkcji parametru  $T$ .

Na podstawie wykresu 4.6a można zaobserwować, że prawdopodobieństwo fałszywego alarmu jest w przybliżeniu niezależne od  $SNR$ . Drobne różnice wynikają z dużego obszaru omiatanego przez antenę w trakcie segmentu (co przekłada się na niewielką liczbę sondowań, w których obiekt obserwowany był listkiem głównym), skończonej liczby wykonanych symulacji, przybliżeń estymatora oraz skończonej liczby obserwacji. Z kolei na prawdopodobieństwo detekcji duży wpływ ma  $SNR$  obserwowanego obiektu, którego wzrost skutkuje podniesieniem prawdopodobieństwa. Podniesienie wartości współczynnika  $T$  skutkuje obniżeniem wartości zarówno  $P_{FA}$  jak  $P_D$ . Optymalny dobór  $T$  w radarze jest wynikiem kompromisu między wykrywalnością obiektów, a częstością błędnych wykryć.

## Test 2

Drugi z testów różni się od pierwszego liczbą źródeł echa w analizowanych sygnałach - w tym przypadku obecne były 2 źródła echa na azymutach  $\theta_1 = -3^\circ$  i  $\theta_2 = 3^\circ$ . Stosunek sygnału do szumu w przypadku obu echa był jednakowy. Ponownie wykonano 4 symulacje, których wyniki przedstawiono na wykresach 4.7.

Sprawdzone były 4 hipotezy. Jako prawidłowe wykrycie obiektu uznawano sytuację, w której wybrana zostawała hipoteza  $K = 2$  lub  $K = 3$ , przy czym wybór  $K = 3$  oznaczał również fałszywą detekcję.



Rys. 4.7: Prawdopodobieństwo fałszywego alarmu ( $P_{FA}$ , rys. 4.7a) oraz prawdopodobieństwo detekcji ( $P_D$ , rys. 4.7b) w funkcji parametru  $T$

Analizując wykresy 4.7 można ponownie zauważyć przybliżoną zbieżność wartości  $P_{FA}$  z wartością teoretyczną. Obserwowane rozbieżności wynikają z skończonej liczby wykonanych symulacji, przybliżeń w estymatorze oraz skończonej liczby obserwacji. Również i w tym przypadku zaobserwować można spadek prawdopodobieństwa detekcji wraz z wzrostem wartości współczynnika  $T$ .

Bardzo duży wpływ na wartość  $P_{FA}$  miał sposób poszukiwania globalnego ekstremum funkcji wiarygodności. Teoretycznie, dla  $T = 0$ , wartość  $P_{FA}$  powinna wynosić 1, co wynika z faktu, że model o największej liczbie parametrów (w tym przypadku  $K = 3$ ) pozwoli uzyskać największą wartość logarymicznej funkcji wiarygodności (zatem ten model powinien być zawsze wybrany). W praktyce zdarzają się sytuacje, w których przy  $T = 0$  wybierany jest mniej złożony model. Wynika to z zarówno uproszczeń algorytmu (wariant zakładający 10 iteracji) jak i realizacji poszukiwania globalnego maksimum funkcji wiarygodności na etapie estymacji parametrów modelu. Aby lepiej określić ekstremum wykonane zostało wstępne przeszukiwanie "po kracie" - sprawdzona została wartość  $[\mathcal{L}(\hat{\theta}_{\theta|K})$  dla kątów  $\theta_{\theta} - 4^{\circ}$   $\theta_{\theta} - 3^{\circ}$   $\dots$   $\theta_{\theta} + 4^{\circ}$ ], a uzyskana wartość maksymalna stanowiła punkt rozpoczęcia dokładnego poszukiwania dla bezgradientowego algorytmu Nelder–Mead [81]. W przypadku modelu z  $K = 3$  oznacza to konieczność 729-krotnego obliczenia wartości logarymicznej funkcji wiarygodności w celu wykonania wstępnego przeszukiwania. Lepsza zbieżność wyników (rys. 4.6 jak i 4.7 wymagałaby zastosowania "gęstsze" przeszukiwania wstępnego lub poszerzenia jego zakresu.

## 4.6 Wpływ korelacji źródeł sygnału na jakość estymaty kąta

Estymacja położenia dwóch źródeł echa w najprostszym przypadku nie stanowi większego wyzwania. Przykładowe rozwiązanie problemu przedstawiono w rozdziale 2, gdzie część spośród omawianych algorytmów posiadała możliwość określenia kąta odbioru więcej niż jednego źródła sygnału znajdujących się w obrębie jednego zbioru obserwacji (segmentu). W przypadku radaru z obracaną anteną problem stanowi zmienna w czasie wartość macierzy kowariancji sygnału, oraz brak stałego kąta odbioru echa względem osi anteny. Cechy te wykluczają zastosowanie niektórych z omówionych metod. Przykładowym rozwiązaniem problemu estymacji kąta więcej niż jednego źródła sygnału przy obracającej się antenie może być podejście opisane równaniami (4.6), jednak wraz z wzrostem liczby obserwowanych obiektów rośnie również złożoność obliczeniowa. Uściślając, model dopasowany do dokładnie dwóch źródeł sygnału będzie miał postać:

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{A}(\Delta\theta_{1,n}, \Delta\theta_{2,n})\mathbf{s}_n + \mathbf{v}_n, \quad (4.18)$$

gdzie:

$$\Delta\theta_{k,n} = \theta_k - \theta_{a,n} \quad k = 1, 2 \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (4.19)$$

stanowi różnicę między faktyczną lokalizacją, a chwilowym położeniem obiektu dla kolejnych spośród  $N$  dostępnych sondowań.  $\mathbf{A}(\Delta\theta_{1,n}, \Delta\theta_{2,n})$  jest macierzą złożoną z odpowiedzi antenowych uzyskaną na podstawie echa odebranego od obu źródeł sygnału:

$$\mathbf{A}(\Delta\theta_{1,n}, \Delta\theta_{2,n}) = [\mathbf{a}(\Delta\theta_{1,n}) \quad \mathbf{a}(\Delta\theta_{2,n})], \quad (4.20)$$

gdzie  $\mathbf{s}_n = [s_{1,n} \quad s_{2,n}]^T$  stanowi wektor zespolonych amplitud sygnałów pochodzących od obu obiektów w  $n$ -tym sondowaniu. Przyjmuje się, że stanowią one realizacje zespolonego rozkładu gaussowskiego ( $\mathbf{s}_n \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \Sigma)$ ) o zerowej wartości oczekiwanej i macierzy kowariancji  $\Sigma$ . Ostatnie z użytych oznaczeń,  $\mathbf{v}_n \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma_v^2)$  reprezentuje szum pomiarowy.

Do tej pory zakładana była sytuacja, w której sygnały pochodzące od obu obiektów nie są z sobą skorelowane ( $E[s_{1,n}s_{2,n}^*] = 0$ , przy czym operator  $[\cdot]^*$  oznacza sprzężenie liczby zespolonej). W takim wypadku macierz kowariancji amplitud ma postać:

$$\Sigma_z = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Tego typu model (zakładający brak korelacji sygnałów) będzie dalej nazywany "zawężonym", a wartości z nim związane będą posiadały literę  $z$  w dolnym indeksie.

Zakładając, że jednak może wystąpić korelacja między amplitudami sygnałów, macierz kowariancji przyjmie postać:

$$\Sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho^*\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

gdzie  $\rho$  jest zespolonym współczynnikiem korelacji ( $\rho = \rho_{\Re} + j\rho_{\Im}$ ,  $|\rho| \leq 1$ ) [82]. Taki model, który uwzględnia korelację źródeł sygnału, będzie dalej nazywany "rozszerzonym" (litera  $r$  z dolnym indeksem).

Przy założeniu powyższych modeli, estymacja kąta odbioru może zostać wykonana za pomocą stochastycznego estymatora największej wiarygodności:

$$\hat{\Theta} = \underset{\Theta}{\operatorname{argmin}} -\mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y}),$$

$$\mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y}) = C - \left[ \sum_{n=1}^N \log(|\mathbf{R}_n(\Theta)|) + \mathbf{y}_n^H \mathbf{R}_n^{-1}(\Theta) \mathbf{y}_n \right], \quad (4.23)$$

$$\mathbf{R}_n(\Theta) = \mathbf{A}(\Delta\theta_{1,n}, \Delta\theta_{2,n}) \Sigma \mathbf{A}^H(\Delta\theta_{1,n}, \Delta\theta_{2,n}) + \mathbf{I}\sigma_v^2.$$

przy czym  $\Sigma$  jest macierzą kowariancji sygnału, zależną od założonego modelu. W przypadku modelu zawężonego, poszukiwanie minimum odbywa się w obrębie wektora o 5 wartościach:

$$\Theta_z = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \sigma_1^2 \quad \sigma_2^2 \quad \sigma_v^2]. \quad (4.24)$$

Model rozszerzony posiada natomiast wektor estymowanych parametrów złożony z 7 elementów o wartościach rzeczywistych:

$$\Theta_r = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \sigma_1^2 \quad \sigma_2^2 \quad \sigma_v^2 \quad \rho_{\Re} \quad \rho_{\Im}]. \quad (4.25)$$

Estymacja współrzędnych wymaga w takim wypadku wykonania poszukiwania minimum funkcji kosztu w odpowiednio 5 lub 7 wymiarach, przy czym wzrost złożoności obliczeniowej względem kolejnych wymiarów przeszukania funkcji kosztu ma charakter wykładniczy. Oznaczać to może, że estymator oparty o model rozszerzony będzie wymagał wykonania nawet 400 krotnie więcej obliczeń niż odpowiednik z modelem zawężonym (przy założeniu wykonania 20 wywołań funkcji kosztu wymaganych do lokalizacji minimum w jednym wymiarze).

Dla znanych prawdziwych wartości parametrów modelu istnieje możliwość określenia postaci macierzy informacyjnych Fishera. W przypadku modelu rozszerzonego, macierz ( $\mathcal{F}_r(\Theta_r)$ , rozmiar 7x7) będzie postaci:

$$\mathcal{F}_r(\Theta_r) = -E \left[ \begin{array}{ccccc|cc} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_1 \partial \sigma_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_1 \partial \sigma_2^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_1 \partial \sigma_v^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_1 \partial \rho_{\Re}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_1 \partial \rho_{\Im}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_2^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_2 \partial \sigma_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_2 \partial \sigma_2^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_2 \partial \sigma_v^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_2 \partial \rho_{\Re}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_2 \partial \rho_{\Im}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_1^2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_1^2 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_1^4} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_1^2 \partial \sigma_2^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_1^2 \partial \sigma_v^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_1^2 \partial \rho_{\Re}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_1^2 \partial \rho_{\Im}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_2^2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_2^2 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_2^2 \partial \sigma_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_2^4} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_2^2 \partial \sigma_v^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_2^2 \partial \rho_{\Re}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_2^2 \partial \rho_{\Im}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2 \partial \sigma_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2 \partial \sigma_2^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^4} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2 \partial \rho_{\Re}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2 \partial \rho_{\Im}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \rho_{\Re} \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \rho_{\Re} \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \rho_{\Re} \partial \sigma_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \rho_{\Re} \partial \sigma_2^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \rho_{\Re} \partial \sigma_v^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \rho_{\Re}^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \rho_{\Re} \partial \rho_{\Im}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \rho_{\Im} \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \rho_{\Im} \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \rho_{\Im} \partial \sigma_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \rho_{\Im} \partial \sigma_2^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \rho_{\Im} \partial \sigma_v^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \rho_{\Im} \partial \rho_{\Re}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \rho_{\Im}^2} \end{array} \right]$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{F}_{00} & \mathcal{F}_{01} \\ \hline \mathcal{F}_{10} & \mathcal{F}_{11} \end{array} \right], \quad (4.26)$$

przy czym pochodne cząstkowe mogą zostać obliczone na podstawie równania:

$$-E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right] = \sum_{n=1}^N \operatorname{tr} \left( \mathbf{R}_n^{-1}(\Theta) \frac{\partial \mathbf{R}_n(\Theta)}{\partial \theta_1} \mathbf{R}_n^{-1}(\Theta) \frac{\partial \mathbf{R}_n(\Theta)}{\partial \theta_2} \right). \quad (4.27)$$

Podział macierzy informacyjnej na sekcje  $\mathcal{F}_{00}$ ,  $\mathcal{F}_{01}$ ,  $\mathcal{F}_{10}$  i  $\mathcal{F}_{11}$  pozwala zauważyć, że macierz Fishera dla modelu zawężonego ma postać:

$$\mathcal{F}_z(\Theta_z) = \mathcal{F}_{00}|_{\rho_{\mathbb{R}}=\rho_{\mathbb{S}}=0}, \quad (4.28)$$

i posiada rozmiar  $5 \times 5$ .

#### 4.6.1 Analiza wrażliwości

Przyjmując, że  $\Theta_0$  oznacza prawdziwe wartości parametrów modelu, pochodna logarytmicznej funkcji największej wiarygodności może zostać przybliżona za pomocą szeregu Tayora:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \Theta} \simeq \frac{\partial \mathcal{L}(\Theta_0, \mathbf{Y})}{\partial \Theta} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta_0, \mathbf{Y})}{\partial \Theta \partial \Theta^T} (\Theta - \Theta_0). \quad (4.29)$$

Zgodnie z definicją estymatora największej wiarygodności:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\hat{\Theta}, \mathbf{Y})}{\partial \Theta} = 0, \quad (4.30)$$

co prowadzi do równania:

$$\hat{\Theta} \simeq \Theta_0 - \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta_0, \mathbf{Y})}{\partial \Theta \partial \Theta^T} \right]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}(\Theta_0, \mathbf{Y})}{\partial \Theta} \simeq \Theta_0 + \mathcal{F}(\Theta_0) \frac{\partial \mathcal{L}(\Theta_0, \mathbf{Y})}{\partial \Theta}, \quad (4.31)$$

gdzie  $\mathcal{F}(\Theta_0)$  stanowi macierz informacyjną Fishera.

Wektor parametrów  $\Theta$  może zostać rozłożony na dwa wektory składowe  $\Theta = [\Theta_a \ \Theta_b]$  - zapis taki będzie używany w dalszych rozważaniach.  $\Theta_a$  odpowiada ze wektor parametrów modelu uproszczonego, pomijającego część parametrów modelu, a  $\Theta_b$  stanowi zbiór parametrów uzupełniający  $\Theta_a$  do wektora modelu pełnego. Zakładając, że znalezione zostało zaburzone maksimum logarytmicznej funkcji wiarygodności dla  $\Theta_b$ , i wynosi ono  $\hat{\Theta}_b + \Delta \hat{\Theta}_b$ , można rozważyć w jaki sposób błąd spowodowany uproszczeniem modelu wpłynął na wartości estymat modelu uproszczonego ( $\Theta_a$ ). Odbywa się to poprzez przyrównanie części wektora  $\partial \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y}) / \partial \Theta$  odpowiadającej  $\Theta_a$  do 0:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\Theta_0, \mathbf{Y})}{\partial \Theta_a} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta_0, \mathbf{Y})}{\partial \Theta_a \partial \Theta_a^T} (\hat{\Theta}_a + \Delta \hat{\Theta}_a - \Theta_{a,0}) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta_0, \mathbf{Y})}{\partial \Theta_a \partial \Theta_b^T} (\hat{\Theta}_b + \Delta \hat{\Theta}_b - \Theta_{b,0}) = 0. \quad (4.32)$$

Powyższa równość (4.32) musi być spełniona dla  $\Delta \hat{\Theta}_a = 0$  oraz  $\Delta \hat{\Theta}_b = 0$ , co z kolei prowadzi do postaci:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta_0, \mathbf{Y})}{\partial \Theta_a \partial \Theta_a^T} \Delta \hat{\Theta}_a + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta_0, \mathbf{Y})}{\partial \Theta_a \partial \Theta_b^T} \Delta \hat{\Theta}_b = 0, \quad (4.33)$$

$$\Delta \hat{\Theta}_\theta = - \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta_0, \mathbf{Y})}{\partial \Theta_a \partial \Theta_a^T} \right]^{-1} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta_0, \mathbf{Y})}{\partial \Theta_a \partial \Theta_b^T} \Delta \hat{\Theta}_b \simeq -\mathcal{F}_{aa}^{-1}(\Theta_0) \mathcal{F}_{ab}(\Theta_0) \Delta \hat{\Theta}_b, \quad (4.34)$$

gdzie  $\mathcal{F}_{aa}(\Theta_0)$  i  $\mathcal{F}_{ab}(\Theta_0)$  stanowią odpowiednie fragmenty macierzy Fishera:

$$\mathcal{F}(\Theta_0) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{aa}(\Theta_0) & \mathcal{F}_{ab}(\Theta_0) \\ \mathcal{F}_{ba}(\Theta_0) & \mathcal{F}_{bb}(\Theta_0) \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

## 4.6.2 Zastosowanie analizy wrażliwości do zagadnienia korelacji źródeł

Przekładając równanie (4.34) na problem estymacji z wykorzystaniem wektorów parametrów (4.24) i (4.25), istnieje możliwość określenia degradacji jakości estymat dla estymatora wykorzystującego zawężony wektor parametrów  $\Theta_z$  przy założeniu występowania korelacji między obserwowanymi obiektami ( $\rho \neq 0$ ) [82]. Obciążenie i wariancja estymatora zawężonego są wówczas dane wyrażeniami:

$$E[\hat{\mu}_z - \mu_0] \simeq \omega^T \gamma, \quad (4.36)$$

$$E[\hat{\mu}_z - E[\hat{\mu}_z]]^2 \simeq \tau_0^2, \quad (4.37)$$

gdzie  $\gamma = [\rho_{\mathbb{R}} \ \rho_{\mathbb{S}}]^T$  stanowi fragment wektora parametrów nieuwzględnionych w modelu zawężonym,

$$\omega = \mathcal{F}_{10}(\Theta_0) \mathcal{F}_{00}^{-1}(\Theta_0) \frac{\partial \mu}{\partial \Theta} - \frac{\partial \mu}{\partial \gamma}, \quad (4.38)$$

$$\tau_0^2 = \left( \frac{\partial \mu}{\partial \Theta} \right)^T \mathcal{F}_{00}^{-1}(\Theta_0) \frac{\partial \mu}{\partial \Theta}, \quad (4.39)$$

a  $\mu$  stanowi pojedynczy z parametrów z wektora  $\Theta$ , którego degradacja będzie analizowana. Oznaczenia podzbiorów macierzy  $\mathcal{F}$  są zgodne z przedstawionymi w równaniu (4.26). W obecnym przypadku, analizowaną zmienną jest kąt odbioru, z tego powodu przyjmuje się  $\mu = \theta_1$  ( $\partial \mu / \partial \Theta_z = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ ) lub  $\mu = \theta_2$  ( $\partial \mu / \partial \Theta_z = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ ). W obu przypadkach  $\partial \mu / \partial \gamma = [0 \ 0]^T$ .

Estymacja oparta o model rozszerzony jest w przybliżeniu nieobciążona z wariancją opisaną równaniem:

$$E[\hat{\mu}_r - E[\hat{\mu}_r]]^2 = \tau_0^2 + \omega^T \mathbf{K} \omega, \quad (4.40)$$

gdzie  $\mathbf{K} = (\mathcal{F}_{11} - \mathcal{F}_{10} \mathcal{F}_{00}^{-1} \mathcal{F}_{01})^{-1}$ . Można ponadto zauważyć, że w najprostszym przypadku, dla  $\rho_{\mathbb{R}} = 0$  i  $\rho_{\mathbb{S}} = 0$  całość upraszcza się do ograniczenia Craméra-Rao.

Dodatkowo, w przypadku obu modeli istnieje możliwość oszacowania wartości błędów średniokwadratowych poprzez zsumowanie wariancji i kwadratu obciążenia estymowanego parametru:

$$E[(\hat{\mu}_z - \mu_0)^2] \simeq \tau_0^2 + \omega^T \gamma \gamma^T \omega, \quad (4.41)$$

$$E[(\hat{\mu}_r - \mu_0)^2] \simeq \tau_0^2 + \omega^T \mathbf{K} \omega. \quad (4.42)$$

Równania (4.37) i (4.41) pozwalają zauważyć, że wariancja estymatora rozszerzonego zawsze jest większa lub równa wariancji estymatora opartego o model zawężony. Wynika to z faktu, że estymator oparty o model rozszerzony jest w przybliżeniu nieobciążony, natomiast dla estymatora zawężonego pojawia się obciążenie, które można opisać równaniem (4.36). Ponadto, estymator oparty o model zawężony może charakteryzować się niższym poziomem błędu średniokwadratowego niż w przypadku estymacji opartej o model rozszerzony pod warunkiem, że kwadrat obciążenia przyjmie niższą wartość niż  $\omega^T \mathbf{K} \omega$ , co jest możliwe dla dostatecznie małych  $\gamma$ .

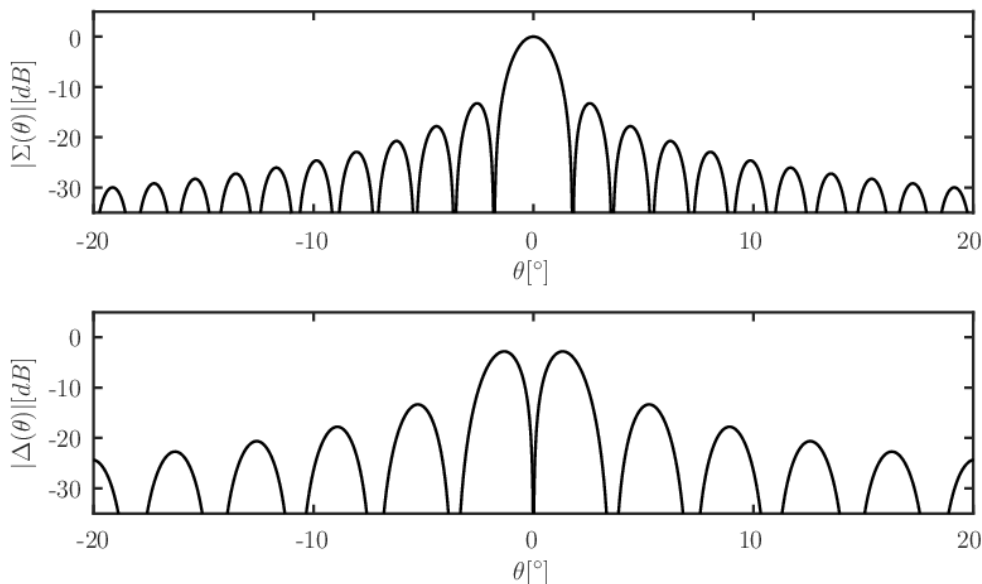
### Test 1

Test porównujący zachowanie modeli rozszerzonego i zawężonego przeprowadzony został na podstawie 1500 symulacji Monte-Carlo. Każda z realizacji zawierała  $N = 32$  sondowania. Przyjęto, że w każdej

realizacji znajdują się 2 obiekty na kątach rozłożonych w sposób symetryczny względem osi anteny ( $\theta_1 = -\theta_2$ ), a separacja między źródłami echa wskazana jest na osi poziomej wykresów wynikowych. W każdym przypadku  $SNR$  wynosił 20 dB. Założono obracającą się antenę, która w trakcie segmentu ( $N = 32$  sondowania) wykonała obrót o 10 szerokości wiązki. Sama antena złożona była z  $M = 64$  elementów w szyku liniowym, jednak wektor odpowiedzi antenowej zakładał postać z uformowanymi już dwiema wiązkami, dostosowanymi do pracy z estymatorem monoimpulsowym ( $B = 2$  wiązki, sumacyjna  $\Sigma$  i różnicowa  $\Delta$ ). Zastosowano taper prostokątny, przez co odpowiedź anteny ma postać:

$$\mathbf{a}(\Delta\theta) = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} F_M(\Delta\theta) - 1 & -j \frac{(F_{M/2}(\Delta\theta) - 1)^2}{F_1(\Delta\theta) - 1} \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

gdzie  $F_M(\Delta\theta) = e^{(jM\pi \sin(\Delta\theta))}$ . Szerokość wiązki wynosi  $\theta_{3dB} \sim 1.58^\circ$ , a jej kształt przedstawiono na wykresie 4.8. Wartości współczynnika korelacji  $\rho$  były zależne od przeprowadzonego testu i wynosiły  $\rho = [0 \ 0.25e^{j\pi/2} \ 0.25e^{j\pi} \ 0.5]$ . Wyniki testów przedstawiono na wykresach 4.9 (wykresy wartości obciążenia estymowanego kąta) i 4.10 (wykresy wariancji).



Rys. 4.8: Charakterystyka amplitudowa wiązki sumacyjnej ( $|\Sigma(\theta)|$ ) i różnicowej ( $|\Delta(\theta)|$ ) wykorzystywanych w testach.

Na wykresach obciążenia (4.9a i 4.9b) linią ciągłą oznaczono oczekiwane wartości wariancji kąta pierwszego echa, symbolem "x" natomiast wartości uzyskane za pomocą symulacji Monte-Carlo. W przypadku modelu rozszerzonego (wykresy 4.9b) przyjęto, że estymator jest nieobciążony, co w ogólności jest prawdą. Drobne obciążenie jest obserwowane jedynie przy niskich separacjach kątowych. W przypadku modelu zawężonego (wykres 4.9a) widać znaczne, niezerowe obciążenie, które jednak udało się oszacować w sposób analityczny, przedstawionymi wcześniej równaniami (4.36). Widoczna jest zależność, że wraz z wzrostem modułu współczynnika korelacji, w estymatorze zawężonym pojawiają się większe niejednorodności, a sama funkcja obciążenia od separacji kątowej posiada bardziej zaburzony przebieg. Dla pierwszego od góry wykresu, przy  $\rho = 0$ , można zauważyć, że estymator oparty o model

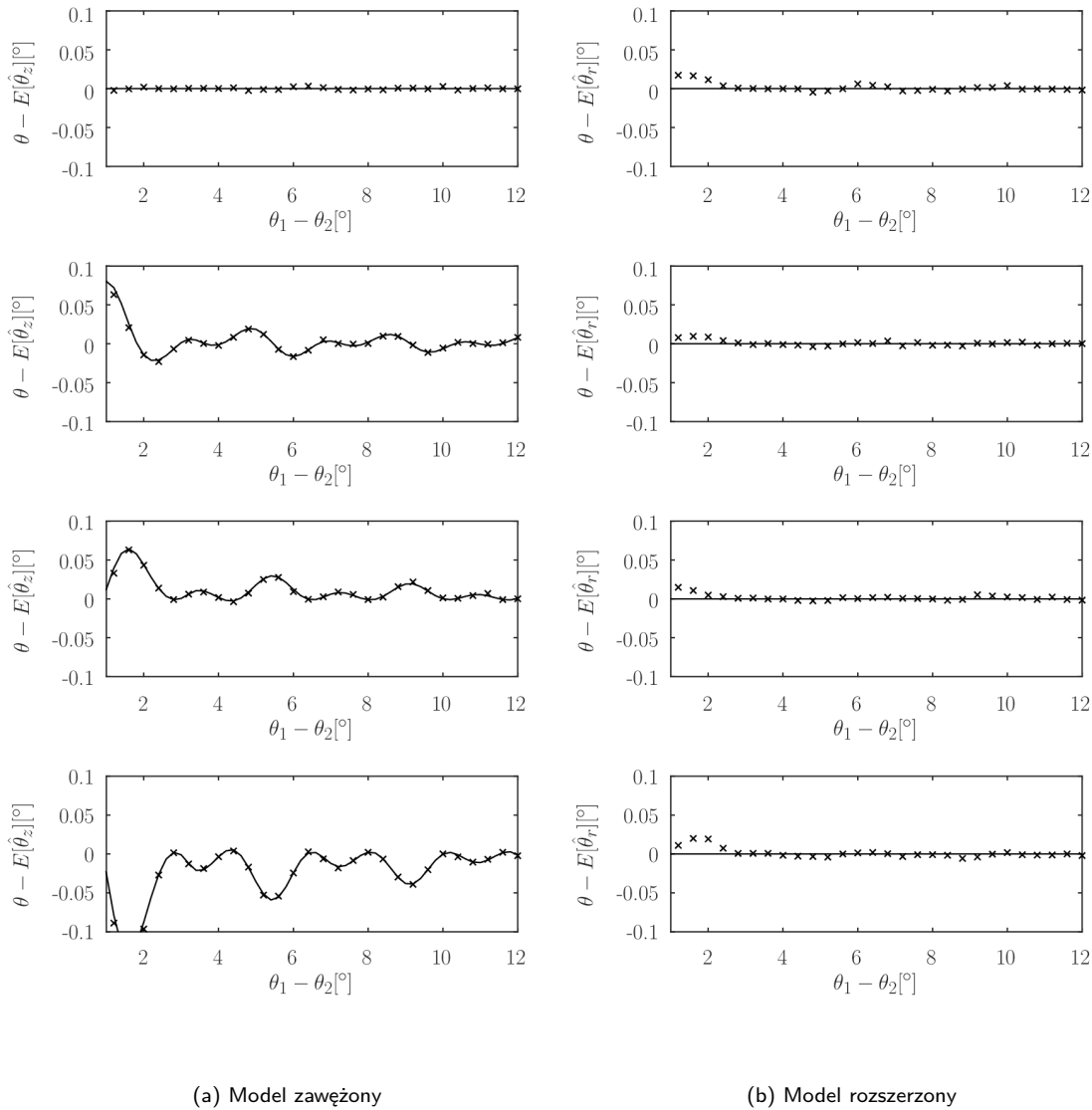


---

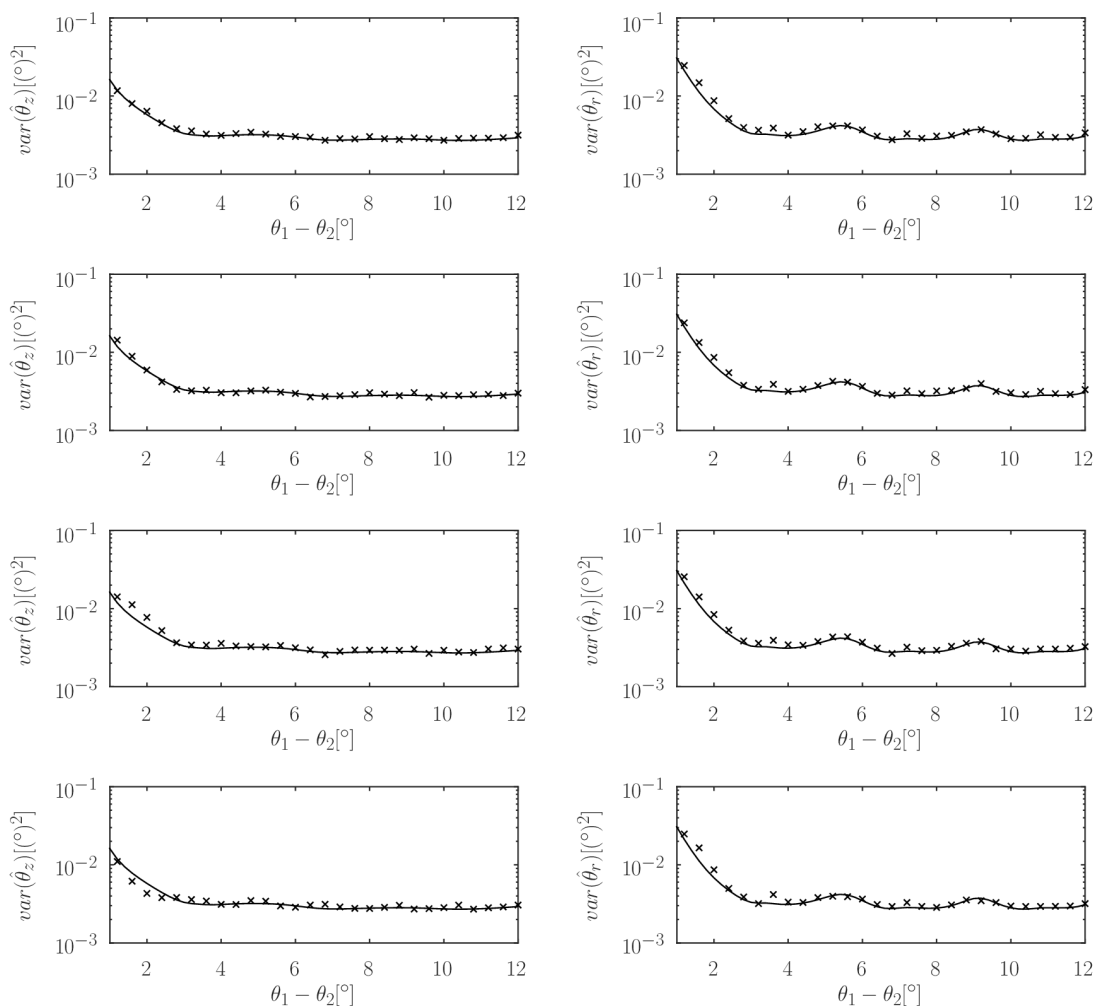
zawężony posiada niższy poziom obciążenia od estymatora rozszerzonego. Wynika to z faktu, że przy modelu rozszerzonym estymowana jest wartość  $\hat{\rho}$ , a sam estymator posiada więcej stopni swobody od estymatora zawężonego, w którym z góry istnieje założenie co do braku korelacji sygnałów. Model zawężony zatem a priori przyjmuje  $\hat{\rho} = 0$ , co stanowi wartość prawdziwą.

Wariancje estymowanego kąta  $\theta_1$  przedstawiono na wykresach 4.10. Symbolami "x" oznaczono wartości uzyskane za pomocą symulacji Monte-Carlo, linia ciągła przedstawia oszacowanie wariancji uzyskane na podstawie równań (4.41) i (4.42) dla odpowiednio modelu zawężonego i rozszerzonego. W obu przypadkach, niezależnie od symulowanej wartości współczynnika korelacji  $\rho$ , widoczna jest dobra zbieżność wartości teoretycznych z uzyskanymi za pośrednictwem symulacji Monte-Carlo. Zauważalny jest również fakt, że model zawężony posiada niższe wartości wariancji od tych uzyskanych przez model rozszerzony, co jest zgodne z obserwacją poczynioną w opisie teoretycznym i wynika z obciążonego charakteru estymatora opartego o model zawężony.

Ostatni z zestawów wykresów (rys. 4.11) pokazuje wartości błędów średniokwadratowych dla obu badanych modeli i różnych wartości współczynników korelacji. Przy  $|\rho| < 0.25$  estymator zawężony cechuje się lepszą jakością oszacowania w porównaniu do modelu rozszerzonego. Sytuacja ulega zmianie dla większych wartości współczynnika korelacji ( $|\rho| = 0.5$ ), kiedy to estymator rozszerzony pozwolił na uzyskanie mniejszych błędów estymat. Ogólnie widoczna jest tendencja, w której model rozszerzony cechuje się zbliżonymi wartościami błędów średniokwadratowych niezależnie od wartości współczynnika korelacji, odmiennie niż estymator zawężony, w którym wzrostowi wartości  $|\rho|$  towarzyszy spadek jakości oszacowania.



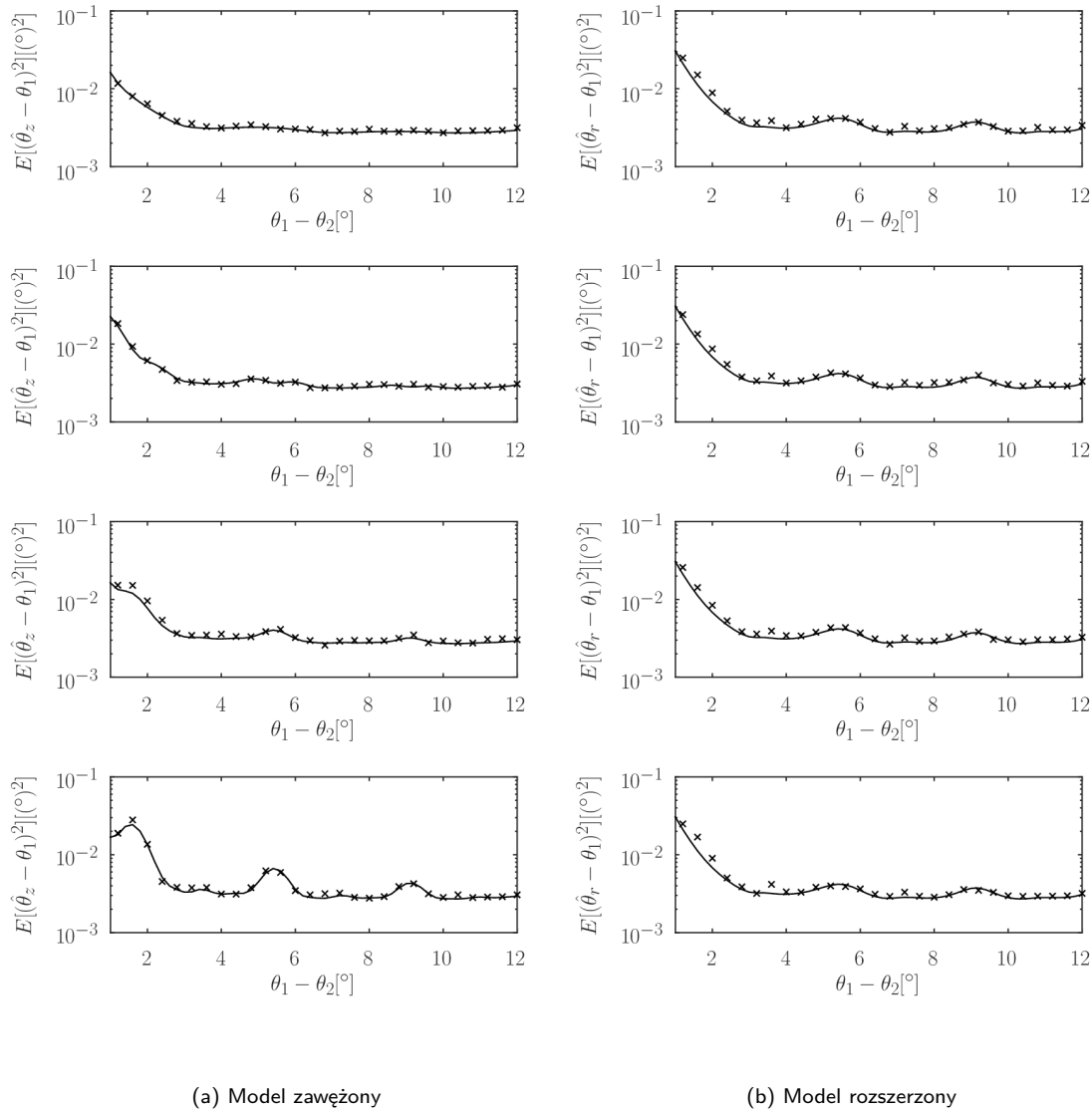
Rys. 4.9: Zestawienie obciążenia badanych estymatorów dla różnych wartości wsp. korelacji  $\rho$  i separacji echa. Kolejne wiersze wykresów odpowiadają parametrowi  $\rho = [0 \ 0.25e^{j\pi/2} \ 0.25e^{j\pi} \ 0.5]$ . Kolumna 4.9a odpowiada modelowi zawężonemu, 4.9b rozszerzonemu. Linią ciągłą oznaczono wartości teoretyczne, symbolem "x" - uzyskane na podstawie symulacji Monte-Carlo.



(a) Model zawężony

(b) Model rozszerzony

Rys. 4.10: Zestawienie wariancji badanych estymatorów dla różnych wartości wsp. korelacji  $\rho$  i separacji echa. Kolejne wiersze wykresów odpowiadają parametrowi  $\rho = [0 \ 0.25e^{j\pi/2} \ 0.25e^{j\pi} \ 0.5]$ . Kolumna 4.10a odpowiada modelowi zawężonemu, 4.10b rozszerzonemu. Linią ciągłą oznaczono wartości teoretyczne, symbolem "x" - uzyskane na podstawie symulacji Monte-Carlo.



Rys. 4.11: Zestawienie błędów średniokwadratowych badanych estymatorów dla różnych wartości wsp. korelacji  $\rho$  i separacji echa. Kolejne wiersze wykresów odpowiadają parametrowi  $\rho = [0 \ 0.25e^{j\pi/2} \ 0.25e^{j\pi} \ 0.5]$ . Kolumna 4.11a odpowiada modelowi zawężonemu, 4.11b rozszerzonemu. Linią ciągłą oznaczono wartości teoretyczne, symbolem "x" - uzyskane na podstawie symulacji Monte-Carlo.

## 4.7 Nieparametryczne podejście do estymacji azymutu przy obracającej się antenie

Do tej pory rozważane podejścia zakładały wykorzystanie estymatorów parametrycznych (różne odmiany estymatorów największej wiarygodności). Istnieją również sposoby pozwalające na estymację kąta odbioru sygnału echa z wykorzystaniem metod nieparametrycznych [83]. Przykładem może być omawiany wcześniej estymator MVDR (sekcja 2.2.4). W tym estymatorze do przeprowadzenia procesu estymacji wymagana jest macierz kowariancji sygnału. Oszacowanie mocy określa się wtedy wzorem:

$$\hat{\sigma}^2(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{R}_y^{-1}\mathbf{a}(\theta)}, \quad (4.44)$$

gdzie  $\mathbf{a}(\theta)$  jest nominalną odpowiedzią anteny (w postaci wiązek lub sygnałów zarejestrowanych przez elementy odbiorcze) na echo odebrane na kącie  $\theta$ . Estymator zakłada, że sekwencja sygnałów  $\mathbf{y}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  jest stacjonarna w szerokim sensie. Niespełnienie tego kryterium może skutkować znacznymi błędami w uzyskanym oszacowaniu.

### 4.7.1 Estymacja kąta za pomocą klastycznego formowania wiązek

Przyjmijmy, że łączna energia sygnału i szumu jest sumą energii z wszystkich dostępnych obserwacji [83]. W tego typu estymatorze nie ma konieczności wykorzystywania macierzy kowariancji, dzięki czemu w prosty sposób można ją zaadaptować do sytuacji z obracaną anteną:

$$\hat{\sigma}^2(\theta) = \frac{\sum_{n=1}^N |\mathbf{w}^H(\Delta\theta_n)\mathbf{y}_n|^2}{\sum_{n=1}^N |\mathbf{a}^H(\Delta\theta_n)\mathbf{a}(\Delta\theta_n)|^2}, \quad (4.45)$$

gdzie  $\mathbf{a}(\theta)$  stanowi odpowiedź anteny na echo zarejestrowane na kącie  $\theta$ ,  $\mathbf{w}(\theta)$  stanowi wektor wag formowania wiązek, a  $\mathbf{y}_n$  jest pomiarem z  $n$ -tego sondowania,  $\Delta\theta_n$  oznacza chwilową różnicę między hipotetycznym położeniem celu  $\theta$ , a położeniem anteny  $\theta_{a,n}$  ( $\Delta\theta_n = \theta - \theta_{a,n}$ ). Wektor  $\mathbf{w}(\theta)$  z równania (4.45) musi ponadto spełniać zależność:

$$\mathbf{w}^H(\Delta\theta_n)\mathbf{a}(\Delta\theta_n) = \mathbf{a}^H(\Delta\theta_n)\mathbf{a}(\Delta\theta_n). \quad (4.46)$$

W najprostszym przypadku można przyjąć, że wektor wag używanych do formowania wiązek jest jednakowy jak odpowiedź anteny [ $\mathbf{w}(\theta) = \mathbf{a}(\theta)$ ]. Podejście takie charakteryzuje się niską rozróżnialnością kątową, jednak jest dobrym punktem wyjścia w dalszych porównaniach jakości oszacowań uzyskiwanych przez estymatory.

### 4.7.2 Odmiana adaptacyjna - MVDR dla obracanej anteny

Założmy, że wektor odpowiedzi antenowej  $\mathbf{a}(\Delta\theta)$  można zostać zapisany jako wielomian funkcji  $f(\Delta\theta)$ :

$$\mathbf{a}(\Delta\theta) = \sum_{p=0}^{P-1} \alpha_p f^p(\Delta\theta), \quad (4.47)$$

gdzie  $\alpha_p$ ,  $p = 0, 1, \dots, P - 1$  oznacza wektorowy zapis zespolonych współczynników, a  $\Delta\theta$  różnicę między faktycznym położeniem obiektu, a chwilowym kątem obrotu anteny, natomiast  $f^p(\Delta\theta)$  stanowi  $p$ -tą potęgę funkcji  $f(\Delta\theta)$ . Funkcja  $f(\Delta\theta)$  może przyjmować np. postać funkcji identycznościowej:

$$f(\Delta\theta) = \Delta\theta, \quad (4.48)$$

lub zespolonej funkcji wykładniczej:

$$f(\Delta\theta) = e^{j c \sin(\Delta\theta)}, \quad (4.49)$$

gdzie  $c \neq 0$  jest pewnym współczynnikiem. W przypadku estymacji w oparciu o sygnały w postaci wiązek, przyjęcie  $f(\Delta\theta) = \Delta\theta$  oznacza, że wektor odpowiedzi na sygnał na kącie  $\Delta\theta$  opisany równaniem (4.47) stanowi wielomian rzędu  $P$  przybliżającym faktyczną odpowiedź. Z kolei, dla estymacji wykonanej na sygnałach uzyskanych z elementów antenowych, założenie  $f(\Delta\theta) = e^{j c \sin(\Delta\theta)}$  pozwala w sposób dokładny odzwierciedlić wektor  $\mathbf{a}(\Delta\theta)$ .

Przy powyższych założeniach, energia odbierana z kąta  $\theta$  może zostać określona przy pomocy:

$$\hat{\sigma}^2(\theta) = \frac{\sum_{n=1}^N |\mathbf{w}_n^H(\theta) \mathbf{y}_n|^2}{\sum_{n=1}^N \|\mathbf{a}(\Delta\theta_n)\|^4}, \quad (4.50)$$

przy czym  $\mathbf{w}_n(\theta)$  oznacza zmienny w czasie wektor wag formowania wiązek, który minimalizuje  $\hat{\sigma}^2(\theta)$  i spełnia warunek:

$$\mathbf{w}_n^H(\theta) \mathbf{a}(\Delta\theta_n) = \|\mathbf{a}(\Delta\theta_n)\|^2 \quad \forall n. \quad (4.51)$$

Wektor  $\mathbf{w}_n^H(\theta)$  może zostać przedstawiony w sposób analogiczny do (4.47) jako:

$$\mathbf{w}_n^H(\theta) = \mathbf{w}(\Delta\theta_n) = \sum_{q=0}^{Q-1} \omega_q f^{qP}(\Delta\theta_n), \quad (4.52)$$

gdzie  $Q \geq P$  oznacza liczbę współczynników wektorowych  $\omega_q$ , a  $q = 0, 1, \dots, Q - 1$ .

Suma  $J = \sum_{n=1}^N |\mathbf{w}_n^H(\theta) \mathbf{y}_n|^2$  [licznik z równania (4.50)], przy wykorzystaniu tożsamości (4.51) i (4.52) może zostać zapisana w postaci:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{n=1}^N |\mathbf{w}_n^H(\theta) \mathbf{y}_n|^2 = \sum_{n=1}^N \left| \sum_{q=0}^{Q-1} \omega_q f^{qP}(\Delta\theta_n) \mathbf{y}_n \right|^2 = \\ &= \sum_{q_1=0}^{Q-1} \sum_{q_2=0}^{Q-1} \omega_{q_1}^H \left[ \sum_{n=1}^N f^{*q_1}(\Delta\theta_n) \mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^H f^{q_2}(\Delta\theta_n) \right] \omega_{q_2}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

Niech:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left[ \omega_0^H \quad \omega_1^H \quad \dots \quad \omega_{Q-1}^H \right]^H, \\ \tilde{\mathbf{R}}_y &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_{0,0} & \tilde{\mathbf{R}}_{0,1} & \dots & \tilde{\mathbf{R}}_{0,Q-1} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{1,0} & \tilde{\mathbf{R}}_{1,1} & \dots & \tilde{\mathbf{R}}_{1,Q-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{R}}_{Q-1,0} & \tilde{\mathbf{R}}_{Q-1,1} & \dots & \tilde{\mathbf{R}}_{Q-1,Q-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

gdzie:

$$\tilde{\mathbf{R}}_{q_1, q_2} = \sum_{n=1}^N f^{*q_1}(\Delta\theta_n) \mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^H f^{q_2}(\Delta\theta_n). \quad (4.55)$$

Przy użyciu powyższej notacji funkcję kosztu można przedstawić w postaci:

$$J = \mathbf{x}^H \tilde{\mathbf{R}}_y \mathbf{x}. \quad (4.56)$$

Równanie (4.51) można z kolei zapisać w postaci liniowej:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (4.57)$$

jednak dokładna postać macierzy  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{b}$  zależą od zachowania funkcji  $f(\Delta\theta)$  pod wpływem sprzężenia zespolonego. W przypadku, kiedy funkcja  $f(\Delta\theta)$  posiada wartości rzeczywiste, można przyjąć:

$$f^*(\Delta\theta) = f(\Delta\theta), \quad (4.58)$$

natomiast dla (4.49) zachodzi równość:

$$f^*(\Delta\theta) = f^{-1}(\Delta\theta). \quad (4.59)$$

Z tego względu postaci macierzy należy rozpatrzyć na dwa sposoby, w zależności od wartości funkcji  $f(\Delta\theta)$ .

Funkcja  $f(\Delta\theta)$  o wartościach rzeczywistych:

Opierając się na równaniach (4.47), (4.48), (4.51) i (4.52) można uzyskać wyrażenie:

$$\sum_{r=0}^{P+Q-2} \sum_{p+q=r} \alpha_p^H \omega_q f^r(\Delta\theta_n) = \sum_{r=0}^{2P-2} \sum_{p_1+p_2=r} \alpha_{p_1}^H \alpha_{p_2}^H f^r(\Delta\theta_n), \quad (4.60)$$

które powinny być spełnione dla  $n = 1, 2, \dots, N$ . Przy odpowiednio dużym  $N$ , oba wielomiany występujące pod postacią funkcji  $f(\Delta\theta)$  po obu stronach równania są sobie równe wyłącznie kiedy ich współczynniki są równe, tj.

$$\sum_{p+q=r} \alpha_p^H \omega_q = \begin{cases} b_r & \text{dla } r = 0, 1, \dots, 2P-2, \\ 0 & \text{dla } r = 2P-1, \dots, P+Q-2, \end{cases} \quad (4.61)$$

gdzie

$$b_r = \sum_{p_1+p_2=r} \alpha_{p_1}^H \alpha_{p_2}. \quad (4.62)$$

Wykorzystując zapis macierzowy (4.54), macierz  $\mathbf{A}$  i wektor  $\mathbf{b}$  w równaniu (4.57) przyjmują postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_0^H & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \alpha_1^H & \alpha_0^H & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \alpha_2^H & \alpha_1^H & \alpha_0^H & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \alpha_{P-1}^H & \alpha_{P-2}^H \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \alpha_{P-1}^H \end{bmatrix}, \quad (4.63)$$

$$\mathbf{b} = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{2P-2} \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T, \quad (4.64)$$

gdzie

$$b_r = \sum_{p_1+p_2=r} \alpha_{p_1}^H \alpha_{p_2}. \quad (4.65)$$

Macierz  $\mathbf{A}$  ma wymiar  $(P + Q - 1) \times MQ$ , a  $\mathbf{b}$  jest wektorem o  $P + Q - 1$  elementach.

Funkcja  $f(\Delta\theta)$  o wartościach zespolonych [spełniających warunek (4.59)]:

Połączenie wzorów (4.47), (4.49), (4.51) i (4.52) umożliwia dojście do równania:

$$\sum_{r=-Q+1}^{P-1} \sum_{p-q=r} \omega_q^H \alpha_p f^r(\Delta\theta_n) = \sum_{r=-P+1}^{P-1} \sum_{p_2-p_1=r} \alpha_{p_1}^H \alpha_{p_2} f^r(\Delta\theta), \quad (4.66)$$

co ponownie może zostać przedstawione w postaci macierzowej, jak w równaniu (4.57). W takim wypadku:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \alpha_0^H \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \alpha_0^H \alpha_1^H & \\ \mathbf{0} & \cdots & \alpha_0^H & \alpha_1^H & \alpha_2^H \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{P-2}^H & \alpha_{P-1}^H & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \alpha_{P-1}^H & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

$$\mathbf{b} = \left[ 0 \quad \cdots \quad 0 \quad b_{-P+1} \quad \cdots \quad b_0 \quad b_{P-1} \right]^T, \quad (4.68)$$

$$b_r = \sum_{p_2-p_1=r} \alpha_{p_1}^H \alpha_{p_2}. \quad (4.69)$$

Ponownie, macierz  $\mathbf{A}$  posiada wymiar  $(P + Q - 1) \times MQ$ , a wektor  $\mathbf{b}$   $P + Q - 1$  elementów.

Rozwiązanie problemu optymalizacyjnego, postawionego w równaniach (4.56) i (4.57) istnieje jeżeli macierz  $\tilde{\mathbf{R}}_y$  jest nieosobliwa. W takim przypadku przyjmuje ono postać:

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{R}}_y^{-1} \mathbf{A}^H [\mathbf{A} \tilde{\mathbf{R}}_y^{-1} \mathbf{A}^H]^{-1} \mathbf{b}. \quad (4.70)$$

Macierz  $\tilde{\mathbf{R}}_y$  posiada pełen rząd, kiedy liczba obserwacji jest nie mniejsza od  $MQ$ . Wynika to z postaci samej macierzy:

$$\tilde{\mathbf{R}}_y = \mathbf{D} \mathbf{D}^H, \quad (4.71)$$

gdzie

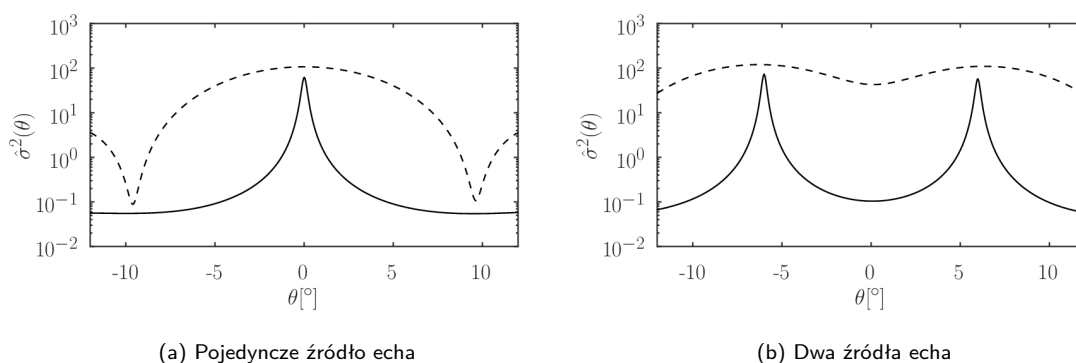
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 f^{*0}(\Delta\theta_1) & \cdots & \mathbf{y}_N f^{*0}(\Delta\theta_N) \\ \mathbf{y}_1 f^{*1}(\Delta\theta_1) & \cdots & \mathbf{y}_N f^{*1}(\Delta\theta_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_1 f^{*Q-1}(\Delta\theta_1) & \cdots & \mathbf{y}_N f^{*Q-1}(\Delta\theta_N) \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

Należy dodatkowo zwrócić uwagę, że niezależnie od rozmiaru wektora  $\mathbf{x}$  (który wynosi  $MQ$ ), liczba stopni swobody może być znacznie mniejsza. Równanie (4.57) wprowadza  $P + Q - 1$  ograniczeń, z tego powodu wynikowy estymator posiada  $MQ - P - Q + 1 = (M - 1)Q - P + 1$  stopni swobody. Oznacza to również, że wymagane jest, aby liczba sygnałów w pojedynczej obserwacji wynosiła co najmniej 2 ( $M \geq 2$ ). Dla poprawy stabilności algorytmu (szczególnie przy macierzy kowariancji bliskiej osobliwości) można rozważyć dociążenie macierzy kowariancji  $\tilde{\mathbf{R}}_y$ .



### 4.7.3 Porównanie nieparametrycznych metod estymacji azymutu w sytuacji obracającej się anteny

Oba przedstawione algorytmy nieparametryczne umożliwiają prowadzenie estymacji azymutu, jednak jak pokazano w rozdziale 2, MVDR oraz klasyczne formowanie wiązek charakteryzują się różnymi własnościami. W celu wstępnego określenia możliwości estymacji wykreślono wartości oszacowania mocy  $[\hat{\sigma}^2(\theta)]$  w zależności od kąta  $\theta$  (wykresy 4.12).



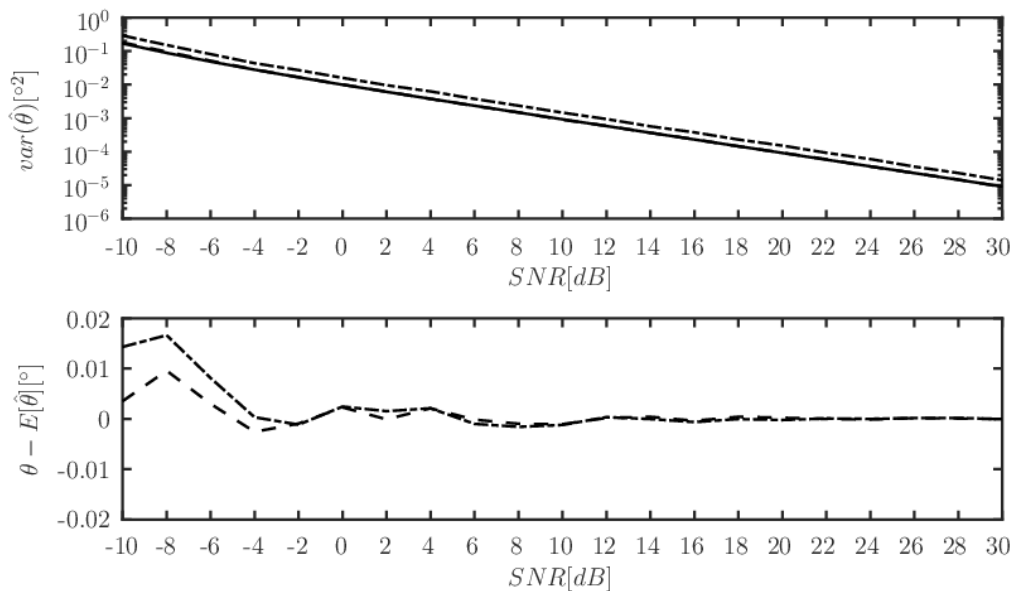
Rys. 4.12: Porównanie wartości oszacowania mocy dla zaproponowanego estymatora MVDR (linia ciągła) oraz klasycznego formowania wiązek (linia przerywana).

Oba wykresy zostały wygenerowane w oparciu o sygnały pochodzące bezpośrednio z elementów odbiorczych anteny ( $M = 12$ ). W trakcie trwania segmentu zebrane zostało  $N = 128$  sondowań, a antena wykonała obrót o  $12.7^\circ$  (od położenia  $\theta_{a,1} = -6.35^\circ$  do  $\theta_{a,N} = 6.35^\circ$ ). W zależności od symulacji, obserwowany był pojedynczy cel na azymucie  $\theta = 0^\circ$  (wykres 4.12a), bądź 2 źródła echa, na kątach  $\theta_1 = -6^\circ$  i  $\theta_2 = 6^\circ$  (wykres 4.12b). W obu przypadkach  $SNR$  echa wynosił 20 dB dla każdego z źródeł sygnału.

W pierwszym z wykresów (4.12a) widoczne są znaczne różnice między uzyskanymi oszacowaniami mocy. W przypadku klasycznego formowania wiązek, uzyskany przebieg przypomina kształtem uformowaną wiązkę, co jest zgodne z oczekiwaniami. Posiada ona dosyć szeroką charakterystykę, co nie daje najlepszych rokowań na możliwość szacowania kątów echa więcej niż jednego źródła sygnału. Z kolei algorytm MVDR cechuje się znacznie zawężoną postacią funkcji mocy, pozwalającą na estymację azymutu kilku celów na nieznacznie odseparowanych względem siebie kątach. Przewidywane zachowanie potwierdza wykres 4.12b. Przedstawia on oszacowanie mocy dla dwóch źródeł echa. W przypadku klasycznego formowania wiązek - mimo znacznej separacji między źródłami ( $\theta_2 - \theta_1 = 12^\circ$ ) - ekstrema wynikające z obecności sygnałów echa są ledwie rozróżnialne. Zmniejszenie separacji kątowej prowadzi w takim wypadku do ich złączenia się, uniemożliwiając tym samym rozróżnienie obu ech. Sytuacja wygląda odmiennie dla MVDR. Tam ekstrema wykresu są łatwo rozróżnialne, a ich połączenia wymaga umieszczenia obu sygnałów na dużo bliższych sobie kątach.

## Test 1

Pierwszy z testów sprawdzał zachowanie estymatora opartego na klasycznym formowaniu wiązek oraz estymatora MVDR w wariancji dla obrotowej anteny. Badana była jakość oszacowania (wariancja oraz obciążenie) w zależności od  $SNR$ . W trakcie estymacji zaszumiony sygnał pochodził od pojedynczego źródła echa umiejscowionego na kącie  $\theta = 3^\circ$ , przy dostępie do danych zarejestrowanych przez  $M = 12$  elementów odbiorczych. Segment składał się z  $N = 128$  sondowań, w trakcie których antena zmieniała położenie w zakresie od  $\theta_{a,1} = -6.35^\circ$  do  $\theta_{a,N} = 6.35^\circ$ . Uzyskane wyniki przedstawiono na wykresach 4.13 - linią przerywaną oznaczono wartości uzyskane przez klasyczne formowanie wiązek, linią kropka-kreska - MVDR, natomiast ciągłą poziomą linią średniego ograniczenia Craméra-Rao.

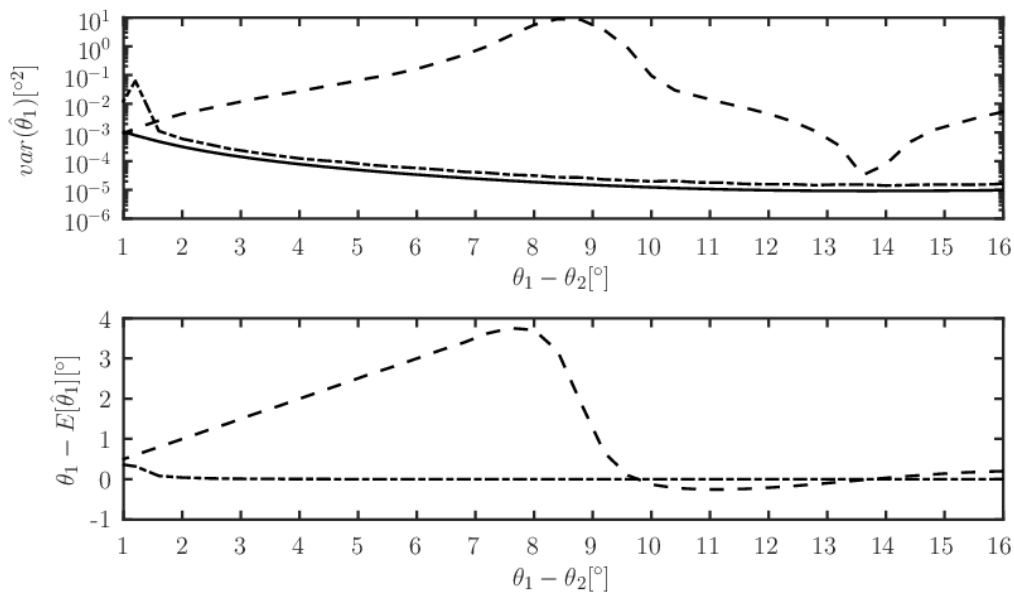


Rys. 4.13: Porównanie wariancji i obciążenia estymowanego kąta przy obracającej się antenie dla klasycznego formowania wiązek (linia przerywana), proponowanego estymatora MVDR (linia kropka-kreska) oraz średniego ograniczenia Craméra-Rao (linia ciągła) w zależności od SNR.

W wykresie można zauważyć jest, że klasyczne formowanie wiązek pokrywa się z linią średniego ograniczenia Craméra-Rao. Estymator MVDR wypada nieznacznie gorzej, wartości wariancji utrzymują się na w przybliżeniu stałym poziomie ponad teoretycznym dolnym limitem (wariancja estymatora MVDR jest około 2-krotnie większa od średniego ograniczenia Craméra-Rao oraz wariancji klasycznego formowania wiązek) w całym badanym zakresie. Wytłumaczenia można szukać w adaptacyjnym charakterze algorytmu oraz dociążeniu macierzy  $\tilde{\mathbf{R}}_y$  w równaniu (4.71) macierzą jednostkową. Zabieg ten poprawił stabilność pracy algorytmu poprzez lepsze uwarunkowanie estymaty macierzy kowariancji  $\hat{\mathbf{R}}$ . Obciążenie w obu przypadkach utrzymuje się na niskim poziomie, można przyjąć estymatory za nieobciążone.

## Test 2

W drugim z testów większość parametrów symulacji pozostała niezmienną względem testu pierwszego. Główną różnicą była obecność dwóch źródeł echa, każde z  $SNR$  równym 30 dB. Położenie celów dobierano w zakresie od  $\theta_1 = 0.5^\circ$  do  $\theta_1 = 8^\circ$ , przy czym przyjęto  $\theta_2 = -\theta_1$ . Separację kątową między źródłami echa ( $\theta_1 - \theta_2$ ) umieszczono na osi poziomej wykresów 4.14. Przedstawiają one wartości wariancji oraz obciążenia badanych estymatorów. Oznaczenia na wykresie są zgodne z poprzednim testem (linia kropka-kreska - MVDR, przerywana - klasyczne formowanie wiązek, ciągła - średnie ograniczenie Craméra-Rao). Przebiegi na wykresach 4.14 pokazują znaczną przewagę proponowanego estymatora



Rys. 4.14: Porównanie wariancji i obciążenia estymowanego kąta przy obracającej się antenie dla klasycznego formowania wiązek (linia przerywana), proponowanego estymatora MVDR (linia kropka-kreska) oraz średniego ograniczenia Craméra-Rao (linia ciągła) w zależności od separacji kątowej między źródłami sygnału.

MVDR nad klasycznym formowaniem wiązek. Klasyczne formowanie wiązek w większości przypadków nie sprawdza się przy estymacji więcej niż pojedynczego źródła echa. Dla separacji od  $\theta_1 - \theta_2 = 1^\circ$  do  $\theta_1 - \theta_2 = 8^\circ$  widoczny jest znaczny, podnoszący się poziom zarówno wariancji jak i obciążenia. Wynika to z faktu zbyt małej separacji kątowej, która doprowadziła do pojawienia się pojedynczego ekstremum w funkcji kosztu. W efekcie oba estymowane kąty posiadają taką samą wartość. Dopiero od około separacji  $\theta_2 - \theta_1 = 9^\circ$  można mówić o rozróżnialności kątowej, która umożliwia estymację dwóch kątów. Wariancja nie osiąga jednak uśrednionego ograniczenia Craméra-Rao. W trakcie obrotu anteny w stosunkowo małej liczbie sondowań źródła sygnału znajdują się w obszarze odpowiadającym listkowi głównemu. Z drugiej strony, MVDR nie osiąga średniego ograniczenia Craméra-Rao, jednak podobnie jak w poprzednim przypadku znajduje się nieznacznie ponad nim. Dopiero przy niskich separacjach kątowych ( $\theta_1 - \theta_2 \leq 2^\circ$ ) pojawia się nieznacznie podniesiona wartość poziomów zarówno wariancji jak i obciążenia. Estymator ten jednak pozwala jednak oszacować oba kąty echa, nawet dla niedużej separacji kątowej. Zaletą proponowanego rozwiązania jest brak wymogu co do znajomości rozkładu

wektora pomiarów  $y$ , co wynika z jego nieparametrycznego charakteru.

## 4.8 Podsumowanie

Estymacja azymutu jest zadaniem stosunkowo trudnym ze względu na niestacjonarny charakter sygnału, który wynika z obracającej się anteny. Wiąże się ona z zmienną w czasie postacią macierzy kowariancji, co z kolei uniemożliwia zastosowanie znacznej liczby klasycznych algorytmów superrozdzielczych. Symulacje pokazały, że popularna metoda monoimpulsowa przy szerokim zakresie kątów omiecionych przez antenę w trakcie pojedynczego segmentu może dawać estymaty obarczone znacznymi błędami. Wynika to z faktu, że na skrajach obserwowanego obszaru stosunek sygnału do szumu rejestrowanego obiektu może być bardzo niski, skutkując wyjściem poza zakres jednoznaczny pelengacyjnej. Zmodyfikowany wariant metody największej wiarygodności pozwolił znacząco poprawić jakość estymowanego kąta. Modyfikacja opierała się na zgrubnym oszacowaniu wartości wariancji szumu oraz sygnału pochodzącego od obserwowanego celu w całym obserwowanym segmencie, a następnie estymację parametrów źródła echa. Umożliwiło to ponadto szacowanie większej liczby jednocześnie występujących obiektów, kosztem większej złożoności obliczeniowej.

W jednej z symulacji zasymulowano warunki, w których obracająca się antena zbierała sygnał przy pomocy wyłącznie jednej wiązki, przy dwóch, nieruchomych, źródłach echa. Przy antenie nieruchomej ich rozróżnienie byłoby niemożliwe - w tym przypadku, przy pomocy zmodyfikowanej metody największej wiarygodności udało się uzyskać stosunkowo dobrej jakości estymaty. Możliwość szacowania większej liczby parametrów (2 kąty, 2 wariancje sygnału i wariancja szumu) niż wymiar wektora obserwacji (pojedyncza wiązka z wartościami zespolonymi) wynika bezpośrednio z obracającej się anteny, gdzie w każdym z sondowań obiekty obserwowane są pod nieco innym kątem, co umożliwia określenie ich parametrów.

Detekcja celu w sygnale radarowym wykonywana jest przed etapem estymacji, jednak często dopiero przy procesie określania współrzędnych szacuje się liczbę obserwowanych obiektów. O ile w przypadku określania kąta elewacji można założyć, że wielodrogowość występuje tylko na niewielkich wysokościach ponad poziomem horyzontu, tak przy azymucie nie można poczynić żadnych wcześniejszych założeń co do występowania więcej niż jednego obiektu. Większa liczba źródeł echa może wynikać ze zbiegu okoliczności jak i intencjonalnego rozmieszczenia celów. Zaproponowane rozwiązanie pozwalało na określenie liczby obserwowanych celów przy stabilizacji poziomu fałszywego alarmu.

Zakładając znaną liczbę obiektów na ogół zakłada się, że ich amplitudy są wzajemnie nieskorelowane. Nie jest to jednak regułą, a współzależność faktycznie może mieć miejsce. Ze względu na taką ewentualność rozpatrzono w jaki sposób wystąpienie korelacji wpływa na jakość oszacowania azymutu uzyskanego na podstawie modelu uproszczonego (zakładającego brak korelacji). Otrzymane efekty pozwoliły określić degradację parametrów statystycznych (wzrost obciążenia, wariancji) szacowanych kątów odbioru przy założeniu wykorzystania niepełnego, uproszczonego modelu. Wyniki uzyskane na drodze symulacji w dużej mierze pokrywały się z obliczonymi w sposób analityczny. W rzeczywistości

---

analiza taka pozwala na podjęcie decyzji, czy błąd wynikający z niedopasowania modelu jest na tyle znaczący, że należy rozpatrzyć możliwość wykonania estymacji w oparciu o model bardziej złożony (co wiąże się ze wzrostem złożoności obliczeniowej).

Ostatnim zagadnieniem poruszonym w tym rozdziale było nieparametryczne podejście do estymacji azymutu przy obracającej się antenie. Przedstawiane wcześniej sposoby estymacji azymutu opierały się o różne warianty estymatorów największej wiarygodności. Podejście nieparametryczne w postaci klasycznych, niezmodyfikowanych metod nie jest możliwe ze względu na zmienną w czasie macierz kowariancji sygnału. Przedstawiono jednak zmodyfikowany wariant estymatora Capona (MVDR), który umożliwia pracę z obracaną anteną. Jako punkt odniesienia zastosowano metodę klasycznego formowania wiązek. Choć w porównaniu tym MVDR wypadł znacznie lepiej zarówno pod względem uzyskiwanej wariancji jak i obciążenia, to nie uzyskał on jednak zbieżności z średnim ograniczeniem Craméra-Rao. Mimo wszystko, pokazuje to, że jest możliwe zaadaptowanie nieparametrycznego algorytmu do pracy z zmienną w czasie macierzą kowariancji.



## Rozdział 5

# Dodatkowe zagadnienia związane z estymacją współrzędnych w radarach

### 5.1 Estymacja prędkości radialnej

Prędkość radialna ( $v_r$ ) jest kolejnym z parametrów obserwowanego celu, który umożliwi np. rozróżnienie go na tle obiektów nieruchomych. Prędkość radialna jest to składowa wektora prędkości obiektu zgodną z promieniem łączącym obserwowany cel i radar. W przypadku kiedy obiekt porusza się po okręgu, w stałej odległości od radaru - prędkość radialna będzie zerowa. W rzeczywistych warunkach poruszanie się w taki sposób jest trudne oraz wymaga dobrej znajomości położenia radaru. Z tego powodu można przyjąć, że poruszające się objekty posiadają niezerową prędkość  $v_r$ .

Jako naiwne podejście do szacowania prędkości radialnej można zaproponować filtrację MTD opisaną w sekcji 1.2.3. Znając częstotliwości graniczne filtrów, częstotliwość pracy radaru oraz okres powtarzania impulsów istnieje możliwość określenia częstotliwości dopplerowskiej, co z kolei pozwoli na uzyskanie prędkości radialnej. W praktyce proces ten jest dużo trudniejszy. Przede wszystkim należy zauważyć, że próbkowanie sygnału używanego do określenia przesunięcia dopplerowskiego zachodzi raz na sondowanie. Oznacza to, że częstotliwość próbkowania jest równa częstotliwości powtarzania impulsów (w typowym radarze obserwacyjnym rzędu kHz). Częstotliwość dopplerowską można z kolei określić za pomocą wzoru [84]:

$$f_d = 2f_t \left( \frac{v_r}{c - v_r} \right) \approx 2f_t \frac{v_r}{c}, \quad (5.1)$$

gdzie  $f_t$  oznacza częstotliwość nadawanego sygnału,  $f_d$  przesunięcie dopplerowskie, a  $c$  prędkość fali elektromagnetycznej w ośrodku propagacji. W przypadkach szybko poruszających się obiektów (samoloty, rakiety) częstotliwość dopplerowska ulega aliasingowi, przez co jej zrekonstruowanie wymaga zastosowania odpowiednich technik oraz zmiennych w czasie parametrów pracy radaru. Bazując na równaniu (5.1), można stwierdzić, że obiekt poruszający się z prędkością  $v_r = 500 \frac{m}{s}$ , przy obserwacji przez radar pracujący na częstotliwości  $f_t = 5.4$  GHz będzie posiadał przesunięcie dopplerowskie  $f_d \approx 18$  kHz. Przy założeniu, że radar posiada częstotliwość powtarzania impulsów  $f_{pr} \approx 1.5$  kHz,

oznacza to kilkukrotny aliasing obserwowanej częstotliwości dopplerowskiej, co przekłada się na niejednoznaczny pomiar prędkości radialnej. Najprostszym rozwiązaniem tego problemu jest skrócenie okresu powtarzania impulsów, w efekcie zwiększając częstotliwość dopplerowską, przy której zacznie występować aliasing. Wadą tego rozwiązania jest znaczące skrócenie zasięgu jednoznacznej obserwacji oraz dużo trudniejsze wykrycie obiektów na tle zakłóceń biernych/ech stałych. Innym sposobem jest zmniejszenie częstotliwości pracy radaru, co jednak w sposób pośredni wpłynie na pogorszenie innych parametrów, np. utrzymanie takiej samej jakości estymowanych kątów odbioru będzie wymagało powiększenia anteny.

Rozwiązaniem problemu może być zastosowanie zmiennego w czasie okresu powtarzania impulsów [36]. Skutkiem tego jest pojawienie się różnych, niejednoznacznych częstotliwości przesunięcia dopplerowskiego mających źródło w tej samej prędkości  $v_r$  (zakłada się, że prędkość pozostaje stała w obrębie kilku paczek sondowań). W efekcie możliwe jest "rozwikływanie" prędkości radialnych. Nie eliminuje to niejednoznaczności całkowicie, ale znacznie poszerza zakres jednoznacznego pomiaru. W rzeczywistości wystarczą trzy segmenty o różnych okresach powtarzania impulsów aby móc uzyskać zakres estymacji prędkości radialnej obejmujący większość obiektów wykonanych przez człowieka (szybsze mogą być np. komety). Dodatkową zaletą tego rozwiązania jest występowanie różnych prędkości ślepych w zależności od okresu powtarzania impulsów. Eliminuje to sytuację, w której niezerowa prędkość poprzez zjawisko aliasingu zostanie zinterpretowana jako brak ruchu, co uniemożliwia rozróżnienie echa od zakłóceń pochodzących od nieruchomych obiektów, degradując przez to SNR, a wraz z nim obniżając prawdopodobieństwo detekcji.

## 5.2 Niejednoznaczny pomiar odległości

Omówienie zagadnienia niejednoznacznego pomiaru odległości należy zacząć od wyjaśnienia występowania efektu detekcji spoza zasięgu jednoznacznego. Radar impulsowy pracuje w cyklu nadawania i odbioru sygnałów sondujących. Jednoznaczny pomiar odległości oznacza, że echo impulsu nadawczego zostaje odebrane w następującym bezpośrednio po jego nadaniu okresie odbioru sygnału. Może jednak dojść do sytuacji, w której znajdujący się poza zasięgiem jednoznacznej obserwacji radaru obiekt odbija sygnał, który wraca do anteny nie w następnym, ale którymś z późniejszych okresów odbioru. Przy odpowiednio dużej skutecznej powierzchni odbicia obiekt taki zostanie wykryty jako znajdujący się na odległości  $R$ , chociaż w rzeczywistości może znajdować się na odległości  $R_{targ} = R + \frac{1}{2}n c \tau_s$ , gdzie  $\tau_s$  oznacza czas między kolejnymi impulsami sondującymi, a  $n$  numer "zawinięcia" pomiaru odległości. Efekt ten jest niepożądany i często dokłada się wysiłków, aby obiekty poza zasięgiem nie były wykrywane. Przykładem takiego działania może być stosowanie zmiennych w czasie parametrów impulsów jak częstotliwość, czy rodzaj modulacji (sygnał pochodzący spoza zasięgu nie zostanie poprawnie skorelowany z nieodpowiadającym mu sygnałem nadawczym).

W pewnych warunkach efekt ten można wykorzystać do powiększenia zakresu obserwacji radaru. Jeżeli okres powtarzania impulsów jest stały - echo spoza zasięgu zawsze będzie znajdowało się w tej



samej pozornej odległości. Zmieni się ona natomiast w momencie zmiany okresu powtarzania. Istnieją metody pozwalające rozwikłać problem niejednoznacznego pomiaru odległości [85]. Cały schemat postępowania działa na podobnej zasadzie jak przy estymacji prędkości radialnej. Zakładając różne okresy powtarzania w kolejnych segmentach, obiekt spoza zasięgu za każdym razem będzie wykrywany na innej odległości (analogicznie jak w przypadku prędkości radialnej miało to miejsce z przesunięciem dopplerowskim). Obserwując szereg wykryć można zauważyć, że ich odległość układa się w specyficzny układ, mający źródło w zmiennym okresie powtarzania impulsów. Samo jego zaobserwowanie stanowi informację o obecności echa spoza zasięgu. Na drodze dalszej obróbki istnieje możliwość uzyskania prawidłowej odległości celu.

Niejednoznaczny pomiar odległości jest chętnie używany, w szczególności, w radarach gdzie ze względu na wysoki okres powtarzania impulsów zasięg jednoznaczny jest niewielki [86].

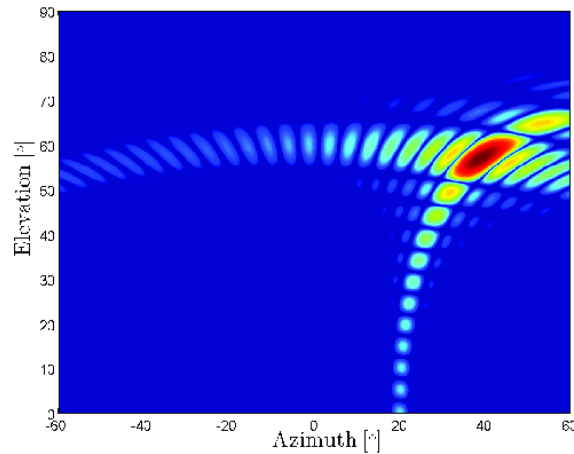
### 5.3 Wspólna estymacja azymutu i elewacji

W wcześniejszych sekcjach przedstawiony został proces estymacji elewacji (rozdział 3) oraz azymutu (rozdział 4). Na ogół szacowanie tych kątów odbioru może być prowadzone w sposób niezależny od siebie. Istnieją jednak warunki, w których kąt azymutu i elewacji są z sobą powiązane i niedokładność szacowania jednego automatycznie wpływa na drugi z kątów. Przykładem takiej sytuacji jest radar z obracaną, pochyloną anteną przy mocno odchylonej wiązce w obu płaszczyznach. Obracanie anteny było już omawiane przy estymacji azymutu i pozwala ono na dookólną obserwację kosztem okresu odświeżania informacji. Pochylenie anteny wynika z kolei faktu, że większość radarów jest projektowana pod kątem obserwacji obiektów znajdujących się nad poziomem horyzontu. Antena o równomiernie, liniowo rozłożonych elementach posiada charakterystykę promieniowania symetryczną względem osi anteny. Pochylenie anteny pozwala zatem na obserwację obiektów znajdujących się na wysokich kątach elewacyjnych bez konieczności znacznego odchylania wiązki.

Odchylenie anteny jest zatem zabiegiem poprawiającym zdolności obserwacyjne radaru. Wiąże się jednak z utrudnieniem procesu estymacji. Z punktu obserwacji anteny (tak, jak prowadzona jest estymacja), wraz z jej obrotem zmienia się nie tylko azymut ale również kąt elewacji obiektu:

$$\begin{aligned}\phi_L &= \arcsin[-\cos\theta\cos\phi\sin P + \sin\phi\cos P] \\ \theta_L &= \arcsin\left[\sin\theta\frac{\cos\phi}{\cos\phi_L}\right],\end{aligned}\tag{5.2}$$

gdzie  $\theta$  i  $\phi$  oznaczają odpowiednio azymut i elewację z punktu widzenia radaru,  $P$  jest kątem pochylenia anteny, a  $\theta_L$  i  $\phi_L$  stanowią pseudoazymut i pseudoelewację - namiary na cel z punktu widzenia płaszczyzny anteny. Brak uwzględnienia pochylenia anteny przy obracanej antenie z góry pogarsza jakość oszacowania elewacji. Dodatkowym problemem są deformacje kształtu wiązki przy jednoczesnym jej odchyleniu w obu płaszczyznach, co pokazano na rys. 5.1. Na jego podstawie można zauważyć, że wiązka zostaje nie tylko poszerzona, ale również odchylona ku dołowi i na zewnątrz. W znaczący sposób wpływa to na prowadzenie estymacji i musi być uwzględnione w syntetycznej odpowiedzi antenowej.



Rys. 5.1: Przykład deformacji wiązki przy jednoczesnym znacznym odchyleniu w płaszczyźnie azymutu i elewacji [33].

Połączenie obu tych zjawisk (deformacja wiązki oraz zmiana elewacji i azymutu obiektu przy obrocie anteny) skutkuje znacząco utrudnioną estymacją, w której współrzędne kątowe nie są niezależne. Ich wzajemna zależność jest ponadto nieliniowa, przez co nie istnieje prosta transformacja układu przywracająca możliwość rozdzielnego szacowania kątów (w odróżnieniu do sytuacji z anteną nieruchomą, dla której taka transformacja istnieje). Zgodnie z [33], estymację w takich warunkach można wykonywać w sposób iteracyjny - zgrubnie szacując elewację oraz azymut a następnie korygując położenia w oparciu o wypracowane wcześniej wartości kątów. Po kilku aktualizacjach oszacowań uzyskuje się wartości zbliżone do prawdziwych. Zaletą takiego podejścia jest niższa złożoność obliczeniowa niż gdyby miało to miejsce przy lokalizacji ekstremum funkcji kosztu dla obu kątów jednocześnie.

## 5.4 Złożoność obliczeniowa wykorzystanych algorytmów

Złożoność obliczeniowa jest jednym z decydujących o praktycznej użyteczności algorytmów przetwarzania sygnałów. Dzięki ciągłemu wzrostowi mocy obliczeniowej komputerów przetwarzających sygnały radarowe istnieje możliwość implementacji coraz bardziej złożonych rozwiązań, pozwalających na określenie współrzędnych z większą precyzją. Z tego samego względu coraz częściej można spotkać w radarach zaawansowane metody przetwarzania jak cyfrowe formowanie wiązek, bardziej złożone metody detekcji, estymacji, czy możliwość śledzenia większej liczby obiektów.

Dawniej popularną metodą estymacji była opisywana w sekcji 2.2.1 metoda monoimpulsowa [87]. Obecnie nadal znajduje ona zastosowanie w prostych radarach, jednak przy obserwacji więcej niż jednego obiektu (bądź w przypadku wystąpienia wielodrogowości) jakość szacowanego kąta ulega znaczącej degradacji. Jej główną zaletą jest szybkość działania, co umożliwia implementację na starszym, bądź mało wydajnym sprzęcie. Szybki rozwój elektroniki umożliwił wykorzystanie w radarach podzespołów o nieporównywalnie większej mocy obliczeniowej niż miało to miejsce jeszcze kilkanaście lat temu. Obecnie możliwe do kupienia jednostki obliczeniowe w standardzie utwardzonym (wzmocniona konstrukcja, roz-

---

szerzony zakres temperatur pracy) posiadają wielordzeniowe, wysoko taktowane procesory, wyposażone dodatkowo w znaczną ilość pamięci podręcznej oraz jednostki przetwarzania wektorowego.

W celu sprawdzenia, czy obecnie dostępne na rynku podzespoły są w stanie wykonywać zaproponowane algorytmy odpowiednio szybko, aby móc pracować w czasie rzeczywistym wykonane zostały testy, których głównym celem był pomiar czasu wykonywanych obliczeń. W tym celu założono symulację, w której estymowano elewację pojedynczego obiektu z uwzględnieniem wielodrogowości. Założono, że radar posiada maksymalny jednoznaczny zasięg obserwacji  $R_{max} = 100km$ , co przy  $N = 32$  sondowań w segmencie dawało czas trwania segmentu równy około  $\tau_s \approx 21ms$ . Jest to jednocześnie czas, w którym muszą zostać wykonane wszystkie obliczenia niezbędne do przeprowadzenia procesu estymacji. Liczba elementów anteny wynosiła  $M = 16$ , przyjęto jednak, że dane dostarczane są do estymacji w postaci  $B = 6$  wiązek. Założono, że na proces estymacji poświęcony jest cały komputer, a pozostałe moduły wykonywane są na innych procesorach. Wykorzystano jednostkę Intel i7-6700HQ - procesor taktowany do 3.5 GHz, z 4 fizycznymi rdzeniami. Jest to dosyć stara (z punktu widzenia rynku elektronicznego) jednostka, pochodząca z 3 kwartału 2015 roku. Obecnie dostępne procesory podobnej klasy zapewniają około 3-krotnie większą moc obliczeniową. Ponadto, oprogramowanie uruchamiane było w środowisku Octave (darmowy odpowiednik Matlaba), które jest dosyć powolne. Oprogramowanie napisane w wydajniejszym języku (np. C++) pozwoliłoby uzyskać znacząco niższe czasy obliczeń. Porównano 5 algorytmów:

- monoimpulsowy,
- stochastyczny największej wiarygodności z założeniem lustrzanego odbicia,
- stochastyczny największej wiarygodności z założeniem obecności dwóch niezależnych źródeł sygnału,
- deterministyczny największej wiarygodności z założeniem lustrzanego odbicia,
- deterministyczny największej wiarygodności z założeniem obecności dwóch niezależnych źródeł sygnału.

Do poszukiwania ekstremum funkcji kosztu wykorzystano wbudowaną w Octave metodę *fminsearch* bazującą na bezgradientowym algorytmie Nelder–Mead [81]. Kryterium końca pracy było uzyskanie oszacowania kąta elewacji z dokładnością do  $0.01^\circ$ . Uzyskane czasy przetwarzania przedstawiono w tabeli 5.1.

Wszystkie z przetestowanych algorytmów posiadają czas wykonywania poniżej okresu powtarzania segmentów ( $\tau_s \approx 21ms$ ) co oznacza, że nawet zaimplementowane w tak niewydajnym środowisku jak Octave nadają się do pracy w czasie rzeczywistym. Na komputerze faktycznie wykorzystywanym do estymacji w radarze algorytmy działają kilkadziesiąt do kilkuset razy szybciej. Ponadto optymalizacja wykorzystania rdzeni procesora umożliwia równoległe estymowanie kątów pochodzących z różnych wykryć. W efekcie moduł estymacji jest w stanie określić nawet kilkaset położeń obiektów obserwowanych w każdym z segmentów.

Sposób estymacji	Czas [ms]
Estymator monoimpulsowy	0.4526
Stochastyczny MLE założenie $\phi_m = -\phi_d$	8.4531
Stochastyczny MLE założenie 2 źródeł	16.0438
Deterministyczny MLE założenie $\phi_m = -\phi_d$	7.6726
Deterministyczny MLE założenie 2 źródeł	13.0520

Tab. 5.1: Uzyskane czasy obliczeń pojedynczej estymaty kąta odbioru sygnału dla estymacji elewacji.

## 5.5 Podsumowanie

Jak pokazano w powyższym rozdziale, tematyka radarów posiada jeszcze wiele zagadnień, które w powyższej pracy zostały ledwie poruszone, a mają związek z estymacją współrzędnych. Dalszy rozwój techniki radarowej, w szczególności algorytmów przetwarzania, będzie korzystał z stałego wzrostu dostępnej mocy obliczeniowej, co umożliwi implementację coraz bardziej złożonych modeli i metod pozwalających poprawić jakość oszacowania, jak i uodpornić na skrajnie niekorzystne warunki pracy. W trakcie konferencji radiolokacyjnych można zaobserwować dziedziny szczególnego zainteresowania, co może sugerować kierunki rozwoju w przyszłości. Do takich zaliczyć można przykładowo zastosowanie sztucznej inteligencji w celu klasyfikacji obiektów obserwowanych przez radar [88, 89, 90, 91], czy zagadnienia związane z detekcją i śledzeniem niewielkich obiektów np. dronów [92, 93, 94, 95, 96]. Choć temat estymacji współrzędnych nie jest często poruszany, jednak jak pokazała powyższa praca - nadal istnieją możliwości poprawy, chociażby na polu złożoności obliczeniowej.

## Rozdział 6

# Podsumowanie rozprawy

Precyzyjne określanie współrzędnych obserwowanego przez radar obiektu jest jedną z jego podstawowych funkcji. Z punktu widzenia dozoru ruchu lotniczego wysoka dokładność szacowania położenia samolotów pozwala na zachowanie bezpiecznej odległości między nimi, jak i jest w stanie dostarczyć informacji niezbędnych do lądowania w przypadku awarii pokładowej. W przypadku wojskowych radarów śledzących jakość estymacji ma jeszcze większe znaczenie. Wysoka dokładność określenia położenia pozwala odpowiednio nakierować systemy obrony przeciwrakietowej, podnosząc tym samym prawdopodobieństwo pomyślnego unieszkodliwienia zagrożenia. Dzięki wbudowanym w nowoczesne radary artyleryjskie modułom takim jak moduł śledzenia, czy przelicznik balistyczny istnieje możliwość predykcji trajektorii obserwowanego celu, pozwalając ponadto na jego klasyfikację. Tu również jakość estymacji ma wpływ na prawdopodobieństwo poprawnego określenia obserwowanego obiektu.

Biorąc pod uwagę zróżnicowane warunki w jakich urządzenia tego typu mogą pracować, estymacja współrzędnych staje się trudnym i złożonym zadaniem. Jak pokazano w rozdziale 2 istnieje wiele metod pozwalających na określenie azymutu i elewacji obserwowanego obiektu. Wszystkie zostały przetestowane w sekcji 7.2, gdzie przebadano ich zachowanie dla różnego SNR, różnej liczby obserwacji oraz anteny złożonej z różnej liczby elementów odbiorczych. Część z estymatorów poddano również testom zakładającym obecność więcej niż jednego źródła sygnału. Została tu jednak wykluczona metoda monoimpulsowa. Stanowi ona proste i szybkie rozwiązanie problemu estymacji, jednak przedstawione testy potwierdziły główną tezę rozprawy "Zastosowanie estymatorów największej wiarygodności pozwala poprawić dokładność estymacji współrzędnych kątowych w stosunku do metody monoimpulsowej".

Część z omówionych w rozdziale drugim algorytmów do poprawnego działania wymaga spełnienia pewnych kryteriów. Dla przykładu, estymator monoimpulsowy nie pozwala na rozróżnienie liczby obiektów, zatem nie powinien być używany przy obecności więcej niż jednego źródła sygnału. Część spośród omawianych metod bazuje na odwrotności estymaty macierzy kowariancji, co wymusza jej nieosobliwość. Spełnienie tego warunku wymaga zgromadzenia odpowiedniej liczby obserwacji. Sama macierz kowariancji musi być ponadto stacjonarna, co z kolei nie jest spełnione w radarach z obracaną anteną. Taki tryb pracy wymaga odpowiedniego podejścia do procesu estymacji azymutu, co zostało przedstawione

w rozdziale 4 - zaproponowano tam zmodyfikowane warianty estymatorów największej wiarygodności, które umożliwiły efektywne szacowanie współrzędnych. Ich skuteczność potwierdziły testy oparte o dane symulowane jak i rzeczywiste rejestracje sygnałów radarowych. Przedstawiony algorytm wykazały wyższość nad klasyczną metodą monoimpulsową. Zaproponowano ponadto zmodyfikowany wariant algorytmu MVDR pozwalający na pracę z obracaną anteną. Testy wykazały wyższość (w przypadku dwóch obserwowanych obiektów) lub zgodność (dla pojedynczego obiektu) proponowanego rozwiązania z metodą opartą o klasyczne formowanie wiązek. Przytoczone testy potwierdzają pomocniczą tezę pracy: "Możliwe jest skonstruowanie parametrycznych i nieparametrycznych estymatorów azymutu o rozdzielczości większej niż wykazywana przez klasyczną metodę monoimpulsową".

Określanie elewacji również może stanowić wyzwanie. Jednym z częściej spotykanych problemów jest występowanie zjawiska wielodrogowości, które jest szczególnie dokuczliwe na niskich kątach ponad poziomem horyzontu. Problem ten został szerzej omówiony w rozdziale 3, gdzie przedstawiono sposób modelowania odbić od ziemi. Rozważono zarówno lustrzany model odbicia, jak i jego rozproszony wariant. Na ich podstawie wykonano symulacje, w których wykazano nieprawidłową pracę klasycznych estymatorów. Zaproponowane zostały algorytmu uodpornionej estymacji, które pozwoliły na zredukowanie odsetka grubych błędów jak i redukcję wariancji oszacowań. Algorytmy te wykazały ponadto wysoką skuteczność działania w testach opartych rzeczywiste rejestracje radarowe. Potwierdza to jedną z tez pomocniczych pracy: "Możliwa jest modyfikacja estymatora największej wiarygodności w taki sposób, aby zwiększyć jego odporność na występowanie odbicia rozproszonego".

Zaproponowane rozwiązania estymacji azymutu i elewacji wymagają na ogół większej ilości obliczeń od klasycznych odpowiedników. Proponowane metody występowały w kilku wariantach pozwalając na uzyskanie kompromisu między złożonością obliczeniową a wysoką jakością oszacowań. W rozdziale 5 poruszono zagadnienie możliwości implementacji na urządzeniach pracujących w czasie rzeczywistym. Przeprowadzony test szybkości działania wykazał, że jest możliwe odpowiednio szybkie wykonanie procesu estymacji, które pozwala na ciągłą pracę radaru. Potwierdza to przytoczoną wcześniej pomocniczą tezę pracy: "Złożoność obliczeniowa estymatorów największej wiarygodności pozwala na ich implementację w systemie czasu rzeczywistego".

## Wykaz oryginalnych osiągnięć

1. Zbadanie możliwości zastosowania metod automatycznego doboru rzędu modelu do poprawy dokładności oszacowań elewacji w warunkach propagacji wielodrogowej. (Rozdział 3)
2. Opracowanie uodpornionego estymatora największej wiarygodności pozwalającego zmniejszyć błędy estymacji elewacji w warunkach propagacji wielodrogowej. (Rozdział 3)
  - (a) Zaproponowano kilka wariantów metody, różniących się zastosowanymi przybliżeniami i złożonością obliczeniową. Wykonano badania ich zachowań w oparciu o symulacje oraz rzeczywiste rejestracje radarowe.

- 
3. Opracowanie parametrycznych algorytmów estymacji azymutu i oceny liczby celów dla radaru z obracaną anteną. (Rozdział 4)
    - (a) Zaproponowany estymator azymutu stanowi przybliżenie stochastycznego estymatora największej wiarygodności. Charakteryzuje się on obniżoną złożonością obliczeniową, pozwalającą na implementację w systemach czasu rzeczywistego. Estymator cechuje wysoka dokładność estymacji, co potwierdzają testy wykazujące zbieżność z ograniczeniem Craméra-Rao. Umożliwia on ponadto estymację położenia celów, których liczba przekracza liczbę elementów wektora obserwacji.
    - (b) Metoda oceny liczby celów bazuje na metodzie testowania hipotez. Wykonane badania wskazały, że podejście to charakteryzuje się, w przybliżeniu, własnością stabilizacji poziomu fałszywego alarmu.
  4. Wykonanie analizy wpływu korelacji źródeł na obciążenie, wariancję i błąd średniokwadratowy estymatora azymutu opartego na stochastycznej metodzie największej wiarygodności. (Rozdział 4)
  5. Opracowanie nieparametrycznego estymatora azymutu dla wariantu z obracaną anteną, stanowiącego uogólnienie estymatora Capona na przypadek niestacjonarny. (Rozdział 4)
  6. Opracowanie metod kompensacji błędów spowodowanych deformacjami w radarze z pochyloną anteną i elektronicznym skanowaniem wiązki. (Publikacja [33])

## Najważniejsze publikacje

Poniższe publikacje stanowią fundament niniejszej rozprawy. Zawiera ona wybrane, najważniejsze tematy, które zostały wzbogacone o dodatkowe badania i symulacje, pokazujące szerzej przedstawiający sposób działania opisanych metod i algorytmów. Ze względu na objętość rozprawy część poruszonych w publikacjach zagadnień została zaledwie pokrótce opisana (niejednoznaczny pomiar odległości, niejednoznaczność pomiaru prędkości radialnej, czy efekty deformacji wiązki przy mocnym jej odchyleniu w obu płaszczyznach). Ich lektura może stanowić uzupełnienie tematów, które nie były ściśle powiązane z tezami pracy, a stanowią istotne kwestie z punktu widzenia estymacji.

M. Meller and K. Stawiarski. *Robustified estimators of radar elevation angle using a specular multipath model*. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, 56(2):1623–1636, 2020.

M. Meller and K. Stawiarski. *Soft-decision schemes for radar estimation of elevation at low grazing angles*. **IET Radar Sonar and Navigation**, 13:1934–1942, 2019.

M. Meller, K. Stawiarski, and B. Pikacz. *Estymacja azymutu w radarze z obracaną anteną i szeroką*

wiązką. **9 Konferencja Urządzenia i Systemy Radioelektroniczne**, 2017.

M. Meller and K. Stawiarski. *On DoA Estimation for Rotating Arrays Using Stochastic Maximum Likelihood Approach*. **IEEE Transactions on Signal Processing**, 68:5219–5229, 2020.

M. Meller and K. Stawiarski. *A Comparison of Two Stochastic Maximum Likelihood DoA Estimators – Rotating Array Case*. **2020 IEEE Radar Conference (RadarConf20)**, pages 1–5, 09 2020.

M. Meller and K. Stawiarski. *Capon-like DoA estimator for rotating arrays*. **2019 International Radar Conference (RADAR)**, pages 1–6, 2019.

K. Stawiarski and M. Meller. *Adaptation of radar software to work with ambiguous distance measurement*. **Radioelectronic Systems Conference 2019**, volume 11442 of Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, February 2020.

M. Meller and K. Stawiarski. *A concept of software extension of 3D low-PRF radar systems to 4D semi-medium-PRF radar systems*. **Radioelectronic Systems Conference 2019**, volume 11442 of Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, February 2020.

M. Meller and K. Stawiarski. *On Radar DoA Estimation and Tilted Rotating Electronically Scanned Arrays*. **2020 21st International Radar Symposium (IRS)**, pages 292–297, 2020.



# Rozdział 7

## Dodatek

### 7.1 Dodatek 1: Wyprowadzenie ograniczenia Craméra-Rao dla standardowego zagadnienia estymacji kąta

Zakładając wektor parametrów postaci:

$$\Theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_d], \quad (7.1)$$

twierdzenie Craméra-Rao pozwala określić minimalną wariancję estymowanego parametru jaką jest w stanie osiągnąć estymator nieobciążony. Dokładniej, macierz będąca różnicą macierzy kowariancji ( $\Sigma_{\Theta}$ ) i odwrotności macierzy informacyjnej Fishera ( $\mathcal{F}^{-1}(\Theta)$ ) jest macierzą nieujemnie określoną:

$$\Sigma_{\Theta} - \mathcal{F}^{-1}(\Theta) \geq \mathbf{0}. \quad (7.2)$$

Macierz Fishera uzyskuje się z wykorzystaniem pochodnych drugiego rzędu logarytmicznej funkcji wiarygodności w punktach stanowiących prawidłowe wartości tych parametrów.

$$\mathcal{F}(\Theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{1,1}(\Theta) & \mathcal{F}_{2,1}(\Theta) & \dots & \mathcal{F}_{d,1}(\Theta) \\ \mathcal{F}_{2,1}(\Theta) & \ddots & \ddots & \mathcal{F}_{d,2}(\Theta) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{F}_{d,1}(\Theta) & \mathcal{F}_{d,2}(\Theta) & \dots & \mathcal{F}_{d,d}(\Theta) \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

przy czym:

$$\mathcal{F}_{m,n} = -E \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta_m \partial \theta_n} \ln \mathbf{L}(\Theta, \mathbf{Y}) \right]. \quad (7.4)$$

Macierz Fishera posiada wymiar  $d \times d$ , gdzie  $d$  jest liczbą parametrów modelu.

W równaniach pozwalających określić wartości macierzy Fishera bardzo często pojawia się postać odpowiedzi antenowej ( $\mathbf{a}(\theta)$ ), oraz jej pochodna po kącie ( $\frac{\partial \mathbf{a}(\theta)}{\partial \theta}$ ). Dla szyku liniowego wektory te mają postać:

$$\mathbf{a}_n(\theta) = e^{j 2 \pi n d \sin \theta / \lambda}, \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\theta)}{\partial \theta} = \mathbf{a}(\theta) j 2 \pi n d \cos \theta / \lambda, \quad (7.6)$$

gdzie  $d$  oznacza długość fali nośnej, a  $\lambda$  odpowiadającą jej długość fali.

## Model stochastyczny, założenie obecności jednego obiektu

W przypadku modelu stochastycznego, funkcja logarytmicznej wiarygodności przyjmuje postać:

$$\mathbf{L}(\Theta, \mathbf{Y}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_v^2 \pi^M} e^{(-\mathbf{Y}_i^H \sigma_v^{-2}(\theta) \mathbf{Y}_i)}, \quad (7.7)$$

a wektor parametrów to:

$$\Theta = [\theta \quad \sigma_s^2 \quad \sigma_v^2]. \quad (7.8)$$

W takim wypadku elementy macierzy Fishera można obliczyć za pomocą równania:

$$\mathcal{F}_{m,n}(\Theta) = N \operatorname{tr} \left( \mathbf{R}(\Theta) \frac{\partial \mathbf{R}(\Theta)}{\partial \Theta_m} \mathbf{R}(\Theta) \frac{\partial \mathbf{R}(\Theta)}{\partial \Theta_n} \right), \quad (7.9)$$

gdzie:

$$E[\mathbf{R}(\Theta)] = \mathbf{a}(\theta) \sigma_s^2 \mathbf{a}^H(\theta) + \sigma_v^2 \mathbf{I}, \quad (7.10)$$

$$E \left[ \frac{\partial \mathbf{R}(\Theta)}{\partial \theta} \right] = \frac{\partial \mathbf{a}(\theta)}{\partial \theta} \sigma_s^2 \mathbf{a}^H(\theta) + \mathbf{a}(\theta) \sigma_s^2 \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta)}{\partial \theta}, \quad (7.11)$$

$$E \left[ \frac{\partial \mathbf{R}(\Theta)}{\partial \sigma_s^2} \right] = \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta), \quad (7.12)$$

$$E \left[ \frac{\partial \mathbf{R}(\Theta)}{\partial \sigma_v^2} \right] = \mathbf{I}. \quad (7.13)$$

## Model stochastyczny, założenie obecności dwóch obiektów

Dla modelu stochastycznego z założeniem obecności dwóch obiektów funkcja wiarygodności, oraz jej logarytm mają następującą postać:

$$\mathbf{L}(\Theta, \mathbf{Y}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{|\mathbf{R}(\Theta)| \pi^M} e^{(-\mathbf{Y}_i^H \mathbf{R}^{-1}(\Theta) \mathbf{Y}_i)}, \quad (7.14)$$

$$\mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y}) = -M N \ln(\pi) - N \ln(|\mathbf{R}(\Theta)|) - \sum_{i=1}^N \mathbf{Y}_i^H \mathbf{R}^{-1}(\Theta) \mathbf{Y}_i. \quad (7.15)$$

Wektor parametrów ulega poszerzeniu względem (7.8) o dodatkowy kąt i odpowiadającą mu amplitudę.

W modelu założono brak korelacji źródeł.

$$\Theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \sigma_1^2 \quad \sigma_2^2 \quad \sigma_v^2] \quad (7.16)$$

W efekcie, elementy macierzy Fishera mają postać daną poniższymi wzorami:

$$\mathcal{F}_{m,n}(\Theta) = N \operatorname{tr} \left( \mathbf{R}(\Theta) \frac{\partial \mathbf{R}(\Theta)}{\partial \Theta_m} \mathbf{R}(\Theta) \frac{\partial \mathbf{R}(\Theta)}{\partial \Theta_n} \right), \quad (7.17)$$

$$E[\mathbf{R}(\Theta) = \mathbf{A}(\Theta) \Sigma(\Theta) \mathbf{A}^H(\Theta) + \sigma_v^2 \mathbf{I}] =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_1) & \mathbf{a}(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_1) & \mathbf{a}(\theta_2) \end{bmatrix}^H + \sigma_v^2 \mathbf{I}, \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial \mathbf{R}(\Theta)}{\partial \theta_1} \right] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_1)}{\partial \theta_1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_1) & \mathbf{a}(\theta_2) \end{bmatrix}^H + \\ &\begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_1) & \mathbf{a}(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_1)}{\partial \theta_1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^H, \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial \mathbf{R}(\Theta)}{\partial \theta_2} \right] &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_2)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_1) & \mathbf{a}(\theta_2) \end{bmatrix}^H + \\ &\begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_1) & \mathbf{a}(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_2)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}^H, \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$E \left[ \frac{\partial \mathbf{R}(\Theta)}{\partial \sigma_1^2} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_1) & \mathbf{a}(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_1) & \mathbf{a}(\theta_2) \end{bmatrix}^H, \quad (7.21)$$

$$E \left[ \frac{\partial \mathbf{R}(\Theta)}{\partial \sigma_2^2} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_1) & \mathbf{a}(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_1) & \mathbf{a}(\theta_2) \end{bmatrix}^H, \quad (7.22)$$

$$E \left[ \frac{\partial \mathbf{R}(\Theta)}{\partial \sigma_n^2} \right] = \mathbf{I}. \quad (7.23)$$

## Model deterministyczny, założenie obecności jednego obiektu

Dla modelu deterministycznego z założeniem jednego echa funkcja wiarygodności i jej logarytm mają postać:

$$\mathbf{L}(\Theta, \mathbf{Y}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{(\pi\sigma_v^2)^M} e^{\left( -\frac{\|se^{j\alpha} \mathbf{a}(\theta) - \mathbf{y}_i\|^2}{\sigma_v^2} \right)}, \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y}) &= \ln(L(\Theta, \mathbf{Y})) = \sum_{i=1}^N \left( -M \ln(\pi\sigma_v^2) - \frac{\|se^{j\alpha} \mathbf{a}(\theta) - \mathbf{y}_i\|^2}{\sigma_v^2} \right) \\ &= -MN \ln(\pi\sigma_v^2) - \frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N (se^{j\alpha} \mathbf{a}(\theta) - \mathbf{y}_i)^H (se^{j\alpha} \mathbf{a}(\theta) - \mathbf{y}_i) \\ &= -MN \ln(\pi\sigma_v^2) - \frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N [Ms^2 - se^{-j\alpha} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}_i - se^{j\alpha} \mathbf{y}_i^H \mathbf{a}(\theta) + \mathbf{y}_i^H \mathbf{y}_i]. \end{aligned} \quad (7.25)$$

W przypadku modelu deterministycznego, wektor parametrów wygląda podobnie jak w modelu stochastycznym (7.8):

$$\Theta = [\theta \quad s \quad \alpha \quad \sigma_v^2]. \quad (7.26)$$

W modelu deterministycznym równania nie upraszczają się tak znacząco jak w przypadku modelu stochastycznego. Obliczanie wartości macierzy Fishera odbywa się za pomocą ogólnego wzoru (7.3),

wymagane są zatem pochodne pierwszego i drugiego rzędu:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta} = \frac{s}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N \left[ e^{-j\alpha} \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{y}_i + e^{j\alpha} \mathbf{y}_i^H \frac{\partial \mathbf{a}(\theta)}{\partial \theta} \right], \quad (7.27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s} = -\frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N [2Ms - e^{-j\alpha} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}_i - e^{j\alpha} \mathbf{y}_i^H \mathbf{a}(\theta)], \quad (7.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha} = -\frac{js}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N [e^{-j\alpha} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}_i - e^{j\alpha} \mathbf{y}_i^H \mathbf{a}(\theta)]. \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2} = -\frac{MN}{\sigma_v^2} + \frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N [Ms^2 - se^{-j\alpha} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}_i - se^{j\alpha} \mathbf{y}_i^H \mathbf{a}(\theta) + \mathbf{y}_i^H \mathbf{y}_i], \quad (7.30)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta^2} \right] = -\frac{2Ns^2}{\sigma_v^2} \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{a}(\theta)}{\partial \theta}, \quad (7.31)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta \partial s} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s \partial \theta} \right] = 0, \quad (7.32)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta \partial \alpha} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha \partial \theta} \right] = 0, \quad (7.33)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta \partial \sigma_v^2} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2 \partial \theta} \right] = 0, \quad (7.34)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s^2} \right] = -\frac{2MN}{\sigma_v^2}, \quad (7.35)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s \partial \alpha} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha \partial s} \right] = 0, \quad (7.36)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s \partial \sigma_v^2} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2 \partial s} \right] = 0, \quad (7.37)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha^2} \right] = -\frac{2s^2 MN}{\sigma_v^2}, \quad (7.38)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha \partial \sigma_v^2} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2 \partial \alpha} \right] = 0, \quad (7.39)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2} \right] = -\frac{MN}{\sigma_v^2}. \quad (7.40)$$

## Model deterministyczny, założenie obecności dwóch obiektów

Deterministyczny model zakładający obecność dwóch źródeł sygnału jest znacznie bardziej skomplikowany od stochastycznego odpowiednika. W postaci stochastycznej wektor parametrów (7.16) posiada wyłącznie rzeczywiste wartości. W przypadku modelu deterministycznego, zamiast wariancji amplitudy ( $s_k^2$ ) pojawia się jej wartość, która w ogólnym przypadku jest zespolona. Oznacza to konieczność liczenia pochodnych z liczb zespolonych. Problem ten został ominięty poprzez zapis w postaci modułu ( $s_k$ ) i fazy ( $\alpha_k$ ). Oznacza to, że wektor parametrów posiada nie 5, a 7 wartości, co znacząco powiększa liczbę elementów macierzy Fishera. W przypadku kiedy obiektem zainteresowania jest wyłącznie określenie ograniczenia nakładanego na estymowane kąty odbioru sygnału istnieje możliwość uproszczenia całości i przyjęcie parametru jako względnej różnicy w fazie między amplitudami ( $\alpha_d = \alpha_1 - \alpha_2$ ), co zmniejszyłoby wymiar macierzy Fishera. W obecnej sekcji rozpatrywana jest jednak pełna postać. Funkcja wiarygodności wraz z jej logarytmem mają postać:

$$\mathbf{L}(\Theta, \mathbf{Y}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{(\pi\sigma_v^2)^M} e^{-\frac{\|s_1 e^{j\alpha_1} \mathbf{a}(\theta_1) + s_2 e^{j\alpha_2} \mathbf{a}(\theta_2) - \mathbf{y}_i\|^2}{\sigma_v^2}}, \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y}) &= \ln(\mathbf{L}(\Theta, \mathbf{Y})) = \sum_{i=1}^N \left( -M \ln(\pi\sigma_v^2) - \frac{\|s_1 e^{j\alpha_1} \mathbf{a}(\theta_1) + s_2 e^{j\alpha_2} \mathbf{a}(\theta_2) - \mathbf{y}_i\|^2}{\sigma_v^2} \right) \\ &= -MN \ln(\pi\sigma_v^2) - \frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N (s_1 e^{j\alpha_1} \mathbf{a}(\theta_1) + s_2 e^{j\alpha_2} \mathbf{a}(\theta_2) - \mathbf{y}_i)^H \\ &\quad (s_1 e^{j\alpha_1} \mathbf{a}(\theta_1) + s_2 e^{j\alpha_2} \mathbf{a}(\theta_2) - \mathbf{y}_i) \end{aligned} \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned} &= -MN \ln(\pi\sigma_v^2) - \frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N \left[ Ms_1^2 + s_1 s_2 e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)} \mathbf{a}^H(\theta_1) \mathbf{a}(\theta_2) - s_1 e^{-j\alpha_1} \mathbf{a}^H(\theta_1) \mathbf{y}_i \right. \\ &\quad \left. + s_2 s_1 e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \mathbf{a}^H(\theta_2) \mathbf{a}(\theta_1) + Ms_2^2 - s_2 e^{-j\alpha_2} \mathbf{a}^H(\theta_2) \mathbf{y}_i \right. \\ &\quad \left. - s_1 e^{j\alpha_1} \mathbf{y}_i^H \mathbf{a}(\theta_1) - s_2 e^{j\alpha_2} \mathbf{y}_i^H \mathbf{a}(\theta_2) + \mathbf{y}_i^H \mathbf{y}_i \right], \\ &\quad \Theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \sigma_v^2]. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Kolejne wartości pochodnych wymagane do obliczenia macierzy Fishera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_1} &= -\frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N \left[ s_1 e^{-j\alpha_1} \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta_1)}{\partial \theta_1} (s_2 e^{j\alpha_2} \mathbf{a}(\theta_2) - \mathbf{y}_i) \right. \\ &\quad \left. + s_1 e^{j\alpha_1} (s_2 e^{-j\alpha_2} \mathbf{a}^H(\theta_2) - \mathbf{y}_i^H) \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_1)}{\partial \theta_1} \right], \end{aligned} \quad (7.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_2} &= -\frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N \left[ s_2 e^{-j\alpha_2} \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta_2)}{\partial \theta_2} (s_1 e^{j\alpha_1} \mathbf{a}(\theta_1) - \mathbf{y}_i) \right. \\ &\quad \left. + s_2 e^{j\alpha_2} (s_1 e^{-j\alpha_1} \mathbf{a}^H(\theta_1) - \mathbf{y}_i^H) \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_2)}{\partial \theta_2} \right], \end{aligned} \quad (7.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s_1} &= -\frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N \left[ 2Ms_1 + e^{-j\alpha_1} \mathbf{a}^H(\theta_1) (s_2 e^{j\alpha_2} \mathbf{a}(\theta_2) - \mathbf{y}_i) \right. \\ &\quad \left. + e^{j\alpha_1} (s_2 e^{-j\alpha_2} \mathbf{a}^H(\theta_2) - \mathbf{y}_i^H) \mathbf{a}(\theta_1) \right], \end{aligned} \quad (7.46)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s_2} = -\frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N [2Ms_2 + e^{-j\alpha_2} \mathbf{a}^H(\theta_2) (s_1 e^{j\alpha_1} \mathbf{a}(\theta_1) - \mathbf{y}_i) + e^{j\alpha_2} (s_1 e^{-j\alpha_1} \mathbf{a}^H(\theta_1) - \mathbf{y}_i^H) \mathbf{a}(\theta_2)], \quad (7.47)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N [-js_1 e^{-j\alpha_1} \mathbf{a}^H(\theta_1) (s_2 e^{j\alpha_2} \mathbf{a}(\theta_2) - \mathbf{y}_i) + js_1 e^{j\alpha_1} (s_2 e^{-j\alpha_2} \mathbf{a}^H(\theta_2) - \mathbf{y}_i^H) \mathbf{a}(\theta_1)], \quad (7.48)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha_2} = -\frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N [-js_2 e^{-j\alpha_2} \mathbf{a}^H(\theta_2) (s_1 e^{j\alpha_1} \mathbf{a}(\theta_1) - \mathbf{y}_i) + js_2 e^{j\alpha_2} (s_1 e^{-j\alpha_1} \mathbf{a}^H(\theta_1) - \mathbf{y}_i^H) \mathbf{a}(\theta_2)], \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2} &= -\frac{MN}{\sigma_v^2} + \frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N [Ms_1^2 + s_1 s_2 e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)} \mathbf{a}^H(\theta_1) \mathbf{a}(\theta_2) - s_1 e^{-j\alpha_1} \mathbf{a}^H(\theta_1) \mathbf{y}_i \\ &+ s_2 s_1 e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \mathbf{a}^H(\theta_2) \mathbf{a}(\theta_1) + Ms_2^2 - s_2 e^{-j\alpha_2} \mathbf{a}^H(\theta_2) \mathbf{y}_i \\ &- s_1 e^{j\alpha_1} \mathbf{y}_i^H \mathbf{a}(\theta_1) - s_2 e^{j\alpha_2} \mathbf{y}_i^H \mathbf{a}(\theta_2) + \mathbf{y}_i^H \mathbf{y}_i]. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Pochodne drugiego rzędu:

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_1^2} \right] = -\frac{2Ns_1^2}{\sigma_v^2} \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta_1)}{\partial \theta_1} \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_1)}{\partial \theta_1}, \quad (7.51)$$

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right] &= E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} \right] \\ &= -\frac{Ns_1 s_2}{\sigma_v^2} \left[ e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta_1)}{\partial \theta_1} \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_2)}{\partial \theta_2} + e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta_2)}{\partial \theta_2} \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_1)}{\partial \theta_1} \right], \end{aligned} \quad (7.52)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_1 \partial s_1} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s_1 \partial \theta_1} \right] = 0, \quad (7.53)$$

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_1 \partial s_2} \right] &= E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s_2 \partial \theta_1} \right] \\ &= -\frac{Ns_1}{\sigma_v^2} \left[ e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta_1)}{\partial \theta_1} \mathbf{a}(\theta_2) + e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \mathbf{a}^H(\theta_2) \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_1)}{\partial \theta_1} \right], \end{aligned} \quad (7.54)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_1 \partial \alpha_1} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha_1 \partial \theta_1} \right] = -\frac{jNs_1^2}{\sigma_v^2} \left[ \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta_1)}{\partial \theta_1} \mathbf{a}(\theta_1) - \mathbf{a}^H(\theta_1) \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_1)}{\partial \theta_1} \right], \quad (7.55)$$

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_1 \partial \alpha_2} \right] &= E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha_2 \partial \theta_1} \right] \\ &= -\frac{jNs_1 s_2}{\sigma_v^2} \left[ e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta_1)}{\partial \theta_1} \mathbf{a}(\theta_2) - e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \mathbf{a}^H(\theta_2) \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_1)}{\partial \theta_1} \right], \end{aligned} \quad (7.56)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_1 \partial \sigma_v^2} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2 \partial \theta_1} \right] = 0, \quad (7.57)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_2^2} \right] = -\frac{2Ns_2^2}{\sigma_v^2} \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta_2)}{\partial \theta_2} \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_2)}{\partial \theta_2}, \quad (7.58)$$

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_2 \partial s_1} \right] &= E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s_1 \partial \theta_2} \right] \\ &= -\frac{Ns_2}{\sigma_v^2} \left[ e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta_2)}{\partial \theta_2} \mathbf{a}(\theta_1) + e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)} \mathbf{a}^H(\theta_1) \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_2)}{\partial \theta_2} \right], \end{aligned} \quad (7.59)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_2 \partial s_2} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s_2 \partial \theta_2} \right] = 0, \quad (7.60)$$

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_2 \partial \alpha_1} \right] &= E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha_1 \partial \theta_2} \right] \\ &= -\frac{jNs_1s_2}{\sigma_v^2} \left[ e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta_2)}{\partial \theta_2} \mathbf{a}(\theta_1) - e^{j(\alpha_2 - \alpha_2)} \mathbf{a}^H(\theta_1) \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_2)}{\partial \theta_2} \right], \end{aligned} \quad (7.61)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_2 \partial \alpha_2} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha_2 \partial \theta_2} \right] = -\frac{jNs_2^2}{\sigma_v^2} \left[ \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta_2)}{\partial \theta_2} \mathbf{a}(\theta_2) - \mathbf{a}^H(\theta_2) \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_2)}{\partial \theta_2} \right], \quad (7.62)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \theta_2 \partial \sigma_v^2} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2 \partial \theta_2} \right] = 0, \quad (7.63)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s_1^2} \right] = -\frac{2MN}{\sigma_v^2}, \quad (7.64)$$

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s_1 \partial s_2} \right] &= E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s_2 \partial s_1} \right] \\ &= -\frac{N}{\sigma_v^2} \left[ e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)} \mathbf{a}^H(\theta_1) \mathbf{a}(\theta_2) + e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \mathbf{a}^H(\theta_2) \mathbf{a}(\theta_1) \right], \end{aligned} \quad (7.65)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s_1 \partial \alpha_1} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha_1 \partial s_1} \right] = 0, \quad (7.66)$$

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s_1 \partial \alpha_2} \right] &= E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha_2 \partial s_1} \right] \\ &= -\frac{jNs_2}{\sigma_v^2} \left[ e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)} \mathbf{a}^H(\theta_1) \mathbf{a}(\theta_2) - e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \mathbf{a}^H(\theta_2) \mathbf{a}(\theta_1) \right], \end{aligned} \quad (7.67)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s_1 \partial \sigma_v^2} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2 \partial s_1} \right] = 0, \quad (7.68)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s_2^2} \right] = -\frac{2MN}{\sigma_v^2}, \quad (7.69)$$

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s_2 \partial \alpha_1} \right] &= E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha_1 \partial s_2} \right] \\ &= -\frac{jNs_1}{\sigma_v^2} \left[ e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \mathbf{a}^H(\theta_2) \mathbf{a}(\theta_1) - e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)} \mathbf{a}^H(\theta_1) \mathbf{a}(\theta_2) \right], \end{aligned} \quad (7.70)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s_2 \partial \alpha_2} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha_2 \partial s_2} \right] = 0, \quad (7.71)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial s_2 \partial \sigma_v^2} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2 \partial s_2} \right] = 0, \quad (7.72)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha_1^2} \right] = -\frac{2MN s_1^2}{\sigma_v^2}, \quad (7.73)$$

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right] &= E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} \right] \\ &= -\frac{N s_1 s_2}{\sigma_v^2} \left[ e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)} \mathbf{a}^H(\theta_1) \mathbf{a}(\theta_2) + e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \mathbf{a}^H(\theta_2) \mathbf{a}(\theta_1) \right], \end{aligned} \quad (7.74)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha_1 \partial \sigma_v^2} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2 \partial \alpha_1} \right] = 0, \quad (7.75)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha_2^2} \right] = -\frac{2MN s_2^2}{\sigma_v^2}, \quad (7.76)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \alpha_2 \partial \sigma_v^2} \right] = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2 \partial \alpha_2} \right] = 0, \quad (7.77)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{Y})}{\partial \sigma_v^2} \right] = -\frac{MN}{\sigma_v^2}. \quad (7.78)$$



---

## 7.2 Dodatek 2: Testy estymatorów klasycznych

### Sposób badania estymatorów

Każdy z przedstawionych w rozdziale 2 estymatorów został przebadany za pomocą kilku testów. Miały one na celu sprawdzenie wariancji estymowanego kąta odbioru sygnału i porównanie go z ograniczeniem Craméra-Rao. Zbadane zostało również obciążenie estymowanego kąta. Na wykresach obciążenia zaznaczono 95% przedział ufności ( $\pm 2\sqrt{\frac{\text{var}(\theta)}{L}}$ , gdzie  $L$  oznacza liczbę wykonanych symulacji Monte Carlo, która była jednakowa w każdym z testów i wynosiła 2000). Ze względu na szeroką rozpiętość uzyskanych wyników (kilka rzędów wielkości), na wykresach przedstawiono moduł obciążenia w skali logarytmicznej. W efekcie niemożliwe było zaznaczenie w standardowy sposób przedziału ufności (przedział w zakresie  $\pm C$ ), ograniczono się jedynie do zaznaczenia kreską jego górnej wartości.

Pierwszy z testów sprawdzał wpływ liczby elementów antenowych na wariancję i obciążenie estymowanego kąta odbioru sygnału przy stałej lokalizacji źródła echa ( $\theta = 0^\circ$ ),  $SNR = 10$  dB, oraz liczba obserwacji ( $N = 10$ ). Warto podkreślić, że współczynnik  $SNR$  odnosił się do 1 elementu antenowego w związku z czym - wraz ze wzrostem liczby elementów zmieniała się nie tylko charakterystyka odbiorcza szyku antenowego, ale również całkowity poziom sygnału.

Drugi z testów badał zależność między liczbą obserwacji ( $N$ ), a wariancją i obciążeniem estymowanego kąta. Niezmienna pozostawała liczba elementów antenowych ( $M = 32$ ), położenie celu ( $\theta = 0^\circ$ ) oraz  $SNR = 10$  dB.

W trzecim z testów pokazano w jaki sposób zmienia się wariancja i obciążenie estymowanego kąta pod wpływem zmian  $SNR$ . Tym razem stałe parametry to liczba elementów antenowych ( $M = 32$ ), liczba obserwacji ( $N = 10$ ) oraz położenie celu ( $\theta = 0^\circ$ ).

Czwarty i piąty test są bliźniaczymi badaniami, różniącymi się tylko stałymi parametrami pracy. W przypadku testu czwartego są to:  $M = 32$ ,  $N = 10$ , a przy teście piątym  $M = 16$ ,  $N = 32$ . W obu sytuacjach  $SNR$  był jednakowy i wynosił 10 dB. Sam test oparty był o symulację zawierającą dwa źródła sygnału na kątach odpowiednio  $\theta_1$  i  $\theta_2$ , przy czym  $\theta_1 = -\theta_2$ . Estymowane były oba kąty, lecz przedstawione wyniki dotyczą tylko pierwszego z nich. Wykresy prezentują zależność między separacją kątową obu celów ( $\theta_1 - \theta_2$ ) a wariancją i obciążeniem estymowanego kąta. W teście tym nie został uwzględniony estymatory monoimpulsowy ze względu na fakt, że w podstawowej wersji nie pozwala on na poprawną pracę przy więcej niż jednym źródle sygnału.

Każdy z testów został wykonany dwukrotnie: dla deterministycznego (zakładającego stałą amplitudę i fazę stanowiącą realizację zmiennej losowej o rozkładzie równomiernym:  $\mathcal{U}(-\pi, \pi)$ ) i stochastycznego sposobu generowania danych. W celu obliczenia wariancji poszczególnych estymatorów za każdym razem wykonane zostało 2000 symulacji Monte Carlo.

Do określenia ograniczenia Craméra-Rao zastosowano przedstawione w dodatku 7.1 równania - różne dla modelu deterministycznego oraz stochastycznego. W przypadku testów zawierających 2 źródła i model deterministyczny sygnału znaczny wpływ na wartości ograniczenia miała względna faza między amplitudami ech. Symulacja zakładała losową fazę z rozkładem równomiernym, z tego powodu do

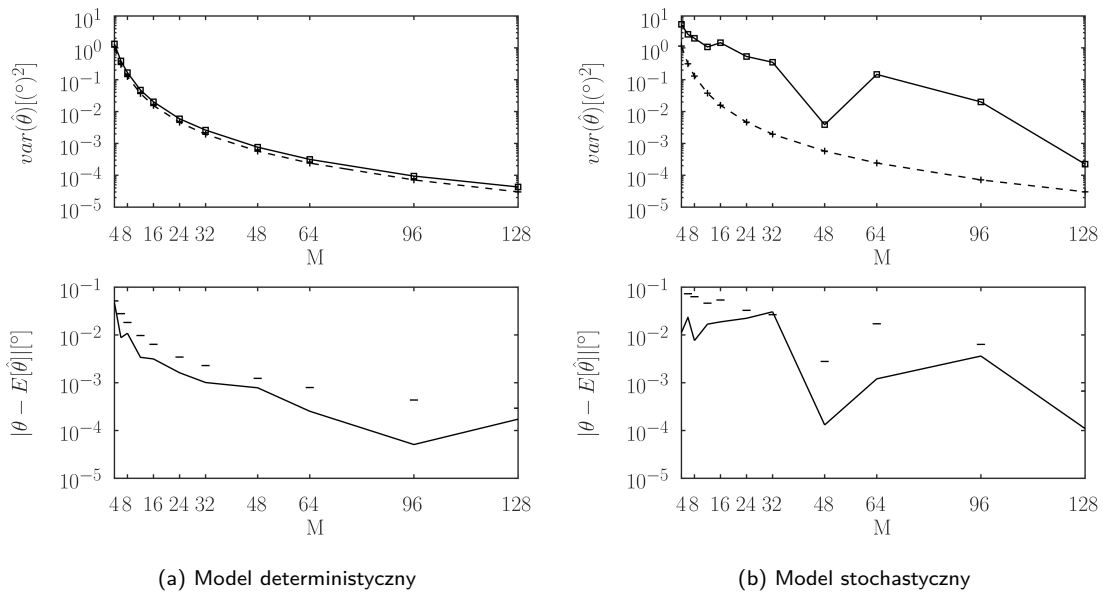
określenia ostatecznej postaci funkcji ograniczenia Craméra-Rao zastosowane zostało uśrednienie jej pierwotnej postaci po możliwych wartościach fazy.

Wykorzystane w testach parametry takie jak liczba elementów antenowych, liczba obserwacji itp. były stałe dla wszystkich estymatorów - nawet jeżeli były nieprawidłowe (ze względu na założenia stawiane przy niektórych estymatorach). W takim wypadku w opisie znajduje się przedstawienie sposobu w jaki uzyskano rozsądną wartość oszacowania (przykładem takiego zabiegu może być dociążenie osobliwej macierzy, której odwrotność jest wymagana w trakcie estymacji).

## 7.2.1 Testy estymatora monoimpulsowego

### Test 1

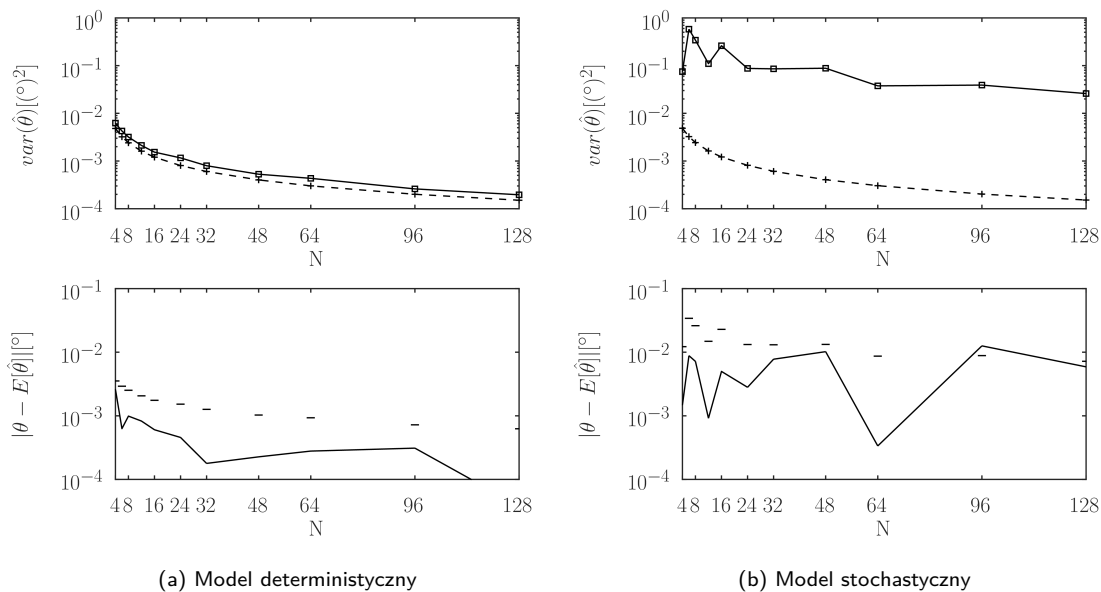
W pierwszym teście (wykresy 7.1a i 7.1b) zastosowano stałą liczbę obserwacji ( $N = 10$ ), 1 cel zlokalizowany na kącie  $\theta = 0^\circ$  z poziomem sygnału 10 dB. Widać wyraźnie, że metoda monoimpulsowa dobrze radzi sobie z sytuacją, w której dane są zgodne z modelem deterministycznym o stałej amplitudzie. Wariancja estymaty kąta w tym teście posiada wartości nieznacznie większe od ograniczenia Craméra-Rao. Inaczej wygląda sytuacja w przypadku zastosowania sygnałów wygenerowanych na podstawie modelu stochastycznego. Brak stałej amplitudy w obrębie paczki sondowań negatywnie wpływa na jakość oszacowania kąta odbioru echa. Wynika to z możliwości wystąpienia sytuacji, w której wygenerowane przy pomocy modelu stochastycznego sygnały, w którymś z sondowań posiadają niski poziom w stosunku do szumu. Mimo spełnienia warunku  $|\Sigma_n| \geq |\Delta_n|$ , wartość uzyskanej poprawki po podaniu na wielomian przybliżający funkcję  $f_{MP}^{-1}$  skutkuje przekłamaną wartością, która może spowodować znacząco odstającą estymatę. W teście z modelem stochastycznym obciążenie utrzymuje się na stałym poziomie, wyższym niż w odpowiadającym teście z wykorzystaniem modelu deterministycznego, jednak w obu przypadkach estymator można uznać za nieobciążony, na co wskazują wartości mieszczące się w 95% przedziale ufności.



Rys. 7.1: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby elementów antenowych, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.1a) i stochastycznego (7.1b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## Test 2

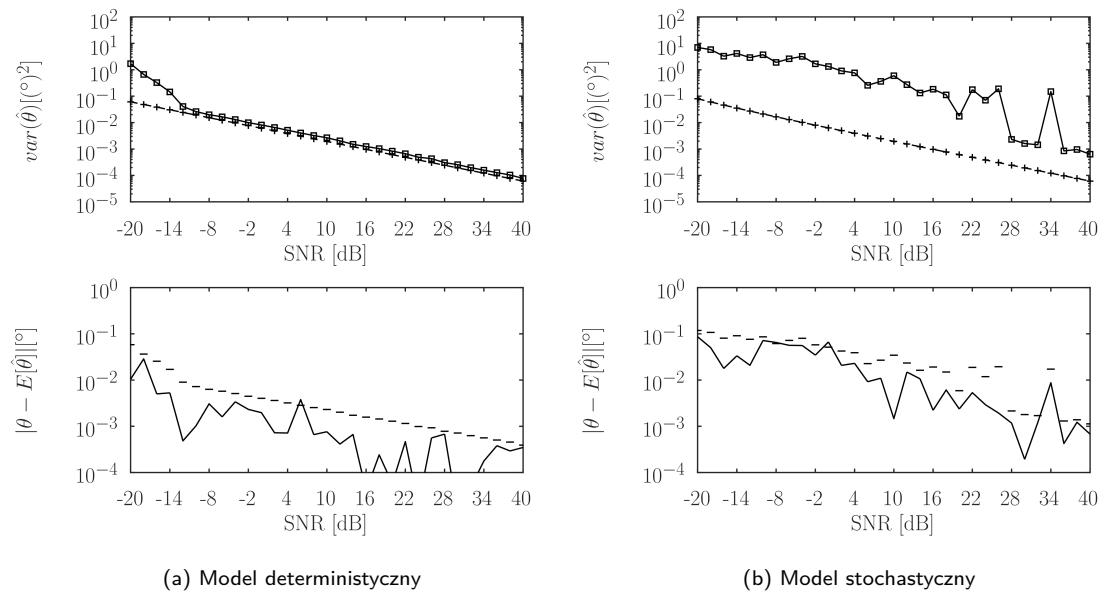
W drugim z testów zbadana została zależność wariancji obciążenia od liczby sondowań ( $N$ ). Stała pozostawała liczba elementów odbiorczych ( $M = 32$ ), oraz położenie celu i jego poziomy sygnał ( $\theta = 0^\circ$ ,  $SNR = 10$  dB). Wyniki potwierdzają, że metoda monoimpulsowa zdecydowanie lepiej sprawdza się dla modelu deterministycznego (rysunek 7.2a). Zachowanie jest podobne jak w przypadku zmienną liczbą elementów antenowych - estymata kąta na podstawie sygnałów wygenerowanych zgodnie z modelem stochastycznym (7.2b) znacznie obiega od ograniczenia Craméra-Rao w stopniu niemalże niezależnym od liczby sondowań. Estymator można uznać za nieobciążony przy pracy z obydwoimi badanymi modelami danych.



Rys. 7.2: Porównanie wariancji estymowanego kąta odbioru sygnału (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby obserwacji, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.2a) i stochastycznego (7.2b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

### Test 3

Ostatni z testów pokazuje zachowanie metody monoimpulsowej w przypadku zmiennego  $SNR$ . Pozostałe parametry symulacji wynosiły odpowiednio:  $M = 32$ ,  $N = 10$ ,  $\theta = 0^\circ$ . Wykres (7.3a) wygenerowany w oparciu o dane pochodzące z modelu deterministycznego w dobry sposób obrazuje warunki, w których metoda monoimpulsowa może zawodzić. Przy niskim współczynniku  $SNR$  widać gwałtowny wzrost wariancji oszacowania kąta. Wynika to z wysokiego poziomu szumu, który zakłóca sygnał w takim stopniu, że obliczona poprawka monoimpulsowa wykracza poza zakres, prawidłowej interpolacji funkcji  $f_{MP}(\theta)$  powodując powstawanie grubych błędów. Widoczny jest również wzrost obciążenia, co można tłumaczyć tym samym zjawiskiem. Po drugiej stronie wykresu, dla dużego stosunku  $SNR$  ponownie widać odejście wariancji estymowanego kąta od ograniczenia Craméra-Rao. Tu z kolei wytłumaczeniem może być skończona precyzja przybliżenia funkcji  $f_{MP}(\theta)$  wielomianem. W przypadku sygnałów pochodzących z modelu stochastycznego zależność ta nie jest obserwowana, a sama wariancja estymowanego kąta znajduje się znacznie ponad teoretyczną granicę. Wykresy obciążenia pokazują, że poniżej pewnego poziomu  $SNR$  estymator staje się obciążony, niezależnie od zastosowanego modelu danych.

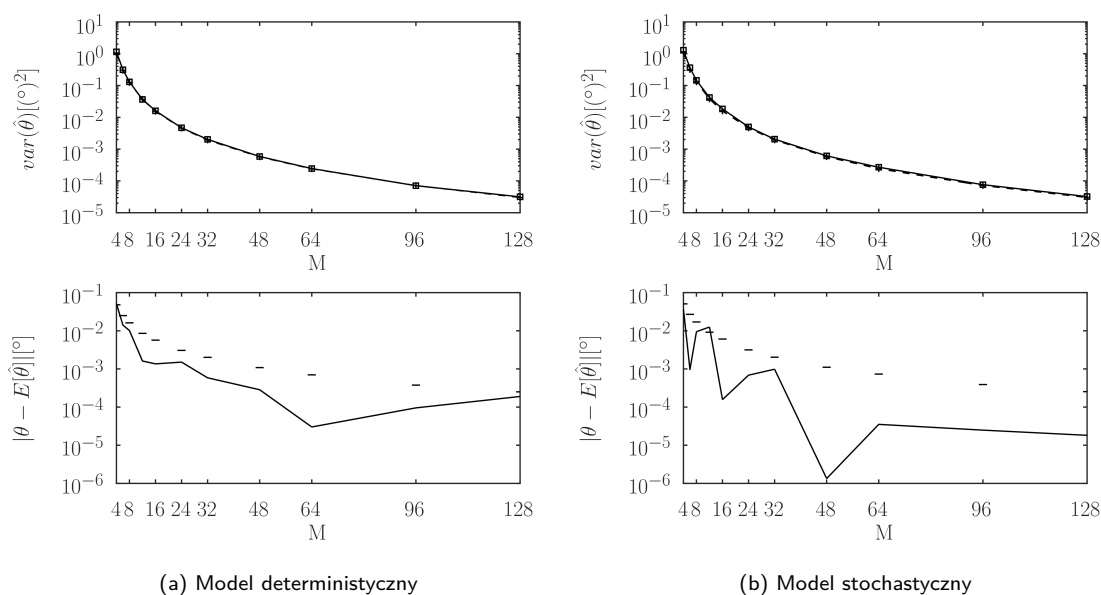


Rys. 7.3: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od  $SNR$ , dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.3a) i stochastycznego (7.3b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## 7.2.2 Testy klasycznego formowania wiązek

### Test 1

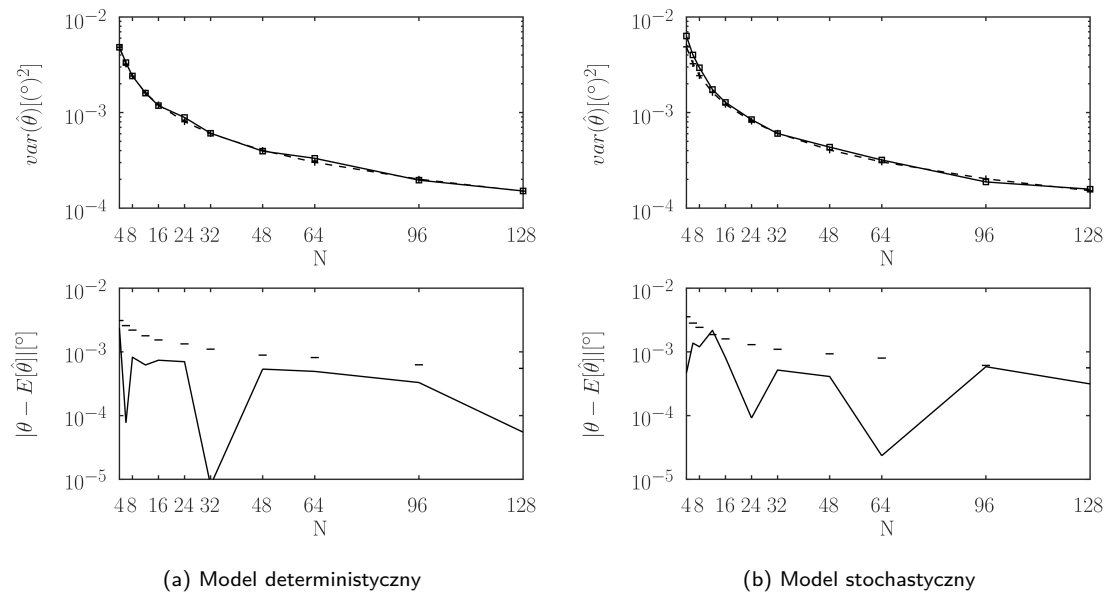
W celu sprawdzenia dokładności oszacowania porównano wyniki uzyskane przy użyciu klasycznego formowania wiązek z ograniczeniem Craméra-Rao. Pierwszy z testów zakładał stałą liczbę obserwacji ( $N = 10$ ), jeden cel umieszczony na kącie  $\theta = 0^\circ$  i  $SNR$  równy 10 dB. Zmienna była liczba elementów odbiorczych, a jej wartość wskazana jest na osi poziomej. Przebadano dwa przypadki: dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.4a) i stochastycznego (7.4b). Wartości ograniczenia Craméra-Rao obliczone zostały za pomocą wzorów analitycznych, natomiast badanie estymatora opierało się o wykonanie 2000 testów Monte Carlo. W przypadku obu wykresów wartości pokrywają się w pełnym testowanym zakresie. Oznacza to, że klasyczne formowanie wiązek jest estymatorem statystycznie efektywnym. Obciążenie w obu przypadkach mieści się w 95% przedziale ufności co pozwala określić metodę jako nieobciążoną. Warto zauważyć, że wraz z spadkiem liczby elementów odbiorczych wiązka ulega poszerzeniu, ale również spada całkowity poziom stosunku sygnału do szumu ze względu na zmniejszenie liczby dostępnych pomiarów (jest to spowodowane brakiem normalizacji wektora sterującego).



Rys. 7.4: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby elementów antenowych, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.4a) i stochastycznego (7.4b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## Test 2

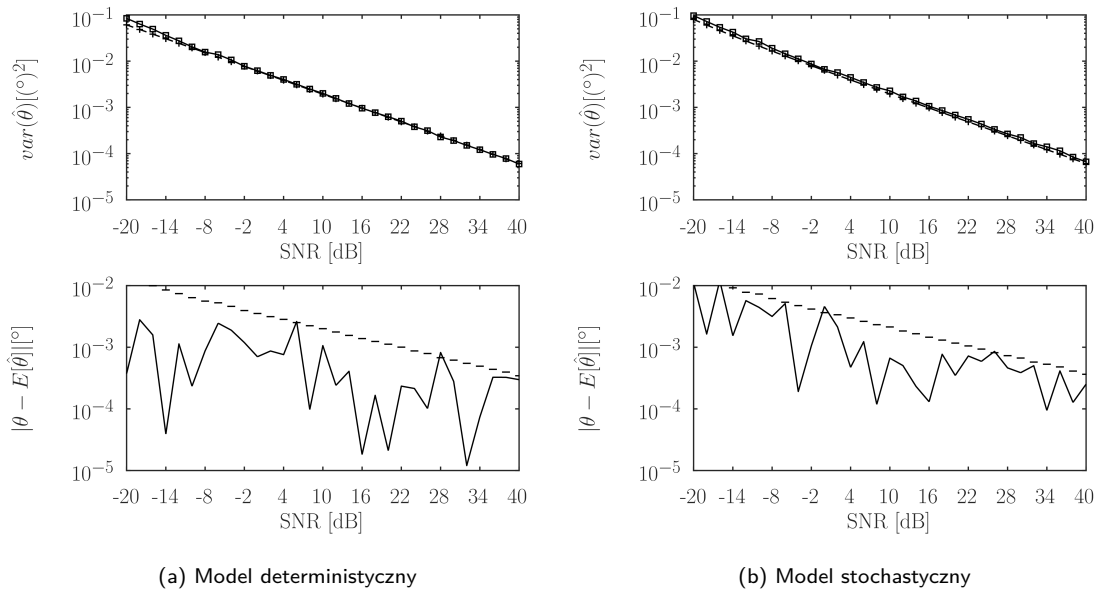
Drugi z testów opierał się o sprawdzenie wpływu liczby obserwacji na jakość oszacowania kąta odbioru. Zastosowano stałą liczbę elementów odbiorczych równą  $M = 32$ , jeden cel umieszczony na kącie  $\theta = 0^\circ$  przy  $SNR = 10$  dB i liczbę obserwacji wskazaną na osi poziomej. Ponownie przeprowadzono po 2000 symulacji dla danych wygenerowanych przy pomocy modelu deterministycznego (wykres 7.5a) i stochastycznego (wykres 7.5b). Uzyskane wyniki potwierdzają, że klasyczne formowanie wiązek osiąga ograniczenie Craméra-Rao niezależnie od liczby obserwacji  $N$ , a uzyskane estymaty cechują się brakiem obciążenia.



Rys. 7.5: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby obserwacji, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.5a) i stochastycznego (7.5b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## Test 3

W trzecim z testów zbadano zależność wariancji oszacowania kąta od stosunku sygnału do szumu. Ponownie zastosowano  $N = 32$  elementy odbiorcze,  $N = 10$  obserwacji, 1 cel umieszczony na kącie  $\theta = 0^\circ$  z  $SNR$  wskazanym na osi poziomej. Kolejny raz wartości wynikające z testu Monte Carlo pokrywają się z teoretycznym ograniczeniem Craméra-Rao przy jednoczesnym braku obciążenia.

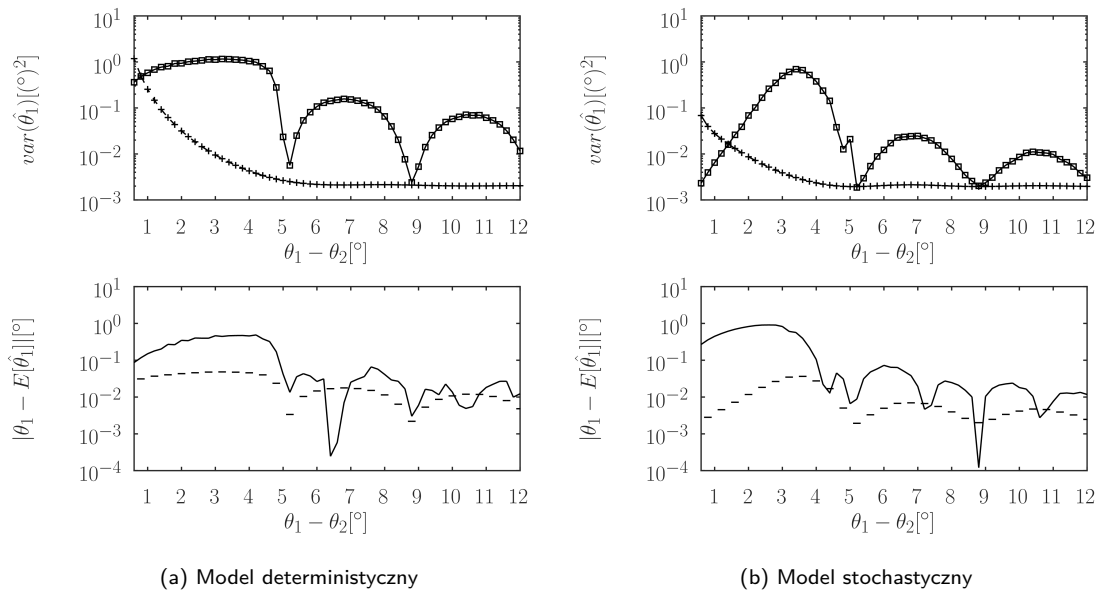


Rys. 7.6: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od SNR, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.6a) i stochastycznego (7.6b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).



#### Test 4

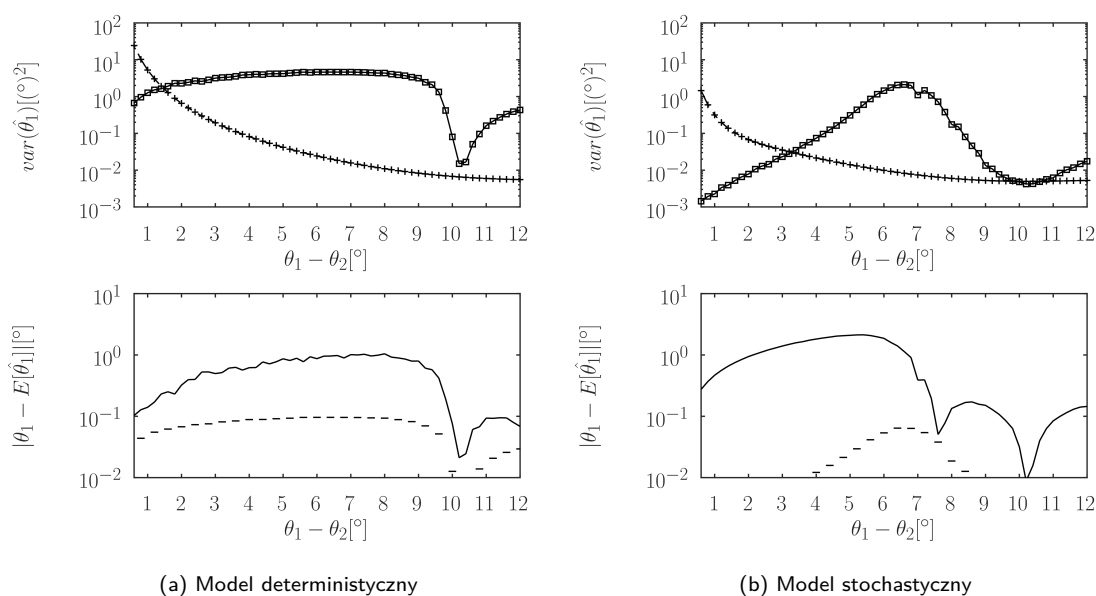
W kolejnym teście wykorzystano  $M = 32$  elementy odbiorcze i  $N = 10$  obserwacji przestrzeni. Obserwowane były 2 cele na kątach  $\theta_1$  i  $\theta_2$ , przy czym  $\theta_1 = -\theta_2$ .  $SNR$  obu sygnałów równy był 10 dB, a separacja między nimi wskazana jest na osi poziomej. Widać, że zarówno w przypadku modelu deterministycznego (7.7a) jak i stochastycznego (7.7b) wyniki wskazują znaczne odstępstwo od ograniczenia Craméra-Rao niemalże w całym zakresie separacji. Dla niedużych kątów między celami wariancja oszacowania jest w stanie zejść poniżej ograniczenia, należy jednak mieć na uwadze, że nie można wtedy mówić o estymatorze nieobciążonym. Wartość ta wynika z połączenia się dwóch lokalnych maksimum funkcji oszacowania mocy. Wyjątkiem od tego są sytuacje  $\theta_1 \sim 5^\circ$ ,  $\theta_2 \sim -5^\circ$  oraz  $\theta_1 \sim 8.8^\circ$  i  $\theta_2 \sim -8.8^\circ$ , w których lokalnie osiągnięte jest ograniczenie Craméra-Rao. W wskazanych punktach widać również spadek obciążenia estymowanych wartości. Mają one związek z charakterystykami syntezy wiązki odbiorczych. W większości zakresu szacowane wartości mają jednak obciążenie wykraczające poza 95% przedział ufności.



Rys. 7.7: Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.7a) i stochastycznego (7.7b) przy  $M = 32$  elementach odbiorczych i  $N = 10$  obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## Test 5

W ostatnim z testów ponownie sprawdzono zależność wariancji oszacowania kąta w funkcji separacji między dwoma echami. Różnica względem poprzedniego testu to zmiana liczby obserwacji ( $N = 32$ ) i elementów odbiorczych ( $M = 16$ ). Skrócenie długości wektora sterującego wiąże się nie tylko z poszerzeniem wiązki, ale również spadkiem stosunku całkowitego sygnału do szumu. Wyniki symulacji są podobne jak w poprzednim przypadku. Ponownie występuje lokalne obniżenie wariancji estymowanego kąta przy separacji  $\theta_1 - \theta_2 \sim 10^\circ$ , której towarzyszy również lokalny spadek obciążenia. Zarówno w przypadku zastosowania modelu deterministycznego jak i stochastycznego przebiegi wyglądają w sposób zbliżony. Również i tym razem w prawie całym badanym zakresie uzyskane oszacowania cechują się znacznym obciążeniem.

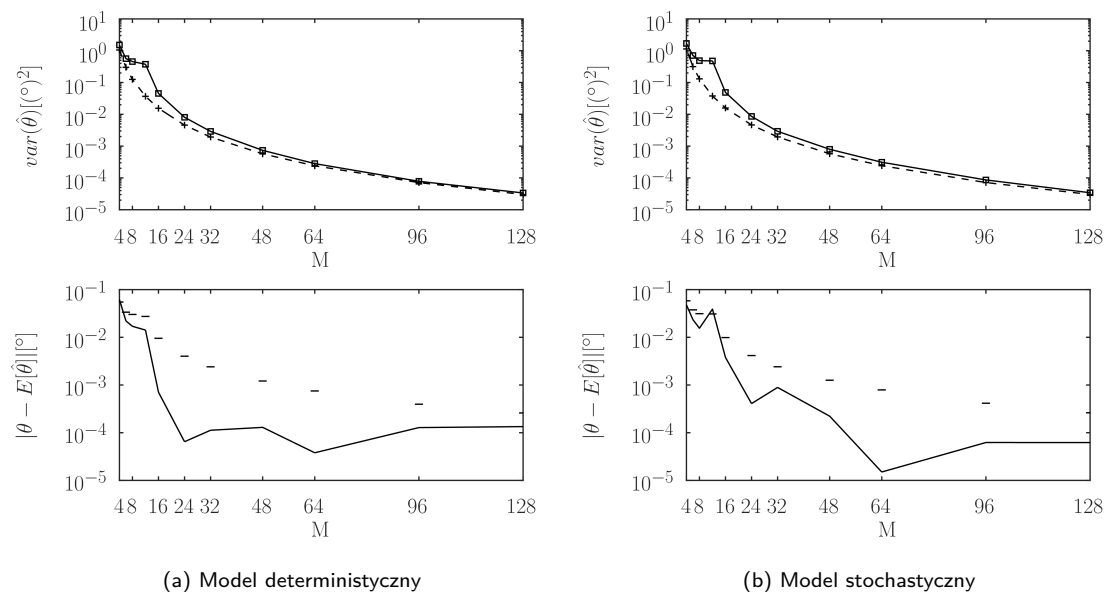


Rys. 7.8: Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.8a) i stochastycznego (7.8b) przy  $M = 16$  elementach odbiorczych i  $N = 32$  obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

### 7.2.3 Testy estymatora MVDR

#### Test 1

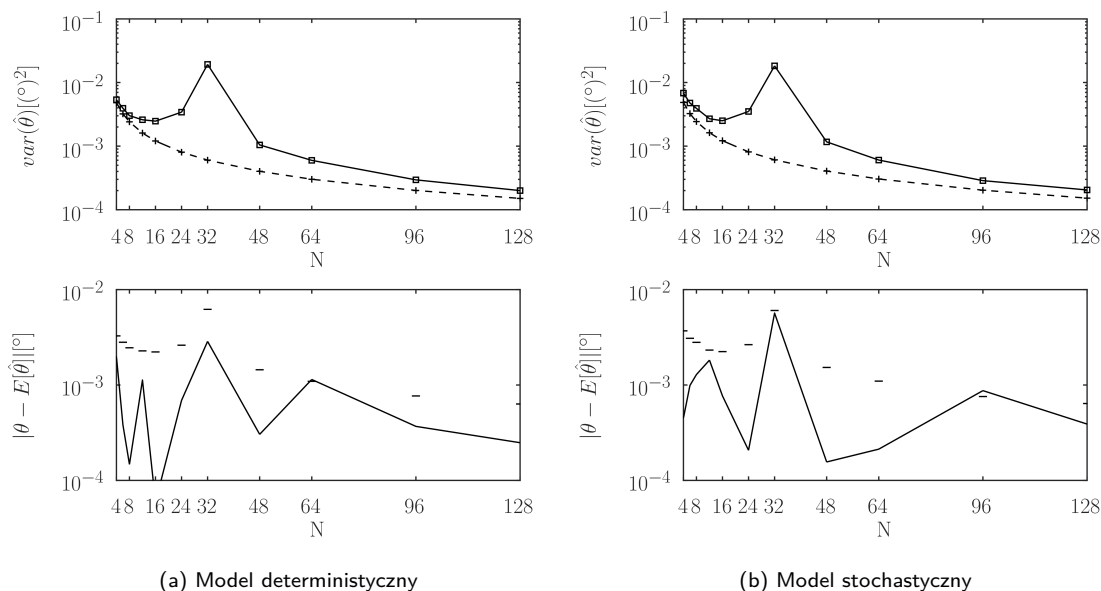
Pierwszy z testów estymatora MVDR sprawdzał wpływ liczby elementów antenowych ( $M$  oznaczone na osi poziomej) na jakość oszacowania kąta odbioru przy zachowaniu stałej liczby sondowań  $N = 10$  i kącie odbioru echa  $\theta = 0^\circ$  dla  $SNR = 10$  dB. Warto zaznaczyć na wstępie, że przy takiej liczbie obserwacji ( $N = 10$ ) dla większości przebadanych wartości parametru  $M$  oszacowanie macierzy kowariancji jest osobliwe, w związku z czym stosowano opisane wcześniej diagonalne dociążenie, co w znaczący sposób wpływa na przedstawione wyniki. Niezależnie od sposobu generowania danych, oba wykresy (7.9a i 7.9b) wyglądają podobnie. Dla niedużej liczby elementów odbiorczych ( $M = 4$ ) widoczna jest zbieżność wartości wariancji z ograniczeniem Craméra-Rao. Wraz ze wzrostem długości wektora obserwacji pojawiają się większe rozbieżności (co wynika z coraz większej podatności odwrotności macierzy kowariancji na szum). Wraz z wejściem w zakres w którym  $M > N$  dodawane do macierzy  $\hat{\mathbf{R}}$  jest diagonalne obciążenie, które w sposób wyraźny powoduje spadek wartości wariancji estymowanego kąta, a przy odpowiednio dużym  $M$  widoczna jest zbieżność z ograniczeniem Craméra-Rao. Choć diagonalne dociążenie macierzy kowariancji pomiaru może czynić estymator obciążonym, w praktyce zjawisko to nie jest obserwowane. Wartości obciążenia dla obu sposobów generowania danych (wykresy 7.9a i 7.9b) w ogólności mieszczą się w 95% przedziale ufności.



Rys. 7.9: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby elementów antenowych, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.9a) i stochastycznego (7.9b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

Test 2

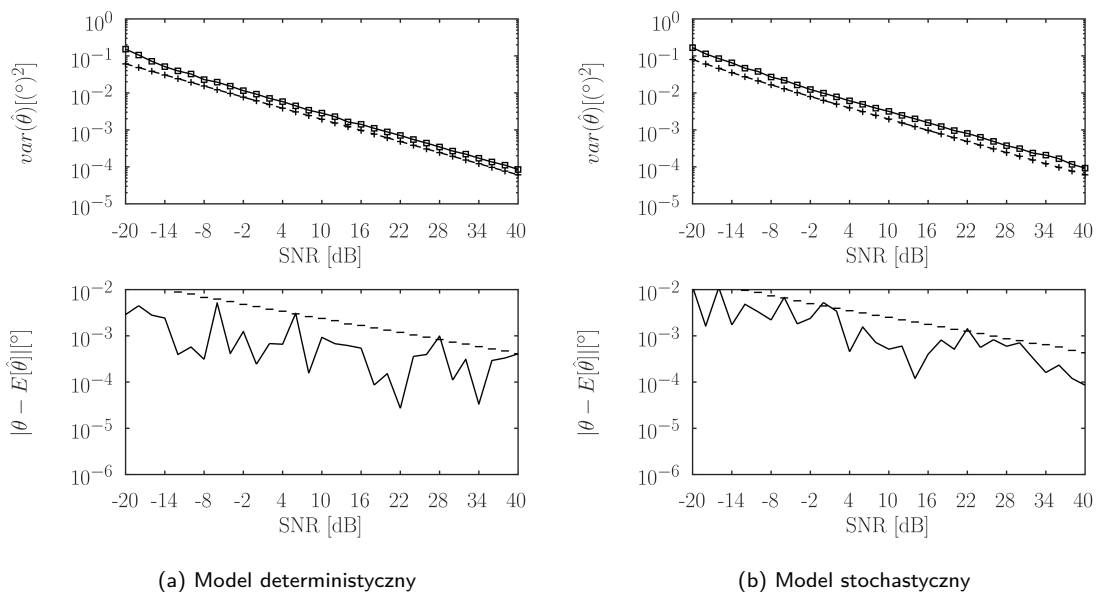
Drugi z testów (wykresy 7.10a i 7.10b) pokazuje zależność wariancji estymowanego kąta od liczby obserwacji  $N$  przy zachowaniu stałej liczby elementów antenowych ( $M = 32$ ) przy obecności 1 celu ( $\theta = 0^\circ$ ,  $SNR = 10$  dB). Ponownie, oba wykresy wyglądają bardzo podobnie, i nieco wyraźniej pokazują obserwowane wcześniej zjawisko wpływu dociążenia macierzy kowariancji na wariancję estymowanego kąta odbioru sygnału. W zakresie, gdzie  $N < M$  widoczna jest zgodność wariancji oszacowania z ograniczeniem Craméra-Rao, jednak przy wartościach  $N$  zbliżających się do wartości parametru  $M$  obserwowany jest znaczący wzrost wartości wariancji estymowanego kąta. Ponownie wynika to z złego uwarunkowania macierzy kowariancji oraz podatności algorytmu na szum. W zakresie  $N < M$  dodawane jest przedstawione wcześniej diagonalne dociążenie. Obserwuje się wtedy monotoniczny spadek wartości wariancji, oraz zbliżenie do ograniczenia Craméra-Rao. Podobnie jak w wcześniejszym teście, obserwowana jest tendencja spadku wartości obciążenia przy wzroście liczby sondowań ( $N$ ). W prezentowanych warunkach estymator można uznać za nieobciążony.



Rys. 7.10: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby obserwacji, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.10a) i stochastycznego (7.10b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

### Test 3

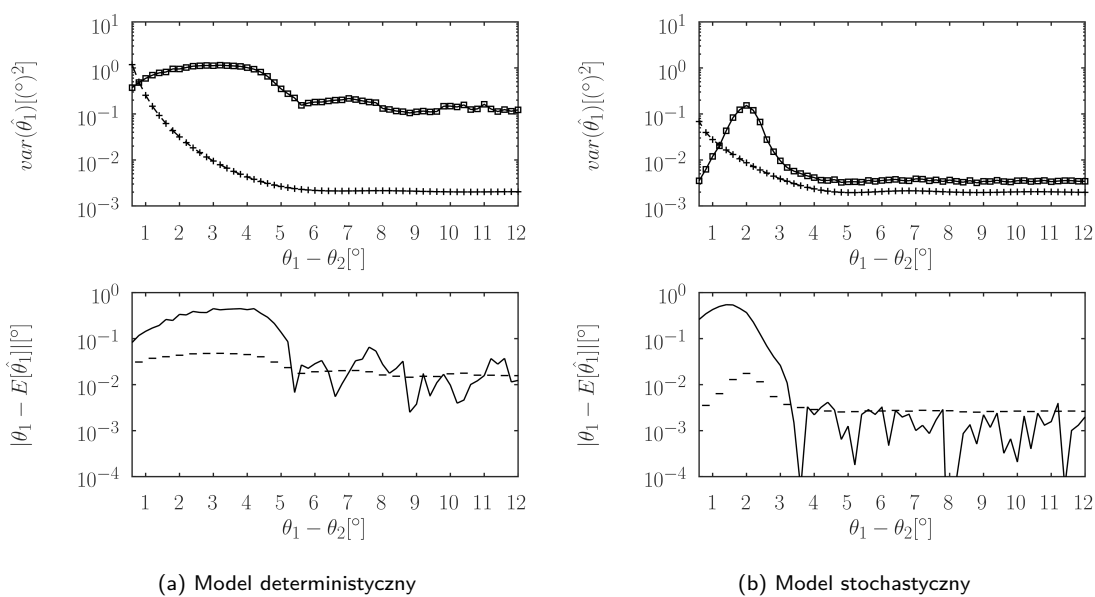
Kolejny test, którego wyniki przedstawiono na wykresach 7.11a i 7.11b pokazuje zachowanie estymatora MVDR dla różnych wartości  $SNR$  przy stałych pozostałych parametrach ( $N = 10$ ,  $M = 32$ ,  $\theta = 0^\circ$ ). Już na tej podstawie widać, że w całym badanym zakresie działa diagonalne dociążanie macierzy kowariancji powodując stabilizację pracy algorytmu. Uzyskana w testach Monte-Carlo wariancja w całym badanym zakresie znajduje się w stałej proporcji względem ograniczenia Craméra-Rao. Wraz z wzrostem  $SNR$  obserwowany jest systematyczny spadek wartości wariancji estymowanego kąta. W przedstawionym teście widać, że nawet dla dużych wartości  $SNR$  nie zostanie uzyskana zbieżności z ograniczeniem Craméra-Rao - do osiągnięcia ograniczenia wymagany jest dobór innych wartości  $M$  i  $N$ . Estymator ponownie można uznać za nieobciążony.



Rys. 7.11: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od  $SNR$ , dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.11a) i stochastycznego (7.11b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

**Test 4**

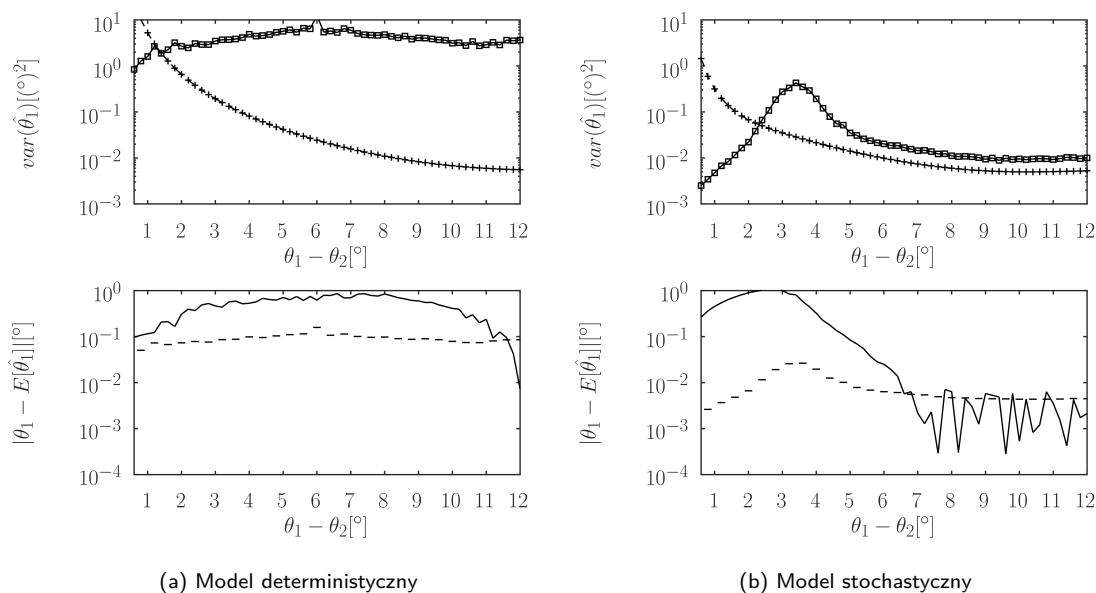
Estymator MVDR posiada zdolność rozróżnialności położenia więcej niż jednego celu - z tego powodu przeprowadzone zostały testy wpływu separacji kątowej między obiektami na wariancję oszacowania kąta pierwszego z obiektów ( $\hat{\theta}_1$ ). Testy zostały wykonane dla parametrów  $M = 32$  i  $N = 10$  (wykresy 7.12a i 7.12b). Ze względu na zbyt małą liczbę obserwacji zastosowano diagonalne dociążanie oszacowania macierzy kowariancji  $\hat{\mathbf{R}}$ . W przypadku danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego widoczna jest znaczna rozbieżność między uzyskaną w testach Monte-Carlo wariancją, a ograniczeniem Craméra-Rao. Potwierdza to wcześniejszą hipotezę (przedstawioną w opisie wykresu 2.5), że w przy obecności dwóch ech i modelu danych z stałą wartością amplitudy, oszacowanie kąta może być obciążone dużym błędem. Dotyczy to zarówno wariancji, jak i obciążenia estymowanych kątów i wynika z występowania korelacji między sygnałami ech. Zmiana modelu na stochastyczny skutkuje znaczącą poprawą, która objawia się (przy odpowiednio dużej separacji między echami) obniżeniem poziomu wariancji do wartości zbliżonej do ograniczenia Craméra-Rao. Na zbieżność tę, powyżej pewnej wartości, nie wpływa separacja kątowa między celami. Dla ech umieszczonych blisko siebie obserwowany jest obszar, w którym wariancja znajduje się znacząco poniżej ograniczenia Craméra-Rao, jednak wiąże się to z wzrostem wartości obciążenia. Następnie, w niewielkim zakresie separacji kątowych wariancja znacząco wybiega ponad teoretyczne ograniczenie przy czym poziom obciążenia otrzymuje się w tym zakresie na stałym, stosunkowo wysokim poziomie. Ze względu na znaczną liczbę symulacji, w której uzyskano wartość obciążenia wykraczającą poza 95% przedział ufności, estymator MVDR dla tak małej separacji można uznać za obciążony.



Rys. 7.12: Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.12a) i stochastycznego (7.12b) przy  $M = 32$  elementach odbiorczych i  $N = 10$  obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## Test 5

W ostatnim z testów algorytmu MVDR zmieniona została wartość liczby sondowań ( $N = 32$ ) oraz liczba elementów antenowych ( $M = 16$ ), w efekcie czego nie jest wymagane diagonalne dociążanie. Na podstawie wykresu 7.13a widać, że w przypadku deterministycznego sposobu generowania danych, algorytm ma problemy z oszacowaniem kąta odbioru sygnału z odpowiednią precyzją (estymaty są obciążone i posiadają znaczną wariancję). Przebieg przypomina wykres 7.12a i, jak widać, poprawa uwarunkowania macierzy kowariancji nie jest w stanie skorygować sytuacji, jaka występuje w przypadku deterministycznego sposobu generowania danych. Dla sygnałów ze zmienną z sondowania na sondowanie amplitudą, estymator MVDR pozwala na uzyskanie estymat o wariancji zbliżonej do ograniczenia Craméra-Rao, a wykres 7.13b wygląda podobnie jak opisywany wcześniej 7.12b (z dociążoną macierzą kowariancji). Różnicą jest szerszy zakres separacji kątowych między źródłami sygnału, dla których występuje znaczna rozbieżność uzyskanej w testach Monte-Carlo wariancji, a ograniczeniem Craméra-Rao. Wynika ona z faktu zmniejszenia liczby elementów antenowych (z  $M = 32$  do  $M = 16$ ) co w przypadku metod opartych o formowanie wiązek skutkuje poszerzeniem listka głównego wiązki. Ponownie (dla odpowiednio dużej separacji kątowej między echami) obserwowana jest stała proporcja między uzyskaną wariancją a ograniczeniem Craméra-Rao - przyczyną takiego zachowania jest uwarunkowanie macierzy kowariancji. Mimo spełnienia warunku  $N > M$ , odwrotność macierzy  $\hat{\mathbf{R}}$  pozostaje wrażliwa na szum. Dla uzyskania lepszej zbieżności z ograniczeniem Craméra-Rao wymagane jest użycie większej liczby obserwacji. Estymaty w większości badanego zakresu miały charakter obciążony.



Rys. 7.13: Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.13a) i stochastycznego (7.13b) przy  $M = 16$  elementach odbiorczych i  $N = 32$  obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

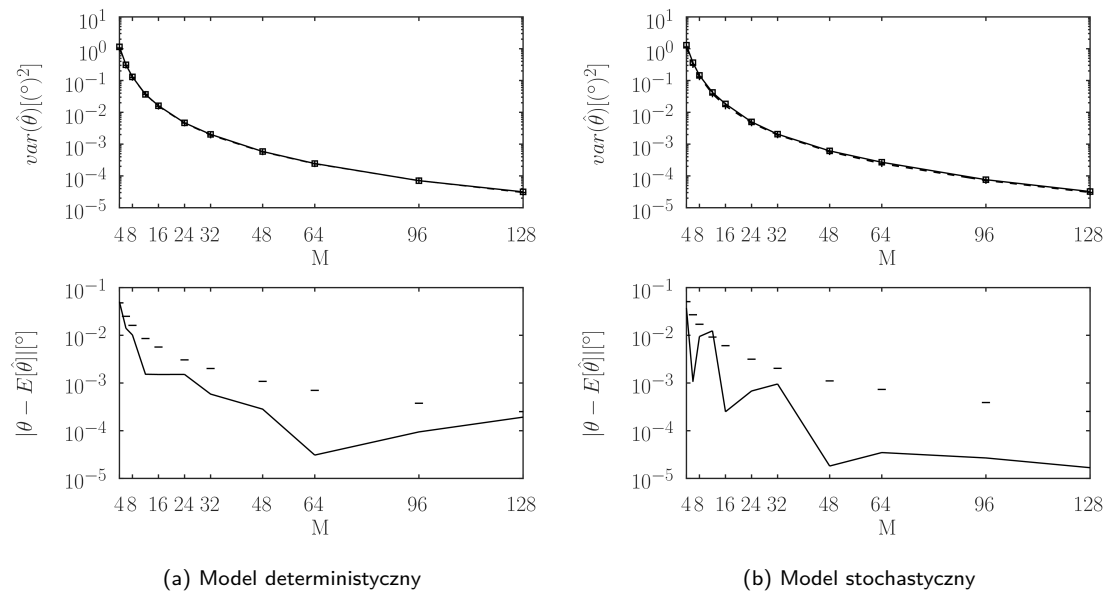




## 7.2.4 Testy estymatora MUSIC

### Test 1

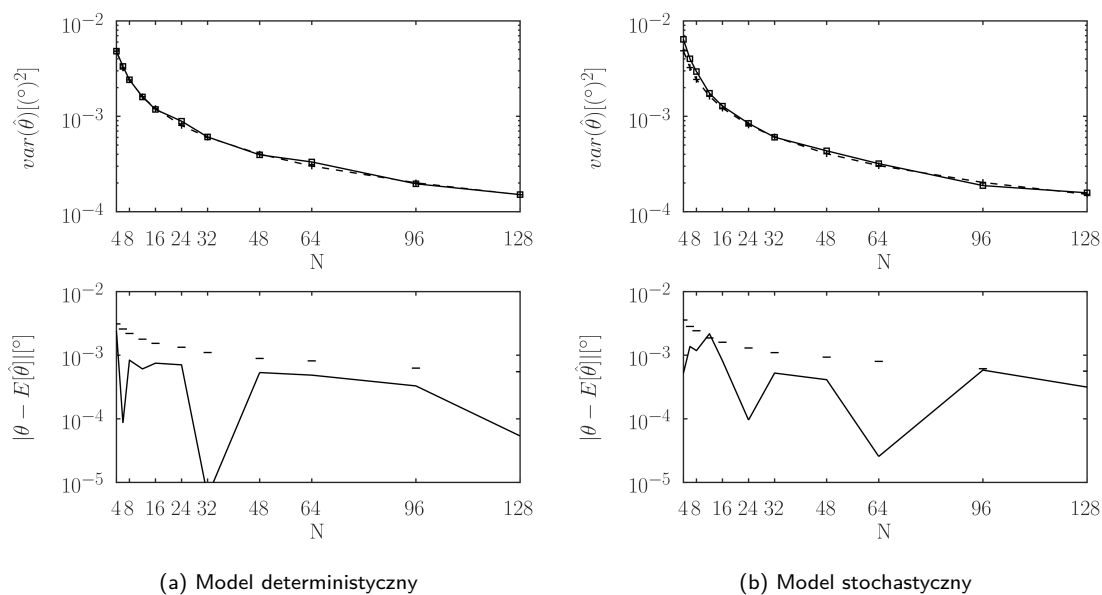
Pierwszy z testów algorytmu MUSIC sprawdzał zależność między wariancją oszacowania kąta odbioru echa a liczbą elementów antenowych  $M$ . Stały pozostawał kąt odbioru sygnału  $\theta = 0^\circ$  z  $SNR = 10$  dB oraz liczbą sondowań  $N = 10$ . Zarówno dla modelu deterministycznego (7.14a) jak i stochastycznego (7.14b) widać dobrą zgodność z ograniczeniem Craméra-Rao. Wartość obciążenia w całym zakresie mieści się z 95% przedziale wiarygodności.



Rys. 7.14: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby elementów antenowych, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.14a) i stochastycznego (7.14b) wraz z wartością obciążenia (poczarne kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## Test 2

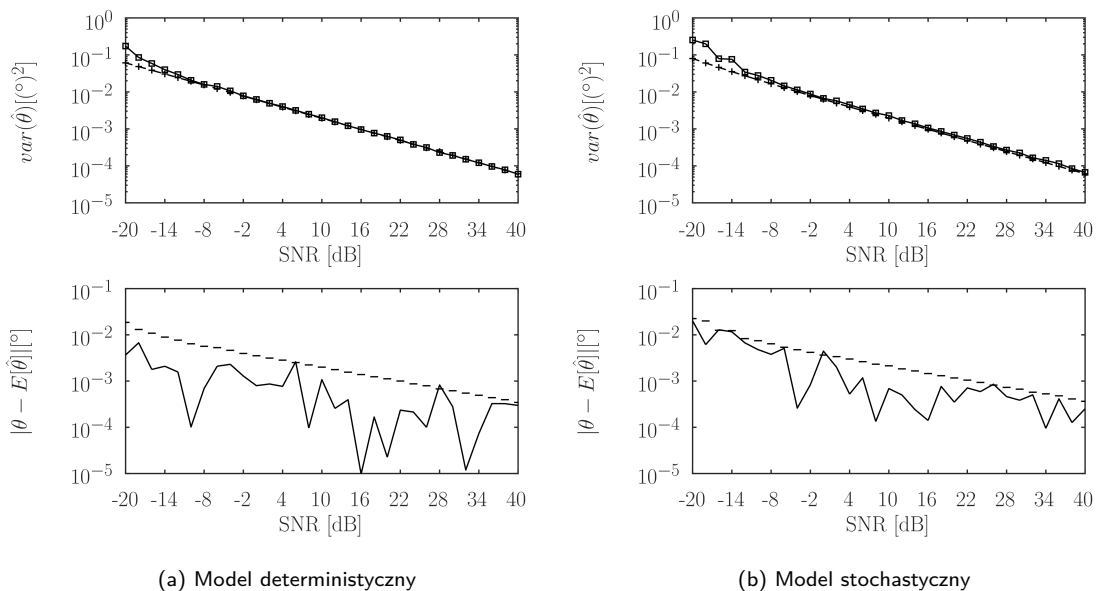
Drugi z testów badał wpływ liczby sondowań (oś pozioma) na wariancję oszacowania kąta odbioru echa przy założeniu stałych parametrów: liczby elementów  $M = 32$ , kąt odbioru  $\theta = 0^\circ$  z  $SNR = 10$  dB. W przypadku obu modeli (deterministyczny - rys. 7.15a i stochastyczny - rys. 7.15b) ponownie widać dobrą zbieżność z teoretycznym dolnym ograniczeniem w całym badanym zakresie współczynników. W tym przypadku oszacowania mają również charakter nieobciążony.



Rys. 7.15: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby sondowań, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.15a) i stochastycznego (7.14b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

### Test 3

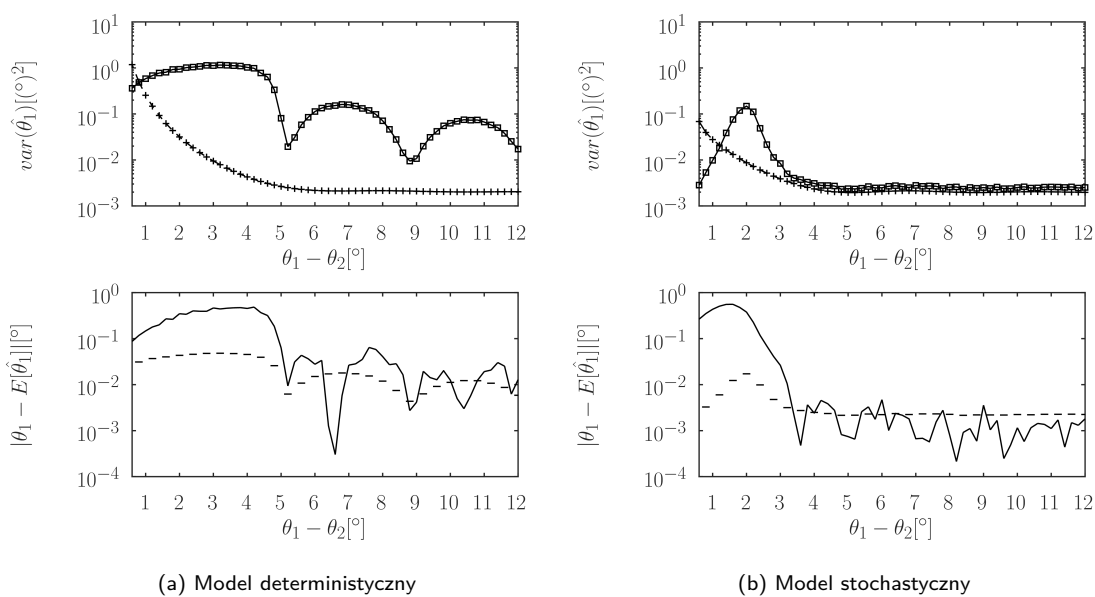
Trzeci, ostatni z testów opartych o 1 źródło sygnału, miał na celu zbadanie zależności między stosunkiem sygnału do szumu (oś pozioma) a wariancją i obciążeniem oszacowania kąta odbioru. Stałe pozostały:  $\theta = 0^\circ$ ,  $M = 32$  i  $N = 10$ . Ponownie, wartości wskazane przez oba modele (deterministyczny - rys. 7.16a i stochastyczny - rys. 7.16b) w większości badanego zakresu wykazują zgodność z ograniczeniem Craméra-Rao. Rozbieżności pojawiają się w sytuacji niskiego  $SNR$ , gdzie wariancja zaczyna odstawać ponad teoretyczne minimum. Wynika to z faktu niespełnienia założenia (2.34) - okazjonalnie estymata wartości własnej sygnałów posiada niższą wartość niż wartość własna szumu. W efekcie do procesu estymacji wykorzystywane są wektory własne rozpinająca podprzestrzeń sygnału zamiast szumu. Rezultatem jest wzrost korelacji wektora  $\mathbf{a}(\theta)$  z wektorami własnymi podprzestrzeni szumu co doprowadza zaburzenia funkcji pseudowidma. W prezentowanym zakresie wartości obciążenia na ogół mieszczą się w 95% przedziale ufności, można zatem estymaty traktować jako nieobciążone.



Rys. 7.16: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od SNR, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.16a) i stochastycznego (7.16b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

**Test 4**

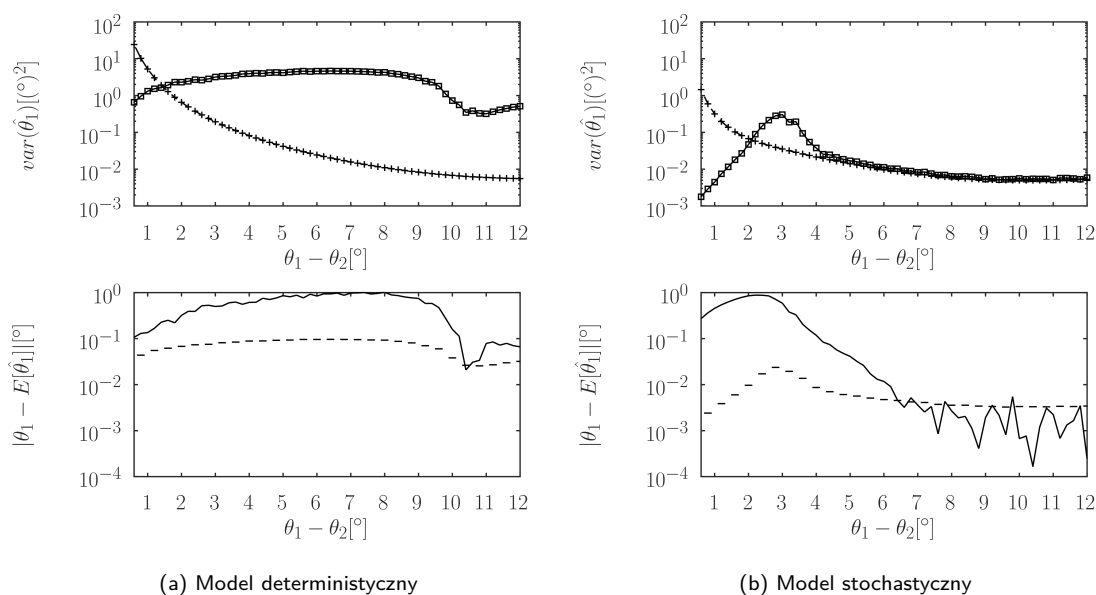
W kolejnym z testów (rys. 7.17a i rys. 7.17b dla odpowiednio deterministycznego i stochastycznego sposobu generowania danych) zbadano wpływ separacji kątowej dwóch celów (oś pozioma) na wariancję i obciążenie estymowanej wartości kąta pierwszego z obiektów. W przypadku obu modeli parametry pozostawały stałe i wynosiły  $SNR = 10$  dB,  $M = 32$ ,  $N = 10$ . W zależności od modelu, na podstawie którego zostały wygenerowane pomiary, przebiegi znacząco różnią się między sobą. W przypadku modelu deterministycznego, ograniczenie Craméra-Rao nie jest osiągnięte w badanym zakresie separacji kątowych, a wariancja przyjmuje znacząco wyższe od niego wartości. Sam przebieg wartości wariancji posiada zafalowania związane charakterystyką odbiorczą anteny, podobne do tych obserwowanych w klasycznym formowaniu wiązek (wykres 7.7a). Przyczyną takiego zachowania jest fakt, że estymator MUSIC zakłada brak występowania korelacji między celami, co w przypadku deterministycznego modelu z stałą amplitudą nie jest spełniane. Natura tego problemu jest zatem zbliżona jak w przypadku algorytmu MVDR, jednak MUSIC wyklucza wektory własne odpowiadające największym z wartości własnych (najczęściej pochodzących od sygnału). Efektem jest degradacja jakości oszacowania, jednak nie w tak znacznym stopniu jak miało to miejsce w przypadku MVDR (rys. 7.12a). Dla danych wygenerowanych na podstawie modelu stochastycznego (rys. 7.17b), wartości wariancji przebiegają w sposób zbliżony do tych uzyskanych na podstawie algorytmu MVDR przy założeniu jednakowych parametrów symulacji. Powyżej pewnej wartości separacji kątowej (w tym przypadku około  $3.2^\circ$ ) wariancja zbliża się do ograniczenia Craméra-Rao. Takie można tłumaczyć niewielkim stopniem ortogonalności wektorów odpowiedzi antenowej dla małych separacji kątowych, w skutek czego jedna z wartości własnych podprzestrzeni sygnału jest zbliżona do wartości własnych z podprzestrzeni szumu. Wraz ze wzrostem separacji kątowej różnice między nimi zaczynają się pogłębiać, co prowadzi do poprawy jakości oszacowania (zmniejszenie wartości wariancji). Estymator jest obciążony w przypadku pracy z skorelowanymi sygnałami co może mieć miejsce przy niewłaściwym modelu danych jak i dla zbyt małej separacji kątowej.



Rys. 7.17: Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.17a) i stochastycznego (7.17b) przy  $M = 32$  elementach odbiorczych i  $N = 10$  obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## Test 5

Ostatni z testów ponownie sprawdzał wariancję estymowanego kąta w zależności od separacji kątowej między dwoma echemi dla modelu deterministycznego z założeniem stałym amplitudy (wykres 7.18a) i stochastycznego (wykres 7.18b), przy liczbie sondowań oraz elementów antenowych równej odpowiednio  $N = 32$  i  $M = 16$ . Zmiana parametrów pracy (w szczególności liczba elementów odbiorczych) wpłynęła na poszerzenie listka głównego wiązki odbiorczej. Efektem tego jest rozszerzenie się widocznych wcześniej (rys. 7.17a) zafalowań na większe separacje kątowe. W przypadku  $N = 10$  i  $M = 32$  pierwsze lokalne minimum w przebiegu wariancji występowało przy około  $5^\circ$  separacji między źródłami echa, w obecnej symulacji przypada ono na separację  $\sim 10.5^\circ$ . W przypadku danych pochodzących z modelu stochastycznego wartości wariancji ponownie zbiegają się z ograniczeniem Craméra-Rao przy celach oddalonych o siebie o kąt większy niż około  $4^\circ$ . Ponownie warunkiem nieobciążonego charakteru oszacowań jest brak korelacji między składowymi obserwowanego sygnału pochodzącymi od obu źródeł.

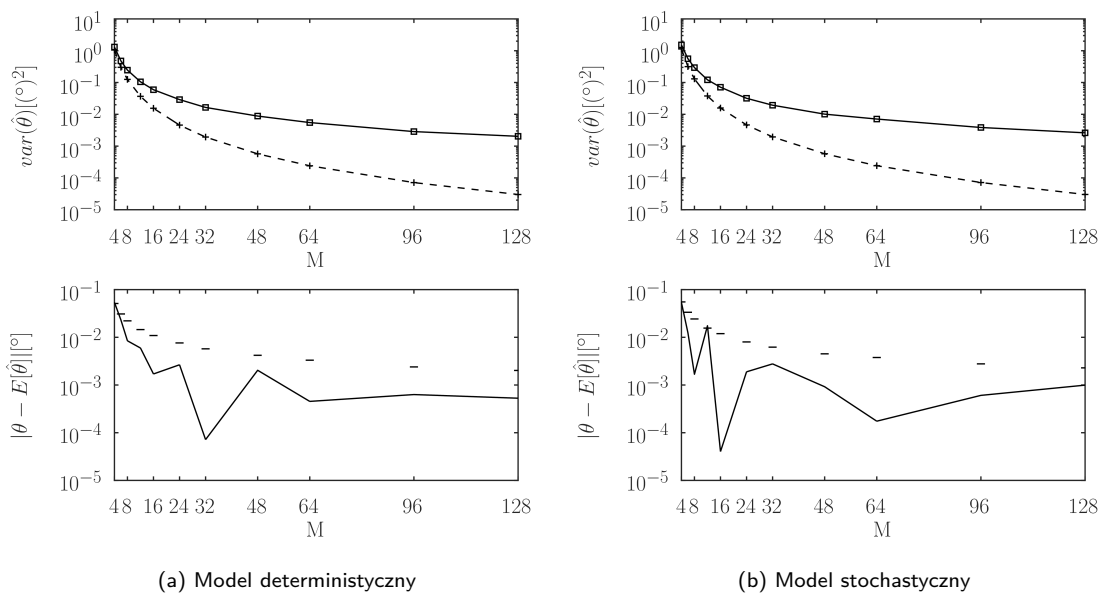


Rys. 7.18: Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.18a) i stochastycznego (7.18b) przy  $M = 16$  elementach odbiorczych i  $N = 32$  obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## 7.2.5 Testy estymatora ESPRIT

### Test 1

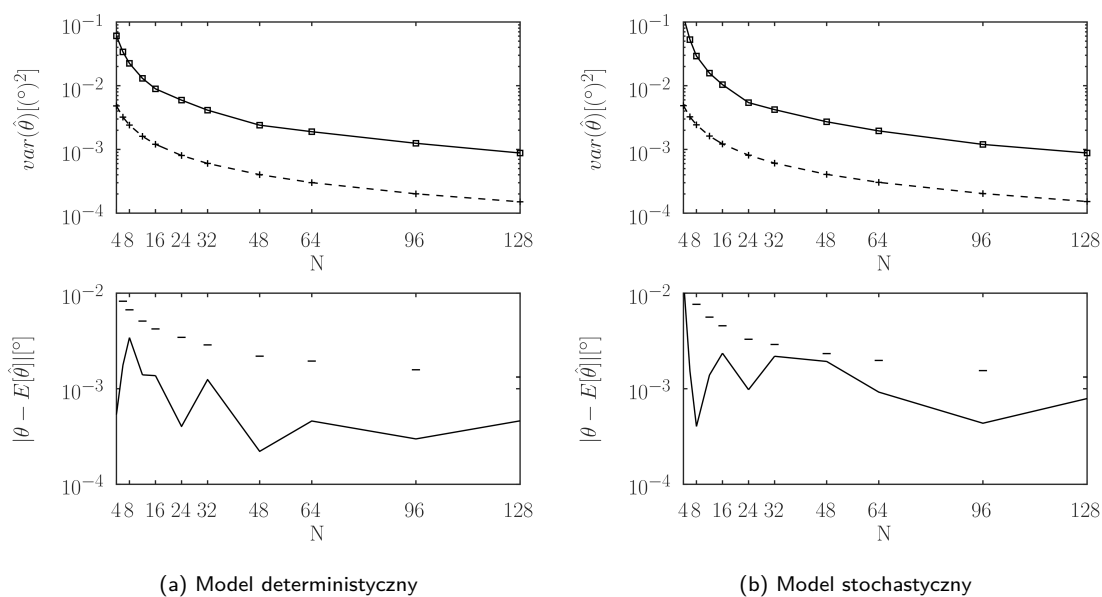
Pierwszy z testów wykonany został w celu sprawdzenia zależności między wariancją estymowanego kąta ( $\hat{\theta}$ ) w funkcji liczby elementów antenowych ( $M$  - oznaczonej na osi poziomej) dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (wykres 7.19a) i stochastycznego (wykres 7.19b). Uzyskane przebiegi wartości wariancji i obciążenia w przypadku obu modelu wyglądają podobnie. Wraz z wzrostem liczby elementów antenowych ( $M$ ) maleje wariancja estymowanego kąta, jednak nie jest to taka poprawa jakiej można oczekiwać analizując ograniczenie Craméra-Rao - uzyskana w testach Monte-Carlo wariancja nie jest z nim zbieżna. Wartości obciążenia mieszczą się w 95% ufności.



Rys. 7.19: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby elementów antenowych, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.19a) i stochastycznego (7.19b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## Test 2

Drugi z testów, pokazujący zależności wariacji estymowanego kąta od liczby obserwacji ( $N$ ) ponownie pokazuje niemalże identyczne zachowanie algorytmu dla modelu deterministycznego (rys. 7.20a) i stochastycznego (rys. 7.20b). Wariacja estymowanego kąta maleje wraz z wzrostem liczby obserwacji, jednak utrzymuje się w stałej proporcji, około jednego rzędu wielkości w stosunku do ograniczenia Craméra-Rao. Wartość ta może różnić się w zależności od zastosowanego SNR oraz liczby elementów odbiorczych. Wartość obciążenia estymowanego kąta ponownie mieści się w 95% zakresie pewności pomiarów.

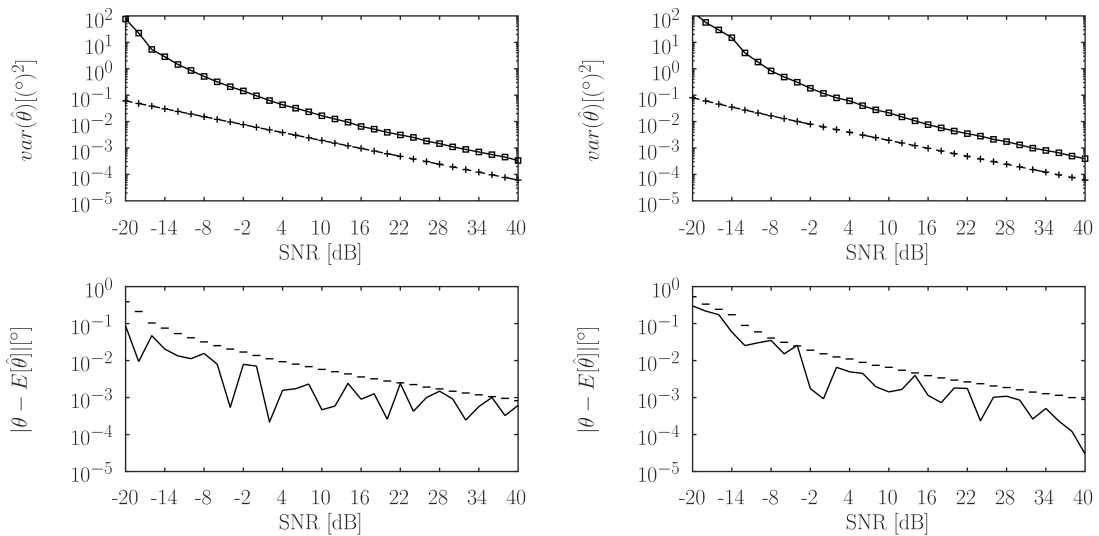


Rys. 7.20: Porównanie wariacji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby obserwacji, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.20a) i stochastycznego (7.20b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).



### Test 3

Ostatni z testów zakładających obecność pojedynczego źródła sygnału pokazuje zależność wariancji i obciążenia estymowanego kąta od poziomu  $SNR$  przy stałych  $N = 10$  i  $M = 32$ . Ponownie, dla obu modeli (deterministycznego, rys. 7.21a i stochastycznego, rys. 7.21b) wzrost  $SNR$  wiąże się z zmniejszeniem wariancji estymowanego kąta. Poprawa jest szczególnie dobrze widoczna dla niskiego poziomu sygnału (ujemnych wartości  $SNR$ ). Wynika to, podobnie jak w algorytmie MUSIC, z założenia niemalejącego charakteru wartości własnych. Dla zbyt słabego sygnału, estymacja może przebiegać w oparciu o komponenty szumowe. Algorytm nie wykazuje zbieżności z ograniczeniem Craméra-Rao, jednak cechuje się brakiem obciążenia.



(a) Model deterministyczny

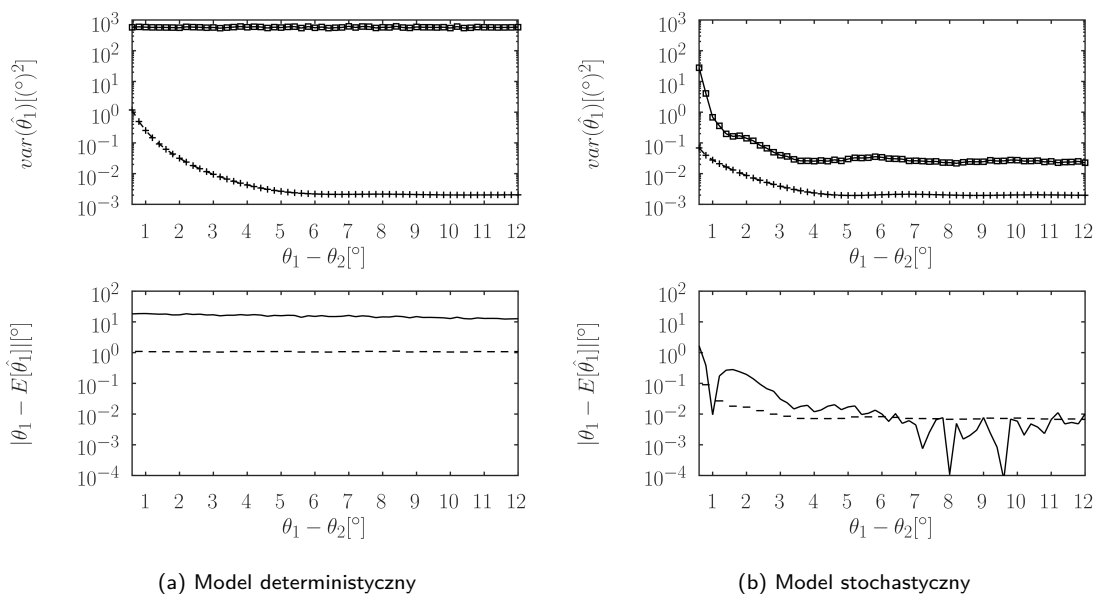
(b) Model stochastyczny

Rys. 7.21: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od  $SNR$ , dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.21a) i stochastycznego (7.21b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

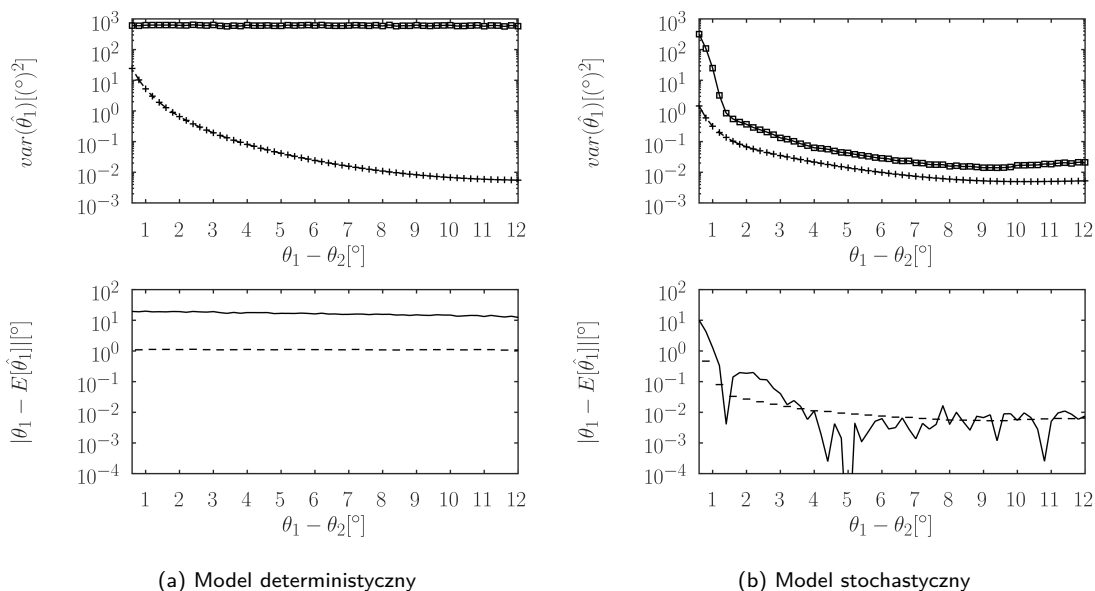
**Test 4 i 5**

W symulacjach, w których obecne są dwa źródła sygnału pojawiają się znaczące rozbieżności między symulacjami opartymi o dane wygenerowane na podstawie modelu deterministycznego (rysunki 7.22a i 7.23a) i stochastycznego (rysunki 7.22b i 7.23b). Przeprowadzone testy zakładały obecność 2 źródeł sygnału na kątach odseparowanych od siebie o wartość wskazaną na osi poziomej. Wartość  $SNR$  obu obiektów była równa i wynosiła 10 dB. W przypadku danych pochodzących z modelu deterministycznego widać, że algorytm zupełnie nie jest w stanie oszacować kąta odbioru sygnału. Objawia się to wysokim poziomem zarówno wariacji jak i obciążenia. Przebieg ten jest ponadto niezależny od liczby elementów antenowych ( $M$ ), jak i liczby obserwacji ( $N$ ), co można zaobserwować porównując wykresy 7.22a i 7.23a. Wynika to z faktu korelacji sygnałów echa obu obiektów, która jest znacząca w przypadku zastosowania deterministycznego modelu generowania danych.

W początkowej fazie działania algorytmu liczone są wartości własne macierzy kowariancji sygnału, a następnie wybierane wektory własne odpowiadające (w przypadku dwóch źródeł sygnału) dwóm największym wartościom własnym. W sytuacji wystąpienia korelacji - jak ma to miejsce w modelu deterministycznym - największa z wartości własnych odpowiada sygnałowi obu echa jednocześnie, z kolei druga największa wartość własna wynika już wyłącznie z obecności komponentu szumowego. W procesie dalszego przetwarzania, uzyskane estymaty kątów (w szczególności ta oparta o szacowane na podstawie podprzestrzeni szumu) będą obciążone dużymi błędami. Problem ten nie występuje w przypadku danych pochodzących z modelu stochastycznego, kiedy amplitudy celów są nieskorelowane. Przy odpowiednio dużej separacji kątowej między obiektami ( $\Delta\theta \sim 1.5^\circ$ ) algorytm osiąga zbliżone wartości wariacji i obciążenia jak w przypadku estymacji kąta odbioru jednego echa. Przy źródłach sygnału znajdujących się blisko siebie pojawia się korelacja, tym razem wynikająca z podobieństwa wektorów sterujących, która powoduje degradację jakości estymat, jednak wzrost wariacji przy niedużej separacji kątowej obserwowany jest dla wszystkich badanych estymatorów. Uzyskane wartości obciążenia w większości badanego zakresu znacząco wykraczają poza przedział ufności. Dopiero przy braku korelacji źródeł sygnału (model stochastyczny z odpowiednio dużą separacją kątową) wartości obciążenia znajdują się na skraju przedziału. Można uznać, że w tych warunkach (mała separacja źródeł) oszacowania mają charakter obciążony.



Rys. 7.22: Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.22a) i stochastycznego (7.22b) przy  $M = 32$  elementach odbiorczych i  $N = 10$  obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

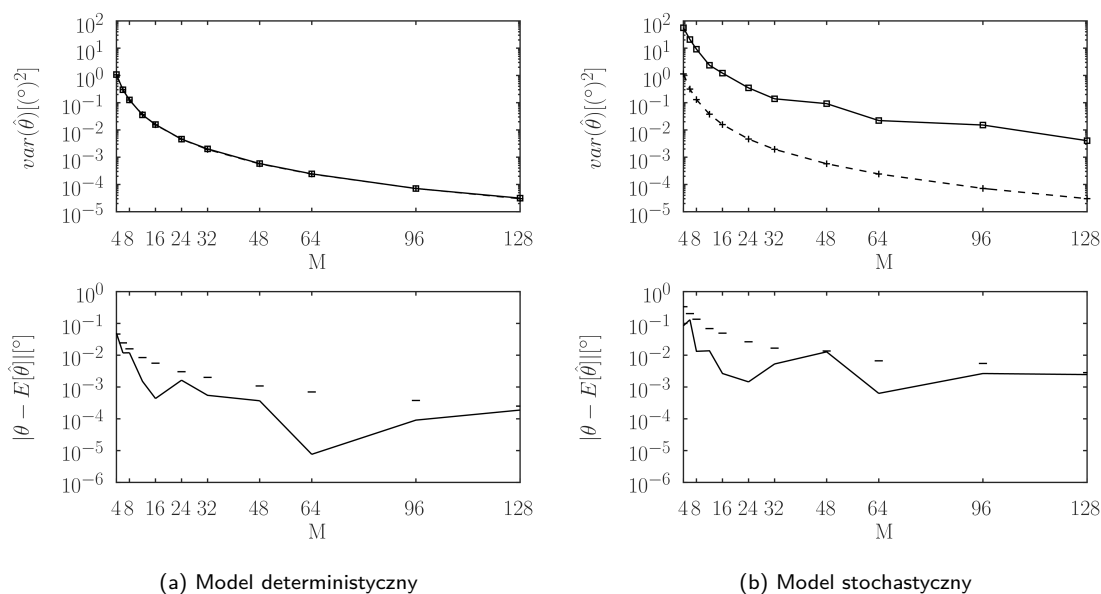


Rys. 7.23: Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.23a) i stochastycznego (7.23b) przy  $M = 16$  elementach odbiorczych i  $N = 32$  obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## 7.2.6 Testy deterministycznego estymatora największej wiarygodności z założeniem stałej amplitudy sygnału

### Test 1

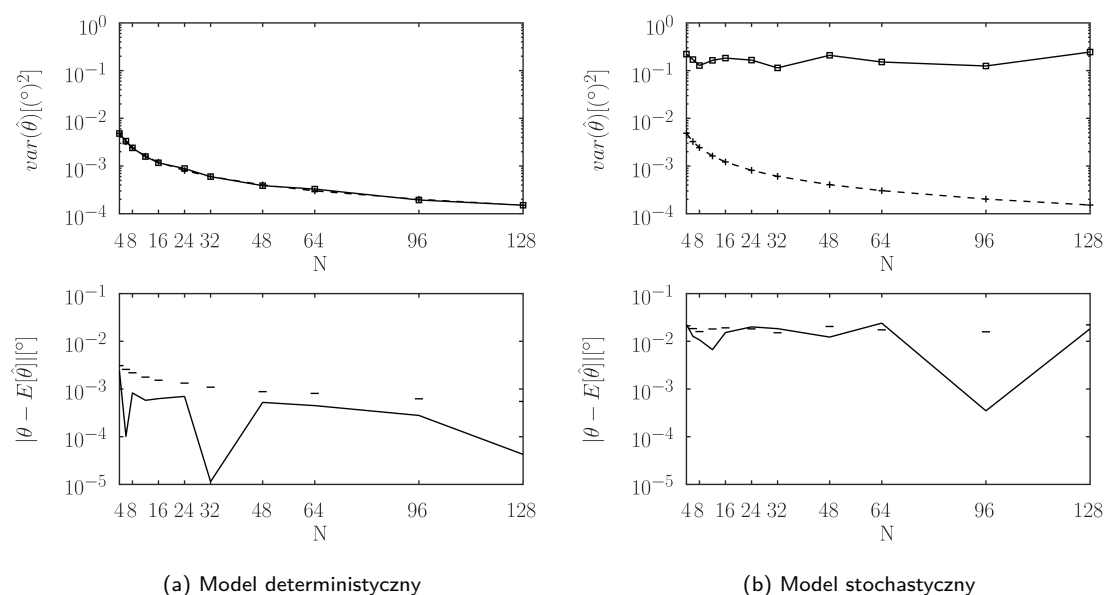
Pierwszy z testów estymatora największej wiarygodności zakładającego stałą amplitudę pokazuje zależność wariancji i obciążenia estymowanego kąta odbioru echa w zależności od liczby elementów antenowych ( $M$ ) dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (wykres 7.24a) i stochastycznego (wykres 7.24b). Założono liczbę sondowań  $N = 10$ , stały  $SNR = 10$  dB oraz jeden obiekt na kącie  $\theta = 0^\circ$ . Wyraźnie widoczny jest efekt poprawnego dopasowania typu estymatora do dostępnych danych. Wykres oparty o deterministyczną postać generowania pomiarów w całym symulowanym zakresie parametrów  $M$  jest zbieżny z teoretycznym dolnym ograniczeniem przy jednoczesnym niskim poziomie obciążenia. Widać również negatywny efekt nieprawidłowego dopasowania modelu (wykres 7.24b), gdzie wartość wariancji nie jest zbieżna z ograniczeniem Craméra-Rao i utrzymuje się około dwa rzędy wielkości ponad nim. W obu przypadkach uzyskane wartości obciążenia mieszczą się w zakładanym 95% przedziale ufności.



Rys. 7.24: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby elementów antenowych, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.24a) i stochastycznego (7.24b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## Test 2

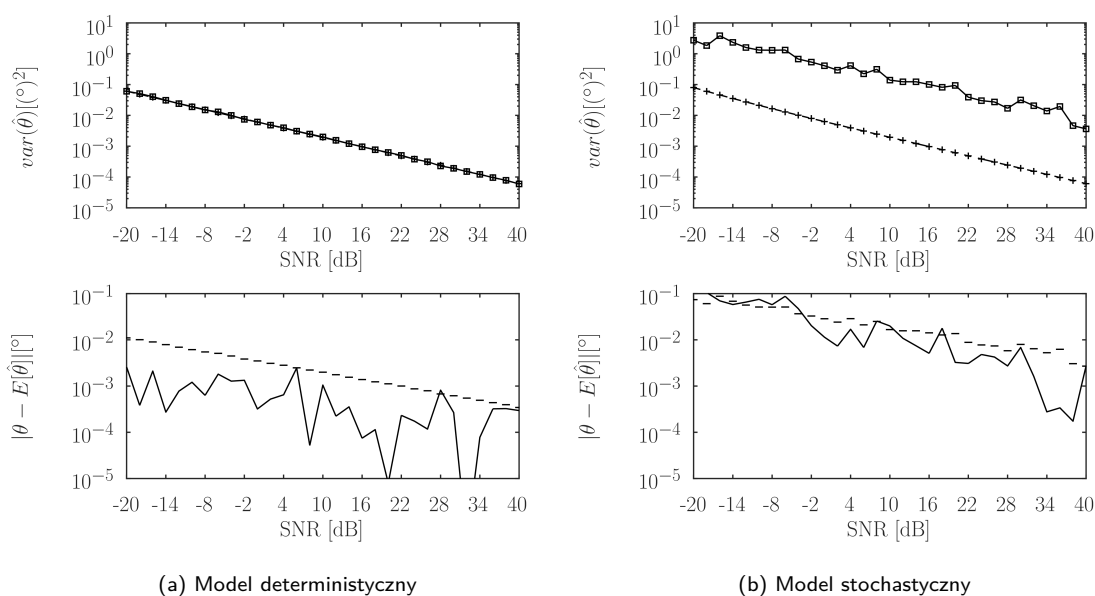
Wyniki drugiego z testów (zależność wariancji estymowanego kąta od liczby obserwacji) przedstawiono na wykresach 7.25a (dane wygenerowane na podstawie modelu deterministycznego) i 7.25b (dane wygenerowane na podstawie modelu stochastycznego). Ponownie zgodność danych z modelem daje bardzo dobre efekty - widać to po zbieżności danych uzyskanych metodą Monte Carlo z ograniczeniem Craméra-Rao. Na podstawie wykresu 7.25b można zauważyć opisaną wcześniej tendencję, według której na jakość oszacowania nie ma wpływu liczba obserwacji (w przypadku danych stochastycznych). W takim wypadku wariancja estymowanego kąta odbioru echa jest w przybliżeniu stała. Ze względu na bliskość skraju przedziału ufności estymaty te można uznać za obciążone.



Rys. 7.25: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby obserwacji, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.25a) i stochastycznego (7.25b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## Test 3

Trzeci z testów (wykres 7.26a dla danych zgodnych z modelem deterministycznym i 7.26b przy sygnałach pochodzących z modelu stochastycznego) pokazuje wpływ zmian  $SNR$  na wariancję estymowanego kąta przy zachowaniu stałej liczby obserwacji ( $N = 10$ ) i elementów antenowych ( $M = 32$ ). Ponownie widoczna jest zbieżność w całym badanym zakresie  $SNR$  dla danych deterministycznych, inaczej niż miało to miejsce w większości estymatorów nieparametrycznych. Dla pracy na danych pochodzenia stochastycznego zauważalna jest poprawa jakości oszacowania wraz z wzrostem  $SNR$ , jednak należy liczyć się z brakiem zbieżności z ograniczeniem Craméra-Rao i ponownie (w odniesieniu do poprzedniego testu) około dwa rzędy wielkości większą od możliwej do uzyskania wariancją. Również i w tym teście dane wygenerowane na podstawie modelu stochastycznego można uznać za obciążone.

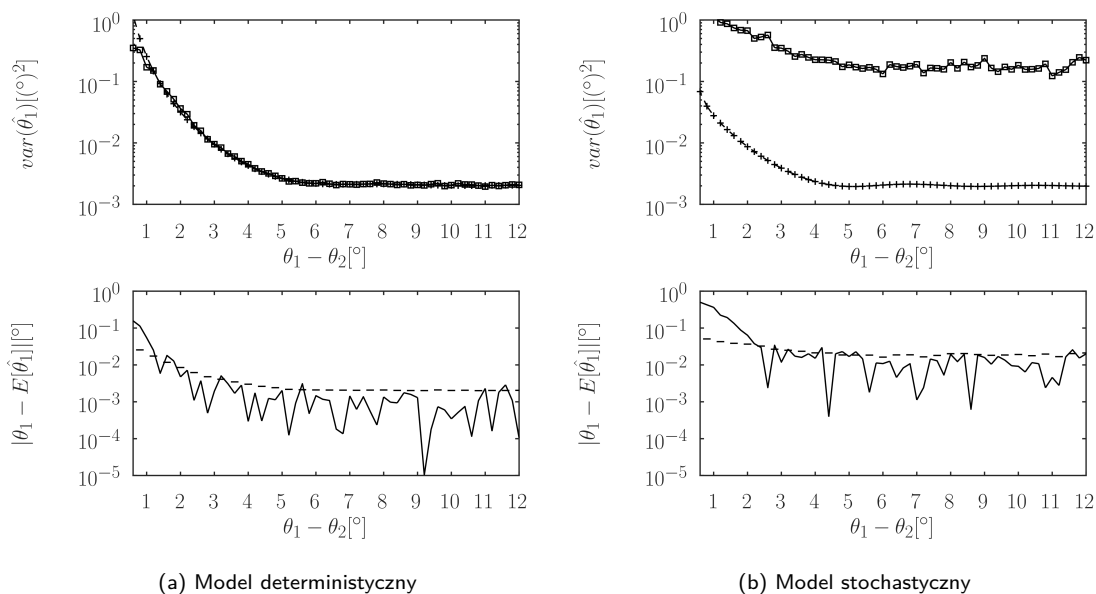


Rys. 7.26: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od  $SNR$ , dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.26a) i stochastycznego (7.26b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

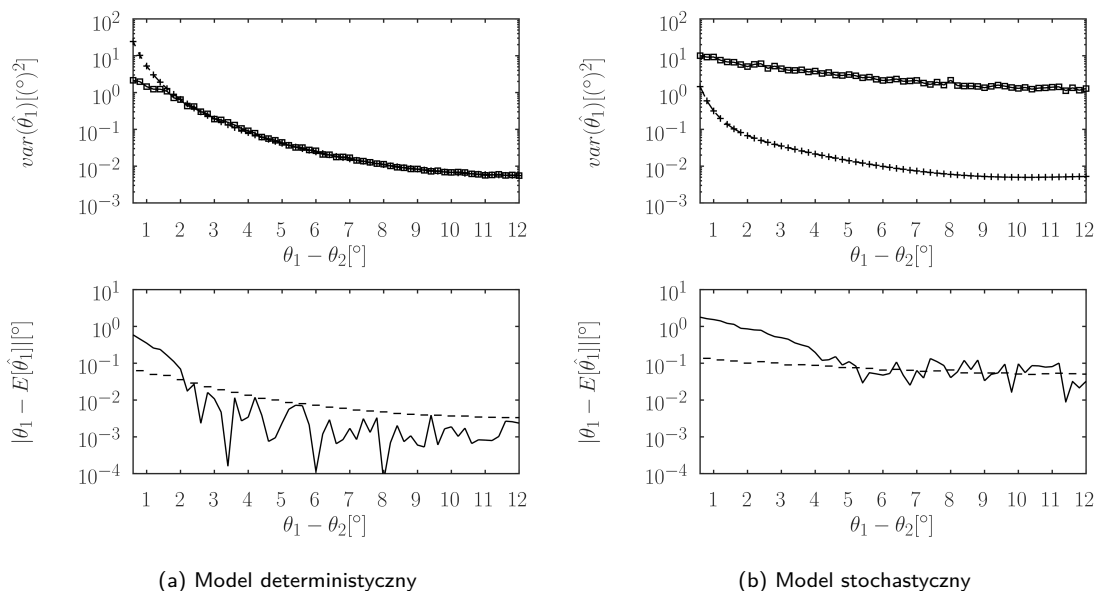
---

## Test 4 i 5

W testach zakładających obecność dwóch źródeł sygnałów (zgodnych z modelem deterministycznym - wykresy 7.27a, 7.28a i stochastycznym - 7.27b, 7.28b) zbadana została zależność między separacją kątową między nimi ( $\theta_1 - \theta_2$ ) a wariancją estymowanego kąta odbioru pierwszego z nich. W trakcie symulacji skorzystano z algorytmu największej wiarygodności dostosowanego do pracy z dwoma źródłami sygnału, w którym funkcja kosztu opisana jest równaniem (2.64). Założono stałą liczbę elementów antenowych:  $M = 32$  oraz niezmienną liczbę obserwacji:  $N = 10$  (wykresy 7.27a i 7.27b). Zbadano również sytuację z parametrami  $M = 32$  oraz  $N = 10$  (wykresy 7.28a i 7.28b). Można zauważyć, że algorytm uzyskuje zbliżone wyniki (względem ograniczenia Craméra-Rao) niezależnie od liczby sondowań i elementów antenowych. Różnice natomiast są obserwowane między symulacjami z różnym sposobem generowania danych. Przy sygnałach pochodzących z modelu deterministycznego widoczna jest zbieżność wykresu z ograniczeniem Craméra-Rao niemalże w całym badanym zakresie separacji kątowych. Wyjątkiem jest fragment, gdzie cele były na tyle blisko siebie, że estymator stał się obciążony zmniejszając jednocześnie wariancję poniżej ograniczenia. Przy mniejszej liczbie elementów antenowych zjawisko to występuje przy nieco bardziej rozsuniętych kątowo obiektach, co wynika z poszerzeniem się charakterystyki odbiorczej. Dla danych pochodzących z modelu stochastycznego wyniki są podobne jak w przypadku wcześniejszych testów - początkowo wariancja maleje wraz z separacją, jednak od pewnego momentu zaczyna utrzymywać się na pewnym poziomie znacznie ponad ograniczeniem Craméra-Rao. Obciążenie w przypadku obu modeli wykracza poza przedział ufności przy niskiej separacji kątowej. Dla większego rozsunienia obiektów obciążenie jest na granicy przedziału ufności.



Rys. 7.27: Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.27a) i stochastycznego (7.27b) przy  $M = 32$  elementach odbiorczych i  $N = 10$  obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).



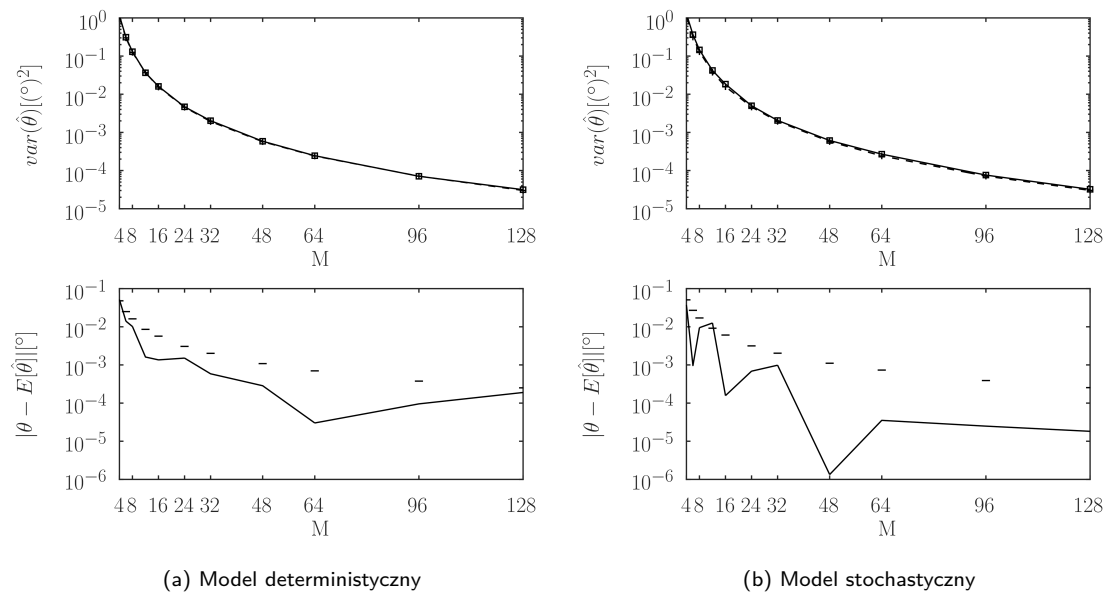
Rys. 7.28: Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.28a) i stochastycznego (7.28b) przy  $M = 16$  elementach odbiorczych i  $N = 32$  obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).



## 7.2.7 Testy deterministycznego estymatora największej wiarygodności z założeniem zmiennej amplitudy sygnału

### Test 1

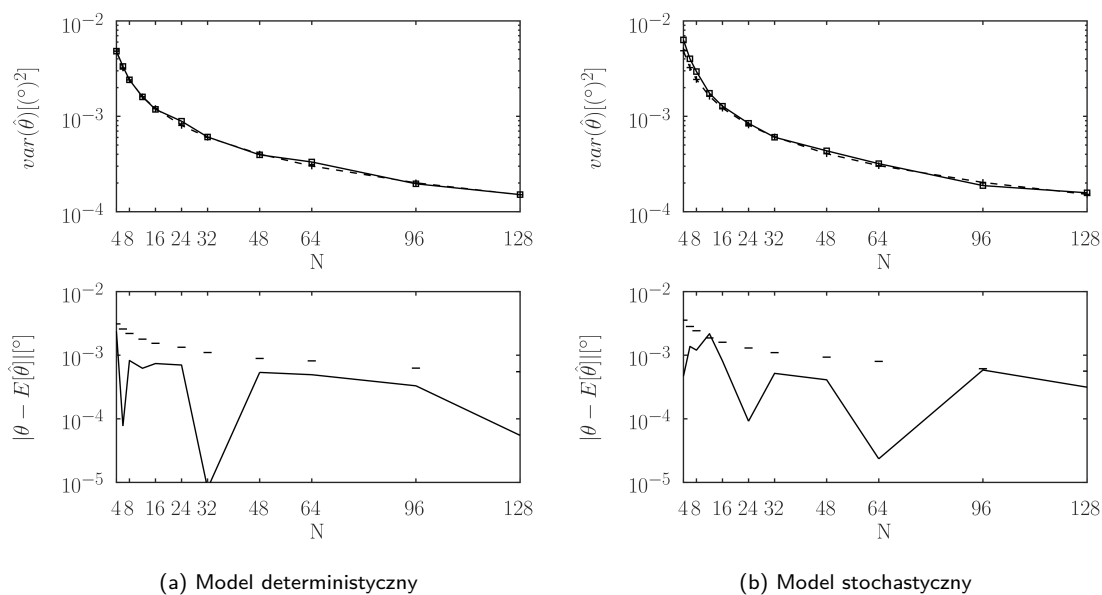
Badanie deterministycznego estymatora największej wiarygodności, w którym parametrami są amplitudy sygnału w kolejnych sondowaniach można rozpocząć od sprawdzenia wpływu liczby elementów antenowych na jakość oszacowania kąta (dane pochodzące z modelu deterministycznego - wykres 7.29a, stochastycznego - wykres 7.29b). Parametry takie jak położenie celu ( $\theta = 0^\circ$ ),  $SNR$  (10 dB) i liczba obserwacji ( $N = 10$ ) pozostawały stałe. Widoczna jest zbieżność estymatora z ograniczeniem Craméra-Rao niezależnie od zastosowanego modelu. Jest to zgodne z oczekiwaniami - tego typu estymator sprawdzi się w przypadku dowolnego rozkładu amplitud. Wartości estymowanych kątów można uznać za nieobciążone.



Rys. 7.29: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby elementów antenowych, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.29a) i stochastycznego (7.29b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## Test 2

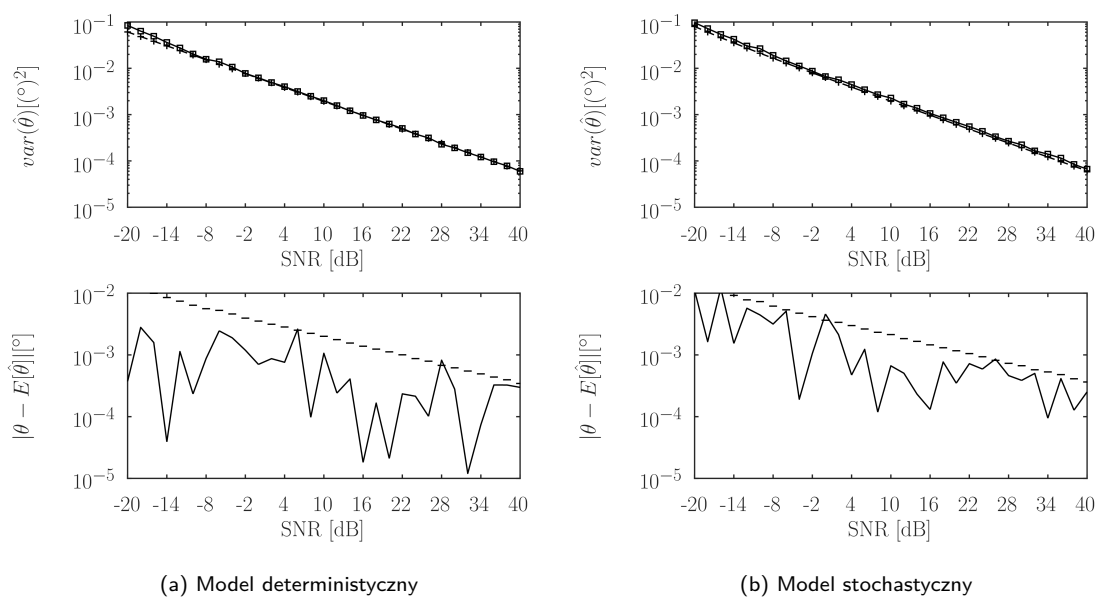
Drugi z testów pokazuje zależność wariancji estymowanego kąta od liczby sondowań ( $N$ ). W przypadku obu modeli (deterministycznego - 7.30a jak i stochastycznego - 7.30b) przebiegi wyglądają niemal identycznie i w pełnym zakresie pokrywają się z ograniczeniem Craméra-Rao. Drobne różnice wynikają z skończonej liczby testów Monte Carlo (2000 realizacji). Obciążenie w obu przypadkach znajduje się poniżej górnej granicy przedziału ufności.



Rys. 7.30: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby obserwacji, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.30a) i stochastycznego (7.30b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

### Test 3

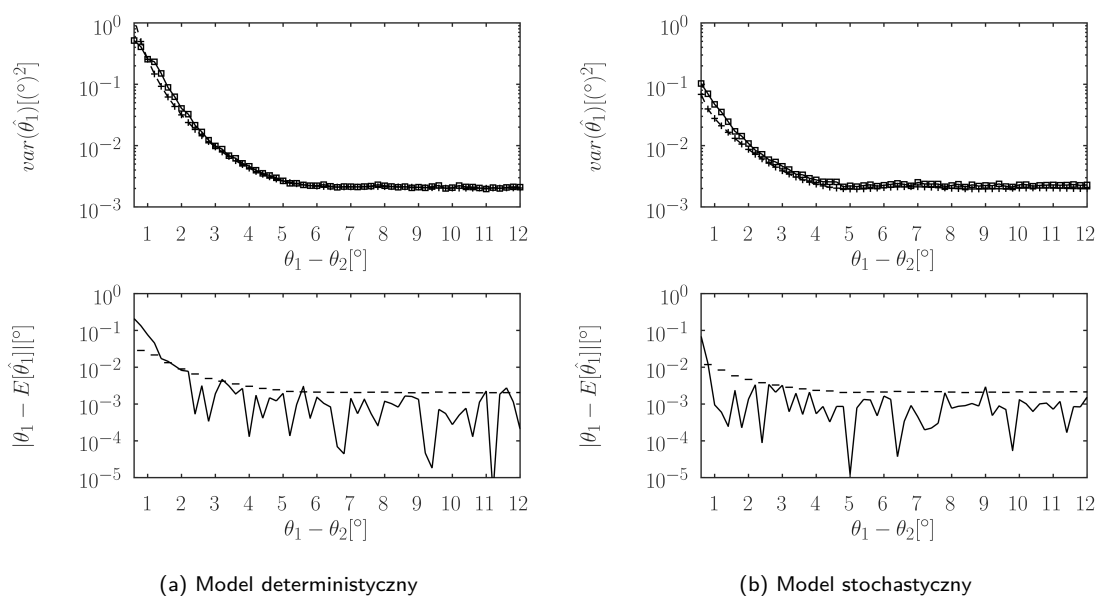
Ostatni z testów wykonanych w oparciu o modele z 1 źródłem sygnału (deterministyczny 7.31a i stochastyczny 7.31b) kolejny raz pokazują dobrą zbieżność badanego estymatora z ograniczeniem Craméra-Rao w pełnym badanym zakresie. Zastosowano stałą liczbę elementów antenowych ( $M = 32$ ), stałą liczbę sondowań ( $N = 10$ ) i  $SNR$  wskazany na osi poziomej. Oba przebiegi wyglądają niemal identycznie. Jedynie dla modelu stochastycznego obserwowana jest niewielka rozbieżność uzyskanych wariacji od ograniczenia, co jest efektem stosunkowo niedużej liczby obserwacji ( $N$ ). W obu przypadkach oszacowania można uznać za nieobciążone.



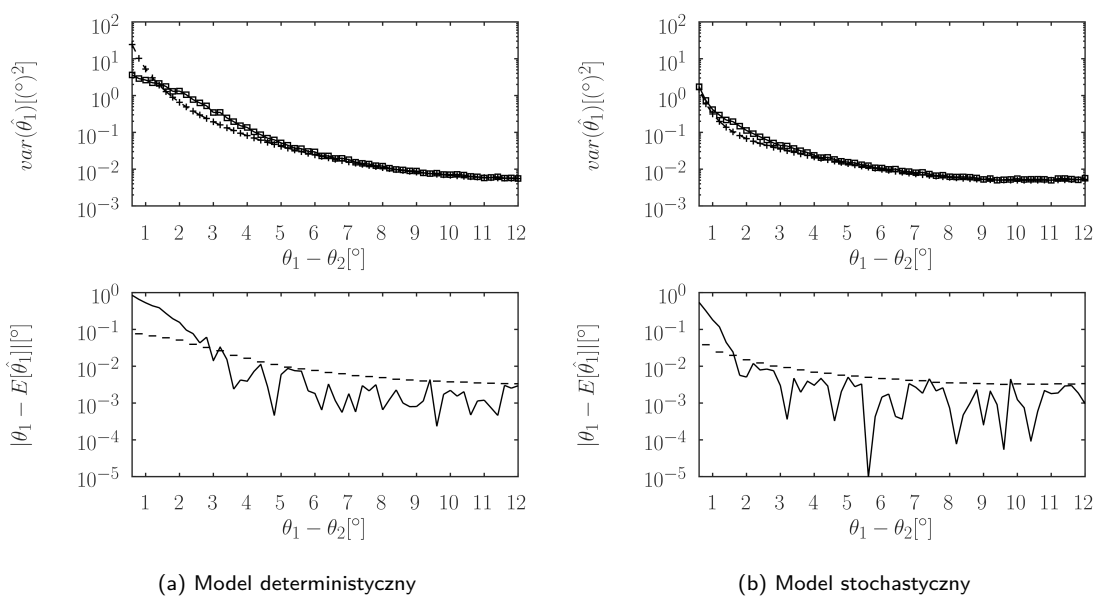
Rys. 7.31: Porównanie wariacji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od SNR, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.31a) i stochastycznego (7.31b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## Test 4 i 5

Testy estymatora deterministycznego zamyka sprawdzenie zależności wariancji estymowanego kąta od separacji między dwoma obecnymi w symulacji celami. Sprawdzono zachowanie w przypadku sygnałów wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (wykresy 7.32a i 7.33a) oraz stochastycznego (wykresy 7.32b i 7.33b). Zastosowano 2 zestawy parametrów:  $M = 32$ ,  $N = 10$  (wykresy 7.32a i 7.32b)  $M = 16$ ,  $N = 32$  (wykresy 7.33a i 7.33b). W każdym z czterech przypadków wyniki wyglądają podobnie - w znacznej większości testowanego zakresu separacji wariancja estymowanego kąta dosyć dobrze pokrywa się z ograniczeniem Craméra-Rao. Rozbieżności pojawiają się w przypadku znacznego zbliżenia obiektów do siebie. Oszacowanie w tym obszarze cechuje się podwyższonym obciążeniem, co może w pewnym stopniu tłumaczyć nieidealną zgodność wariancji z teoretycznym ograniczeniem.



Rys. 7.32: Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.32a) i stochastycznego (7.32b) przy  $M = 32$  elementach odbiorczych i  $N = 10$  obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

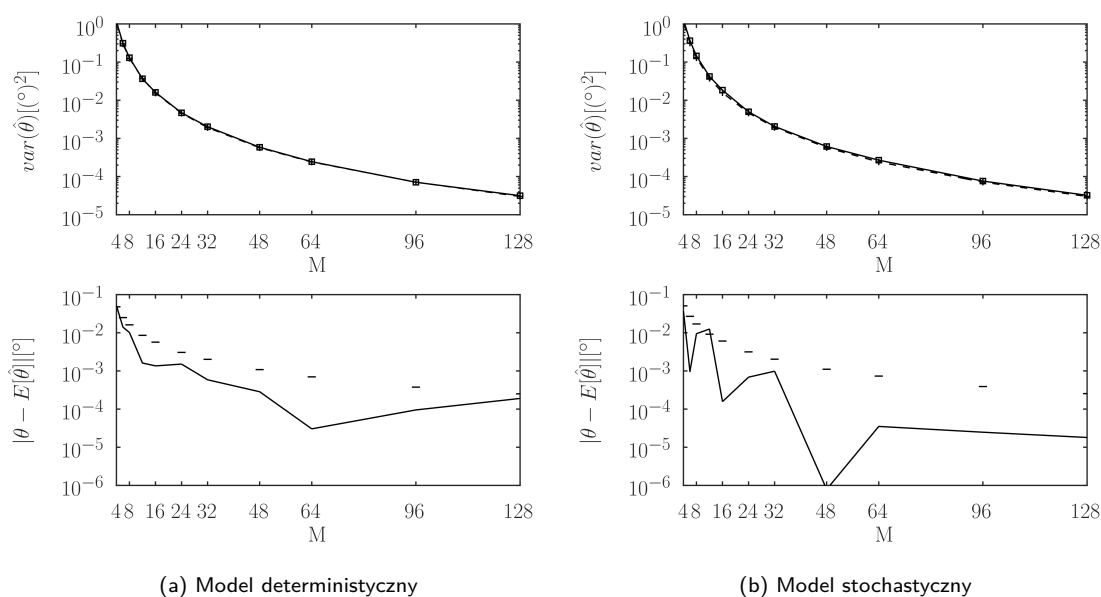


Rys. 7.33: Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.33a) i stochastycznego (7.33b) przy  $M = 16$  elementach odbiorczych i  $N = 32$  obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## 7.2.8 Testy stochastycznego estymatora największej wiarygodności

### Test 1

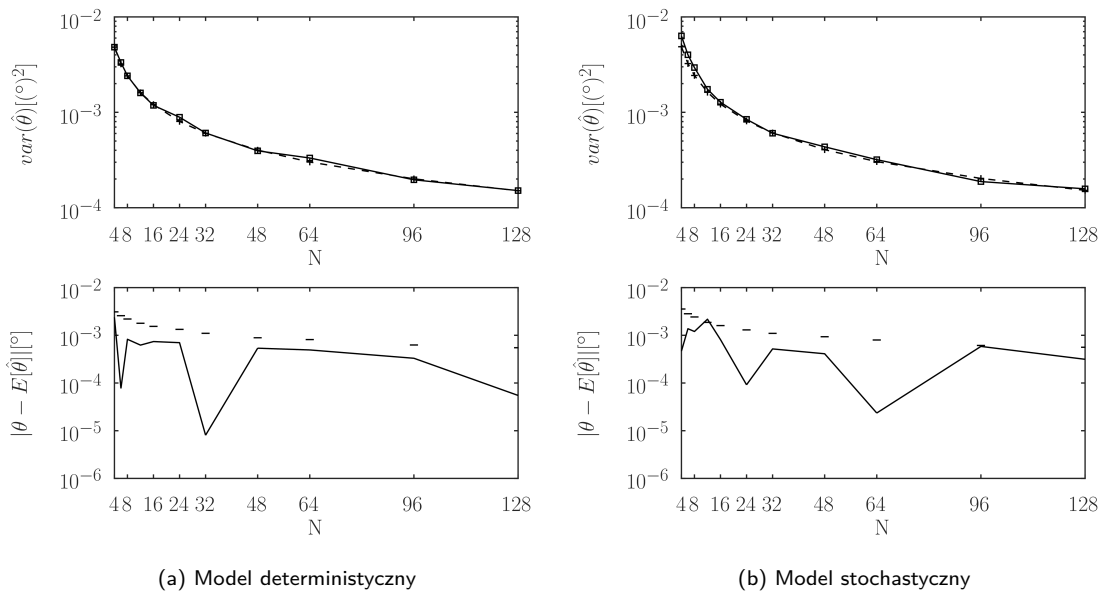
Pierwszy z testów sprawdzał zależność wariancji estymowanego kąta odbioru sygnału w zależności od liczby elementów antenowych (oś pozioma). Stałe pozostawały wartości  $SNR = 10$  dB, liczba obserwacji ( $N = 10$ ) i położenie celu ( $\theta = 0^\circ$ ). Na podstawie wykresu widać, że przez większość badanego zakresu krzywa (w przypadku obu modeli: deterministycznego - wykres 7.34a i stochastycznego - wykres 7.34b) wygląda podobnie i niemalże całkowicie pokrywa się z teoretycznym dolnym ograniczeniem. Dopiero dla większej liczby elementów antenowych obserwowane jest małe podniesienie się poziomu wariancji. Uzyskane wartości oszacowań kątów można uznać za nieobciążone.



Rys. 7.34: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby elementów antenowych, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.34a) i stochastycznego (7.34b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## Test 2

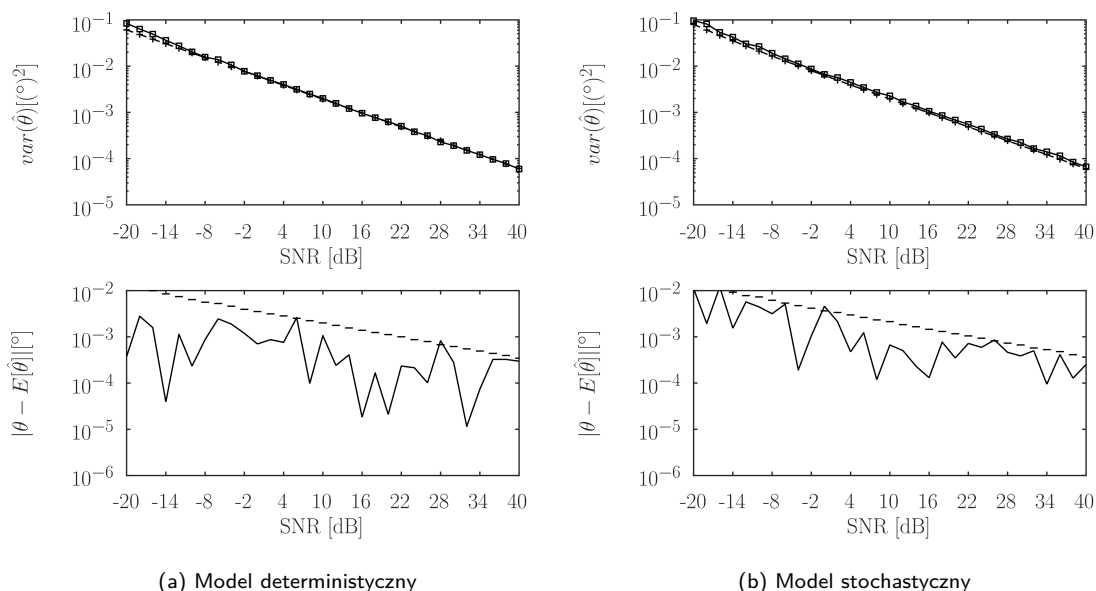
Drugi z testów (wykresy 7.35a i 7.35b dla danych pochodzących z odpowiednio modelu deterministycznego i stochastycznego) pokazuje zależność między wariancją estymowanego kąta a liczbą obserwacji  $N$ . Stałe pozostawały:  $SNR = 10$  dB,  $M = 32$  i położenie celu  $\theta = 0^\circ$ . Ponownie, zachowanie estymatora dla obu sposobów generowania danych wygląda bardzo podobnie. W prawie całym zakresie  $N$  estymator jest statystycznie efektywny. Wyjątkiem jest skrajnie niska wartość liczby sondowań, dla której ledwie dostrzegalny jest wzrost poziomu wariancji estymowanego kąta. Przy zbyt małej liczbie sondowań w stosunku do wektora odpowiedzi antenowej ( $N < M$ ) macierz kowariancji  $\hat{\mathbf{R}}$  staje się osobliwa i wymagane jest jej dociążenie - co przekłada się na powstanie błędów o stałym charakterze. W tym przypadku są one jednak na tyle nieznaczne, że trudno jest dostrzec ten efekt, a uzyskane wartości można uznać za nieobciążone.



Rys. 7.35: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby obserwacji, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.35a) i stochastycznego (7.35b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

## Test 3

Trzeci z testów stochastycznego estymatora największej wiarygodności pokazuje zależność między  $SNR$  a wariancją estymowanego kąta dla dwóch sposobów generowania danych (deterministyczny - 7.36a i stochastyczny - 7.36b). W obu przypadkach ograniczenie Craméra-Rao jest osiągnięte w pełnym badanym zakresie  $SNR$ . Jednocześnie obciążenie mieści się w obrębie założonego przedziału ufności.

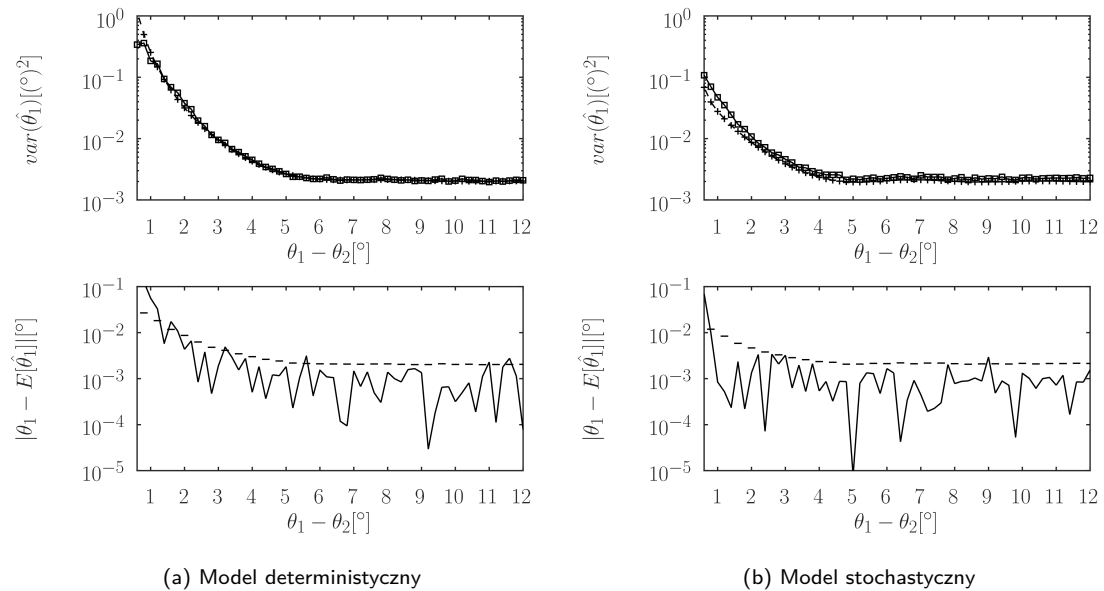


Rys. 7.36: Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od SNR, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.36a) i stochastycznego (7.36b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

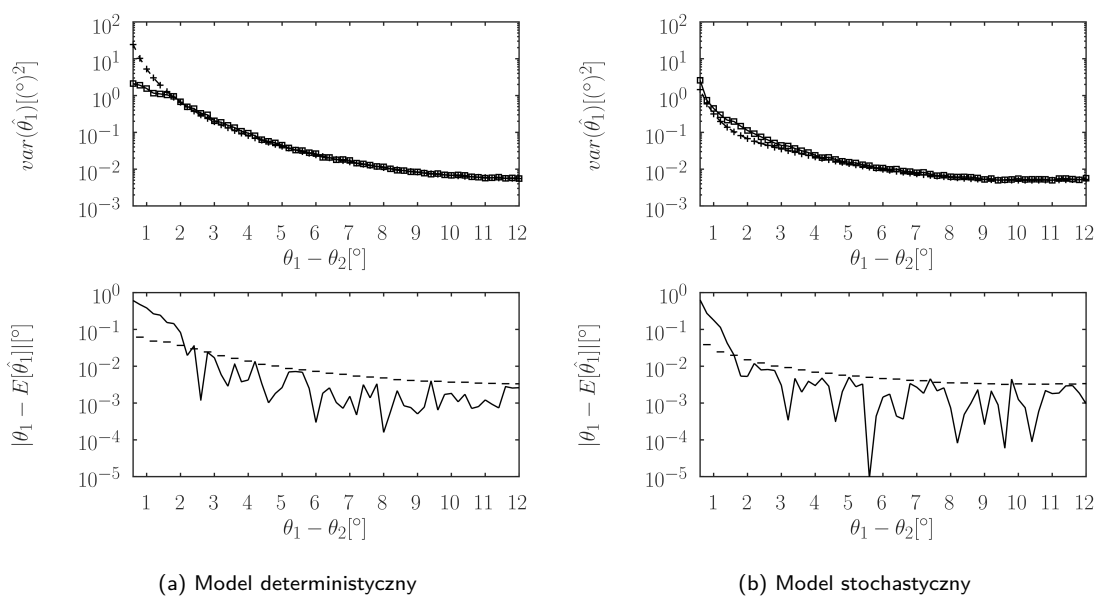


## Test 4 i 5

Ostatnie 2 testy zakładają obecność dwóch źródeł sygnału na kątach  $\theta_1$  i  $\theta_2$  z założeniem  $\theta_2 = -\theta_1$ . Na osi poziomek wskazano wartość separacji  $\theta_1 - \theta_2$ . Zbadano w nich wpływ separacji kątowej obiektów na wariancję estymowanego kąta pierwszego z ech. Sprawdzono zachowanie w przypadku sygnałów wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (wykresy 7.37a i 7.38a) oraz stochastycznego (wykresy 7.37b i 7.38b). Zastosowano 2 zestawy parametrów:  $M = 32$ ,  $N = 10$  (wykresy 7.37a i 7.37b)  $M = 16$ ,  $N = 32$  (wykresy 7.38a i 7.38b). Wyniki wyglądają niemalże identycznie i charakteryzują się dobrą zgodnością uzyskanej wariancji z ograniczeniem Craméra-Rao. Wraz ze spadkiem separacji obserwowalny jest wzrost obciążenia, jednak jest to cecha obserwowana w wszystkich testach każdego z wariantów estymatorów największej wiarygodności. Drobne różnice w zachowaniu dla różnych sposobów generowania danych (deterministycznego i stochastycznego) pojawiają się przy niedużej separacji kątowej celów (poniżej  $2^\circ$ ), jednak należy mieć na uwadze, że estymowane kąty charakteryzują się wtedy sporym obciążeniem.



Rys. 7.37: Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.37a) i stochastycznego (7.37b) przy  $M = 32$  elementach odbiorczych i  $N = 10$  obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).



Rys. 7.38: Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.38a) i stochastycznego (7.38b) przy  $M = 16$  elementach odbiorczych i  $N = 32$  obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności).

# Wykaz literatury

- [1] Z. Czekąła. *Parada radarów*, pages 23–27. Bellona, 1999.
- [2] C. Hülsmeier. Verfahren, um metallische gegenstände mittels elektrischer wellen einem beobachter zu melden.
- [3] J. Ender. 98 years of the radar principle: the inventor Christian Hülsmeier. In *European Conference on Synthetic Aperture Radar*, 2002.
- [4] R.C. Watson. *Radar Origins Worldwide: History of Its Evolution in 13 Nations Through World War II*. Trafford Publishing, 2009.
- [5] M. Gregory C. Clark. Deflating British radar myths of World War II. 1997.
- [6] G. Tomezzoli. The German Radar Surveillance around the Aber Wrach during the WW II. *Archaeological Discovery*, 05:22–41, 01 2017.
- [7] F.J. Yanovsky. Glimpses of Early Radar Developments in Ukraine and the Former Soviet Union. *Radio Science Bulletin*, pages 35–68, 09 2016.
- [8] V.S. Cherneyak, I.Ya Immoreev, and B.M. Vovshin. Radar in the Soviet Union and Russia: A Brief Historical Outline. *Aerospace and Electronic Systems Magazine, IEEE*, 18:8 – 12, 01 2004.
- [9] A. H. Taylor. System for detecting objects by radio, U.S. Patent US1981884A, Nov. 27, 1934.
- [10] V. Chernyak and I. Immoreev. A Brief History of Radar. *Aerospace and Electronic Systems Magazine, IEEE*, 24:B1 – B32, 10 2009.
- [11] R. J. James. A history of radar. *IEE Review*, 35(9):343–349, Oct 1989.
- [12] F.C. Robey, S. Coutts, D. Weikle, J.C. McHarg, and K. Cuomo. MIMO radar theory and experimental results. In *Conference Record of the Thirty-Eighth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 2004.*, volume 1, pages 300–304 Vol.1, 2004.
- [13] A. Doerry. Introduction to synthetic aperture radar. In *2019 IEEE Radar Conference (RadarConf)*, pages 1–90, 2019.
- [14] H. Kuschel, D. Cristallini, and K. E. Olsen. Tutorial: Passive radar tutorial. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 34(2):2–19, 2019.

- [15] M. Malanowski. *Signal Processing for Passive Bistatic Radar*. Artech House Publishers, 2019.
- [16] X. Li, Z. Huang, F. Wang, X. Wang, and T. Liu. Toward convolutional neural networks on pulse repetition interval modulation recognition. *IEEE Communications Letters*, 22(11):2286–2289, Nov 2018.
- [17] D. Peipei and Z. Yan. HRRP Target Recognition Based on Sparse Representation. *Journal of Physics: Conference Series*, 1237:032021, 06 2019.
- [18] M. Leclerc, R. Tharmarasa, M. Florea, A. Boury-Brisset, T. Kirubarajan, and N. Duclos-Hindie. Ship classification using deep learning techniques for maritime target tracking. pages 750–757, 07 2018.
- [19] S. Chen and H. Wang. SAR target recognition based on deep learning. *DSAA 2014 - Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Data Science and Advanced Analytics*, pages 541–547, 03 2015.
- [20] J. Metcalf, S. D. Blunt, and B. Himed. A machine learning approach to cognitive radar detection. In *2015 IEEE Radar Conference (RadarCon)*, pages 1405–1411, 2015.
- [21] J. Mun, H. Kim, and J. Lee. A deep learning approach for automotive radar interference mitigation. In *2018 IEEE 88th Vehicular Technology Conference (VTC-Fall)*, pages 1–5, Aug 2018.
- [22] N. A. Goodman. Chapter 3 - foundations of cognitive radar for next-generation radar systems. In R. Chellappa and S. Theodoridis, editors, *Academic Press Library in Signal Processing, Volume 7*, pages 153 – 195. Academic Press, 2018.
- [23] R. Abad, M. Ierkić, and E. Ortiz-Rivera. Basic understanding of cognitive radar. pages 1–4, 10 2016.
- [24] F. Stambouli, M. Limbach, T. Rommel, and M. Younis. A Cognitive Maritime SAR Concept for High Altitude Platforms. 09 2019.
- [25] V. Thuy Vu, M. Pettersson, R. Machado, P. Dammert, and H. Hellsten. False Alarm Reduction in Wavelength-Resolution SAR Change Detection Using Adaptive Noise Canceler. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, PP:1–9, 10 2016.
- [26] M. Brzozowski, M. Pakowski, M. Nowakowski, M. Myszka, and M. Michalczewski. Radiolocation Devices for Detection and Tracking Small High-Speed Ballistic Objects—Features, Applications, and Methods of Tests. *Sensors*, 19:5362, 12 2019.
- [27] K. Grudowski, T. Dorau, and M. Sankowski. Implementation of algorithms for ballistic object model parametric identification based on radar measurements.
- [28] K. Stawiarski and M. Meller. Helicopter identification using blade flash sequence matching. In *2018 22nd International Microwave and Radar Conference (MIKON)*, pages 133–134, May 2018.

- [29] N. K. Shi and H. F. Williams. Radar detection and classification of helicopters.
- [30] Z. Czeakała. *Parada radarów*, pages 15–22. Bellona, 1999.
- [31] M. I. Skolnik. *Radar Handbook*, chapter 1. McGraw-Hill Professional, 1990.
- [32] M. Sikora. Wojska radiotechniczne Sił Powietrznych. *Przegląd sił powietrznych*, Październik 2010.
- [33] M. Meller and K. Stawiarski. On Radar DoA Estimation and Tilted Rotating Electronically Scanned Arrays. In *2020 21st International Radar Symposium (IRS)*, pages 292–297, 2020.
- [34] H. Meikle. *Modern Radar Systems*, pages 58–59. Artech House, 2008.
- [35] E. J. Barlow. Doppler radar. *Proceedings of the IRE*, 37(4):340–355, April 1949.
- [36] M. Meller and K. Stawiarski. A concept of software extension of 3D low-PRF radar systems to 4D semi-medium-PRF radar systems. In *Radioelectronic Systems Conference 2019*, volume 11442, pages 8 – 14. International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2020.
- [37] C. T.Do and H. V. Nguyen. Tracking multiple targets from multistatic doppler radar with unknown probability of detection. *Sensors (Basel)*, April 2019.
- [38] E. Kabalci and Y. Kabalci. Chapter 6 - cognitive radio based smart grid communications. In E. Kabalci and Y. Kabalci, editors, *From Smart Grid to Internet of Energy*, pages 209–248. Academic Press, 2019.
- [39] D. K. Barton. *Modern radar system analysis*. 1988.
- [40] C. L. Temes. Sidelobe suppression in a range-channel pulse-compression radar. *IRE Transactions on Military Electronics*, MIL-6(2):162–169, 1962.
- [41] M. I. Skolnik. *Radar Handbook*, chapter 10. McGraw-Hill Professional, 1990.
- [42] H. L. Van Trees. *Optimum Array Processing – Part IV of Detection, Estimation, and Modulation Theory*. 05 2002.
- [43] M. I Skolnik. *Radar handbook*. McGraw-Hill, New York, NY, 1970.
- [44] M. I. Skolnik. *Radar Handbook*, chapter 15. McGraw-Hill Professional, 1990.
- [45] S. D. Himonas and M. Barkat. Automatic censored CFAR detection for nonhomogeneous environments. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 28(1):286–304, 1992.
- [46] M. Shor and N. Levanon. Performance of order statistics CFAR. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, 27:214 – 224, 04 1991.
- [47] M. I. Skolnik. *Radar Handbook*, chapter 3. McGraw-Hill Professional, 1990.
- [48] S. S. Blackman, R. J. Dempster, and S. H. Roszkowski. IMM/MHT applications to radar and IR multitarget tracking. In Oliver E. Drummond, editor, *Signal and Data Processing of Small Targets 1997*, volume 3163, pages 429 – 439. International Society for Optics and Photonics, SPIE, 1997.

- [49] S.S. Blackman, R.J. Dempster, M.T. Busch, and R.F. Popoli. IMM/MHT solution to radar benchmark tracking problem. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 35(2):730–738, 1999.
- [50] J. Popik, T. Rutkowski, J. Wiśniewski, and M. Sankowski. Postęp techniczny w radarach wielofunkcyjnych w pasmie c. *Elektronika: konstrukcje, technologie, zastosowania*, 60(10):3–10, 2019.
- [51] M. Sankowski and T. Rutkowski. Fuzja danych w sieciach wielofunkcyjnych radarów rozpoznania. *Elektronika: konstrukcje, technologie, zastosowania*, 60(10):29–39, 2019.
- [52] Yu. B. Nechaev, I. W. Peshkov, and N. A. Fortunova. Cylindrical antenna array development and measurements for DOA-estimation applications. In *2017 XI International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT)*, pages 155–158, 2017.
- [53] D. M. Patterson and R. A. Ashley. *Glint tracking errors in radar*, pages 121–136. Springer US, Boston, MA, 2000.
- [54] F. Gini, M. Greco, and M. Rangaswamy. High resolution radar clutter analysis and modeling for advanced target detection strategies. page 48, 11 2007.
- [55] W. Kederer and J. Detlefsen. Direction of arrival (DOA) determination based on monopulse concepts. In *2000 Asia-Pacific Microwave Conference. Proceedings (Cat. No.00TH8522)*, pages 120–123, 2000.
- [56] T. Marzetta, S. Simon, and H. Ren. Capon-MVDR spectral estimation from singular data covariance matrix, with no diagonal loading. 05 2021.
- [57] I. J. Myung. Tutorial on maximum likelihood estimation. *Journal of Mathematical Psychology*, 47(1):90–100, 2003.
- [58] M. Sekine, S. Ohtani, T. Musha, T. Irapu, E. Kiuchi, T. Hagsawa, and Y. Tomita. Weibull-distributed ground clutter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-17(4):596–598, 1981.
- [59] X. Zhang, H. Li, and B. Himed. Maximum Likelihood Delay and Doppler Estimation for Passive Sensing. *IEEE Sensors Journal*, 19(1):180–188, 2019.
- [60] P. J. Chung, M. Viberg, and J. Yu. Chapter 14 - DOA Estimation Methods and Algorithms. In A. M. Zoubir, M. Viberg, R. Chellappa, and S. Theodoridis, editors, *Academic Press Library in Signal Processing: Volume 3*, volume 3 of *Academic Press Library in Signal Processing*, pages 599–650. Elsevier, 2014.
- [61] M. I. Skolnik. *Radar Handbook*, chapter 20. McGraw-Hill Professional, 1990.
- [62] B. R. Mahafza. *Radar Systems Analysis and Design Using MATLAB*. CRC Press, Inc., USA, 2000.
- [63] D. K. Barton. Low-angle radar tracking. *Proceedings of the IEEE*, 62(6):687–704, 1974.

- [64] M. I. Skolnik. *Radar Handbook*, chapter 16. McGraw-Hill Professional, 1990.
- [65] M. Meller and K. Stawiarski. Robustified estimators of radar elevation angle using a specular multipath model. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 56(2):1623–1636, 2020.
- [66] L. El Ghaoui and H. Lebret. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 18(4):1035–1064, 1997.
- [67] S. Chandrasekaran, G. Golub, and M. Gu. Parameter estimation in the presence of bounded data uncertainties. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 19, 05 1999.
- [68] M. Sousa Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd, and H. Lebret. Applications of second-order cone programming. *Linear Algebra and its Applications*, 284(1):193–228, 1998. International Linear Algebra Society (ILAS) Symposium on Fast Algorithms for Control, Signals and Image Processing.
- [69] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [70] J. Stadnicki. *Teoria i praktyka rozwiązywania zadań optymalizacji: z przykładami zastosowań technicznych*. Wydawnictwo WNT, 2017.
- [71] H. Akaike. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6):716–723, 1974.
- [72] G. Schwarz. Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2):461 – 464, 1978.
- [73] M. Meller and K. Stawiarski. Soft-decision schemes for radar estimation of elevation at low grazing angles. *IET Radar Sonar and Navigation*, 13:1934–1942, 2019.
- [74] G. Claeskens and N. L. Hjort. *Model Selection and Model Averaging*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2008.
- [75] C. M. Hurvich, J. S. Simonoff, and C. L. Tsai. Smoothing parameter selection in nonparametric regression using an improved Akaike information criterion. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 60(2):271–293, 1998.
- [76] H. L. Van Trees. *Detection Estimation and Modulation Theory, Part I*. John Wiley, 1968.
- [77] E. Ronchetti. Robustness aspects of model choice. *Statistica Sinica*, 7(2):327–338, 1997.
- [78] M. Meller, K. Stawiarski, and B. Pikacz. Estymacja azymutu w radarze z obracaną anteną i szeroką wiązką. In *9 Konferencja Urządzenia i Systemy Radioelektroniczne*, 2017.
- [79] M. Meller and K. Stawiarski. On doa estimation for rotating arrays using stochastic maximum likelihood approach. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 68:5219–5229, 2020.
- [80] G. Claeskens and N. L. Hjort. *Lack-of-fit and goodness-of-fit tests*, pages 227–247. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2008.

- [81] J. A. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 7(4):308–313, 01 1965.
- [82] M. Meller and K. Stawiarski. A Comparison of Two Stochastic Maximum Likelihood DoA Estimators – Rotating Array Case. In *2020 IEEE Radar Conference (RadarConf20)*, pages 1–5, 09 2020.
- [83] M. Meller and K. Stawiarski. Capon-like DoA estimator for rotating arrays. *2019 International Radar Conference (RADAR)*, pages 1–6, 2019.
- [84] L. N. Ridenour. *Radar system engineering*, chapter 5. 1947.
- [85] K. Stawiarski and M. Meller. Adaptation of radar software to work with ambiguous distance measurement. In *Radioelectronic Systems Conference 2019*, volume 11442 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, February 2020.
- [86] K. A. Lukin, P. L. Vyplavin, J. Moreira, H. Cioqueta, G. Beltrao, B. Pompeo, and L. Pralon. Use of noise radar in High PRF mode for far range surveillance. In *2015 International Young Scientists Forum on Applied Physics (YSF)*, pages 1–2, 2015.
- [87] A. D. Seifer. Monopulse-radar angle measurement in noise. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 30(3):950–957, 1994.
- [88] R. Hernangómez, A. Santra, and S. Stańczak. Human Activity Classification with Frequency Modulated Continuous Wave Radar Using Deep Convolutional Neural Networks. In *2019 International Radar Conference (RADAR)*, pages 1–6, 2019.
- [89] J. Weiß and A. Santra. Material Classification using 60-GHz Radar and Deep Convolutional Neural Network. In *2019 International Radar Conference (RADAR)*, pages 1–6, 2019.
- [90] M. Hekrdla and A. Heřmánek. Deep Convolutional Neural Network Classifier of Pulse Repetition Interval Modulations. In *2019 International Radar Conference (RADAR)*, pages 1–4, 2019.
- [91] C. Belloni, N. Aouf, J. M. L. Caillec, and T. Merlet. SAR Specific Noise Based Data Augmentation for Deep Learning. In *2019 International Radar Conference (RADAR)*, pages 1–5, 2019.
- [92] X. Guo, C. S. Ng, E. de Jong, and A. B. Smits. Concept of Distributed Radar System for mini-UAV Detection in Dense Urban Environment. In *2019 International Radar Conference (RADAR)*, pages 1–4, 2019.
- [93] R. Stallone, M. Massardo, G. Montanari, D. Buono, D. Madia, and R. Merko. Omega360 an innovative radar for detection and tracking of small drones. In *2019 International Radar Conference (RADAR)*, pages 1–5, 2019.
- [94] X. Wang, H. Liang, and P. Wang. Detection and Tracking of UAVs using Interferometric Radar. In *2019 International Radar Conference (RADAR)*, pages 1–6, 2019.



- [95] F. Yang, K. Qu, M. Hao, Q. Liu, X. Chen, and F. Xu. Practical investigation of a MIMO radar system for small drones detection. In *2019 International Radar Conference (RADAR)*, pages 1–5, 2019.
- [96] Y. Yang, X. S. Wang, Y. Z. Li, and L. F. Shi. RCS Measurements and ISAR Images of Fixed-wing UAV for Fully Polarimetric Radar. In *2019 International Radar Conference (RADAR)*, pages 1–5, 2019.

## Spis rysunków

1.1	Przykładowe radary wykorzystywane w czasie II Wojny Światowej. . . . .	14
1.2	Zasada działania radaru. Ciemniejsze półokręgi - sygnał nadany, jaśniejsze - odbity i wracający do radaru. . . . .	17
1.3	Schemat przedstawiający reprezentację położenia obiektu za pomocą współrzędnych odległość ( $R$ ), azymut ( $\Theta$ ), elewacja ( $\Phi$ ). Radar umieszczony został w punkcie o współrzędnych (0,0,0). . . . .	18
1.4	Schemat 8 elementów odbiorczych, do każdego dociera fala elektromagnetyczna w różnej fazie (którą symbolizuje grubość linii). . . . .	18
1.5	Schemat przetwarzania sygnałów i danych w typowym radarze. . . . .	21
1.6	Przykład działania kompresji impulsu. . . . .	22
1.7	Przykładowe charakterystyki wiązki odbiorczej: bez zastosowania taperu (górny wykres) oraz z zastosowaniem taperu w kształcie cosinusa (dolny wykres). . . . .	24
1.8	Charakterystyki amplitudowe przykładowych filtrów w banku MTD. . . . .	25
1.9	Charakterystyki amplitudowe przykładowych filtrów wykorzystywanych w pracy MTI. . . . .	26
1.10	Surowe zobrazowanie radarowe przed (rys. 1.10a) oraz po wykonaniu przetwarzania MTI (rys. 1.10b) [44]. . . . .	27
1.11	Schemat algorytmu GO-CFAR. . . . .	28
2.1	Schemat 4 elementów odbiorczych z ukazaniem różnicy w fazie odbieranego sygnału. . . . .	33
2.2	Charakterystyka napięciowa wiązek sumacyjnej ( $\Sigma$ ) i różnicowej ( $\Delta$ ) oraz odpowiadający im kształt funkcji poprawki monoimpulsowej (do uformowania wiązki sumacyjnej zastosowano rozkład równomierny). . . . .	36
2.3	Oszacowanie mocy w przypadku klasycznego formowania wiązek dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (2.3a) i stochastycznego (2.3b). . . . .	39
2.4	Oszacowanie mocy w przypadku algorytmu MVDR dla danych wygenerowanych na podstawie modelu stochastycznego. . . . .	41

2.5	Oszacowanie mocy w przypadku algorytmu MVDR dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego. . . . .	42
2.6	Widmo oszacowania mocy w przypadku algorytmu MUSIC dla danych wygenerowanych na podstawie modelu stochastycznego (2.6a) i deterministycznego (2.6b) . . . . .	46
2.7	Sposób podziału anteny na podszyki w celu implementacji algorytmu ESPRIT. . . . .	47
2.8	Przykładowa logarytmiczna funkcja wiarygodności w przypadku deterministycznego algorytmu największej wiarygodności z modelem zakładającym stałą amplitudę dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego z stałą amplitudą (2.8a) i modelu stochastycznego (2.8b). . . . .	54
2.9	Logarytmiczna funkcja wiarygodności w przypadku deterministycznego algorytmu największej wiarygodności z modelem zakładającym zmienną amplitudę dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (2.9a) i stochastycznego (2.9b). . . . .	56
2.10	Przykładowa logarytmiczna funkcja wiarygodności w przypadku stochastycznego algorytmu największej wiarygodności dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (2.8a) i modelu stochastycznego (2.8b). . . . .	58
3.1	Radar Arthur WRL z anteną wyraźnie dłuższą w osi pionowej. . . . .	62
3.2	Schemat powstawania zjawiska wielodrogowości oparty o model płaskiej Ziemi. . . . .	64
3.3	Zachód Słońca nad morzem z dobrze widocznym odbiciem rozproszonym. . . . .	65
3.4	Porównanie ilości energii zarejestrowanej na poszczególnych kątach elewacji przy założeniu odbicia rozproszonego (rys. 3.4a) i lustrzanego (rys. 3.4b) . . . . .	66
3.5	Wyniki estymacji kąta elewacji dla 3 estymatorów: monoimpulsowego (linia ciągła), stochastycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 1 wymiarze (symbol kwadratu), oraz stochastycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 2 wymiarach (symbol "+"). Linia przerywana pokazuje wartość prawdziwą. . . . .	68
3.6	Wyniki estymacji kąta elewacji dla 3 estymatorów: stochastycznego największej wiarygodności z założeniem 1 celu (linia ciągła), stochastycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 1 wymiarze (symbol kwadratu), oraz stochastycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 2 wymiarach (symbol "+"). Linia przerywana pokazuje wartość prawdziwą. Wielodrogowość występująca w 50% prób. . . . .	70
3.7	Profil współczynnika odbicia rozproszonego echa odbitego od ziemi uzyskany dla 3 odległości obiektu od radaru: linia ciągła 2.5 km, linia kropka-kreska 5 km, linia kropkowana 20 km. . . . .	72
3.8	Wyniki estymacji kąta elewacji dla 3 estymatorów: stochastycznego największej wiarygodności z założeniem 1 źródła (linia ciągła), stochastycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 1 wymiarze (symbol kwadratu), oraz stochastycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 2 wymiarach (symbol "+"). Linia przerywana pokazuje wartość prawdziwą. Wielodrogowość w postaci rozproszonego odbicia od doskonale szorstkiej ziemi. . . . .	73

3.9	Wyniki estymacji kąta elewacji dla 3 estymatorów: monoimpulsowego (linia ciągła), deterministycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 1 wymiarze (symbol kwadratu), oraz deterministycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 2 wymiarach (symbol "+"). Linia przerywana pokazuje wartość prawdziwą. Sygnały użyte do estymacji w postaci wiązek. . . . .	75
3.10	Wyniki estymacji kąta elewacji dla 3 estymatorów: monoimpulsowego (linia ciągła), stochastycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 1 wymiarze (symbol kwadratu), oraz stochastycznego największej wiarygodności z minimalizacją w 2 wymiarach (symbol "+"). Linia przerywana pokazuje wartość prawdziwą. Sygnały użyte do estymacji w postaci wiązek. . . . .	75
3.11	Wyniki estymacji elewacji sygnału przy pomocy estymatora monoimpulsowego (linia ciągła). Wartość prawdziwa oznaczona linią przerywaną. . . . .	78
3.12	Wyniki estymacji kąta elewacji przy pomocy deterministycznego estymatora największej wiarygodności z założeniem lustrzanego odbicia (linia ciągła). Wartość prawdziwa oznaczona linią przerywaną. . . . .	78
3.13	Wyniki estymacji kąta elewacji przy pomocy deterministycznego estymatora największej wiarygodności z założeniem obecności 2 niezależnych źródeł (linia ciągła). Wartość prawdziwa oznaczona linią przerywaną. . . . .	79
3.14	Wartości estymat kątów dla 4 przebadanych estymatorów. . . . .	92
3.15	Histogramy błędów estymacji kąta elewacji uzyskanych przez 4 przebadane estymatory. . . . .	92
3.16	Przykładowe wartości estymat kątów dla 5 przebadanych estymatorów przy rozproszonym odbiciu od ziemi dla 2000 eksperymentów Monte Carlo. . . . .	95
3.17	Histogramy błędów estymacji uzyskanych przez 5 przebadanych estymatorów przy rozproszonym odbiciu od ziemi. . . . .	96
3.18	Przykładowe wyniki estymacji przy użyciu klasycznych estymatorów MLE ( $k = 1$ - rys. 3.18a i $k = 2$ - rys. 3.18b) oraz po zastosowaniu doboru modelu na podstawie kryterium AIC z podejściem rywalizującym (rys. 3.18c) i współpracującym BIC (rys. 3.18d). Sygnały zawierały rozproszone odbicie od ziemi. . . . .	104
3.19	Przykładowe wyniki estymacji przy użyciu klasycznych estymatorów MLE ( $k = 1$ - rys. 3.19a i $k = 2$ - rys. 3.19b) oraz po zastosowaniu doboru modelu na podstawie kryterium AIC (podejście rywalizujące (rys. 3.19c) i współpracujące (rys. 3.19d). Dane zarejestrowane przy pomocy radaru. . . . .	106
3.20	Przykładowe wyniki estymacji przy użyciu uodpornionych estymatorów MLE ( $k = 1$ - rys. 3.20a i $k = 2$ - rys. 3.20b) oraz po zastosowaniu doboru modelu na podstawie kryterium AIC (podejście rywalizujące rys. 3.20c i współpracujące - rys. 3.20d) i AICR (podejście rywalizujące - rys. 3.20d i współpracujące - rys. 3.20f). Dane rzeczywiste. . . . .	108

4.1	Wariancja i obciążenie badanych estymatorów azymutu przy różnej prędkości obrotowej anteny. Linia ciągła - średnie ograniczenie Craméra-Rao, linia przerywana - stochastyczny MLE zakładający obrót anteny [równ. (4.6)], linia kropka-kreska - stochastyczny MLE zakładający brak obrotu anteny [równ. (4.5)], linia kropkowana - estymator monoimpulsowy. . . . .	117
4.2	Wyniki estymacji azymutu dla danych rzeczywistych. . . . .	119
4.3	Zależność wariancji oraz obciążenia estymowanego azymutu echa od liczby sondowań w segmencie przy obracającej się antenie w zależności od liczby obserwacji. Linia ciągła - średnie ograniczenie Craméra-Rao, linia przerywana - stochastyczny MLE zakładający obrót anteny [równ. (4.6)], linia kropka-kreska - iteracyjny wariant MLE [równ. (4.8) do (4.13)]. . . . .	122
4.4	Zależność wariancji i obciążenia pierwszego z estymowanych kątów odbioru echa ( $\theta_1$ ) od separacji kątowej między dwoma obiektami ( $\theta_2 - \theta_1$ ) przy dostępnej wyłącznie wiązce sumacyjnej. Linia ciągła - średnie ograniczenie Craméra-Rao, linia kropka-kreska - iteracyjny wariant MLE [równ. (4.8) do (4.13)] . . . . .	123
4.5	Zależność wariancji i obciążenia pierwszego z estymowanych kątów odbioru echa ( $\theta_1$ ) od separacji kątowej między dwoma obiektami ( $\theta_2 - \theta_1$ ) przy dostępnej wiązce sumacyjnej i różnicowej. Linia ciągła - średnie ograniczenie Craméra-Rao, linia kropka-kreska - iteracyjny wariant MLE [równ. (4.8) do (4.13)] . . . . .	124
4.6	Prawdopodobieństwo fałszywego alarmu ( $P_{FA}$ , rys. 4.6a) oraz prawdopodobieństwo detekcji ( $P_D$ , rys. 4.6b) w funkcji parametru $T$ . . . . .	126
4.7	Prawdopodobieństwo fałszywego alarmu ( $P_{FA}$ , rys. 4.7a) oraz prawdopodobieństwo detekcji ( $P_D$ , rys. 4.7b) w funkcji parametru $T$ . . . . .	127
4.8	Charakterystyka amplitudowa wiązki sumacyjnej ( $ \Sigma(\theta) $ ) i różnicowej ( $ \Delta(\theta) $ ) wykorzystywanych w testach. . . . .	132
4.9	Zestawienie obciążenia badanych estymatorów dla różnych wartości wsp. korelacji $\rho$ i separacji echa. Kolejne wiersze wykresów odpowiadają parametrowi $\rho = [0 \ 0.25e^{j\pi/2} \ 0.25e^{j\pi} \ 0.5]$ . Kolumna 4.9a odpowiada modelowi zawężonemu, 4.9b rozszerzonemu. Linią ciągłą oznaczono wartości teoretyczne, symbolem "x" - uzyskane na podstawie symulacji Monte-Carlo. . . . .	134
4.10	Zestawienie wariancji badanych estymatorów dla różnych wartości wsp. korelacji $\rho$ i separacji echa. Kolejne wiersze wykresów odpowiadają parametrowi $\rho = [0 \ 0.25e^{j\pi/2} \ 0.25e^{j\pi} \ 0.5]$ . Kolumna 4.10a odpowiada modelowi zawężonemu, 4.10b rozszerzonemu. Linią ciągłą oznaczono wartości teoretyczne, symbolem "x" - uzyskane na podstawie symulacji Monte-Carlo. . . . .	135

4.11	Zestawienie błędów średniokwadratowych badanych estymatorów dla różnych wartości wsp. korelacji $\rho$ i separacji echa. Kolejne wiersze wykresów odpowiadają parametrowi $\rho = [0 \ 0.25e^{j\pi/2} \ 0.25e^{j\pi} \ 0.5]$ . Kolumna 4.11a odpowiada modelowi zawężonemu, 4.11b rozszerzonemu. Linia ciągłą oznaczono wartości teoretyczne, symbolem "x" - uzyskane na podstawie symulacji Monte-Carlo. . . . .	136
4.12	Porównanie wartości oszacowania mocy dla zaproponowanego estymatora MVDR (linia ciągła) oraz klasycznego formowania wiązek (linia przerywana). . . . .	141
4.13	Porównanie wariancji i obciążenia estymowanego kąta przy obracającej się antenie dla klasycznego formowania wiązek (linia przerywana), proponowanego estymatora MVDR (linia kropka-kreska) oraz średniego ograniczenia Craméra-Rao (linia ciągła) w zależności od SNR. . . . .	142
4.14	Porównanie wariancji i obciążenia estymowanego kąta przy obracającej się antenie dla klasycznego formowania wiązek (linia przerywana), proponowanego estymatora MVDR (linia kropka-kreska) oraz średniego ograniczenia Craméra-Rao (linia ciągła) w zależności od separacji kątowej między źródłami sygnału. . . . .	143
5.1	Przykład deformacji wiązki przy jednoczesnym znacznym odchyleniu w płaszczyźnie azymutu i elewacji [33]. . . . .	150
7.1	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby elementów antenowych, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.1a) i stochastycznego (7.1b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	167
7.2	Porównanie wariancji estymowanego kąta odbioru sygnału (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby obserwacji, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.2a) i stochastycznego (7.2b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	168
7.3	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od $SNR$ , dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.3a) i stochastycznego (7.3b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	169
7.4	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby elementów antenowych, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.4a) i stochastycznego (7.4b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	170

7.5	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby obserwacji, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.5a) i stochastycznego (7.5b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	171
7.6	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od SNR, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.6a) i stochastycznego (7.6b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	172
7.7	Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.7a) i stochastycznego (7.7b) przy $M = 32$ elementach odbiorczych i $N = 10$ obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	173
7.8	Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.8a) i stochastycznego (7.8b) przy $M = 16$ elementach odbiorczych i $N = 32$ obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	174
7.9	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby elementów antenowych, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.9a) i stochastycznego (7.9b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	175
7.10	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby obserwacji, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.10a) i stochastycznego (7.10b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	176
7.11	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od SNR, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.11a) i stochastycznego (7.11b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	177

7.12	Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.12a) i stochastycznego (7.12b) przy $M = 32$ elementach odbiorczych i $N = 10$ obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	179
7.13	Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.13a) i stochastycznego (7.13b) przy $M = 16$ elementach odbiorczych i $N = 32$ obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	180
7.14	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby elementów antenowych, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.14a) i stochastycznego (7.14b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	181
7.15	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby sondowań, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.15a) i stochastycznego (7.14b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	182
7.16	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od SNR, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.16a) i stochastycznego (7.16b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	183
7.17	Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.17a) i stochastycznego (7.17b) przy $M = 32$ elementach odbiorczych i $N = 10$ obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	185
7.18	Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.18a) i stochastycznego (7.18b) przy $M = 16$ elementach odbiorczych i $N = 32$ obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	186



7.19	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby elementów antenowych, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.19a) i stochastycznego (7.19b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	187
7.20	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby obserwacji, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.20a) i stochastycznego (7.20b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	188
7.21	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od SNR, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.21a) i stochastycznego (7.21b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	189
7.22	Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.22a) i stochastycznego (7.22b) przy $M = 32$ elementach odbiorczych i $N = 10$ obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	191
7.23	Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.23a) i stochastycznego (7.23b) przy $M = 16$ elementach odbiorczych i $N = 32$ obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	191
7.24	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby elementów antenowych, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.24a) i stochastycznego (7.24b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	192
7.25	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby obserwacji, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.25a) i stochastycznego (7.25b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	193



7.26	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od SNR, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.26a) i stochastycznego (7.26b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	194
7.27	Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.27a) i stochastycznego (7.27b) przy $M = 32$ elementach odbiorczych i $N = 10$ obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	196
7.28	Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.28a) i stochastycznego (7.28b) przy $M = 16$ elementach odbiorczych i $N = 32$ obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	196
7.29	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby elementów antenowych, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.29a) i stochastycznego (7.29b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	197
7.30	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby obserwacji, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.30a) i stochastycznego (7.30b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	198
7.31	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od SNR, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.31a) i stochastycznego (7.31b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	199
7.32	Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.32a) i stochastycznego (7.32b) przy $M = 32$ elementach odbiorczych i $N = 10$ obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	200

7.33	Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.33a) i stochastycznego (7.33b) przy $M = 16$ elementach odbiorczych i $N = 32$ obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	201
7.34	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby elementów antenowych, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.34a) i stochastycznego (7.34b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	202
7.35	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od liczby obserwacji, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.35a) i stochastycznego (7.35b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	203
7.36	Porównanie wariancji estymowanego kąta (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od SNR, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.36a) i stochastycznego (7.36b) wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	204
7.37	Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.37a) i stochastycznego (7.37b) przy $M = 32$ elementach odbiorczych i $N = 10$ obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	205
7.38	Porównanie wariancji estymowanego kąta pierwszego z celów (linia ciągła, symbole kwadratu) z ograniczeniem Craméra-Rao (linia przerywana, symbole "+") w zależności od separacji kątowej między celami, dla danych wygenerowanych na podstawie modelu deterministycznego (7.38a) i stochastycznego (7.38b) przy $M = 16$ elementach odbiorczych i $N = 32$ obserwacjach wraz z wartością obciążenia (poziome kreski oznaczają górną granicę 95% przedziału ufności). . . . .	206



# Spis tablic

3.1	Wartości obciążenia i błędu średniokwadratowego uzyskane dla 3 estymatorów przy obecności wielodrogowości w każdej z prób. . . . .	69
3.2	Wartości obciążenia i błędu średniokwadratowego uzyskane dla 4 estymatorów przy wielodrogowości występującej w 50% realizacji. . . . .	71
3.3	Wartości obciążenia i błędu średniokwadratowego uzyskane dla 3 estymatorów przy rozproszonym modelu odbić opisanym w sekcji 3.2.2. . . . .	72
3.4	Wartości obciążenia i błędu średniokwadratowego uzyskane dla 5 estymatorów przy obecności wielodrogowości w każdym z segmentów, sygnały użyte do estymacji w postaci wiązek. . . . .	76
3.5	Wartości obciążenia i błędu średniokwadratowego uzyskane dla 5 estymatorów na podstawie danych zarejestrowanych przy pomocy radaru. . . . .	77
3.6	Wartości obciążenia, błędu średniokwadratowego i odsetek błędów "znaczących" dla różnych wartości parametrów $\epsilon_d$ i $\epsilon_m$ . . . . .	88
3.7	Wartości obciążenia, błędów średniokwadratowych i odsetek błędów "znaczących" dla różnych wartości parametrów $\epsilon_m$ i $\epsilon_d = 0$ . . . . .	89
3.8	Wartości obciążenia, błędów średniokwadratowych i odsetek błędów "znaczących" dla parametrów $\epsilon_m = 0.25$ , $\epsilon_d = 0.025$ i różnej liczby iteracji. . . . .	90
3.9	Wartości obciążenia, błędów średniokwadratowych i odsetek błędów odstających dla 5 przebadanych estymatorów. . . . .	91
3.10	Wartości obciążenia i wariancji dla 5 przebadanych estymatorów przy rozproszonych odbiciach od ziemi. . . . .	94
3.11	Wartości błędów średniokwadratowych przy zastosowaniu doboru modelu przy wykorzystaniu różnych statystyk decyzyjnych. Dane symulacyjne wygenerowane w postaci sygnałów antenowych. . . . .	101
3.12	Wartości błędów średniokwadratowych przy zastosowaniu doboru modelu przy wykorzystaniu różnych statystyk decyzyjnych. Dane symulacyjne wygenerowane w postaci wiązek. . . . .	102
3.13	Wartości błędów średniokwadratowych i obciążenie przy estymacji opartej o sygnały z rozproszonym odbiciem od ziemi, przy zastosowaniu doboru modelu na podstawie kryteriów informacyjnych (klasyczne podejście największej wiarygodności). . . . .	103

3.14	Wartości błędów średniokwadratowych, obciążenia i odsetek błędów odstających przy estymacji opartej o dane rzeczywiste dla zastosowaniu doboru modelu na podstawie kryteriów informacyjnych (klasyczne podejście największej wiarygodności). . . . .	105
3.15	Wartości błędów średniokwadratowych, obciążenie i odsetek błędów odstających przy estymacji opartej o dane rzeczywiste przy zastosowaniu doboru modelu na podstawie kryteriów informacyjnych (uodpornione warianty estymatorów największej wiarygodności).107	
4.1	Wartości obciążenia i błędu średniokwadratowego dla 2 sposobów estymacji azymutu przy obracającej się antenie. Dane rzeczywiste. . . . .	119
5.1	Uzyskane czasy obliczeń pojedynczej estymaty kąta odbioru sygnału dla estymacji elewacji.152	