Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej Nr 19

XIII Seminarium
ZASTOSOWANIE KOMPUTERÓW W NAUCE I TECHNICE 2003
Oddział Gdański PTETiS

ROZSZERZONY ALGORYTM ELIMINACJI GAUSSA DLA KOMPUTEROWEJ ANALIZY UKŁADÓW

Andrzej SZATKOWSKI, Jacek CICHOSZ

Politechnika Gdańska, ul. G. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk
tel.: (058) 347 2140, fax: (058) 341 6132 e-mail: jcichosz@pg.gda.pl

Przedstawiono opis algorytmu eliminacji Gaussa sformułowanego dla układów równań liniowych o dowolnej liczbie równań i dowolnej liczbie zmiennych niezależnych - niewiadomych. Podano warunek konieczny i dostateczny na istnienie rozwiązań dla danego układu równań - na niesprzeczność układu równań. Warunek ten sformułowano w postaci odpowiedniej dla potrzeb wykonywanych analiz obliczeniowych oraz z uwzględnieniem organizacji obliczeń realizowanych z wykorzystaniem komputera. Programy komputerowej analizy liniowych sieci elektronicznych, otrzymywanych jako modele małosygnałowe w wyniku linearyzacji zastosowanej w odniesieniu do pełnych modeli nieliniowych dynamicznych układów scalonych dużej skali integracji w otoczeniu zadanych punktów pracy, wymagają dla realizacji zadań obliczeniowych rozszerzonego algorytmu rozwiązywania układów algebraicznych równań liniowych.

1. WSTĘP

W zadaniach obliczeniowych związanych z modelowaniem systemów fizycznych, jak też w zadaniach symulacji komputerowej układów będących przedmiotem zainteresowania różnych dziedzin techniki występują układy równań liniowych złożone z bardzo dużej liczby równań i zawierające bardzo dużą liczbę zmiennych niezależnych - niewiadomych. Przykładem może tu być zadanie analizy liniowego układu elektronicznego będącego modelem małosygnałowym układu scalonego. Analiza liniowego układu dynamicznego będącego modelem małosygnałowym otrzymanym w wyniku linearyzacji pełnego modelu układu w otoczeniu zadanego punktu pracy, przeprowadzana z zastosowaniem odpowiedniej transformaty Laplace'a lub Fouriera, wymaga rozwiązania często kilkuset równań liniowych z tego samego rzędu liczbą niewiadomych [1]. Powyższa uwaga odnosi się też na przykład do analizy liniowych układów dynamicznych przedziałami stałych w czasie, przeprowadzanej z zastosowaniem transformaty Z.

Symulacja komputerowa modeli liniowych elektronicznych układów scalonych jest jedną z tych dziedzin, które stymulują rozwój algorytmów rozwiązywania bardzo dużych układów liniowych równań algebraicznych.

W artykule przedstawiono pełne sformułowanie algorytmu eliminacji Gaussa dla rozwiązywania układów algebraicznych równań liniowych zawierających dowolną liczbę równań i dowolną liczbę zmiennych niezależnych - niewiadomych. Ujęcie w opisie algorytmu przypadku ogólnego, gdy liczba równań i liczba zmiennych niezależnych w układzie równań nie koniecznie są sobie równe jest niezbędne w związku potrzebami zastosowań.

Układy równań liniowych, gdzie liczba równań i liczba zmiennych niezależnych nie są koniecznie sobie równe, występują na przykład w opisie układów elektronicznych z elementami osobliwymi i ze źródłami nieoznaczonymi. Formułowane układy równań mogą posiadać więcej niż jedno rozwiązanie, jak też mogą być sprzecznymi układami równań. Drugi z wymienionych przypadków może mieć miejsce na przykład w związku z analizą małosygnałową nieliniowych osobliwych układów dynamicznych, wykonywaną w otoczeniu punktów osobliwych.

Układy równań o więcej niż jednym rozwiązaniu mogą być też otrzymane w opisie matematycznym utworzonego modelu układu rzeczywistego, gdy niektóre z równań Kirchhoffa i niektóre z równań elementów układu elektronicznego są liniowo zależne.

2. ROZSZERZONY ALGORYTM GAUSSA

Rozważane jest równanie

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \ , \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{A}$ jest daną macierzą $m \times n$- wymiarową o elementach będących liczbami rzeczywistymi,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} , \tag{2}$$

$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T \in \mathbf{R}^m$ jest wektorem wyrazów wolnych, natomiast $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ jest wektorem niewiadomych należącym do przestrzeni $\mathbf{R}^n$. W zapisie we współrzędnych równanie (1) przyjmuje postać układu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

m równań z *n* niewiadomymi.

W rozważaniach wykorzystuje się następującą definicję macierzy o postaci wierszowej schodkowej [1].

Definicja. (Wierszowa macierz schodkowa).

Macierz $\boldsymbol{G} = [g_{ij}]$, $i = 1,2,\cdots,m$, $j = 1,2,\cdots,n$, ma postać wierszowej macierzy schodkowej, jeżeli ***G*** jest macierzą zerową (**G = 0**) lub $\boldsymbol{G} \neq \boldsymbol{0}$ i ma miejsce co następuje.

1. Wiersze niezerowe macierzy ***G*** są ponumerowane kolejnymi liczbami $1,2,\cdots,c$, gdzie $c \leq m$.
2. Numery j_γ, gdzie $\gamma = 1,2,\cdots,c$, tych kolumn macierzy ***G***, w których występują pierwsze niezerowe elementy w wierszach o odpowiednich numerach $\zeta = 1,2,\cdots,c$, gdzie $\zeta = \gamma$, macierzy ***G*** są uporządkowane rosnąco. To znaczy, $j_1 < j_2 < \cdots < j_c$. €

Macierz wierszowa schodkowa ma zatem następującą postać:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 \; g_{1j_1} \; g_{1j_1+1} \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \; g_{1n} \\ 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \; g_{2j_2} \; g_{2j_2+1} \cdots \cdots \cdots \cdots \; g_{2n} \\ \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \\ 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \; g_{c,j_C} \; g_{c,j_C+1} \cdots g_{c,n} \\ 0 \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots 0 \\ 0 \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots 0 \\ 0 \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

W macierzy ***G*** elementy poprzedzające element g_{ζ, j_ζ} w danym wierszu o numerze ζ, gdzie $\zeta \in \{1,2,\cdots,c\}$, są zerami. Każdy wiersz macierzy ***G*** o numerze większym niż *c* jest wierszem zawierającym same zera.

2.1. Opis algorytmu metody eliminacji Gaussa dla wyznaczania zbioru rozwiązań układu równań liniowych

Etap eliminacji w przód rozszerzonego algorytmu Gaussa przy pełnym wyborze elementu podstawowego w każdym kroku eliminacji.

W etapie eliminacji w przód dany układ (3) m równań liniowych z n niewiadomymi zostaje przekształcony w równoważny, to znaczy posiadający ten sam zbiór rozwiązań układ równań o macierzy współczynników mającej postać macierzy wierszowej schodkowej. W każdym kolejnym kroku etapu dokonuje się pełnego wyboru elementu podstawowego. Działania elementarne na wierszach i kolumnach macierzy współczynników i na elementach wektora wyrazów wolnych są wykonywane w kolejnych krokach etapu eliminacji w przód tak jak w algorytmie Gaussa wyznaczania rozwiązań układu równań z liczbą niewiadomych równą liczbie równań [1÷4]. Liczba kroków etapu eliminacji w przód jest równa rzędowi macierzy $\boldsymbol{A}$ współczynników układu równań.

Niech r = rząd $\boldsymbol{A}$. Układ równań, który jest równoważny ze względu na posiadanie takiego samego zbioru rozwiązań danemu układowi (3) równań, otrzymany w wyniku realizacji ciągu działań elementarnych rozszerzonego algorytmu eliminacji Gaussa przy niezbędnym zastosowaniu procedury pełnego wyboru elementu podstawowego w każdym kroku etapu eliminacji w przód przyjmuje następującą postać:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1r} & h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1,n-r} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2r} & h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2,n-r} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3r} & h_{31} & h_{32} & \cdots & h_{3,n-r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{rr} & h_{r1} & h_{r2} & \cdots & h_{r,n-r} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_r \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_r \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{m-r} \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Wektor $(d_1, d_2, \cdots, d_r, f_1, f_2, \cdots, f_{m-r})^T$ jest przekształconym wektorem wyrazów wolnych. Natomiast współrzędne wektora $(y_1, y_2, \cdots, y_r, z_1, z_2, \cdots, z_{n-r})^T$ niewiadomych w przekształconym układzie (5) równań są permutacją współrzędnych wektora $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ niewiadomych zadanego układu (3) równań wynikającą z przestawień kolumn macierzy $\boldsymbol{A}$ wykonywanych w trakcie realizacji wyboru elementu podstawowego w kolejnych krokach etapu eliminacji w przód.

Macierz współczynników otrzymanego układu (5) równań ma postać macierzy wierszowej schodkowej. Po zdefiniowaniu macierzy

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1r} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2r} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{rr} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1,\,n-r} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2,\,n-r} \\ h_{31} & h_{32} & \cdots & h_{3,\,n-r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{r1} & h_{r2} & \cdots & h_{r,\,n-r} \end{bmatrix} \tag{6}$$

układ (5) równań można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} & \vdots & \boldsymbol{H} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ & \boldsymbol{0} & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \cdots \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \cdots \\ \boldsymbol{f} \end{bmatrix} , \tag{7}$$

gdzie $\mathbf{0}$ jest tu $(m-r)\times n$ - wymiarową macierzą zerową. Jedynymi kolumnami macierzy $\boldsymbol{H}$ zawierającymi same elementy zerowe są te, które były częścią kolumn macierzy $\boldsymbol{A}$ zawierających same elementy zerowe.

Dla przypadku, gdy $n = r$ należy we wszystkich podanych wzorach pominąć w ich zapisie macierz $\boldsymbol{H}$, wektor $\boldsymbol{z}$ oraz symbol $\mathbf{R}^{n-r}$. Rząd macierzy pustej należy przyjąć jako równy zero.

Niech $\square^{*}$ oznacza zbiór rozwiązań danego równania (1) (danego układu (3) równań). Zbiór $\square^{*}$ rozwiązań jest zbiorem niepustym (to znaczy, układ (3) równań jest niesprzecznym układem równań) wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$. A zatem,

$$\square^{*} = \varnothing \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \boldsymbol{f} \neq \mathbf{0} \tag{8}$$

i

$$\square^{*} \neq \varnothing \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \boldsymbol{f} = \mathbf{0} , \tag{9}$$

gdzie $\boldsymbol{f}$ jest częścią wektora wyrazów wolnych układu (5) równań otrzymanego w wyniku przekształcenia danego układu (3) równań liniowych w etapie eliminacji w przód rozszerzonego algorytmu Gaussa zastosowanego do wyznaczania zbioru rozwiązań układu (3) równań, przy stosowaniu pełnego wyboru elementów podstawowych.

Etap podstawiania wstecz rozszerzonego algorytmu eliminacji Gaussa.

Dla niesprzecznego układu (3) równań liniowych otrzymuje się $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$.

Rozważa się przypadek, gdy otrzymano $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$. Układ (5) równań po zapisaniu w postaci (7) jest w tym przypadku równoważny równaniu

$$\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{z}^* + \boldsymbol{d} \quad , \tag{10}$$

gdzie $\boldsymbol{z}^*$ jest wektorem w $\mathbf{R}^{n-r}$ przyjmującym ustaloną dowolnie wartość.

Dla ustalonego wektora $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^*$ stanowiącego część całego wektora $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{z}^*)$ rozwiązania zadanego układu (3) równań wyznaczana jest część $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{z}^*)$ wektora $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{z}^*)$ rozwiązania. Współrzędne wektora $\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{z}^*)$ oblicza się rozwiązując równanie po równaniu układ (10) równań liniowych, z trójkątną górną macierzą współczynników, rozpoczynając od ostatniego równania. Obliczenia przeprowadza się w taki sam sposób jak w etapie podstawiania wstecz algorytmu eliminacji Gaussa sformułowanego dla układów równań liniowych o liczbie równań w rozwiązywanym układzie równej liczbie niewiadomych [1÷4].

Zbiór wszystkich rozwiązań równania (10) jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbf{R}^r$ o wymiarze równym rzędowi macierzy $\boldsymbol{H}$.

Zbiór wszystkich rozwiązań układu (5) równań (równania (7)), oznaczony symbolem $\tilde{\square}^*$, jest dany dla $\square^* \neq \varnothing$ w następującej postaci

$$\tilde{\square}^* = \{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^{n-r} : \ \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{U}^{-1} \cdot \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{U}^{-1} \cdot \boldsymbol{d} \ \} \ . \tag{11}$$

Współrzędne wektorów rozwiązań danego układu (3) równań są odpowiednią permutacją współrzędnych odpowiednich wektorów rozwiązań układu równań (5) (równania (7)).

W przypadku niesprzecznego układu (3) równań liniowych, zbiór $\square^*$ jego rozwiązań jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbf{R}^n$ o wymiarze $\dim \square^* = n - r$.

Dla wyznaczenia jednego rozwiązania danego (niesprzecznego) układu m równań liniowych z n niewiadomymi metodą eliminacji Gaussa należy wykonać

$$m \cdot n \cdot r - \frac{r^2 \cdot (m+n)}{2} + \frac{r^3}{3} - r^2 + r \cdot \left(\frac{3m+n}{2} \right) - \frac{1}{3} r \tag{12}$$

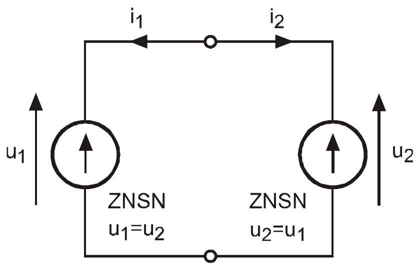
działań mnożenia i dzielenia i

$$m \cdot n \cdot r - \frac{r^2 \cdot (m+n)}{2} + \frac{r^3}{3} - \frac{r^2}{2} + r \cdot \left(\frac{m+n-4}{2} \right) + \frac{1}{6} r \, . \tag{13}$$

działań dodawania i odejmowania, gdzie r = rząd $\boldsymbol{A}$.

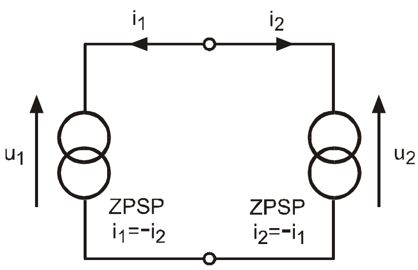
3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Na rys. 1 i rys. 2 przedstawiono dwa elementarne układy elektryczne, dla których opisujące je układy równań są częściowo tożsamościowe (trzy spośród czterech równań opisujących stan układu są identyczne).



Rys. 1. Układ napięciowych źródeł sterowanych

$$\left.\begin{matrix} u_1 - u_2 = 0 \\ u_1 - u_2 = 0 \end{matrix}\right\} \text{równania elementów} \qquad \left.\begin{matrix} i_1 + i_2 = 0 \\ u_1 - u_2 = 0 \end{matrix}\right\} \text{równania Kirchoffa} \tag{14}$$



Rys. 2. Układ prądowych źródeł sterowanych

$$\left.\begin{matrix} i_1 + i_2 = 0 \\ i_1 + i_2 = 0 \end{matrix}\right\} \text{równania elementów} \qquad \left.\begin{matrix} i_1 + i_2 = 0 \\ u_1 - u_2 = 0 \end{matrix}\right\} \text{równania Kirchoffa} \tag{15}$$

Układ równań (14) opisujący układ z rys.1 przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \, . \tag{16}$$

Po przestawieniu miejscami kolumn drugiej i trzeciej oraz odjęciu wiersza drugiego od trzeciego i czwartego otrzymuje się układ równań (16) przekształcony do postaci:

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} i_1 \\ u_1 \\ \hdashline i_2 \\ u_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array}\right] . \qquad (17)$$

Zbiór rozwiązań układu (17) jest dwuwymiarową podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbf{R}^4$ zmiennych układowych daną np. w postaci przedstawienia parametrycznego:

$$i_1 = -i_2,\ u_1 = u_2,\ i_2 \in \mathbf{R},\ u_2 \in \mathbf{R},\ \boldsymbol{z} = (i_2, u_2) \in \mathbf{R}^2 \ . \qquad (18)$$

4. PODSUMOWANIE

Układ równań liniowych stanowiący podstawę analizy małosygnałowej układów elektronicznych może mieć tyle samo równań co niewiadomych, liczbę równań mniejszą od liczby niewiadomych, jak i też może on zawierać więcej równań niż wynosi liczba niewiadomych. Otrzymuje się w tych przypadkach dokładnie jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele rozwiązań wypełniających pewną podprzestrzeń afiniczną przestrzeni zmiennych układowych, jak też nietrudno otrzymać sprzeczne układy równań czy też układy zawierające równania od siebie zależne.

Przedstawiono opis algorytmu eliminacji Gaussa wyznaczania zbioru rozwiązań danego układu algebraicznych równań liniowych, przy dowolnej liczbie równań i niewiadomych. Podano wzór wyrażający rozwiązania układu równań, którego elementy dostępne są na drodze obliczeń, przy optymalnej liczbie niezbędnych do wykonania działań.

5. BIBLIOGRAFIA

1. Chua L. O., Lin P. M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych. Warszawa: WNT 1981.
2. Dryja M., Jankowscy J. i M.: Przegląd metod i algorytmów numerycznych. Warszawa: WNT 1988.
3. Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J.: Metody numeryczne. Warszawa: WNT 1998.
4. Szatkowski A., Cichosz J.: Metody numeryczne. Podstawy teoretyczne. Gdańsk: Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej 2002.

EXTENDED GAUSS ALGORITHM FOR COMPUTER ANALYSYS

The modified Gauss algorithm for solving systems of linear algebraic equations has been presented. The necessary and sufficient conditions for the existence of the solutions of the systems of linear algebraic equations have been announced. The presented method may be applied to the analyses of linear or linearized models of electronic integrated circuits.